Kapitel 3

Dynamik von Massenpunkten

Nach dem 1. Newtonschen Axiom bewegen sich *freie Körper in einem Inertialsystem* geradlinig und gleichförmig. Sind die Wechselwirkungen mit der Umgebung (beabsichtigt oder unbeabsichtigt) ungenügend abgeschirmt, dann sind Körper äußeren Einflüssen ausgesetzt. In der makroskopischen Mechanik sind dafür die gravitative und die elektromagnetische Kraft verantwortlich. Es wirken *Kräfte* auf die Körper und diese führen zu Abweichungen ihrer Bahn von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung. Die beschleunigten Bewegungen sind bestimmt durch die Kräfte und die Fähigkeit der Materie des Teilchens, auf diese Einflüsse zu reagieren, seine *Trägheit*. Nach der Erfahrung gibt es ein für jedes Materieteilchen universelles Maß an Trägheit, unabhängig von den jeweiligen Einflüssen. Das eigentliche Bewegungsgesetz gibt an, wie sich der Körper in Inertialsystemen unter dem Einfluss von Kräften bewegt:

2. Newtonsches Axiom (lex secunda) *Die Änderung der Bewegungsgröße ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht in Richtung der Kraft.*

Für *Bewegungsgröße* benutzen wir heute das Wort *Impuls*. Der Impuls $\mathfrak{p}$ ist definiert als Produkt von träger Masse m und Geschwindigkeit,

$$\mathfrak{p} = m\mathfrak{v}, \qquad \mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}}. \tag{3.1}$$

Das 2. Newtonsche Gesetz ist demnach gleichwertig mit

$$\dot{\mathfrak{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}) = \mathfrak{F}. \tag{3.2}$$

In den meisten Fällen ist die Masse konstant[1], und dann gilt

$$m\ddot{\mathfrak{r}} = m\mathfrak{a} = \mathfrak{F} \tag{3.3}$$

gilt. In diesem Kapitel werden wir uns ausführlich mit der Bedeutung und den Anwendungen der Gleichung (3.2) beschäftigen. Sie beinhaltet die Begriffe träge Masse und Kraft, die zuerst als messbare Größen erklärt werden müssen.

[1] Für eine Treibstoff verlierende Rakete ist die Masse zeitabhängig.

3.1 Die träge Masse und Kräfte

Wir setzen voraus, dass Länge und Zeit bereits definiert sind. Dann ist die Beschleunigung $\mathfrak{a} = \ddot{\mathfrak{r}}$ eine messbare Größe. Wir betrachten eine bestimmte, in ihrer Größe unbekannte Kraft (zum Beispiel eine Federkraft) und zwei Körper. Wir messen die Beschleunigungen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ welche durch die unbekannte Kraft hervorgerufen werden. Nach (3.3) ist das Verhältnis m_1/m_2 gleich dem Verhältnis $\|\mathfrak{a}_2\|/\|\mathfrak{a}_1\|$. Damit ist das Verhältnis der trägen Massen als Messgröße festgelegt. Man definiert nun willkürlich die träge Masse eines bestimmten Körpers als 1 Masseneinheit, bekanntlich ist dies das Kilogramm (kg). Hierdurch ist dann die träge Masse jedes Körpers bezogen auf das Kilogramm als Messgröße bestimmt.

Auch der *Stoßprozess zweier Teilchen (Körper)* erlaubt die operative Definition der trägen Masse. Zwei freie Teilchen bewegen sich in einem Inertialsystem längs Geraden mit konstanten Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ aufeinander zu, stoßen zusammen und bewegen sich nach dem Stoß mit konstanten Geschwindigkeiten $\boldsymbol{w}_1$ und $\boldsymbol{w}_2$ wieder auseinander. Der Stoß braucht nicht elastisch zu sein. Es wird lediglich vorausgesetzt, dass die Teilchen durch den Stoß ihre Identität nicht verlieren, und dass die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß gemessen werden können. Man findet, dass bei gleichen Teilchen aber veränderlichen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ das Verhältnis

$$\alpha = \frac{\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}_1\|}{\|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{w}_2\|}$$

immer denselben Wert hat. Weiter stellt man fest, dass sich bei Vervielfachung der Materie eines Teilchens durch Volumenänderung das obige Verhältnis α umgekehrt proportional verändert. Verdoppelt man die Materie des zweiten Teilchens, so verdoppelt sich der Wert von α, verdoppelt man die Materie des ersten Teilchens, so halbiert sich der Wert von α, usw. Man setzt daher

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}. \tag{3.4}$$

und nennt m_1, m_2 die *trägen Massen* der beiden Teilchen. Damit ist das Verhältnis von trägen Massen operational definiert. Nach Wahl einer Einheitsmasse sind damit alle Massen bestimmt.

Das Verhältnis α ist invariant gegenüber beliebigen Galilei-Transformationen, da mit (2.50) die Komponenten der Geschwindigkeiten folgendermaßen transformieren,

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u} + R\,\boldsymbol{v}_i', \quad \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{u} + R\,\boldsymbol{w}_i',$$

so daß

$$\|\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{w}_i\| = \|R\,(\boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{w}_i')\| = \|\boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{w}_i'\|$$

gilt. Benutzt man die gleiche Einheitsmasse in allen Inertialsystemen, dann ist die in (3.4) definierte träge Masse eines Körpers unabhängig vom Inertialsystem. Die oben zur Definition der trägen Masse benutzte Beziehung $m_1\|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{w}_1\| = m_2\|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{w}_2\|$ folgt aus dem noch zu beweisenden *Impulssatz*. Danach ist die Summe der Impulse vor und nach einem Stoß dieselbe. Für den Stoß zweier Teilchen gilt also

$$m_1\mathfrak{v}_1 + m_2\mathfrak{v}_2 = m_1\mathfrak{w}_1 + m_2\mathfrak{w}_2, \tag{3.5}$$

Neben der trägen Masse gibt es die begrifflich verschiedene *schwere Masse*, die proportional zur Stärke der Gravitationskraft auf einen Körper ist. Die schweren Massen zweier Körper sind gleich, wenn sie durch einen dritten Körper dieselbe Anziehungskraft erfahren. Sie kann experimentell durch eine Kraftmessung festgelegt werden. Die schwere Masse könnte eine von der trägen Masse unabhängige Eigenschaft eines Körpers sein. Experimentell stellt sich jedoch heraus, daß das Verhältnis der beiden Massen immer gleich groß ist. Daher verzichtet man in der Notation zumeist auf eine Unterscheidung der beiden Begriffe und setzt beide Massen gleich m. Die Eigenschaft der Gleichheit von träger und schwerer Masse wird axiomatisch oft angenommen und dieses sogenannten *Äquivalenzprinzip* ist ein zentraler Ausgangspunkt in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Äußere Kräfte: Die Ursache für die Abweichung von der geradlinigen und gleichförmigen Bewegung ist in den am Körper angreifenden Kräften zu suchen, die zu einer zeitlichen Änderung des Impulses führen. Fast immer ist die Kraft $\mathfrak{F}$ auf ein Teilchen eine Funktion der Zeit t, des Ortsvektors $\mathfrak{r}(t)$ und der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}(t)$ des Teilchens

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\big(t, \mathfrak{r}(t), \mathfrak{v}(t)\big). \tag{3.6}$$

Eine Ausnahme ist die beschleunigungsabhängige Kraft auf ein elektromagnetische Wellen abstrahlendes geladenes Teilchen. Wir werden derartige Strahlungsdämpfungen in dieser Vorlesung vernachlässigen. Sie werden in der Elektrodynamik behandelt.

Nach Einführung eines kartesischen Koordinatensystems können wir die Bewegungsgleichung (3.3) für eine Kraft von der Gestalt (3.6) in ein gekoppeltes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung umformen,

$$m\ddot{x}_a = F_a(t, x_1, x_2, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3). \tag{3.7}$$

Welches kartesische Koordinatensystem für die Lösung dieser Gleichungen besonders geeignet ist und ob überhaupt die Verwendung von kartesischen Koordinaten günstig ist, hängt von der konkreten Form von $\mathfrak{F}(t, \mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{r}})$ ab.

Man spricht von *äußeren Kräften*, wenn die Rückwirkung des betrachteten Teilchens auf das die Kräfte erzeugende System vernachlässigt wird. Dies ist sicher eine gute Näherung für die Bewegung einer Rakete im Gravitationsfeld der sehr viel schwereren Erde oder eines Elektrons im elektrischen Feld eines Kondensators. Dagegen wird ein Elektron auf ein mit ihm wechselwirkendes Elektron zurückwirken. Über diese Rückwirkung macht das dritte Newtonsche Axiom die einfache, oft unter dem Schlagwort *actio = reactio* zusammengefasste Aussage:

Newtons 3. Axiom (lex tertia): *Der Kraft, mit der die Umgebung auf einen Massenpunkt wirkt, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft, mit der der Massenpunkt zurückwirkt,*

$$\mathfrak{F}_{\text{actio}} = -\mathfrak{F}_{\text{reactio}}. \tag{3.8}$$

Bei der Behandlung von Mehrkörpersystemen wird dieses Prinzip eine große Rolle spielen.

Wirken zwei verschiedene Kräfte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ auf ein und denselben Massenpunkt, so erhält man die Gesamtkraft durch die Vektorsumme $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2$. Dies wird als das *Superpositionsprinzip* für Kräfte bezeichnet. Wie die Geschwindigkeit und Impuls Vektoren sind, ist auch die Kraft ein Vektor und die Kräfte bilden einen 3-dimensionalen Vektorraum.

3.1.1 Beschleunigte Bezugssysteme und Scheinkräfte

Inertialsysteme sind dadurch ausgezeichnet, daß in ihnen das Trägheitsgesetz gilt, d.h. ein kräftefreier Körper ist in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Ruht der Ursprung O in einem Inertialsystem und rotiert die Basis $\{\mathfrak{e}_a\}$ nicht gegenüber den Fixsternen, so impliziert die NEWTONsche Bewegungsgleichung (3.2) für die Komponenten des Orts-, Impuls- und Kraftvektors in

$$\mathfrak{r} = x_a \mathfrak{e}_a, \quad \mathfrak{p} = p_a \mathfrak{e}_a \quad \text{und} \quad \mathfrak{F} = F_a \mathfrak{e}_a$$

die Differentialgleichungen

$$\dot{p}_a = F_a \overset{m=\,\text{const}}{\longrightarrow} m\ddot{x}_a = F_a \quad \text{oder} \quad m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}. \tag{3.9}$$

Wie wird die letzte Bewegungsgleichung für die Komponenten von $\mathfrak{r}$ in Nicht-Inertialsystemen aussehen? Die Beantwortung dieser Frage ist relevant, da die meisten der unseren Rechnungen zugrundeliegenden Systeme, zum Beispiel die Erdoberfläche, eigentlich keine Inertialsysteme sind. Genaue Messungen sollten daher Abweichungen von den Vorhersagen der Newtonschen Gesetze zeigen. Wir werden sehen, daß man die Gesetze für Nicht-Inertialsysteme durch Einführung von Trägheitskräften (Scheinkräften) so modifizieren kann, daß sie mit den Beobachtungen übereinstimmen.

Die Bewegung eines beliebigen Systems S' mit Ursprung O', kartesischer Basis $\mathfrak{e}'_a$ und Koordinaten x'_a relativ zu einem *Inertialsystem IS* mit kartesischer Basis $\mathfrak{e}_a$ und Koordinaten x_a setzt sich aus der Bewegung des Ursprungs O' von S' und der Drehung der Achsen von S' zusammen. Es gilt

$$\overline{OP} = \mathfrak{r} = x_a \mathfrak{e}_a = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0 + x'_a \mathfrak{e}'_a, \qquad \mathfrak{r}_0 = \overline{OO'}, \tag{3.10}$$

siehe Abbildung (3.1). Wir nehmen an, daß die Zeit Uhren S' und IS synchronisiert sind. Für

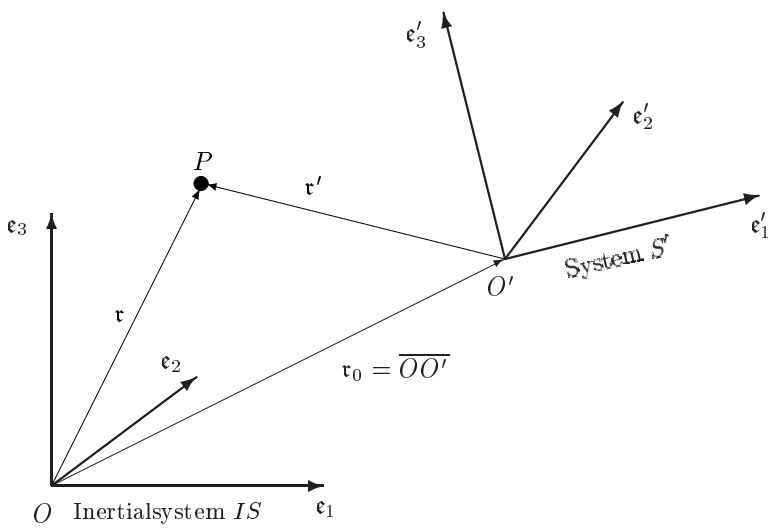

Abbildung 3.1: *Beschleunigtes System S'.*

$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{u}\, t$ und $\mathfrak{e}_a = R_{ab}\mathfrak{e}'_b$ mit zeitunabhängiger Relativgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und zeitunabhängiger

Drehmatrix $(R_{ab}) \in SO(3)$ wäre dies eine Galileitransformation und damit S' ebenfalls ein Inertialsystem. Für beliebig beschleunigte Systeme sind $\dot{\mathfrak{r}}_0$ und $\mathfrak{e}'_a$ zeitabhängig und

$$\dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}_0 + \dot{x}'_a \mathfrak{e}'_a + x'_a \dot{\mathfrak{e}}'_a. \tag{3.11}$$

Für einen *mitrotierenden* Beobachter ändern sich die Achsenrichtungen $\mathfrak{e}'_a$ ja nicht und er würde dem Massenpunkt die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v}' = \dot{x}'_a \mathfrak{e}'_a \tag{3.12}$$

zuschreiben[2]. Der letzte Term in (3.11) rührt ausschließlich von der Drehung des Systems S' relativ zu Inertialsystem her. Zusammen mit dem ersten Term beschreibt er die Geschwindigkeit eines - vom Inertialsystem aus gesehenen - in S' ruhenden Massenpunktes. Ein mitrotierender Punkt hat konstante Koordinaten x'_a.

Hier müssen wir noch einmal auf die Drehungen zurückkommen. Da wir zwei kartesische Bezugssysteme wählten, können nach (2.31) die Basen ineinander gedreht werden,

$$\mathfrak{e}'_a = R_{ba}\mathfrak{e}_b \quad \text{oder} \quad \dot{\mathfrak{e}}'_a = \dot{R}_{ba}\mathfrak{e}_b \overset{(2.32)}{=} \dot{R}_{ba}R_{bc}\mathfrak{e}'_c = (R^T\dot{R})_{ca}\mathfrak{e}'_c. \tag{3.13}$$

Für eine Drehung ist $R^T R = \mathbb{1}$ und entsprechend ist die infinitesimale Drehmatrix

$$\Omega' = R^T\dot{R} = R^{-1}\dot{R} \tag{3.14}$$

antisymmetrisch, wie man leicht beweist:

$$0 = \frac{d}{dt}(R^T R) = \dot{R}^T R + R^T\dot{R} = (R^T\dot{R})^T + R^T\dot{R} = \Omega'^T + \Omega'. \tag{3.15}$$

Damit finden wir für die Geschwindigkeit bezüglich des Inertialsystems

$$\dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}_0 + \dot{x}'_a\mathfrak{e}'_a + x'_a\Omega'_{ba}\mathfrak{e}'_b = \dot{\mathfrak{r}}_0 + \big(\dot{x}'_a + \Omega'_{ab}x'_b\big)\mathfrak{e}'_a. \tag{3.16}$$

Hier ist es angebracht, den Vektor der *Winkelgeschwindigkeit* $\mathfrak{w}$ einzuführen,

$$\mathfrak{w} = \omega_a\mathfrak{e}_a = \omega'_a\mathfrak{e}'_a.$$

Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit im beschleunigten System parametrisieren die schiefsymmetrische infinitesimale Drehmatrix,

$$\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & -\omega'_3 & \omega'_2 \\ \omega'_3 & 0 & -\omega'_1 \\ -\omega'_2 & \omega'_1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Omega'_{ab}x'_b\mathfrak{e}'_a = \mathfrak{w}\wedge\mathfrak{r}' \tag{3.17}$$

Damit erhalten wir endgültig

$$\dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}_0 + \mathfrak{v}' + \mathfrak{w}\wedge\mathfrak{r}' = \dot{\mathfrak{r}}_0 + \big(\frac{d}{dt}\big|_{S'} + \mathfrak{w}\wedge\big)\mathfrak{r}'. \tag{3.18}$$

Selbst ein Teilchen mit konstanten S'-Koordinaten hat eine Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{r}}_0$ wegen der Bewegung des Ursprungs O' relativ zu O und eine Geschwindigkeit $\mathfrak{w}\wedge\mathfrak{r}'$ aufgrund der Drehung des Nichtinertialsystems bezüglich IS. Diese Drehung erfolgt um die durch den Vektor

[2] Beachte: Für $\mathfrak{r}_0 = 0$ ist offensichtlich $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'$. Aber für die soeben definierte Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ im System S' ist $\mathfrak{v}'$ trotzdem nicht gleich $\dot{\mathfrak{r}}$. Ein mitbewegter Punkt hat $\mathfrak{v}' = \mathfrak{o}$ aber $\dot{\mathfrak{r}} \neq \boldsymbol{o}$.

der Winkelgeschwindigkeit definierte Drehachse mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\omega = \|\mathfrak{w}\|$. Die in (3.18) abgeleitete Vorschrift zur Bildung der Zeitableitung eines Vektors $\mathfrak{u} = u_a \mathfrak{e}_a$, der in einem rotierenden Koordinatensystem dargestellt wird,

$$\mathfrak{u} = u'_a \mathfrak{e}'_a,$$

kann man in der Operatorgleichung

$$\frac{d}{dt}\Big|_{IS} = \frac{d}{dt}\Big|_{S'} + \mathfrak{w}\wedge$$

zusammenfassen. Die vom Inertialsystem aus gesehene Zeitableitung $d/dt|_{IS}$ eines im Nichtinertialsystem aufgeschriebenen Vektors bildet man, indem man zunächst die Zeitableitung der *Komponenten* in S' ausführt, $d/dt|_{S'}$, und dann den Einfluss der Rotation berücksichtigt.

Um die Beschleunigung bezüglich des IS zu berechnen, benötigen wir die zweite Zeitableitung der Basisvektoren $\mathfrak{e}'_a$:

$$\ddot{\mathfrak{e}}'_a = \mathfrak{e}'_b \dot{\Omega}'_{ba} + \dot{\mathfrak{e}}'_b \Omega'_{ba} = \mathfrak{e}'_b \dot{\Omega}'_{ba} + \mathfrak{e}'_b (\Omega'^2)_{ba}.$$

Dies setzen wir in

$$\ddot{\mathfrak{r}} \overset{(3.11)}{=} \ddot{\mathfrak{r}}_0 + \ddot{x}'_a \mathfrak{e}'_a + 2\dot{x}'_a \dot{\mathfrak{e}}'_a + x'_a \ddot{\mathfrak{e}}'_a$$

ein. Damit finden wir für die Beschleunigung

$$\mathfrak{a} = \ddot{\mathfrak{r}} = \ddot{\mathfrak{r}}_0 + \mathfrak{a}' + 2\mathfrak{w} \wedge \mathfrak{v}' + \left(\dot{\omega}'_a \mathfrak{e}'_a\right) \wedge \mathfrak{r}' + \mathfrak{w} \wedge (\mathfrak{w} \wedge \mathfrak{r}'). \tag{3.19}$$

Damit lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung im Nichtinertialsystem für einen Massenpunkt (mit konstanter träger Masse)

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathfrak{a}}' &= \mathfrak{F} + \mathfrak{F}_s, \\ \mathfrak{F}_s &= -m\ddot{\mathfrak{r}}_0 \underbrace{-m\mathfrak{w} \wedge (\mathfrak{w} \wedge \mathfrak{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} - m(\dot{\omega}'_a \mathfrak{e}'_a) \wedge \mathfrak{r}' \underbrace{-2m\mathfrak{w} \wedge \mathfrak{v}'}_{\text{Corioliskraft}}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Hierbei bezeichnen $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{a}'$ die Geschwindigkeit und Beschleunigung, wie sie vom beschleunigten System aus gesehen werden,

$$\mathfrak{v}' = \dot{x}'_a \mathfrak{e}'_a \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}' = \ddot{x}'_a \mathfrak{e}'_a.$$

Die *Scheinkräfte*, die neben $\mathfrak{F}$ auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung (3.20) stehen, dienen nur dazu den Massenpunkt in Abwesenheit einer wirklichen Kraft $\mathfrak{F}$ gleichförmig auf einer Geraden im Inertialsystem zu führen. Sie rühren alle von der Trägheit der Masse her, sind proportional zur trägen Masse und werden deshalb *Trägheitskräfte* genannt. Sie werden sehr verständlich, wenn man das Trägheitsgesetz in Betracht zieht, nachdem eine kräftefreie Bewegung in dem Inertialsystem IS unbeschleunigt vor sich geht. Die scheinbare Beschleunigung eines freien Körpers in einem nicht-Inertialsystem rührt dann von den Trägheitskräften her.

Die Scheinkraft $-m\ddot{\mathfrak{r}}_0$ in (3.20) beschleunigt die Insassen eines bremsenden Fahrzeuges nach vorne, weil sie infolge ihrer Trägheit die Tendenz haben, die frühere, höhere Geschwindigkeit beizubehalten. Um den Fahrer auf dem Sitz zu halten braucht es einer entgegengesetzten Zwangskraft, die von den Sicherheitgurten übertragen wird. Die Insassen eines durch eine

Kurve fahrenden Fahrzeuges werden nach der äußeren Seite des Fahrzeuges gedrückt, weil sie sich in dem Inertialsystem, welches mit der ursprünglich geradlinigen gleichförmigen Bewegung des Fahrzeugs verbunden ist, kräftefrei bewegen und daher, infolge ihrer Trägheit, diese geradlinige Bewegung fortzusetzen bestrebt sind. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist ja nach dem Trägheitsgesetz nicht nur dem Betrag, sondern auch der Richtung nach konstant, wenn keine Kräfte wirken. Die entsprechende Scheinkraft ist die wohlbekannte *Zentrifugalkraft*

$$\mathfrak{F}_z = -m\mathfrak{w} \wedge (\mathfrak{w} \wedge \mathfrak{r}'). \tag{3.21}$$

Sie ist proportional zu ω^2 und zum Abstand von der Drehachse und zeigt von der Achse weg. Die Zentrifugalkraft ist der zur Drehachse hinzeigenden *Zentripedalkraft* betragsgleich und entgegengerichtet. Für konstantes $\mathfrak{w}$ und für $d^2\boldsymbol{r}_0/dt^2 = 0$ ist die Zentrifugalkraft die einzig wirksame Trägheitskraft auf ein in S' ruhendes Teilchen. Für einen Körper am Äquator ist die von der Erddrehung herrührende Zentrifugalbeschleunigung

$$\omega^2 r = 3.38 \text{ cm/s}^2,$$

was etwa 0.3% der gravitativen Beschleunigung ist. Die Resultante der zum Erdmittelpunkt gerichteten Gravitationskraft

$$\mathfrak{F}_G = G\frac{m_s M_s}{r^3}\,\mathfrak{r}, \qquad m_s \quad \text{schwere Masse},$$

und der Zentrifugalkraft (3.21) ist für einen irdischen Beobachter das *Gewicht* eines Körpers, das nach Definition mg - vektoriell $m\mathfrak{g}$ - ist, wenn unter g die an dem Ort des Massenpunktes gemessene Fall- oder Erdbeschleunigung verstanden wird. Hier haben wir die träge und schwere Masse gleich gesetzt. Das Gewicht bzw. $\mathfrak{g}$ ändert sich infolge der Zentrifugalkraft mit der geographischen Breite ψ, vom äquatorialen Wert 978.0 bis auf 983.2 cm/s^2, dem Wert an den Polen. Aus dem gleichen Grund ist die Form der Erde, das *Geoid*, von der Kugelform verschieden, und $\mathfrak{g}$ zeigt nicht genau nach dem Erdzentrum, sondern steht senkrecht auf der Geoidfläche. Bei den meisten Problemen sind jedoch die Bewegungen so kurz, daß $\mathfrak{g}$ mit genügender Genauigkeit als konstant angenommen werden kann.

Am ungewöhnlichsten ist wohl die *Coriolis*-Scheinkraft

$$\mathfrak{F}_c = -2m\mathfrak{w} \wedge \mathfrak{v}', \tag{3.22}$$

die immer senkrecht zur Geschwindigkeit in S' und zur Drehachse steht, und zu überraschenden Effekten führt. Sie nimmt proportional mit der Winkelgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit in S' zu. Man stelle sich etwa eine um eine senkrechte Achse rotierende waagrechte Scheibe vor. Auf dieser Scheibe lasse man reibungsfrei eine Kugel rollen, und zwar erteile man ihr im Drehzentrum ein Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ relativ zum Inertialsystem IS, worauf man sie sich selbst überlasse. Von einem mit der Scheibe rotierenden System S' aus betrachtet, wird aber die Kugel nicht einer Geraden, sondern einer Kurve des in der Abbildung (3.2) gezeigten Typs folgen. Von S' aus gesehen führt die Kugel also keine kräftefreie Bewegung aus und dies wird auf die *Coriolis*-Scheinkraft zurückgeführt.

Die Erde dreht sich entgegen dem Uhrzeigersinn um den Nordpol mit einer Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega \sim 7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

relativ zu den Fixsternen. Auf der nördlichen Erdhalbkugel zeigt der Kreisfrequenzvektor $\mathfrak{w}$ aus der Erdoberfläche heraus und auf der südlichen Halbkugel in sie hinein. Ein auf der

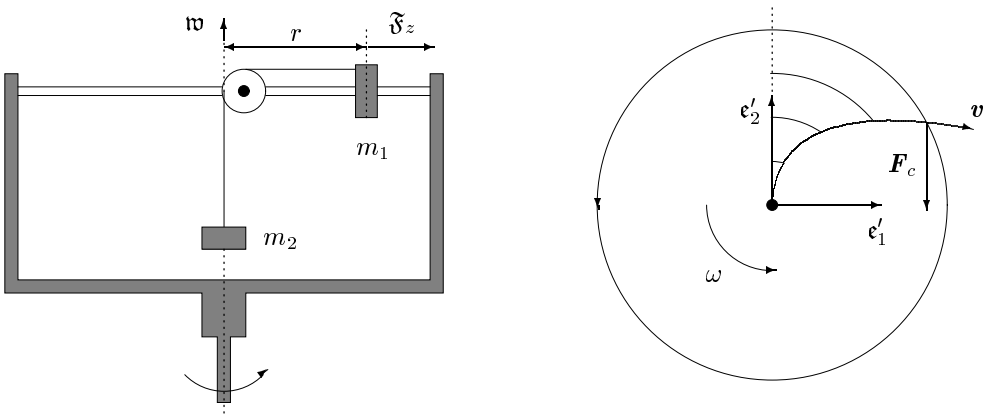

Abbildung 3.2: *Zur Zentrifugal- und Corioliskraft*

nördlichen Halbkugel längs der Erdoberfläche abgeschossenes Projektil wird aufgrund der Corioliskraft nach rechts (in Bewegungsrichtung) abgelenkt. Auf der südlichen Halbkugel wird es nach links abgelenkt. Die Coriolis Beschleunigung ist immer kleiner als

$$2\omega v \sim 1.5 \times 10^{-4}\,\frac{v}{\text{sec}},$$

wobei v die Geschwindigkeit des Projektils ist. Sie spielt eine wichtige Rolle in vielen ozeanographischen und meteorologischen Phänomenen. So macht sie sich zum Beispiel bemerkbar bei der Ablenkung der Passatwinde nach links auf der Südhalbkugel und nach rechts auf der Nordhalbkugel.

Bewegt sich dagegen ein *geführtes* Teilchen auf der um die $\mathfrak{e}_3$-Achse rotierende Scheibe radial von der Drehachse weg, $\rho' = v't$ und $\varphi' = \text{constant}$, dann muß der Corioliskraft $-2m\,\omega v\,\mathfrak{e}'_\varphi$ durch eine führende Zwangskraft entgegengewirkt werden. Dies erklärt die stärkere Abnutzung der rechten Schienen auf der Nordhalbkugel und der linken auf der Südhalbkugel. Flüsse werden auf der Nordhalbkugel auf der rechten Seite stärker ausgeschwemmt als auf der linken.

Die dritte Trägheitskraft in (3.20) tritt nur auf, wenn sich die Drehachse und/oder die Winkelgeschwindigkeit ändern. Ruht das Teilchen in S', dann beschreibt es im Inertialsystem IS eine sich zeitliche ändernde Drehbewegung und dies führt zu einer zusätzlichen Trägheitskraft.

3.1.2 Bewegungen auf der rotierenden Erde

Als mitrotierende Beobachter auf der Erde bemerken wir bei der Bewegung von Körpern die beiden Scheinkräfte Zentrifugalkraft und Corioliskraft. Zur Beschreibung der Bewegungen benutzen wir das angepasste Koordinatensystem am Beobachtungsort der geographischen Breite ψ nach Abbildung (3.3).

Wir benötigen die Transformation von der kartesischen Basis $\mathfrak{e}_a$ des durch die Fixsterne definierten Inertialsystems und der am Beobachtungsort befindlichen mitrotierenden karte-

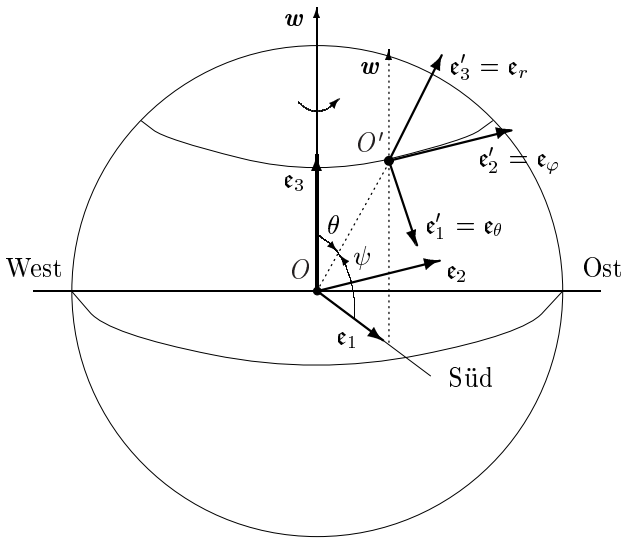

Abbildung 3.3: *Beschleunigtes Kordinatensystem auf Erdoberfläche.*

sischen Basis $\mathfrak{e}_a'$. Wir nehmen an, daß zur Anfangszeit $t = 0$ die mitrotierende Basis am Nordpol gleich der Basis $\mathfrak{e}_a$ ist. Aus Abbildung (3.3) oder (2.108) entnimmt man, daß für $t = 0$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_1' &\equiv \mathfrak{e}_\theta = \sin\psi\mathfrak{e}_1 - \cos\psi\mathfrak{e}_3 & \mathfrak{e}_1 &= \sin\psi\mathfrak{e}_1' + \cos\psi\mathfrak{e}_3' \\ \mathfrak{e}_2' &\equiv \mathfrak{e}_\varphi = \mathfrak{e}_2 & \mathfrak{e}_2 &= \mathfrak{e}_2' \\ \mathfrak{e}_3' &\equiv \mathfrak{e}_r = \cos\psi\mathfrak{e}_1 + \sin\psi\mathfrak{e}_3 & \mathfrak{e}_3 &= -\cos\psi\mathfrak{e}_1' + \sin\psi\mathfrak{e}_3' \end{aligned} \tag{3.23}$$

gelten. Der im Inertialsystem konstante Winkelgeschwindigkeitvektor hat auch im beschleunigten System $(O', \mathfrak{e}_a')$ *zeitunabhängige* Koordinaten,

$$\mathfrak{w} = \omega\mathfrak{e}_3 = \omega\big(\sin\psi\,\mathfrak{e}_3' - \cos\psi\,\mathfrak{e}_1'\big), \quad \psi = \text{constant}.$$

Nun ist es einfach, die Corioliskraft zu berechnen,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_c &= -2m\mathfrak{w}\wedge\mathfrak{v}' = -2m\omega\big(\sin\psi\,\mathfrak{e}_3' - \cos\psi\,\mathfrak{e}_1'\big)\wedge\big(\dot{x}_a'\,\mathfrak{e}_a'\big) \\ &= 2m\omega\left\{\sin\psi\dot{x}_2'\,\mathfrak{e}_1' - (\sin\psi\dot{x}_1' + \cos\psi\dot{x}_3')\,\mathfrak{e}_2' + \cos\psi\dot{x}_3'\,\mathfrak{e}_3'\right\}. \end{aligned}$$

Diese Corioliskraft wird mit der Gravitationskraft $-mg\mathfrak{e}_3' = m\mathfrak{g}$ und der Zentrifugalkraft überlagert. Wählen wir für O' einen Punkt auf der Erdoberfläche wie in Abbildung (3.3), dann enthält $\ddot{\mathfrak{r}}_0$ in (3.20) die Zentrifugalkraft; würden wir für O' den Erdmittelpunkt wählen, dann wäre $\ddot{\mathfrak{r}}_0 = 0$ und (3.21) beschriebe die Zentrifugalkraft. Wie oben erklärt wurde, können wir diese Kraft in guter Näherung durch eine geringfügige Änderung von g berücksichtigen. Damit erhalten wir (in dieser Näherung) folgende Bewegungsgleichungen für ein nur der Gravitationskraft ausgesetztes Teilchen im erdgebundenen System $\{O', \mathfrak{e}_a'\}$:

$$\mathfrak{a}' = -2\mathfrak{w}\wedge\mathfrak{v}' + \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{g} = -g\mathfrak{e}_3', \tag{3.24}$$

wobei die Kreisfrequenz der Erde $\omega = 7.29\cdot 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$ ist. In den folgenden Rechnungen sind alle Koordinaten erdgebundenen. Um die Notation nicht zu überladen, lassen wir nun

die Striche an den mitbewegten Koordinaten weg. Die Koordinatentripel im erdgebundenen System gehorchen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&\ddot{\boldsymbol{r}} = -2\boldsymbol{w} \wedge \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{g} \quad \text{mit} \\
&\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)^T, \quad \boldsymbol{w} = \omega(-\cos\psi, 0, \sin\psi)^T, \quad \boldsymbol{g} = -(0,0,g)^T.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

In Abwesenheit des Gravitationsfeldes beschreibt das Geschwindigkeitstripel $\boldsymbol{v}$ des dann *freien* Teilchens eine Drehung um die Drehachse mit der Kreisfrequenz 2ω,

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -2\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{v}$$

und entsprechend ist

$$\boldsymbol{v}(t) = (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{v}_0)\hat{\boldsymbol{w}} - \hat{\boldsymbol{w}} \wedge \big\{\boldsymbol{v}_0 \sin 2\omega t + \hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{v}_0 \cos 2\omega t\big\}, \tag{3.26}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{w}}$ das Koordinatentripel des in Richtung des Kreisfrequenzvektors zeigende Einheitsvektors im erdgebundenen System ist. Das zugehörige Koordinatentripel $\boldsymbol{r}$ beschreibt dann ebenfalls eine derartige Drehung, überlagert mit einem konstanten Drift parallel zur Drehachse,

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{v}_0)\,\hat{\boldsymbol{w}}\,t + \frac{1}{2\omega}\,\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \Big\{\boldsymbol{v}_0(\cos 2\omega t - 1) - (\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{v}_0)\sin 2\omega t\Big\}. \tag{3.27}$$

Das Differentialgleichungssystem erster Ordnung (3.25) für die Geschwindigkeit hat die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{v}_0)\,\hat{\boldsymbol{w}} - \frac{1}{2\omega}\,\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{g} + (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{g})\hat{\boldsymbol{w}}\,t \\
&- \hat{\boldsymbol{w}} \wedge \Big\{\big(\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2\omega}\,\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{g}\big)\sin 2\omega t + \big(\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{2\omega}\,\boldsymbol{g}\big)\cos 2\omega t\Big\}.
\end{aligned}$$

Im Grenzfall $g \to 0$ geht sie über in die einfachere Lösung (3.26) für ein freies Teilchen. Nun integrieren wir bezüglich der Zeit und finden folgende Zeitabhängigkeit für die Position eines Teilchens in erdgebundenen Koordinaten,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}_0 + (\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{v}_0)\,\hat{\boldsymbol{w}}\,t - \frac{1}{2\omega}\,(\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{g})\,t + \frac{1}{2}\,(\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{g})\,\hat{\boldsymbol{w}}\,t^2 \\
&+ \frac{1}{2\omega}\,\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \Big\{\big(\boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2\omega}\,\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{g}\big)(\cos 2\omega t - 1) - \big(\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{2\omega}\boldsymbol{g}\big)\sin 2\omega t\Big\}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Zuerst betrachten wir den freien Fall mit den Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{r}_0 = (0,0,h)^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_0 = (0,0,0)^T.$$

Wegen

$$\hat{\boldsymbol{w}} \cdot \boldsymbol{g} = -g\sin\psi, \quad \hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{g} = -g\cos\psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{w}} \wedge (\hat{\boldsymbol{w}} \wedge \boldsymbol{g}) = g\cos\psi \begin{pmatrix} \sin\psi \\ 0 \\ \cos\psi \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

vereinfacht sich die Lösung zu

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{g}{2\omega^2}\,\sin\psi\cos\psi\big\{(\omega t)^2 - \sin^2\omega t\big\} \\
x_2 &= \frac{g}{2\omega^2}\,\cos\psi\big\{\omega t - \sin\omega t\cos\omega t\big\} \\
x_3 &= h - \frac{g}{2\omega^2}\,\big\{(\omega t)^2\sin^2\psi + \sin^2\omega t\,\cos^2\psi\big\}.
\end{aligned}$$

Erst nach einer Fallzeit von mehreren Stunden ist $\omega t \sim 1$. Damit dürfen wir $\omega t \ll 1$ annehmen und die trigonometrischen Funktionen entwickeln,

$$\sin \omega t \sim \omega t + \ldots \quad \text{und} \quad \cos \omega t \sim 1 - \frac{1}{2}(\omega t)^2 + \ldots .$$

Berücksichtigen wir Terme bis zur Ordnung $g(\omega t)^3/\omega^2$, so erhalten wir

$$x_1 \sim 0, \quad x_2 \sim \frac{1}{3} g t^2 \, (\omega t) \cos \psi \quad \text{und} \quad x_3 \sim h - \frac{1}{2} g t^2. \tag{3.30}$$

Da wir die (erdfeste) 2-Achse in der Ost-Richtung gewählt haben, bedeutet der immer positive x_2-Wert, daß *ein frei fallende Körper von der Vertikalen nach Osten abweicht.* Auf unserem Breitenkreis ist die Abweichung bei 100 m Fallhöhe etwa 1.5 cm.

3.2 Erhaltungssätze

Es gibt einige grundlegende Naturgesetze, die mathematisch in der Form von Erhaltungssätzen formuliert werden können. Ein Erhaltungssatz sagt aus, daß in einem abgeschlossenen physikalischen System eine bestimmte physikalische Größe (zum Beispiel der Gesamtimpuls oder die Energie) für alle Zeiten unverändert erhalten bleiben. Erhaltungsätze spielen eine zentrale Rolle in allen Gebieten der Physik. Sie erleichtern oder ermöglichen oft die Lösung von physikalischen Problemen.

3.2.1 Der Impulssatz

Dieser Erhaltungssatz drückt die Newtonschen Bewegungsgleichung (3.2) in Abwesenheit von äußeren Kräften aus,

$$\dot{\mathfrak{p}} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p} = \text{const.} \tag{3.31}$$

Ist die Summe *aller* auf einen Körper wirkenden Kräfte Null, dann ist sein Impuls erhalten.

3.2.2 Der Drehimpulssatz

Multiplizieren wir das Newtonsche Bewegungsgesetz vektoriell mit $\mathfrak{r}$ dann erhalten wir

$$\mathfrak{r} \wedge \dot{\mathfrak{p}} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{r} \wedge \mathfrak{p}) = \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{F}, \tag{3.32}$$

da $\dot{\mathfrak{r}} \wedge \mathfrak{p} = 0$ ist. Definieren wir den *Drehimpuls* $\mathfrak{L}$ des Teilchens und das auf ihn einwirkende *Drehmoment* $\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{p} = m\mathfrak{r} \wedge \dot{\mathfrak{r}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{r} \wedge \mathfrak{F}, \tag{3.33}$$

so wird (3.32) zur Bewegungsgleichung für den Drehimpuls,

$$\dot{\mathfrak{L}} = \mathfrak{M}. \tag{3.34}$$

Wie der Ortsvektor beziehen sich der Drehimpuls und das Drehmoment auf den Ursprung des gewählten Inertialsystems. Bei einer Verschiebung des Systems ändern sich $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ im Gegensatz zu $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{F}$. Verschwindet das Drehmoment, dann ist der Drehimpuls erhalten. Für $\mathfrak{F} \neq 0$ verschwindet $\mathfrak{M}$ genau dann, wenn $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{F}$ parallel sind. Die Kraft muss also in Richtung zum Zentrum des Bezugssystems (oder entgegengesetzt) wirken,

$$\mathfrak{F} = K\big(t, \mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{r}}\big)\, \vec{r}. \tag{3.35}$$

Eine solche Kraft heißt *Zentralkraft*. Bewegt sich ein Punktteilchen unter dem Einfluss einer Zentralkraft, dann ist sein Drehimpuls erhalten,

$$\mathfrak{L} = \text{const} = \mathfrak{L}_0. \tag{3.36}$$

Obwohl $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{p}$ für ein bewegtes Teilchen beide von der Zeit abhängen, ist für eine Zentralkraft der Drehimpuls zeitunabhängig. Man nennt (3.36) *Drehimpulserhaltungssatz*. Wir haben bei unserer Ableitung an keiner Stelle vorausgesetzt, daß die träge Masse des Punktteilchens konstant ist.

Um den Drehimpulserhaltungssatz (3.36) zu veranschaulichen, multiplizieren wir (3.33) skalar mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}(t)$ und erhalten mit Hilfe von (3.36)

$$0 = \mathfrak{r}(t) \cdot \mathfrak{L} = \mathfrak{r}(t) \cdot \mathfrak{L}_0. \tag{3.37}$$

Dies bedeutet, daß alle möglichen Bahnen $\mathfrak{r}(t)$ in derjenigen Ebene durch den Ursprung liegen, die senkrecht auf dem Drehimpuls $\mathfrak{L}_0$ steht. Damit ist für $\mathfrak{L}_0 \neq 0$ die Konstanz der Richtung von $\mathfrak{L}_0$ veranschaulicht. Der Betrag des Drehimpulses hängt eng mit der vom Ortsvektor $\mathfrak{r}(t) = \overline{OP}(t)$ überstrichenen Fläche pro Zeiteinheit zusammen, siehe die folgende Abbildung (3.4).

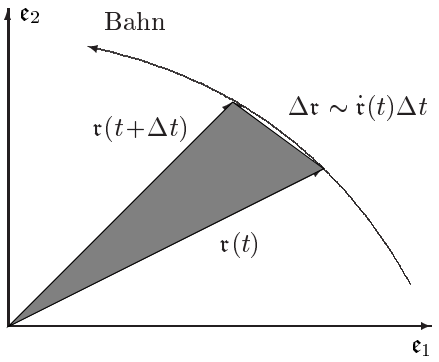

Abbildung 3.4: *Der Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen*

Bewegt sich ein Teilchen während der kurzen Zeit Δt von $\mathfrak{r}(t)$ nach $\mathfrak{r}(t{+}\Delta t) \sim \mathfrak{r}(t) + \dot{\mathfrak{r}}(t)\Delta t + O\big((\Delta t)^2\big)$, dann ist die dabei überstrichene gerichtete Fläche

$$\Delta\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}(t) \wedge \Delta\mathfrak{r} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{r}(t) \wedge \dot{\mathfrak{r}}\,\Delta t$$

und die *Flächengeschwindigkeit* ist

$$\dot{\mathfrak{A}} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{r} \wedge \mathfrak{v} = \frac{1}{2m}\mathfrak{L}. \tag{3.38}$$

Für einen erhaltenen Drehimpuls und eine zeitunabhängige träge Masse ist die vom Fahrstrahl pro Zeitintervall überstrichene Fläche konstant,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{2m}\,\mathfrak{L}\,t. \tag{3.39}$$

Damit ist der Betrag und die Richtung des erhaltenen Drehimpulses geometrisch veranschaulicht:

Satz 2 (Konstanz der Flächengeschwindigkeit) *Unter der Wirkung jeder Zentralkraft ist die Flächengeschwindigkeit eines Massenpunktes konstant, d.h. die Bewegung ist eben und der Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Dieser Satz ist im speziellen Fall der Planetenbewegung als das zweite KEPLERsche Gesetz bekannt. Der Flächensatz ist eine Vektorgleichung und enthält entsprechend drei Integrationskonstanten. Zwei bestimmen die Bahnebene und die dritte legt den Betrag der Flächengeschwindigkeit in der Bahnebene fest. Ist die Bahn-Ebene die $x-y$-Ebene, dann ist

$$\mathfrak{r} \wedge \dot{\mathfrak{r}} = (x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)\mathfrak{e}_3.$$

In Polarkoordinaten $x_1 = \rho\cos\varphi$ und $x_2 = \rho\sin\varphi$ ist

$$\mathfrak{r} \wedge \dot{\mathfrak{r}} = \rho^2\dot{\varphi}\,\mathfrak{e}_3 = \frac{1}{m}\,\mathfrak{L}. \tag{3.40}$$

Der Drehimpuls $\mathfrak{L} = L\mathfrak{e}_3$ zeigt in die Richtung von $\mathfrak{e}_3$ und der Drehimpulserhaltungs- und Flächensatz können folgendermaßen geschrieben werden,

$$L = m\rho^2\dot{\varphi} \quad \text{und} \quad A = \tfrac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\,t.$$

Schlussendlich wollen wir noch untersuchen, wie sich der Drehimpuls ändert wenn wir das Inertialsystem wechseln. Zuerst zeigen wir, daß unter Drehungen des Inertialsystems,

$$\mathfrak{e}'_a = R_{ba}\,\mathfrak{e}_b, \qquad R \in SO(3),$$

die Komponenten des Drehimpuls vektoriell transformieren, d.h. genauso wie der Orts- und Impulskoordinaten,

$$\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{r}' \quad \text{und} \quad \boldsymbol{p} = R\boldsymbol{p}'.$$

Es sei $\boldsymbol{L}$ das Komponententripel des Drehimpulses,

$$\mathfrak{L} = L_a\,\mathfrak{e}_a, \qquad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}.$$

Das Kreuzprodukt von gedrehten Vektoren geht in das gedrehte Kreuzprodukt der Vektoren über und entsprechend gilt

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p} = (R\boldsymbol{r}') \wedge (R\boldsymbol{p}') = R\big(\boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{p}'\big) = R\,\boldsymbol{L}', \tag{3.41}$$

und dies beweist die gemachte Aussage. Dagegen transformiert der Drehimpuls unter Raumspiegelungen anders als $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{r} = P\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{r}', \quad \boldsymbol{p} = P\boldsymbol{p}' = -\boldsymbol{p}' \Longrightarrow \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}', \tag{3.42}$$

siehe Abbildung (3.5), in welcher die Raumspiegelung aktiv interpretiert wurde. Ein Vektor, der unter Raumspiegelung in sich übergeht heißt *Pseudovektor*. Im Gegensatz zu den Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{F}$ ist $\mathfrak{L}$ ein Pseudovektor.

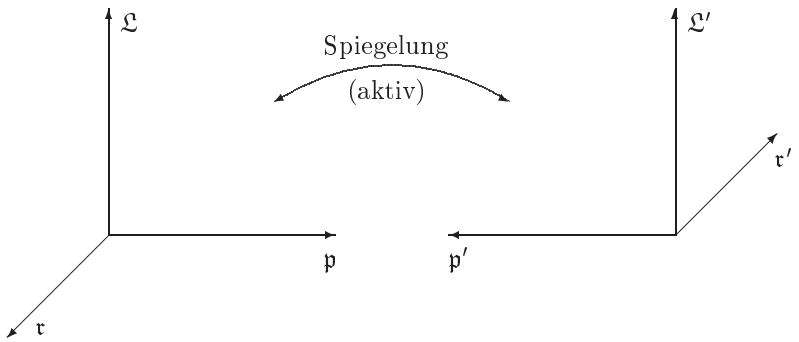

Abbildung 3.5: $\mathfrak{L}$ *ist ein Pseudovektor*

3.2.3 Energiesatz

Ein Punktteilchen bewege sich unter dem Einfluss einer äußeren Kraft von $\mathfrak{r}$ nach $\mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$. Dann ist das Skalarprodukt der Kraft am Ort $\mathfrak{r}$ mit der infinitesimalen Verschiebung,

$$dA = \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}$$

die von der Kraft an dem Teilchen geleistete infinitesimale Arbeit. Die längs eines Weges C von P_1 (mit Ortsvektor $\mathfrak{r}_1$) nach P_2 (mit Ortsvektor $\mathfrak{r}_2$) geleistete Arbeit ist

$$A = \int_C dA = \int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}. \tag{3.43}$$

Die Arbeit hängt von der Kraft, von Anfangs- und Endpunkt des Weges und im allgemeinen Fall auch vom gewählten Weg C selbst ab. Die Wegabhängigkeit merkt ein Schwimmer, der

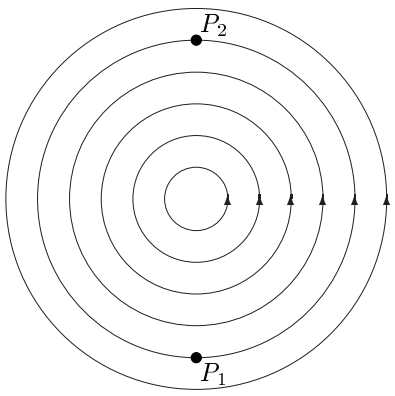

Abbildung 3.6: *Zur Wegunabhängigkeit der Arbeit*

in der Strömung in Abbildung (3.6) von P_1 nach P_2 einmal mit der Strömung und einmal

gegen sie schwimmt. Die pro Zeit verrichtete Arbeit wird *Leistung* genannt,

$$P = \frac{dA}{dt} = \mathfrak{F} \cdot \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{v}. \tag{3.44}$$

Die Arbeit wird in Energieeinheiten

$$\text{Joule} = \text{J} = \text{Nm} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$$

gemessen und die Leistung in Watt = J/s = Nm/s. Auf die Leistung stoßen wir auch, wenn wir die NEWTONsche Bewegungsgleichung (für eine konstante träge Masse) (3.3) mit der Geschwindigkeit multiplizieren,

$$m\ddot{\mathfrak{r}} \cdot \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F} \cdot \dot{\mathfrak{r}}.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung erkennen wir die Zeitableitung der *kinetischen Energie*,

$$T = \frac{m}{2}\,\dot{\mathfrak{r}}^2, \tag{3.45}$$

also die mit der Bewegung verbundenen Energie. Damit können wir die Gleichung auch in der Form

$$\frac{d}{dt}T = \mathfrak{F} \cdot \dot{\mathfrak{r}} = P \tag{3.46}$$

schreiben. Die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist gleich der zu- oder abgeführten Leistung. Oft hat man es mit Kräften zu tun für die

$$\mathfrak{F} \cdot \dot{\mathfrak{r}} = -\frac{d}{dt}V(\mathfrak{r}) \tag{3.47}$$

gilt. Diese Bedingung an die Kraft kann für beliebiges $\dot{\mathfrak{r}}$ auf zweierlei Weise erfüllt werden.

Eine erste Möglichkeit ist eine Kraft, die immer senkrecht zur Geschwindigkeit steht. Dann wäre $\mathfrak{F} \cdot \dot{\mathfrak{r}} = 0$ und (3.47) mit $V = 0$ erfüllt. Ein wichtiges Beispiel ist die LORENTZ*kraft*

$$\mathfrak{F} = e\big(\dot{\mathfrak{r}} \wedge \mathfrak{B}\big)$$

die in einem Magnetfeld $\mathfrak{B}$ auf ein geladenes Teilchen mit elektrischer Ladung e wirkt. Ein Magnetfeld kann an einem geladenen Teilchen keine Arbeit leisten. Die zweite, für die Mechanik wesentliche Möglichkeit der Erfüllung von (3.47) sind *Potentialkräfte*, für welche die Kraft $\mathfrak{F}$ ein Potential besitzt,

$$\mathfrak{F} = -\nabla V(\mathfrak{r}) \Longrightarrow \mathfrak{F} \cdot \dot{\mathfrak{r}} = -\frac{\partial V}{\partial x_a}\dot{x}_a = -\frac{d}{dt}V(\mathfrak{r}). \tag{3.48}$$

Setzen wir dies in (3.46) ein, so finden wir

$$\frac{d}{dt}\Big(T + V(\mathfrak{r})\Big) = 0, \tag{3.49}$$

woraus sich unmittelbar der *Energiesatz* ergibt,

$$E = \frac{m}{2}\,\dot{\mathfrak{r}}^2 + V(\mathfrak{r}) = \text{const.} \tag{3.50}$$

Im konservativen Kraftfeld ist die Summe aus kinetischer Energie und V erhalten. Die Funktion $V(\mathfrak{r})$ ist eine Energie und heißt *potentielle Energie* oder *Potential*.

Aus (3.49) kann man sofort eine notwendige Bedingung ablesen, welcher die Komponenten K_a einer *konservativen Kraft* genügen müssen: Da für ein genügend glattes Potential V die zweiten Ableitungen vertauschen, gilt

$$0 = (\partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a)V = -(\partial_a K_b - \partial_b K_a), \quad \text{wobei} \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$$

ist. Mit Hilfe der früher eingeführten Differentialoperatoren können wir auch schreiben,

$$\mathfrak{F} = -\nabla V \Longrightarrow \nabla \wedge \mathfrak{F} = \boldsymbol{o}. \tag{3.51}$$

Ein konservatives Kraftfeld ist also wirbelfrei. Auf einfach zusammenhängenden Gebieten kann man auch die Umkehrung beweisen. Es sei C irgend eine Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet die P_0 mit P verbindet und sei $\nabla \wedge \mathfrak{F} = 0$ im betrachteten Gebiet. Dann ist die bei festgehaltendem Anfangs- und Endpunkt von der Kraft am Teilchen geleistete Arbeit $\int \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}$ unabhängig vom gewählten Weg C. Bei festem Anfangspunkt definiert sie dann eine bis auf eine Konstante eindeutige Funktion des Endpunktes. Ist $P = P_0$, dann verschwindet das Linienintegral, und wir dürfen

$$V(\mathfrak{r}) - V(\mathfrak{r}_0) = -\int_C \mathfrak{F}(\mathfrak{r}) \cdot d\mathfrak{r} \tag{3.52}$$

schreiben. Um die Wegunabhängigkeit der geleisteten Arbeit zu beweisen, betrachte man den auf einen Punkt zusammenziehbaren Rand ∂A der von den beiden Wegen C und C' eingeschlossenen Fläche, siehe Abbildung (3.7). Mit dem STOKESschen Satz verschwindet die

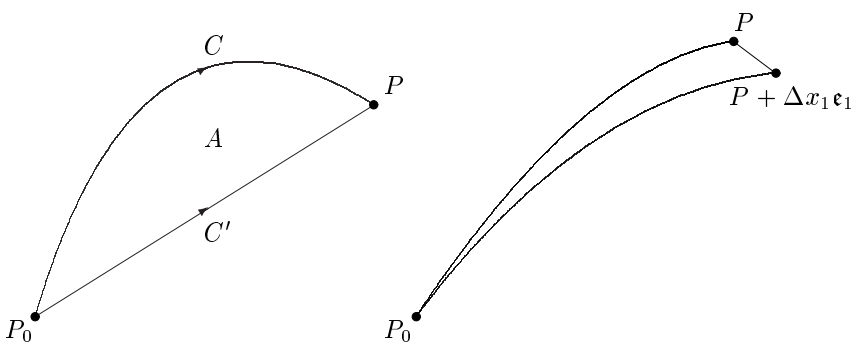

Abbildung 3.7: *Zur Wegunabhängigkeit der Arbeit*

von einem konservativen Kraftfeld längs irgendeiner geschlossenen (und zusammenziehbaren) Kurve geleistete Arbeit,

$$0 = \int_A d\mathfrak{A} \cdot (\nabla \wedge \mathfrak{F}) = \int_{\partial A} \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r} = \int_{C'} \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r} - \int_C \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r},$$

was beweist, daß die längs C und C' geleisteten Arbeiten gleich sind,

$$\int_{C'} \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r} = \int_C \mathfrak{F} \cdot d\mathfrak{r}. \tag{3.53}$$

Wir haben berücksichtigt, daß C und C' verschiedene Orientierungen haben. Umgekehrt ist

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_{P_0}^{P}\mathfrak{F}\cdot d\mathfrak{r} = \lim_{\Delta x_1\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x^1}\int\limits_{P}^{P+\Delta x_1\mathfrak{e}_1}\mathfrak{F}\cdot d\mathfrak{r}\right) = \mathfrak{F}(\mathfrak{r})\cdot\mathfrak{e}_1 = K_1(\mathfrak{r}), \tag{3.54}$$

was bedeutet, daß $\mathfrak{F} = -\nabla V$ ist. Damit haben wir bewiesen, daß ein Kraftfeld dann und nur dann ein Potential besitzt, wenn die Rotation der Kraft verschwindet, d.h. wenn das Kraftfeld wirbelfrei ist.

Das Potential wird durch die Definition $\mathfrak{F} = -\nabla V$ nur bis auf eine beliebige additive Konstante bestimmt. Daher kann der Wert von V in einem willkürlich gewählten Punkt P_0 mit Ortsvektor $\mathfrak{r}_0$ gleich Null angenommen werden. Dann hat das Potential

$$V(\mathfrak{r}) = -\int_{P_0}^{P}\mathfrak{F}\cdot d\mathfrak{r} = \int_{P}^{P_0}\mathfrak{F}\cdot d\mathfrak{r}$$

folgende Bedeutung: In einem Punkt P ist der Wert des Potentials gleich der Arbeit, welche die Feldkräfte leisten, bis sie den Massenpunkt von P nach P_0 verschieben, oder es ist gleich der Arbeit, die gegen die Feldkräfte geleistet werden muß, wenn der Massenpunkt von P_0 in P überführt wird.

Die Punkte in denen das Potential denselben Wert V_0 hat, bilden eine durch die Gleichung

$$V(\mathfrak{r}) = V_0$$

bestimmte Fläche, die *Äquipotentialfläche* oder *Niveaufläche* genannt wird. Wird der Massenpunkt längs einer Äquipotentialfläche bewegt, so entsteht keine Potentialdifferenz und es muß keine Arbeit aufgebracht werden. Hieraus oder aus $\mathfrak{F} = -\nabla V$ folgt, daß die Kraft $\mathfrak{F}$ senkrecht auf der Niveaufläche steht.

Nicht alle Kräfte sind konservativ. Dissipative Kräfte treten immer dann auf, wenn mit Leistungsverlusten einhergehende Reibungseffekte auftreten. Entsprechend teilen wir eine Kraft in ihre konservativen und dissipativen Anteile auf,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\text{Kons}} + \mathfrak{F}_{\text{Diss}}. \tag{3.55}$$

Ersetzen wir in (3.46) die Leistung der konservativen Kräfte entsprechend (3.48) durch ihr Potential, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{m}{2}\dot{\mathfrak{r}}^2 + V(\mathfrak{r})\Big) = \mathfrak{F}_{\text{Diss}}\cdot\dot{\mathfrak{r}}. \tag{3.56}$$

Die Summe aus kinetischer Energie T und potentieller Energie V ist die Energie des Massenpunktes. Entsprechend ist (3.56) die Bilanzgleichung der Energie, der Energiesatz:

Lemma 1 (Bilanzgleichung für die Energie) *Die zeitliche Änderung der Energie ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte. In Abwesenheit von dissipativen Kräften ist die Energie erhalten.*

3.3 Lösungen der Bewegungsgleichung

Für ein freies Teilchen ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\mathfrak{r}} = 0 \tag{3.57}$$

eine lineare Funktion der Zeit. Bei bekannter Anfangslage $\mathfrak{r}_0$ und Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ hat sie die Form

$$\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{v}_0 t, \tag{3.58}$$

und bei bekannter Anfangslage $\mathfrak{r}_0$ und Endlage $\mathfrak{r}(T) = \mathfrak{r}_1$

$$\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{r}_0 + \frac{t}{T}\{\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_0\}. \tag{3.59}$$

Auch wenn Kräfte wirken ist (für genügend kleine Zeitintervalle und reguläre Kräfte) eine Lösung durch Angabe von Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit, oder durch Anfangs- und Endlage, eindeutig bestimmt.

3.3.1 Konstante Kräfte

Die einfachsten Kräfte sind solche, bei denen $\mathfrak{F}$ konstant ist. Beispiele hierfür sind die näherungsweise konstante Gravitationskraft in der Nähe der Erdoberfläche oder die Kraft auf ein elektrisch geladendes Teilchen im Innern eines Kondensators. Es genügt hier, den Fall der Bewegung im Schwerefeld zu betrachten. Wir lassen die Erdanziehungskraft in die negative 3-Richtung zeigen und haben dann

$$m_t \ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F} = -m_s g \mathfrak{e}_3, \tag{3.60}$$

wo links die träge und rechts die schwere Masse stehen. Nach dem mit genügender Genauigkeit experimentell verifizierten Äquivalenzprinzip dürfen wir diese gleich setzen, $m_t = m_s = m$. Die allgemeine Lösung dieser einfachen Differentialgleichung lässt sich sofort angeben:

$$\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{v}_0\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2\, \mathfrak{e}_3. \tag{3.61}$$

In der Ebene parallel zur Erdoberfläche ist die Bewegung geradlinig und gleichförmig und in Richtung der Schwerkraft gleichmäßig beschleunigt. Für die Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{o} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}_0 = v_0(\cos\alpha, 0, \sin\alpha)^T$$

ist die Lösung

$$x(t) = v_0 t\, \cos\alpha, \quad y(t) = 0 \quad \text{und} \quad z(t) = v_0 t\, \sin\alpha - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 \tag{3.62}$$

und beschreibt eine Parabel

$$z(x) = x \tan\alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

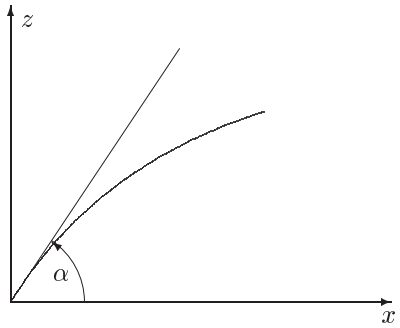

Abbildung 3.8: *Wurfbewegung.*

in der von $x-z$ Ebene. Die *Wurfzeit* T ist durch $z(T) = 0$ bestimmt und ergibt sich mit der Lösung $z(t)$ in (3.62) zu

$$T = \frac{2}{g}\, v_0 \sin\alpha.$$

Die *Reichweite* des Wurfs ist

$$R = x(T) = \frac{2}{g} v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha$$

und sie ist maximal v_0^2/g für einen Wurfwinkel $\pi/4$. Die maximal mögliche Wurfhöhe $v_0^2/2g$ wird natürlich für den senkrechten Wurf erreicht. Für beliebige Winkel ist die Wurfhöhe

$$h = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\alpha.$$

Konstante Kräfte sind konservativ Kräfte,

$$\mathfrak{F} = -\nabla V, \qquad V(\mathfrak{r}) = -\mathfrak{F}\cdot\mathfrak{r} + V_0. \tag{3.63}$$

Für die Wurfbewegungen ist es sinnvoll die Konstante V_0 so zu wählen, daß V auf der Erdoberfläche verschwindet. Dann ist

$$V(\mathfrak{r}) = mgz,$$

und der Energiesatz nimmt folgende einfache Form an

$$\frac{m}{2}\,\dot{\mathfrak{r}}^2 + mgz = E. \tag{3.64}$$

Für die obige Lösung sind die kinetische und potentielle Energie

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\{v_0^2 - 2gv_0 t\sin\alpha + g^2t^2\} \\ V(t) &= mgz(t) \qquad = \frac{m}{2}\{2gv_0 t\sin\alpha - g^2t^2\} \end{aligned}$$

und die gesamte Energie $E = T + V = mv_0^2/2$ ist natürlich konstant. Solange der geworfene Stein steigt verliert er kinetische Energie, da die Schwerkraft ihn verlangsamt: der Stein muß Arbeit gegen die Schwerkraft leisten. Der Verlust an kinetischer Energie bedeutet Gewinn an potentieller Energie. Nach Erreichen der maximalen Höhe gewinnt der Stein wieder kinetische Energie auf Kosten seiner potentiellen Energie; die Schwerkraft leistet am Stein Arbeit.

3.3.2 Oszillatoren

Ein Teilchen bewege sich in einer Umgebung O des Koordinatenursprungs mit Ortsvektor $\mathfrak{r} = 0$ unter dem Einfluss einer konservative Kraft $\mathfrak{F} = -\nabla V$. Wir nehmen an, daß V in der Umgebung des Ursprungs in eine Taylorreihe entwickelt werden kann,

$$\begin{aligned} V(\mathfrak{r}) &= V\big|_0 + \frac{\partial V}{\partial x_a}\Big|_0 x_a + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 V}{\partial x_a \partial x_b}\Big|_0 x_a x_b + \text{ höhere Potenzen in } x_a \\ &\equiv V^{(0)} + V_a x_a + \frac{1}{2} V_{ab} x_a x_b + \text{ höhere Potenzen in } x_a. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Der erste konstante Term $V^{(0)}$ in der Entwicklung, die nullte Näherung, trägt nicht zur Kraft bei und kann ignoriert werden. Die erste Näherung

$$V^{(1)} = V^{(0)} + V_a x_a,$$

liefert eine konstante Kraft $K_a^{(1)} = -V_a$, die schon behandelt wurde. Die zweite Näherung

$$V^{(2)}(\mathfrak{r}) = V^{(0)} + V_a x_a + \frac{1}{2} V_{ab} x_a x_b \tag{3.66}$$

führt auf ein lineares Kraftgesetz,

$$\mathfrak{F}^{(2)} = -\mathfrak{e}_a \big(V_a + V_{ab} x_b\big).$$

Für $V_a = 0$ ist der Ursprung eine *Gleichgewichtslage* des Teilchens und die Bewegungsgleichungen für die kartesischen Koordinaten lauten

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -V''\,\boldsymbol{r}, \qquad V'' = \big(V_{ab}\big). \tag{3.67}$$

Die symmetrische Matrix V'' kann immer mit einer orthogonalen Drehmatrix diagonalisiert werden. Sind $m\omega_1^2, m\omega_2^2$ und $m\omega_3^2$ die Eigenwerte dieser Matrix, dann gibt es immer eine Drehmatrix R mit

$$R^{-1} V'' R = \tilde{V}'' = m \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix}. \tag{3.68}$$

Energien werden in Nm=kg m^2/s^2 angegeben und entsprechend haben die ω_a die Dimension 1/s, also die Dimension von Frequenzen. Die Koordinaten im gedrehten System

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = R^{-1}\boldsymbol{r} \tag{3.69}$$

erfüllen dann die einfachen *entkoppelten* Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}} = -\tilde{V}''\tilde{\boldsymbol{r}} \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}} = -\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 \end{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{r}}, \tag{3.70}$$

oder in Komponenten ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_1 &= -\omega_1^2 \tilde{x}_1 \\ \ddot{\tilde{x}}_2 &= -\omega_2^2 \tilde{x}_2 \\ \ddot{\tilde{x}}_3 &= -\omega_3^2 \tilde{x}_3. \end{aligned}$$

Für $\omega_a^2 > 0$ bezeichnet man die ω_a als *Eigen(kreis)frequenzen* des Systems und die Koordinaten $\tilde{x}_a$, für welche die Bewegungsgleichungen entkoppeln, als *Normalkoordinaten.* Da jede Normalkoordinate $\tilde{x}_a$ der Bewegungsgleichung eines 1-dimensionalen Oszillators gehorcht, genügt es, die eindimensionale Bewegung

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x = -\frac{1}{m}V', \qquad V = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2, \tag{3.71}$$

zu untersuchen. Diese Bewegungsgleichung ist ein gutes Modell für kleine Auslenkungen einer Feder, für welche die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Die Federkonstante ist $k = m\omega_0^2$.

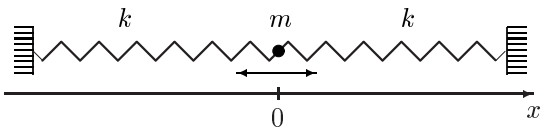

Abbildung 3.9: *Harmonischer Oszillator in Ruhelage*

Stabiles Gleichgewicht $\omega_0^2 > 0$: Ein System mit $V = m\omega_0^2 x^2/2$ heißt *harmonischer Oszillator*, wobei der Zusatz harmonisch erst aus der Art der Lösung klar wird. Die Kraft zeigt immer in Richtung des Ursprungs und die triviale Gleichgewichtslösung $x(t) = 0$ ist stabil. Aus dem Energiesatz

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2\right) \tag{3.72}$$

folgt bereits, daß

$$\frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \leq E \quad \text{oder} \quad |x| \leq \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E}{m}} \equiv a \tag{3.73}$$

gelten muß. Das Teilchen wird durch die lineare Kraft an den Ursprung gebunden. Für $x = \pm a$ ist die Geschwindigkeit des Oszillators Null; er kehrt seine Bewegung um. Diese beiden Orte sind offensichtlich *Umkehrpunkte* der Bewegung. Wir können den Energiesatz benutzen, um $\dot{x}$ als Funktion von x zu bestimmen,

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega_0^2 x^2} = \pm\omega_0\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{3.74}$$

Für $\dot{x} \neq 0$ kann man die Umkehrfunktion $t(x)$ von $x(t)$ bilden und es gilt

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\dot{x}} = \pm\frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{oder} \quad \omega_0 t = \pm\int^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{3.75}$$

Mit

$$\int^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} - \varphi_0,$$

wo φ_0 eine zunächst willkürliche Integrationskonstante ist, finden wir für das positive Vorzeichen in (3.75) die Lösung

$$x(t) = a\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = a\sin\varphi_0\cos\omega_0 t + a\cos\varphi_0\sin\omega_0 t. \tag{3.76}$$

Für das negative Vorzeichen ist die Lösung bis auf die Ersetzung $\varphi_0 \to \varphi_0 + \pi$ identisch. Die allgemeine Lösung hängt also von den beiden *Integrationskonstanten* $a \geq 0$ und $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ ab. Die positive Größe a ist der Maximalwert der Auslenkung und heisst *Amplitude* oder *Schwingungsweite* der Oszillation. Die *Phase* $\omega_0 t + \varphi_0$ gibt den momentanen Auslenkungszustand der Schwingung an. Für den harmonischen Oszillator ist die Kreisfrequenz ω_0 unabhängig von der Amplitude.

Der Ort und die Geschwindigkeit des Oszillators zur Zeit Null sind

$$x_0 = x(0) = a \sin \varphi_0 \quad \text{und} \quad v_0 = \dot{x}(0) = a\omega_0 \cos \varphi_0,$$

so daß wir auch schreiben können

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \tag{3.77}$$

Die Ortskoordinate x ist eine periodische und harmonische Funktion der Zeit und die *Periodendauer* T ist definiert durch

$$\omega_0 T = 2\pi. \tag{3.78}$$

Die Größe ω_0 heißt *Kreisfrequenz*. Die *Frequenz* der Schwingung ist gegeben durch

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \tag{3.79}$$

Instabiles Gleichgewicht $\omega_0^2 < 0$. Für negatives ω_0^2 ist ω_0 imaginär und die lineare Kraft vom Ursprung weggerichtet. Damit wird die Gleichgewichtslösung $x = 0$ instabil. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = |\omega_0^2|\, x$$

hat nun die Form

$$x(t) = a \sinh(|\omega_0| t + \varphi_0) = x_0 \cosh |\omega_0| t + \frac{v_0}{|\omega_0|} \sinh |\omega_0| t. \tag{3.80}$$

Mit zunehmender Zeit wächst die Koordinate x über alle Grenzen. Wie erwartet ist die Bewegung instabil.

Phasenbahnen: Zwischen den Koordinaten $x(t)$ und $p(t) = m\dot{x}(t)$ besteht wegen der Energieerhaltung

$$\frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 = E$$

die Beziehung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{B^2} = 1 \quad \text{mit} \quad A^2 = \frac{2E}{m\omega_0^2}, \quad B^2 = 2mE. \tag{3.81}$$

Für $\omega_0^2 > 0$ ist dies die Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt im Ursprung und den Halbachsen A und B. Der Massenpunkt durchläuft in der (x, p) Ebene, dem sogenannten *Phasenraum* des eindimensionalen Oszillators, eine Ellipse mit den Halbachsen A und B, und zwar im Uhrzeigersinn, siehe Abbildung (3.10).

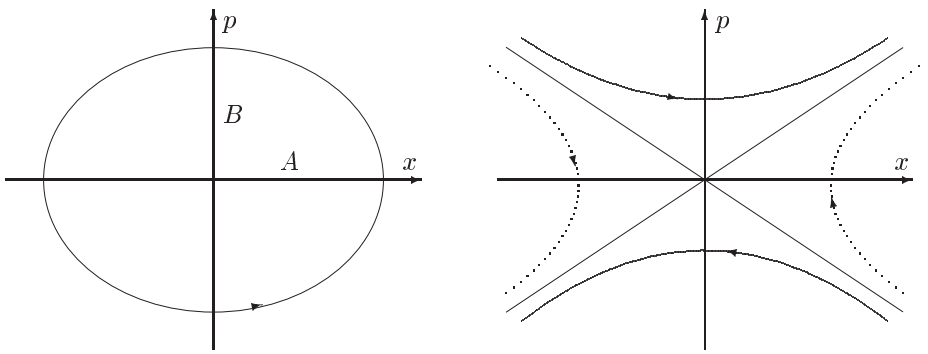

Abbildung 3.10: *Phasenportrait für den harmonischen Oszillator. Die durchgezogenen Phasenbahnen haben $E > 0$ und die gestrichelten $E < 0$.*

Die Lösung der Bewegungsgleichung ist durch Vorgabe von Anfangsort und -geschwindigkeit oder äquivalent durch Angabe von Anfangsort und Anfangsimpuls eindeutig bestimmt. Jeder Punkt im Phasenraum bestimmt also eine eindeutige Lösung und damit eine Lösungskurve $\{x(t), p(t)\}$ im Phasenraum. Eine Lösungskurve bezeichnet man als *Phasenbahn* und die Gesamtheit aller möglichen Phasenbahnen eines vorgegebenen Systems als *Phasenportrait*. Für den instabilen Oszillator ist $A^2 = -|A|^2$ und die Gleichung (3.81) beschreibt eine Hyperbel mit Mittelpunkt im Ursprung. Nur für die stabile Bewegung verläuft die Phasenbahn für alle Zeiten in einem beschränkten Gebiet.

3.3.3 Reibungskräfte

Den idealen Oszillator, der beliebig lange mit konstanter Amplitude schwingt, gibt es nicht, da Reibungsverluste unvermeidlich sind. Reibungskräfte sind in der Regel geschwindigkeitsabhängig, und für dissipative Systeme hat die Bewegungsgleichung die allgemeine Form

$$m\ddot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{F}(\mathfrak{r}, \dot{\mathfrak{r}}) = \mathfrak{F}_{\text{Kons}} + \mathfrak{F}_{\text{Diss}}. \tag{3.82}$$

Für kleinen Geschwindigkeiten kann $\mathfrak{F} = F_a \mathfrak{e}_a$ in der Nähe des Ursprungs in eine Taylorreihe entwickelt werden

$$F_a = F_a|_0 + \frac{\partial F_a}{\partial x_b}\Big|_0 x_b + \frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}\Big|_0 \dot{x}_b + \dots ,$$

wobei die Ableitungen an der Stelle $\mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{r}} = \mathfrak{o}$ zu berechnen sind. Im folgenden vernachlässigen wir die durch die Punkte angedeuteten höheren Potenzen in x_a und $\dot{x}_a$ und beschränken uns auf Kräfte der Form

$$F_a = F_a|_0 + \frac{\partial F_a}{\partial x_b}\Big|_0 x_b + \frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}\Big|_0 \dot{x}_b. \tag{3.83}$$

Wir wollen annehmen, daß in Abwesenheit des letzten Terms die Kraft konservativ sei, also

$$\mathfrak{F}_{\text{Kons}} = \mathfrak{e}_a \left(F_a|_0 + \frac{\partial F_a}{\partial x_b}\Big|_0 x_b \right) = -\nabla V, \tag{3.84}$$

gelte, mit einem offensichtlich quadratischen Potential

$$V = V^{(0)} + V_a x_a + \frac{1}{2} V_{ab} x_a x_b. \tag{3.85}$$

Wir haben hier die Notation aus (3.65) übernommen. Für die Koeffizienten des konservativen Kraftanteils in (3.84) finden wir

$$F_a|_0 = -V_a \quad \text{und} \quad \left.\frac{\partial F_a}{\partial x_b}\right|_0 = \left.\frac{\partial F_b}{\partial x_a}\right|_0 = -V_{ab}. \tag{3.86}$$

Die im dissipativen Kraftanteil auftretenden Koeffizienten

$$\mathfrak{F}_{\text{Diss}} = \mathfrak{e}_a \left(\left.\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}\right|_0 \dot{x}_b \right)$$

setzen wir schlussendlich noch

$$\left.\frac{\partial F_a}{\partial \dot{x}_b}\right|_0 = -W_{ab}, \tag{3.87}$$

damit die Formeln etwas übersichtlicher werden. Damit schreiben sich die Bewegungsgleichungen (3.82) für die Ortskoordinaten in einem Inertialsystem wie folgt

$$m\ddot{x}_a = -V_a - V_{ab} x^b - W_{ab} \dot{x}^b. \tag{3.88}$$

Setzen wir noch

$$(V_a) = \boldsymbol{V}', \quad (V_{ab}) = V'' \quad \text{und} \quad (W_{ab}) = W,$$

so nehmen sie folgende einfache Form an,

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{V}' - V''\boldsymbol{r} - W\dot{\boldsymbol{r}} \tag{3.89}$$

Im Gegensatz zu $\boldsymbol{V}''$ braucht die Matrix W nicht symmetrisch zu sein. Die zugehörige *Energiebilanzgleichung* hat die Form

$$\frac{d}{dt}(T + V) = -W_{ab}\dot{x}_a \dot{x}_b = -\dot{\boldsymbol{r}} \cdot W\dot{\boldsymbol{r}}, \tag{3.90}$$

mit dem quadratischen Potential $V(\boldsymbol{r})$ in (3.85). Da bei Reibungskräften die Energie stets abnimmt, muß

$$\dot{x}_a W_{ab} \dot{x}_b \geq 0 \tag{3.91}$$

für alle Geschwindigkeiten gelten. In die Formel für die Abnahme der Energie geht nur der symmetrische Anteil der Matrix W,

$$W_{(ab)} = \tfrac{1}{2}(W_{ab} + W_{ba}),$$

ein. Die Bedingung (3.91) bedeutet, daß die Eigenwerte von $W_{(ab)}$ nicht-negativ sind. Der antisymmetrische Anteil von W,

$$W_{[ab]} = \tfrac{1}{2}(W_{ab} - W_{ba}),$$

trägt zur Leistungsbilanz nicht bei, ganz ähnlich wie die Lorentzkraft im magnetischen Feld. Deshalb machen wir jetzt die vereinfachende Annahme, daß die Matrix W symmetrisch ist. Den allgemeinen Fall werden wir später behandeln.

Wir untersuchen nun wichtige Spezialfälle der Bewegungsgleichung (3.88) beziehungsweise (3.89). Ist die Matrix V'' invertierbar dann können wir unser Koordinatensystem verschieben,

$$\boldsymbol{r} = \tilde{\boldsymbol{r}} - (V'')^{-1}\,\boldsymbol{V}',$$

und bezüglich der neuen Koordinaten $\tilde{\boldsymbol{r}}$ verschwindet der konstante Kraftanteil. Wir dürfen also annehmen, daß $\boldsymbol{V}' = 0$ ist.

- Für $W = 0$ handelt es sich um den bereits diskutierten harmonischen Oszillator.
- Für $V'' = 0$ erfüllt der Ortsvektor die einfache lineare Differentialgleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -W\,\dot{\boldsymbol{r}} \tag{3.92}$$

Jede symmetrische Matrix W kann nach einem Satz der linearen Algebra mit einer Drehmatrix R diagonalisiert werden,

$$R^{-1}WR = \tilde{W}, \quad \text{mit} \quad \tilde{W} = m\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_a \geq 0. \tag{3.93}$$

Die Eigenwerte von W sind also $m\gamma_a$, wobei die nicht-negativen γ_a die Dimensionen einer Frequenz haben. Nun benutzen wir die diagonalisierende Drehung R um auf *Normalkoordinaten* zu transformieren,

$$\boldsymbol{r} = R\,\tilde{\boldsymbol{r}}. \tag{3.94}$$

Bezüglich der geschlängelten Normalkoordinaten lauten die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\tilde{\boldsymbol{r}}} = -R^{-1}WR\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}} = -\tilde{W}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}. \tag{3.95}$$

Da $\tilde{W}$ diagonal ist, siehe (3.93), entkoppeln die drei Differentialgleichungen nach der Transformation auf Normalkoordinaten $\tilde{\boldsymbol{r}}$. Es genügt daher, den eindimensionalen Fall zu betrachten,

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x},$$

wobei x eine der Koordinaten $\tilde{x}_a$ bezeichnet und entsprechend γ einer der γ_a in (3.93). Diese einfache Differentialgleichung für die Geschwindigkeit hat die Lösung

$$\dot{x}(t) = e^{-\gamma t}v_0, \qquad v_0 = \dot{x}(0). \tag{3.96}$$

Eine weitere Integration führt auf folgende Zeitabhängigkeit der Ortskoordinate

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}\big(1 - e^{-\gamma t}\big), \qquad x_0 = x(0). \tag{3.97}$$

Die Lösung hat das asymptotische Verhalten

$$x(t \to \infty) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}, \tag{3.98}$$

d.h. das Teilchen legt nur eine endliche Strecke zurück, auch wenn man beliebig lange wartet. Im Phasenraum verläuft die Bewegung längs der Strecke vom Punkt $(x_0, p_0 = mv_0)$ zum Punkte $(x_0 + v_0/\gamma, 0)$.

• Für $V'' \neq 0$ und $W \neq 0$ ist die Lösungsuche für die lineare Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -V''\boldsymbol{r} - W\dot{\boldsymbol{r}} \tag{3.99}$$

relativ schwierig ohne zusätzliche Annahmen an die Kraft, d.h. an die symmetrischen Matrizen V'' und W. Wir wollen vorerst annehmen, daß sie vertauschen

$$V''W - WV'' \equiv [V'', W] = 0.$$

Der allgemeine Fall wird dann später analysiert. Nach einem Theorem aus der linearen Algebra können zwei kommutierende und diagonalisierbare Matrizen *gleichzeitig* diagonalisiert werden,

$$V'' = R\tilde{V}''R^{-1} \quad \text{und} \quad W = R\tilde{W}R^{-1}, \quad \text{mit diagonalen} \quad \tilde{V}'', \tilde{W}. \tag{3.100}$$

Für $\tilde{V}''$ wählen wir die Parametrisierung (3.68) und für $\tilde{W}$ diejenige in (3.93). In den entsprechenden Normalkoordinaten $\tilde{\boldsymbol{r}} = R\tilde{\boldsymbol{r}}$ entkoppeln dann die Differentialgleichungen wieder,

$$\ddot{\tilde{x}}_a = -\omega_a^2 \tilde{x}_a - \gamma_a \dot{\tilde{x}}_a$$

und es genügt, die eindimensionale Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x} \tag{3.101}$$

zu untersuchen. Aus den Analysis ist bekannt, daß jede Lösung einer derartigen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten eine Linearkombination von zwei *Fundamentallösungen* ist

$$x(t) = P_1(t)\, e^{\lambda_1 t} + P_2(t)\, e^{\lambda_2 t}, \tag{3.102}$$

wobei die P_i Polynome in t sind. Ist λ_1 und λ_2 verschieden, dann sind die P_i Konstanten. Ist $\lambda_1 = \lambda_2$, dann können sie sie Polynome vom Grade 1 sein. Setzen wir nun den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

ins (3.101) ein, so ergibt sich

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega_0^2 e^{\lambda t} - \lambda\gamma e^{\lambda t}.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn die Konstante λ im Exponent die *charakteristische Gleichung* erfüllt,

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{3.103}$$

Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} + \mu \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2} - \mu \quad \text{mit} \quad \mu = +\sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2}. \tag{3.104}$$

Für $\mu \neq 0$ ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung hat nach dem zitierten Theorem die Form

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3.105}$$

Die beiden Integrationskonstanten a_1 und a_2 werden durch Vorgabe von Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit festgelegt. Für $\gamma^2 = 4\omega_0^2$ ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und (3.105) ist nicht mehr die allgemeine Lösung, siehe weiter unten. Wir diskutieren nun die verschiedenen Lösungstypen.

Starke Dämpfung (Kriechfall): Für $\gamma^2/4 > \omega_0^2$ und mit obiger Definition von μ schreibt sich die Lösung gemäß

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\big(a_1 e^{\mu t} + a_2 e^{-\mu t}\big). \tag{3.106}$$

Da $\gamma/2 > \mu$ ist, gilt

$$x(t \to \infty) = 0. \tag{3.107}$$

Die Bewegung ist nicht periodisch. Man kann leicht die Konstanten a_1 und a_2 mit den Anfangswerten $x_0 = x(0)$ und $v_0 = \dot{x}(0)$ in Verbindung bringen und findet

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\Big(x_0 \cosh \mu t + \frac{1}{\mu}\big(v_0 + \tfrac{1}{2}\gamma x_0\big) \sinh \mu t\Big). \tag{3.108}$$

Schwache Dämpfung (Schwingfall): Hier ist $\gamma^4/4 < \omega_0^2$ und μ wird imaginär. Setzen wir

$$\mu = i\omega_\gamma, \qquad \omega_\gamma = +\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}, \tag{3.109}$$

dann lautet die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t/2}\big(a_1 e^{i\omega_\gamma t} + a_2 e^{-i\omega_\gamma t}\big). \tag{3.110}$$

Da $x(t)$ eine reelle Größe ist, muß $a_2 = \bar{a}_1$ gelten. Stellen wir $a_{1,2}$ in Polarkoordinaten dar

$$a_1 = \frac{1}{2i}\, a e^{i\varphi_0} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{i}{2}\, a e^{-i\varphi_0} \quad \text{mit} \quad a > 0,$$

dann schreibt sich die Lösung gemäß

$$\begin{aligned} x(t) &= a\, e^{-\gamma t/2} \sin\big(\omega_\gamma t + \varphi_0\big) \\ &= e^{-\gamma t/2}\Big(x_0 \cos \omega_\gamma t + \frac{1}{\omega_\gamma}\big(v_0 + \tfrac{1}{2}\gamma x_0\big) \sin \omega_\gamma t\Big). \end{aligned} \tag{3.111}$$

Hier handelt sich um eine periodische Schwingung mit Kreisfrequenz $\omega_\gamma < \omega_0$ und abklingender Amplitude

$$a\, e^{-\gamma t/2} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad t \to \infty. \tag{3.112}$$

Das Verhältnis der Ausschläge in zwei benachbarten Maxima, deren zeitlicher Abstand $T = 2\pi/\omega_\gamma$ ist, beträgt $\exp(-\gamma T/2)$. Die Zeit $\tau = 2/\gamma$, nach der die Amplitude auf den e-ten Teil abgesunken ist, heißt *Relaxationszeit* der Schwingung. Für $\gamma \to 2\omega_0$ wird der Schwinger so stark abgebremst, daß $\omega_\gamma \to 0$ strebt.

Kritische Dämpfung (aperiodischer Grenzfall): Für $\gamma = 2\omega_0$ ist

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2}$$

und (3.105) gibt zunächst nur eine Lösung,

$$x(t) = ae^{-\gamma t/2} = ae^{-\omega_0 t}, \qquad a = a_1 + a_2.$$

Da die Bewegungsgleichung aber eine Differentialgleichung 2. Ordnung ist, muß die allgemeine Lösung 2 Integrationskonstanten enthalten. Eine zweite unabhängige Lösung gewinnt man mittels der Methode der *Variation der Konstanten*. Dazu lässt man die Integrationskonstante a von der Zeit abhängen und setzt

$$x(t) = a(t)e^{-\omega_0 t}.$$

Nun setzen wir

$$\dot{x}(t) = \big\{\dot{a}(t) - \omega_0 a(t)\big\}e^{-\omega_0 t} \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = \big\{\ddot{a}(t) - 2\omega_0\dot{a}(t) + \omega_0^2 a(t)\big\}e^{-\omega_0 t}$$

in die Bewegungsgleichung $\ddot{x} + 2\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ ein. Wir erhalten

$$\big\{\ddot{a} - 2\omega_0\dot{a} + \omega_0^2 a\big\} + 2\omega_0\big\{\dot{a} - \omega_0 a\big\} + \omega_0^2 a = \ddot{a} = 0$$

woraus folgt, dass $a(t)$ eine lineare Funktion der Zeit sein muss, $a(t) = a_1 + a_2 t$. Die allgemeine Lösung für $\gamma = 2\omega_0$ ist deshalb

$$x(t) = e^{-\omega_0 t}\big(a_1 + a_2 t\big) = e^{-\omega_0 t}\big\{x_0 + (\omega_0 x_0 + v_0)t\big\}. \tag{3.113}$$

Der Bewegungsablauf ist ähnlich dem der starken Dämpfung. In Abbildung (3.11) sind die Schwingungsformen eines gedämpften Oszillators mit $\omega_0 = 1$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$ für die Werte $\gamma = 8$ (Kriechfall), $\gamma = 2$ (kritisch) und $\gamma = 1/2$ (Schwingfall) gezeigt.

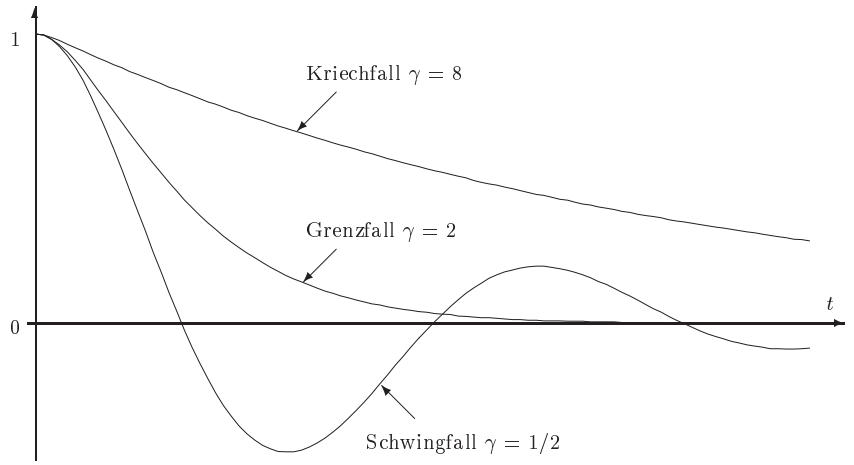

Abbildung 3.11: *Die verschiedenen Lösungstypen für den Oszillator mit Dämpfung.*

3.4 Lineare Differentialgleichungssysteme

Für die bisher betrachteten dynamischen Systeme lauten die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = A\boldsymbol{r} + B\dot{\boldsymbol{r}} \tag{3.114}$$

mit Matrizen A und B. Für ein 1-dimensionales System sind A und B Zahlen und für eine 3-dimensionales System 3×3-Matrizen. Mit $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ sind die Bewegungsgleichungen äquivalent zu folgendem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{r}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \equiv M \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}, \tag{3.115}$$

oder wenn wir Orts- und Geschwindigkeitsvektor in einen Vektor $\boldsymbol{\xi}$ vereinigen,

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \tag{3.116}$$

schreibt sich die Bewegungsgleichung gemäß

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} \quad \text{mit Anfangsbedingung} \quad \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0. \tag{3.117}$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung *erster Ordnung* beschreibt die Bewegung im Raum mit Koordinaten $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$. Für 1-dimensionale Systeme ist M eine $2\times 2-$ und für 3-dimensionale Systeme eine 6×6 Matrix. Wäre M eine reelle oder komplexe Zahl, dann könnten wir die Lösung dieser dann sehr einfachen Differentialgleichung sofort angeben. Für Systeme von Differentialgleichungen, d.h. wenn M keine Zahl sondern eine Matrix ist, ist die Lösung ähnlich einfach, wie wir jetzt sehen werden.

3.4.1 Matrix-Exponentialfunktion

Formal hat die Differentialgleichung (3.117) mit beliebiger Matrix M die folgende Lösung,

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0. \tag{3.118}$$

Dabei braucht M nicht die spezielle Form in (3.115) zu haben. Wir wollen uns hier nicht auf 1 oder 3-dimensionale Bewegungen in der klassischen Mechanik beschränken. Deshalb soll M im Folgenden eine *beliebige n-dimensionale Matrix* sein.

Der Beweis der Behauptung (3.118) ist einfach und benutzt die Reihendarstellung der Matrix-Exponentialfunktion,

$$e^{Mt} = \mathbb{1} + tM + \frac{t^2}{2!}M^2 + \frac{t^3}{3!}M^3 + \dots.$$

Für beliebige Matrizen ist dies eine absolut konvergente Potenzreihe. Deshalb vertauschen Differenzieren und Summieren und wir finden

$$\frac{d}{dt}e^{Mt} = M\big(\mathbb{1} + tM + \frac{t^2}{2!}M^2 + \dots\big) = Me^{tM} = e^{tM}M. \tag{3.119}$$

Daraus folgt unmittelbar, daß $\boldsymbol{\xi}$ in (3.118) die Differentialgleichung (3.117) löst,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \frac{d}{dt}e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0 = Me^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0 = M\boldsymbol{\xi}(t). \tag{3.120}$$

Nur wenn zwei Matrizen vertauschen, $[M, N] = 0$, hat die Exponentialfunktion die für Zahlen charakteristische Eigenschaft

$$e^{M+N}e^Me^N = e^Ne^M \Longleftrightarrow [M, N] \equiv MN - NM = 0. \tag{3.121}$$

Da M und $(-M)$ vertauschen folgt sofort, daß

$$(e^M)^{-1} = e^{-M}. \tag{3.122}$$

Für zwei nicht-kommutierende Matrizen kann man die BAKER-HAUSDORFF und BAKER-CAMPBELL-HAUSSDORF Formeln benutzen. Die erste lautet

$$e^{tM} N e^{-tM} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \underbrace{[M,[M,[\ldots,[M}_{n-mal},N]\ldots]] = \exp\left(t\,\mathrm{ad}_M\right) N, \tag{3.123}$$

wobei wir die lineare Abbildung

$$\mathrm{ad}_M : N \longrightarrow [M,N]$$

eingeführt haben, und die zweite Formel

$$e^M e^N = \exp\left(M + N + \frac{1}{2}[M,N] + \frac{1}{12}[M,[M,N]] + \frac{1}{12}[N,[N,M]] + \ldots\right). \tag{3.124}$$

Im Exponent auf der rechten Seite stehen neben M und N nur Glieder, die (von Zahlenfaktoren abgesehen) nur durch Kommutatoren von M und N allein gebildet werden. Dieses HAUSDORFFsche Ergebnis ist grundlegend für eine Theorie der LIEgruppen und kommt in der Quantenmechanik zur Anwendung.

Wir beweisen die BAKER-HAUSDORFF-Formel (3.123) indem wir zeigen, daß beide Seiten in dieser Formel identische Taylorentwicklung bei $t = 0$ haben. Die Ableitungen der linken Seite bei $t = 0$ sind

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{tM} N e^{-tM}\Big|_{t=0} = (\mathrm{ad}_M)^n\, N,$$

und diejenigen der rechten Seite

$$\frac{d^n}{dt^n} \exp\left(t\,\mathrm{ad}_M\right) N\Big|_{t=0} = \frac{d^n}{dt^n}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\mathrm{ad}_M)^n\, N\right)\Big|_{t=0} = (\mathrm{ad}_M)^n\, N$$

und die Gleichheit aller Ableitungen beweist die Formel (3.123).

Wir beweisen die BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel (3.124) für den in der Physik wichtigen Spezialfall, dass beide Matrizen M, N mit ihrem Kommutator vertauschen,

$$[M,[M,N]] = [N,[M,N]] = 0.$$

In diesem Fall vereinfacht sich die allgemeine Formel (3.124) zu

$$e^{tM} e^{tN} = \exp\left(tM + tN + \frac{t^2}{2}[M,N]\right) = e^{t(M+N)} \exp\left(\frac{t^2}{2}\,[M,N]\right). \tag{3.125}$$

Falls M mit dem Kommutator von M und N vertauscht, dann folgt aus (3.123) die nützliche Formel

$$e^{tM} N = \big(N + t[M,N]\big)\, e^{tM}.$$

Damit finden wir für die Ableitung der linken Seite in (3.125)

$$\frac{d}{dt}(\text{lhs}) = Me^{tM}e^{tN} + e^{tM}Ne^{tN} = (M + N + t[M,N])\, e^{tM}e^{tN}.$$

Die Ableitung der rechten Seite ist

$$\frac{d}{dt}(\text{rhs}) = (M+N)(\text{rhs}) + (\text{rhs})t[M,N] = \big(M + N + t[M,N]\big)(\text{rhs}).$$

Offensichtlich erfüllen beide Seiten in (3.125) die gleiche Differentialgleichung. Da zusätzlich beide Seiten für $t = 0$ die Einheitsmatrix ergeben, folgt dann die Behauptung (3.125).

Diagonalisierbare Matrizen

Die Berechnung von Exponentialfunktion ist relativ einfach für diagonalisierbare Matrizen. Eine Matrix M heisst diagonalisierbar, wenn es eine reguläre Transformation S gibt, so daß

$$S^{-1}MS = \tilde{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{3.126}$$

diagonal ist. Die Spalten der diagonalisierenden Transformationsmatrix S sind die Eigenvektoren von M. Mit der

$$f(M) = f(S\tilde{M}S^{-1}) = Sf(\tilde{M})S^{-1}$$

ist es nun relativ einfach, diagonalisierbare Matrizen zu exponentieren,

$$e^{Mt} = e^{S\tilde{M}S^{-1}} = Se^{\tilde{M}t}S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} S^{-1}. \tag{3.127}$$

Die Exponentiation reduziert sich auf die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M.

Ersetzt man die Koordinaten ξ durch die (im allgemeinen komplexen) Normalkoordinaten $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ via $S\tilde{\boldsymbol{\xi}}$, dann entkoppeln die Bewegungsgleichungen,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} \Longleftrightarrow S\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = MS\tilde{\boldsymbol{\xi}} \Longleftrightarrow \dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \tilde{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}},$$

und die Komponenten von $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ haben eine exponentielle Zeitabhängigkeit

$$\tilde{\xi}_a(t) = e^{\lambda_a t}\tilde{\xi}_a(0).$$

Für diagonalisierbare Matrizen treten bei der Lösung von (3.117) also nur Exponentialfunktionen und keine Polynome auf. Obwohl M eine reelle Matrix ist, sind im Allgemeinen die Eigenwerte λ_k und damit die Lösung $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ komplex. Aber nach Rücktransformation gewinnt man für eine reelle Anfangsbedingung ξ_0 wieder eine reelle Lösung

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0.$$

Eine $n \times n$ Matrix M ist diagonalisierbar wenn die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ihres *charakteristischen Polynoms*

$$\begin{aligned} P_M(\lambda) &= \det(\lambda \mathbb{1} - M) = \lambda^n - \mathrm{Sp}\,(M)\lambda^{n-1} + \ldots + (-)^n \det M \\ &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) \end{aligned} \tag{3.128}$$

verschieden sind. Mit λ_k ist auch $\bar{\lambda}_k$ eine Nullstelle von $P_M(\lambda)$, denn das charakteristische Polynom einer reellen Matrix hat reelle Koeffizienten.

Bei einer expliziten Berechnung von $\exp(Mt)$ ist es oft auch hilfreich, sich an den Satz von Cayley-Hamilton zu erinnern, nach dem

$$\begin{aligned} P_M(M) &= (M - \lambda_1 \mathbb{1})(M - \lambda_2 \mathbb{1}) \cdots (M - \lambda_n \mathbb{1}) \\ &= M^n - (\mathrm{Sp}\, M)\, M^n + \ldots + (-)^n (\det M)\, \mathbb{1} = 0 \end{aligned} \tag{3.129}$$

gilt. Also ist die n'te Potenz einer n-dimensionalen Matrix M immer eine Linearkombination der niedrigeren Potenzen von M. Zum Beispiel hat die schiefsymmetrische infinitesimale Drehmatrix in (3.17),

$$\Omega = \omega \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \omega\, \hat{\Omega}, \qquad \boldsymbol{n}^2 = 1,$$

das charakteristische Polynom

$$P_\Omega = \lambda^3 + \omega^2 \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}\, \lambda = \lambda^3 + \omega^2 \lambda,$$

und die Identität von Cayley-Hamilton impliziert

$$\Omega^3 = -\omega^2 \Omega \Longrightarrow \Omega^{2n} = (-)^{n-1} \omega^{2n-2} \Omega^2, \quad \Omega^{2n+1} = (-)^n \omega^{2n} \Omega.$$

Dies führt dann auf

$$\exp(\Omega t) = \mathbb{1} + \hat{\Omega}^2 + \sin \omega t\, \hat{\Omega} - \cos \omega t\, \hat{\Omega}^2.$$

Wegen $\hat{\Omega}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{r}$ gilt auch

$$e^{\Omega t} \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r})\boldsymbol{n} - \cos \omega t\, \boldsymbol{n} \wedge (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{r}) + \sin \omega t\, \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{r},$$

also beschreibt $\exp(\Omega t)$ eine Drehung mit Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse $\mathbf{n}$, siehe (2.44). Dies erklärt auch den Namen infinitesimale Drehmatrix für Ω.

Zur weiteren Illustration betrachten noch einmal die Bewegungsgleichungen des 1-dimensionalen Oszillators mit Reibung. Mit (3.101) ist

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{3.130}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix

$$\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} + \mu, \quad \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2} - \mu, \quad \text{mit} \quad \mu = \sqrt{\gamma^2/4 - \omega_0^2},$$

sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2$, siehe (3.104). Für $\mu \neq 0$ sind die Eigenwerte verschieden und die Matrix M kann diagonalisiert werden,

$$M = S \tilde{M} S^{-1}, \qquad \tilde{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Nun ist es leicht die Matrix tM zu exponentieren,

$$e^{Mt} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} S^{-1} = e^{-\gamma t/2} \Big(\cosh \mu t \; 1\!\!1 + \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} \gamma/2 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \sinh \mu t \Big).$$

Wir finden wieder die frühere Lösung (3.108) für den Kriechfall

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t/2} \left\{ \cosh \mu t \, x_0 \; + \; \frac{1}{\mu} (\gamma x_0/2 + v_0) \; \sinh \mu t \right\} \\ v(t) &= e^{-\gamma t/2} \left\{ \cosh \mu t \, v_0 - \frac{1}{\mu} (\omega_0^2 x_0 + \gamma v_0/2) \sinh \mu t \right\}. \end{aligned} \tag{3.131}$$

Den Schwingfall erhalten wir, wenn wir μ durch $i\omega_\gamma$ ersetzen. Deshalb ist für einen Oszillator mit schwacher Dämpfung

$$e^{Mt} = e^{-\gamma t/2} \Big(\cos \omega_\gamma t \; 1\!\!1 + \frac{1}{\omega_\gamma} \begin{pmatrix} \gamma/2 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \sin \omega_\gamma t \Big). \tag{3.132}$$

Nicht-diagonalisierbare Matrizen und Jordan-Normalform

Interessanter ist der aperiodische Grenzfall, für welchen das charakteristische Polynom von

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0 \end{pmatrix} \equiv D + N$$

eine doppelte Nullstelle bei $-\omega_0$ hat. Die beiden Matrizen D und N vertauschen offensichtlich und N ist nilpotent, $N^2 = 0$. Für die Exponentialfunktion erhalten wir

$$e^{Mt} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt} e^{Nt} = e^{Dt} \big(1\!\!1 + Nt \big) = \begin{pmatrix} 1 + \omega_0 t & t \\ -\omega_0^2 t & 1 - \omega_0 t \end{pmatrix} e^{-\omega_0 t},$$

wobei wir benutzten, daß D und N kommutieren. Daraus gewinnen wir sofort die Lösung für den aperiodischen Grenzfall

$$\begin{aligned} x(t) &= \{ x_0 + (\omega_0 x_0 + v_0) t \} \, e^{-\omega_0 t} \\ v(t) &= \{ v_0 - (\omega_0 x_0 + v_0) \omega_0 t \} \, e^{-\omega_0 t} \end{aligned} \tag{3.133}$$

in Übereinstimmung mit (3.113). Im Gegensatz zum Kriech- und Schwingfall sind die beiden Eigenwerte des charakteristischen Polynoms im aperiodischen Grenzfall gleich.

Hat das charakteristische Polynom $P_M(\lambda)$ einer $n \times n$ Matrix M mehrfache Nullstellen, dann ist M im Allgemeinen nicht mehr diagonalisierbar. Das Polynom hat dann die Form

$$P_M(\lambda) = \det(\lambda 1\!\!1 - M) = \prod_{k=1}^{r} (\lambda - \lambda_k)^{n_k}, \qquad n_1 + \ldots n_r = n,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von P_M und die $n_k > 0$ ihre algebraischen Vielfachheiten sind. Wie im diagonalisierbaren Fall heissen die λ_k *Eigenwerte* der Matrix M. Hat λ_k die Multiplizität n_k, so ist auch $\bar{\lambda}_k$ ein Eigenwert derselben Multiplizität, denn das charakteristische Polynom der reellen Matrix M hat reelle Koeffizienten.

Wir erinnern daran, daß eine $n \times n$-Matrix der Form

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{3.134}$$

JORDAN-*Block* mit Eigenwert λ heisst. Eine JORDAN-*Matrix* ist eine quadratische Matrix der Form

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c|c} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots \end{array}\right), \qquad n_1 + \ldots + n_r = n. \tag{3.135}$$

Eine JORDAN-*Basis* einer linearen Abbildung (Matrix) $M : V \longrightarrow V$ ist eine Basis von V, bezüglich der die Matrix von M eine JORDAN Matrix ist, also die JORDAN-Normalform (3.135) hat. Es gilt der

Satz 3 (Existenz einer Jordan-Basis) *Sei $M : V \to V$ eine lineare Abbildung eines endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraumes V. Dann existiert für M eine* JORDAN-*Basis. Die* JORDAN-*Matrix $\tilde{M}$ ist eindeutig, bis auf eine Permutation der* JORDAN-*Blöcke.*

Wir finden also eine Koordinatentransformation $\boldsymbol{\xi} = S\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ mit regulärer Transformationsmatrix S, so daß in den gestrichenen Koordinaten die Abbildungsmatrix

$$\tilde{M} = S^{-1} M S \tag{3.136}$$

eine JORDAN-Matrix ist. Im diagonalisierbaren Fall heissen die $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ *Normalkoordinaten* und wir wollen diesen Namen im allgemeineren Fall beibehalten. Wegen der Blockdiagonalform (3.135) von $\tilde{M}$ in Normalkoordinaten ist

$$\exp(Mt) = S e^{\tilde{M}t} S^{-1} = S \begin{pmatrix} \exp\big(J_{n_1}(\lambda_1)t\big) & & 0 \\ & \exp\big(J_{n_2}(\lambda_2)t\big) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} S^{-1}, \tag{3.137}$$

und es genügt vollauf, $\exp\big(J_n(\lambda)t\big)$ zu berechnen. Nun schreiben wir $J_n(\lambda) = \lambda \mathbb{1}_n + J_n(0)$, wobei die Summanden auf der rechten Seite offensichtlich vertauschen, und finden

$$\exp\big(J_n(\lambda)t\big) = e^{\lambda} \exp\big(J_n(0)\, t\big).$$

Da die Matrix $J_n(0)$ offensichtlich nilpotent ist, $J_n^n(0) = 0$, kann sie mit

$$\big(J_n^m(0)\big)_{ij} = \delta_{i,j-m}, \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

leicht exponentiert werden. Wir finden

$$\exp\big(J_n(\lambda)t\big) = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.138}$$

Wir fassen zusammen:

Satz 4 *In Normalkoordinaten (bezüglich einer* JORDAN *Basis) hat* $\exp(\tilde{M}t)$ *die Form (3.137) mit* $\exp\big(J_n(\lambda)t\big)$ *aus (3.138).*

Zur Konstruktion einer JORDAN-Basis nutzt man aus, daß

$$\big(\tilde{M} - \lambda_1 \mathbb{1}\big) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

ist, oder, da die n_1-te Potenz von $J_{n_1}(0)$ verschwindet,

$$\big(\tilde{M} - \lambda_1 \mathbb{1}\big)^{n_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2}^{n_1}(\lambda_2 - \lambda_1) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

gilt. Man sieht sofort, daß die Matrizen $J_{n_k}^{n_1}(\lambda_k - \lambda_1)$, $k = 2, \ldots, r$ invertierbar sind. Anstelle von λ_1 hätten wir irgend einen anderen Eigenwert λ_k auszeichnen können mit dem Ergebnis, daß auf den Unterräumen

$$\tilde{V}_k = \big\{\tilde{\boldsymbol{\xi}} \in V \,|\, \big(\lambda_k \mathbb{1} - \tilde{M}\big)^{n_k} \tilde{\boldsymbol{\xi}} = 0\big\} = \mathrm{Kern}(\lambda_k - \tilde{M})^{n_k}$$

die Matrix $\tilde{M}$ gleich $J_{n_k}(\lambda_k)$ ist. Es kann passieren, daß $J_{n_k}(\lambda_k)$ in weitere JORDANblöcke zerfällt und im Extremfall $\lambda_k \mathbb{1}_{n_k}$ ist. Zum Beispiel hat das charakteristische Polynom von $\mathbb{1}_n$ eine n-fache Nullstelle bei $\lambda = 1$ und die Jordan-Matrix ist $\mathbb{1}_n$.

In den ursprünglichen Koordinaten $\boldsymbol{\xi} = S^{-1}\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ hat M im Allgemeinen nicht mehr die explizite JORDANform (3.135). Trotzdem können wir natürlich die durch die JORDAN-Zerlegung ausgezeichneten Unterräume auf invariante Weise wie folgt charakterisieren:

$$V_k = S\tilde{V}_k = \mathrm{Kern}\big(S\big(\lambda_k - \tilde{M}\big)^{n_k} S^{-1}\big) = \mathrm{Kern}(\lambda_k - M)^{n_k}.$$

Die Unterräume V_k heissen *verallgemeinerte Eigenräume* der linearen Abbildung M.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen sind wir nun in der Lage die Lösungen des dynamischen Systems $\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi}$ explizite anzugeben. Für ein $\boldsymbol{\xi}_0$ im Unterraum V_k ist $S^{-1}\boldsymbol{\xi}_0$ im Unterraum $\tilde{V}_k$ und

$$e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0 = Se^{\tilde{M}t}S^{-1}\boldsymbol{\xi}_0 = Se^{\tilde{M}t}S^{-1}\boldsymbol{\xi}_0 = e^{\lambda_k t}P_{n_k}(t)\,\boldsymbol{\xi}_0,$$

wobei wir das Matrixpolynom

$$P_{n_k}(t) = S\,\exp\big(J_{n_k}(0)t\big)\,S^{-1}$$

der Ordnung n_k einführten. Wir haben also gezeigt, daß in in einer beliebigen Basis die Matrix M als Summe von

$$D = S\begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{1}_{n_1} & & \\ & \lambda_2 \mathbb{1}_{n_2} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} S^{-1} \quad \text{und} \quad N = S\begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & J_{n_2}(0) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} S^{-1}$$

dargestellt werden kann, wobei

$$[D, N] = 0 \quad \text{und} \quad N^m = 0 \quad \text{mit} \quad m = \max\{n_1, \ldots, n_r\} \tag{3.139}$$

gilt. In expliziten Rechnungen ist das Auffinden der JORDAN Basis der schwierigste Teil der Aufgabe. Wir wollen dies an einem einfachen dynamischen System illustrieren.

Beispiel: Gegeben sei folgendes dynamische System

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.140}$$

Das charakteristische Polynom

$$P_M(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - M) = (\lambda+1)^2(\lambda-1) \tag{3.141}$$

hat eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = -1$ und eine einfache bei $\lambda = 1$. Also hat M den zweifachen Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und den einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 1$. Wegen

$$(\mathbb{1} - M) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (-\mathbb{1} - M)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sind die verallgemeinerten Eigenräume

$$V_1 = \text{span}\{\tilde{\mathfrak{e}}_3 = 2\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3\} \quad \text{und} \quad V_2 = \text{span}\{\tilde{\mathfrak{e}}_1 = \mathfrak{e}_1, \tilde{\mathfrak{e}}_2 = \mathfrak{e}_2\}.$$

Damit kennen wir die Transformationsmatrix S, welche die ursprüngliche Basis in die JORDANbasis überführt,

$$\tilde{\mathfrak{e}}_a = S_{ba}\,\mathfrak{e}_b \Longrightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Transformation auf verallgemeinerte Normalkoordinaten $\boldsymbol{\xi} = S\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\xi}}} = \tilde{M}\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \quad \text{mit} \quad \tilde{M} = S^{-1}MS.$$

Nach unserem allgemeinen Theorem muß $\tilde{M}$ eine Jordan-Matrix sein, d.h. die Summe einer diagonalen und einer nilpotenten Matrix,

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach der Rücktransformation findet man die entsprechende Zerlegung von M

$$M = D + N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [D, N] = 0, \quad N^2 = 0.$$

Um $\exp(Mt)$ zu berechnen, benutzen wir, daß

$$e^{Mt} \;=\; S\,e^{\tilde{M}t}\,S^{-1} = S\,e^{\tilde{D}t}\big(1 + \tilde{N}t\big)\,S^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2(e^t - e^{-t}) \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}. \tag{3.142}$$

Damit wäre die Differentialgleichung (3.140) für beliebige Anfangsbedingungen gelöst.

Für explizite Rechnungen kann man zum Beispiel auf das algebraischen Computerprogramm Maple zurückgreifen. Mit dem `with(linalg)` Befehl lädt man die in der linearen Algebra gebräuchlichen Funktionen. Definiert man die Matrix M,

```
M:=matrix(3,3,[-1,1,-2,0,-1,4,0,0,1])
```

so liefert der Befehl `J:=jordan(M,'SI')` die JORDAN Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit `S=inverse(SI)` erhält man die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

welche M in die JORDAN-Normalform bringt, $J = SMS^{-1}$, was mit `multiply(S,M,SI)` nachgeprüft werden kann.

3.4.2 Stabilität von linearen Systemen I

Eine wichtige Frage ist diejenige nach der Stabilität von (Gleichgewichts)Lösungen der Bewegungsgleichungen. Wir werden nun untersuchen, wann die Gleichgewichtslösung $\boldsymbol{\xi} = 0$ des linearen dynamischen Systems

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi}, \qquad \boldsymbol{\xi}(0) = \boldsymbol{\xi}_0 \tag{3.143}$$

stabil oder instabil ist. Für die Stabilitätsanalyse zerlegen wir den Vektor $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}_{01} + \ldots + \boldsymbol{\xi}_{0r}$, wobei $\boldsymbol{\xi}_{0k}$ im verallgemeinerten Eigenraum V_k liegt. Im Gegensatz zu $\boldsymbol{\xi}_0$ können die $\boldsymbol{\xi}_{0k}$ komplex sein. Dann ist

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0 &= \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k t} P_{n_k}(t)\, \boldsymbol{\xi}_{0k}, \quad \text{wobei} \\ P_{n_k}(t) &= 1 + tN_k + \ldots + \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} N_k^{n_k-1} \end{aligned} \tag{3.144}$$

ein matrixwertiges Polynom in t der Ordnung $< n_k$ ist. Daher ist zur Zeit t der quadrierte Abstand des Teilchen vom Ursprung $\boldsymbol{\xi} = 0$ gleich

$$\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) \cdot \boldsymbol{\xi}(t) = \sum_{k,l} e^{(\lambda_k + \lambda_l)t} \big(P_k(t)\boldsymbol{\xi}_{0k}\big) \cdot \big(P_l(t)\boldsymbol{\xi}_{0l}\big).$$

Hier können die λ_k, P_k und $\boldsymbol{\xi}_{0k}$ komplex sein. Für reelles M ist die Summe aber reell.

Generisch wird für späte Zeiten der Abstand durch die Exponentialfunktionen, also die Eigenwerte λ_k von M, und nicht durch die Polynome bestimmt[3]. Hat *nur ein Eigenwert*

[3] Nur wenn *alle* λ_k imaginär sind, bestimmen die polynomialen Anteile das asymptotische Verhalten.

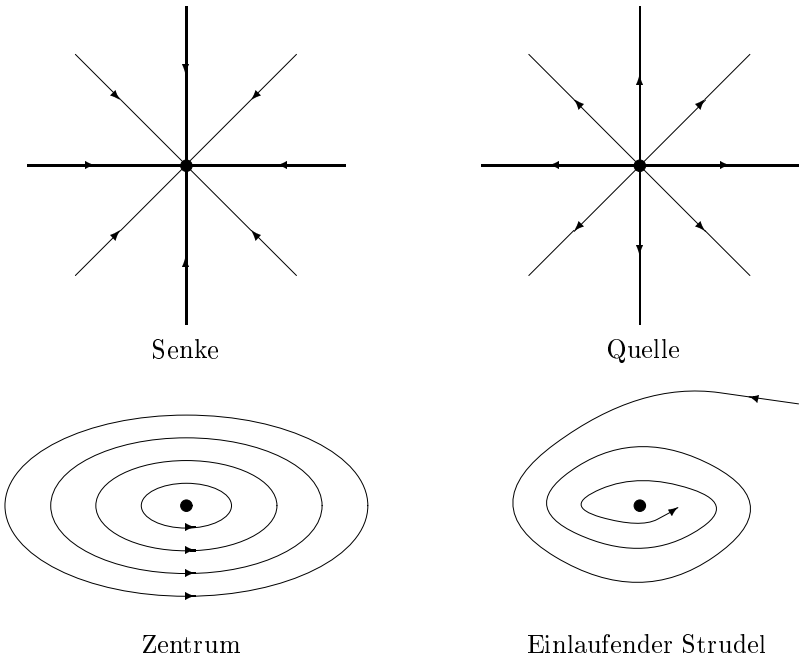

Abbildung 3.12: *Asymptotisch stabile, instabile und stabile Gleichgewichtslösung*

von M einen positiven Realteil, dann gibt es immer Bahnen auf denen sich das System exponentiell schnell vom Ursprung entfernt. In diesem Fall ist die Gleichgewichtslösung $\boldsymbol{\xi} = 0$ *instabil*. Ist zum Beispiel der Realteil von λ_1 positiv, so entfernen sich alle Teilchen mit $\boldsymbol{\xi}_{01} \neq \boldsymbol{o}$ exponentiell schnell vom Ursprung weg, siehe Abbildung (3.12).

Sind dagegen die Realteile *aller Eigenwerte* von M negativ, dann ist die Gleichgewichtslösung *asymptotisch stabil*. Alle Lösungen streben exponentiell schnell gegen den Ursprung. Man nennt die Gleichgewichtslösung $\boldsymbol{\xi} = 0$ daher *Attraktor* der Bewegung. Allgemein bezeichnet man für ein vorgegebenes dynamisches System als *Attraktor* eine Teilmenge des $\boldsymbol{\xi}$-Raumes, der sich das System für große Zeiten mehr und mehr annähert.

Der interessanteste Fall liegt zwischen Stabilität und Instabilität, nämlich wenn alle Eigenwerte rein imaginär sind. Dies ist der Fall für den harmonischen Oszillator ohne Reibung. Ist M diagonalisierbar und damit alle P_k Konstanten, dann ändert sich der Abstand vom Ursprung periodisch in der Zeit. Das Teilchen bleibt in der Umgebung der Gleichgewichtslösung, nähert sich ihr asymptotisch aber nicht an. Diese Bewegungen heissen *stabil*, sind aber nicht *asymptotisch stabil*.

3.5 Erzwungene Schwingungen

Der bisher untersuchte harmonische Oszillator ist ein schwingungsfähiges System mit einer in die Gleichgewichtslage zurücktreibenden linearen Kraft sowie mit energieverbrauchenden

Reibungskräften. Ein solcher Oszillator kann durch eine äußere zeitabhängige Kraft $\boldsymbol{F}(t)$ 'angetrieben' werden. Dann haben wir die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -V''\boldsymbol{r} - W\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}(t). \tag{3.145}$$

Die entsprechende Differentialgleichung im $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})^T$-Raum ist

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}, \qquad M = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 0 & m\mathbb{1} \\ -V'' & -W \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{F}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.146}$$

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung lässt sich aus folgendem Zusammenhang zwischen den Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} \tag{3.147}$$

und einer Lösungen der inhomogenen Gleichung (3.146) ableiten. Ist $\boldsymbol{\xi}^{(s)}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = M\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta} \tag{3.148}$$

und $\boldsymbol{\xi}^{(h)}$ eine Lösung der homogenen Gleichung, dann ist ihre Summe eine neue Lösung der inhomogenen Gleichung,

$$\frac{d}{dt}\{\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}^{(h)}\} = M\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\eta} + M\boldsymbol{\xi}^{(h)} = M\{\boldsymbol{\xi}^{(s)} + \boldsymbol{\xi}^{(h)}\} + \boldsymbol{\eta}.$$

Umgekehrt, sind $\boldsymbol{\xi}_1$ und $\boldsymbol{\xi}_2$ zwei beliebige Lösungen der inhomogenen Gleichung, dann löst ihre Differenz die homogene Gleichung. Wir folgern:

Lemma 2 *Ist $\boldsymbol{\xi}^{(h)}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und $\boldsymbol{\xi}^{(s)}$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist $\boldsymbol{\xi}^{(s)}+\boldsymbol{\xi}^{(h)}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.*

Um eine spezielle Lösung von (3.146) zu finden machen wir den folgenden Separationsansatz

$$\boldsymbol{\xi}(t) = e^{Mt}\boldsymbol{\psi}(t). \tag{3.149}$$

Für ein konstantes $\boldsymbol{\psi}$ wäre $\boldsymbol{\xi}$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Der Ansatz (3.149) entspricht einer *Variation der Konstanten* (Anfangsbedingung). Die Zeitableitung von $\boldsymbol{\xi}$ in (3.149) ist

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = Me^{Mt}\boldsymbol{\psi} + e^{Mt}\dot{\boldsymbol{\psi}} = M\boldsymbol{\xi} + e^{Mt}\dot{\boldsymbol{\psi}},$$

und deshalb erfüllt $\boldsymbol{\xi}$ die inhomogene Differentialgleichung genau dann, wenn

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = \left(e^{Mt}\right)^{-1}\boldsymbol{\eta} = e^{-Mt}\boldsymbol{\eta} \tag{3.150}$$

gilt. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \int_0^t e^{-Ms}\boldsymbol{\eta}(s) + \boldsymbol{\xi}_0$$

mit einer Integrationskonstante $\boldsymbol{\xi}_0$. Damit lautet die formale Lösung von (3.148) wie folgt,

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \int_0^t e^{M(t-s)}\boldsymbol{\eta}(s) + e^{Mt}\boldsymbol{\xi}_0. \tag{3.151}$$

Die Integrationskonstanten $\boldsymbol{\xi}_0$ tritt als Anfangsbedingung auf, $\boldsymbol{\xi}_0 = \boldsymbol{\xi}(0)$. Der zweite Term ist die Lösung der homogenen Gleichung mit Startpunkt $\boldsymbol{\xi}_0$ und der erste Term die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung die für $t = 0$ verschwindet. Wir wollen wieder annehmen, daß V'' und W in M diagonal sind (oder beide gleichzeitig diagonalisiert werden können). Dann entkoppeln die Differentialgleichungen und es genügt den eindimensionalen Fall zu untersuchen, d.h. die Differentialgleichung (3.145) oder (3.146) mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix}. \tag{3.152}$$

Die Rechnungen werden einfacher wenn wir als untere Integrationsgrenze in (3.151) nicht 0 sondern $-\infty$ nehmen. Dies ist äquivalent zu einer Verschiebung von $\boldsymbol{\xi}_0$ in dieser Formel. Mit $e^{M(t-s)}$ aus (3.132) und $\boldsymbol{\eta}$ aus (3.146) lautet die spezielle Lösung

$$\int_{-\infty}^{t} e^{M(t-s)}\boldsymbol{\eta}(s) = \frac{1}{m\omega_\gamma}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)/2}\begin{pmatrix} \sin\omega_\gamma(t-s) \\ \omega_\gamma\cos\omega_\gamma(t-s) - \gamma/2\,\sin\omega_\gamma(t-s) \end{pmatrix} F(s),$$

mit $\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$. Addieren wir die allgemeine homogenen Lösung (3.111), dann finden wir folgende allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung für eine beliebig zeitabhängige Antriebskraft,

$$x(t) = a\,e^{-\gamma t/2}\sin\left(\omega_\gamma t + \varphi_0\right) + \frac{1}{m\omega_\gamma}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)/2}\sin\omega_\gamma(t-s)F(s). \tag{3.153}$$

Zu den wichtigsten Kräften, die einen gedämpften harmonischen Oszillator 'treiben', gehören die periodischen, zum Beispiel

$$F(t) = F_0\sin\omega t. \tag{3.154}$$

Für diese einfache treibende Kraft ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)/2}\sin\omega_\gamma(t-s)F(s) &= \frac{F_0}{2i}\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-s)/2}\Big[e^{i\omega s}\sin\omega_\gamma(t-s) + \text{kompl. konj.}\Big] \\
&= \frac{\omega_\gamma F_0}{2i}\frac{e^{i\omega t}}{\omega_\gamma^2 - \omega^2 + \gamma^2/4 + i\gamma\omega} + \text{ kompl. konj.} \\
&= \frac{\omega_\gamma F_0}{2i}\frac{e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} + \text{kompl. konj.}
\end{aligned}$$

Um zu einer einfacheren Darstellung der inhomogenen Lösung zu kommen schreiben wir

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)^{-1} = b(\omega)e^{-i\delta(\omega)}$$

mit folgender Amplitude und Phase auf der rechten Seite

$$b(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad \text{und} \quad \delta(\omega) = \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{3.155}$$

Eingesetzt in (3.153) führt dies dann auf folgende allgemeine Lösung für den schwach gedämpften harmonischen Oszillator mit harmonischer Treibkraft (3.153)

$$x(t) = a\, e^{-\gamma t/2} \sin\big(\omega_\gamma t + \varphi_0\big) + \frac{F_0}{m}\, b(\omega) \sin\big(\omega t - \delta(\omega)\big). \tag{3.156}$$

Während des Zeitintervalls $t \leq \tau = 2/\gamma$ schwingt das System ein. Dieser Einschwingvorgang wird durch die homogene Lösung, also die Parameter ω_0 und γ des schwingenden Systems, bestimmt. Nach der *Relaxationszeit* τ strebt die homogene Lösung gegen Null und spielt keine Rolle mehr. Für $t \gg \tau$ verbleibt nur die spezielle Lösung, die eine periodische Bewegung mit der auferlegten Kreisfrequenz ω der treibenden Kraft beschreibt. Die Amplitude der Schwingung ist proportional zur Kraftstärke F_0 und umgekehrt proportional zur trägen Masse des Schwingers.

Resonanzen: Bei vorgegebener Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfung γ des Schwingers sind die *Phasenverschiebung* δ und die Amplitude $F_0 b(\omega)/m$ Funktionen der Kreisfrequenz der treibenden Kraft $F_0 \sin \omega t$. Diese Funktionen zeigen in der Umgebung der 'Eigenfrequenzen' ω_0 bzw. ω_γ ein typisches Verhalten, das nun genauer untersucht werden soll:

Die *Phasenverschiebung* δ ist ein Maß für die Verzögerung, mit der die Kraftphase ωt am Oszillator wirksam wird. Wir haben

$$\delta(\omega = 0) = 0, \quad \delta(\omega = \omega_0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \delta(\omega \to \infty) = \pi. \tag{3.157}$$

Bei $\omega = \omega_0$ ist das Argument von arctan in (3.155) unendlich. Also ist die Phasenverzögerung $\pi/2$, wenn die aufgezwungene Frequenz ω gleich der ungedämpften Eigenfrequenz ω_0 ist. Für $\omega > \omega_0$ müssen wir bei der Bestimmung von arctan auf den 'nächsten Zweig' dieser Funktion gehen. Die funktionale Abhängigkeit der Amplitude b von der Kreisfrequenz in (3.155) ist durch eine *Verteilung* mit Maximum ω_r in der Nähe von ω_0 und Breite $\sim \gamma$ gegeben. Es gilt

$$b(\omega = 0) = \frac{1}{\omega_0^2} \quad \text{und} \quad b(\omega \to \infty) = 0. \tag{3.158}$$

Die Amplitude hat ein Maximum bei derjenigen Kreisfrequenz welche den Nenners von $b(w)$ minimiert,

$$\frac{\partial}{\partial \omega^2} \left((\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2 \right) \Big|_{\omega_r^2} = 2(\omega_r^2 - \omega_0^2) + \gamma^2 = 0.$$

Damit finden wir für die Lage des Maximums ω_r, der sogenannten *Resonanz*, und die Amplitude an der Resonanzstelle die Werte

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/2} \leq \omega_\gamma \leq \omega_0 \quad \text{und} \quad b(\omega_r) = \frac{1}{\gamma \omega_\gamma}. \tag{3.159}$$

Den qualitative Verlauf der Amplitudenfunktion ist in Abbildung (3.13) dargestellt.

3.6 Anhang: Matrixfunktionen

In diesem Anhang wollen wir die wichtigsten Eigenschaften von Matrixfunktionen zusammenstellen. Für eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind Matrix-

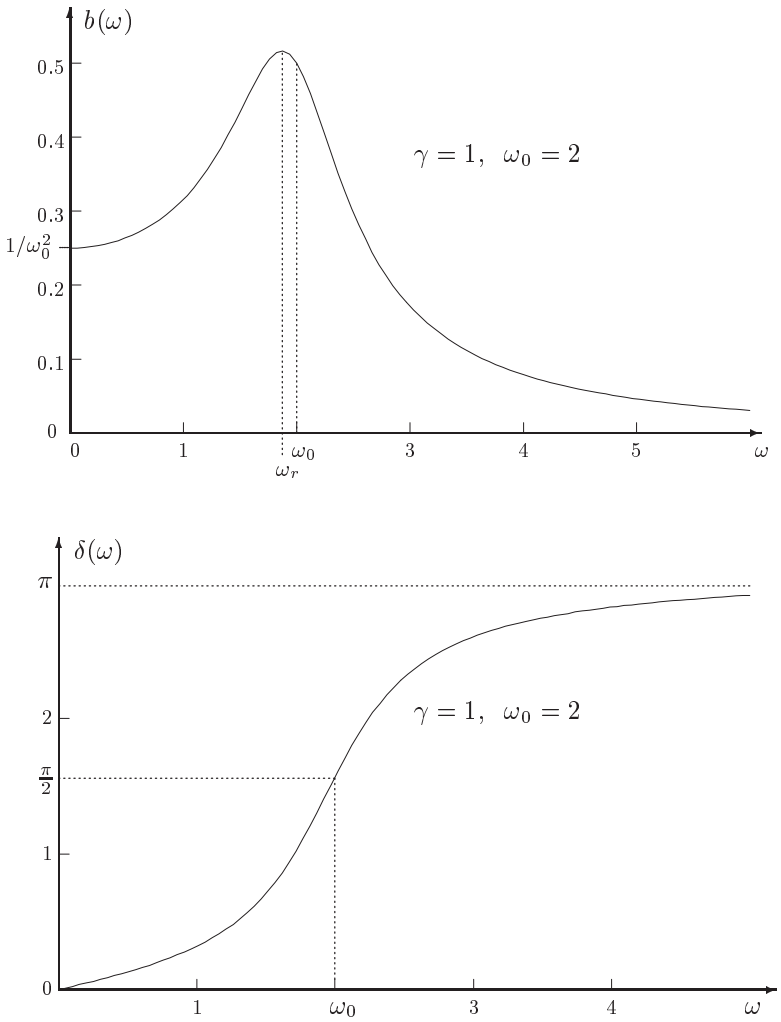

Abbildung 3.13: *Amplitude und Phase des getriebenen Oszillators.*

funktionen leicht zu berechnen,

$$f(M) = f\big(S\tilde{M}S^{-1}\big) = Sf(\tilde{M})S^{-1} = S\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f(\lambda_2) & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Allgemeine Matrizen sind nicht diagonalisierbar. Wir können natürlich immer die JORDANsche Normalform als Ausgangspunkt für eine Berechnung von Matrixfunktionen wählen und diesen Weg haben wir bei der Exponentialfunktion gewählt. Hier möchte ich aber den Residuenkalkül zur Anwendung bringen, welcher von der *Resolvente*

$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda - M}, \qquad M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \tag{3.160}$$

der Matrix M Gebrauch macht. Für nicht-diagonalisierbare Matrizen kann man nämlich folgende konstruktive Formel für eine analytische Funktion $f(\lambda)$ benutzen:

$$f(M) = \frac{1}{2\pi i}\oint f(\lambda)\, R(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\lambda)}{\lambda - M}. \tag{3.161}$$

Die Integration ist entlang einer Schleife in der komplexen λ-Ebene, die alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms umschließt. Zum Beispiel, für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die wir in (3.139) einführten, ist die *Resolvente*

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^{-1} & (\lambda+1)^{-2} & -2(\lambda+1)^{-2} \\ 0 & (\lambda+1)^{-1} & 4(\lambda^2-1)^{-1} \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung des Schleifenintegrals in (3.161) erinnern wir uns an folgende bekannte Formel aus der Analysis:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\, d\lambda = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(\lambda_0), \tag{3.162}$$

Hier umläuft der geschlossene Integrationsweg den Punkt λ_0 einmal entgegen dem Uhrzeigersinn. Damit finden wir

$$f(M) = \begin{pmatrix} f(-1) & f'(-1) & -2f'(-1) \\ 0 & f(-1) & 2(f(1)-f(-1)) \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere für $f(\lambda) = \exp(t\lambda)$ findet man das bekannte Resultat (3.142) für $\exp(Mt)$.

Im Folgenden werden wir weitere Eigenschaften der Resolvente besprechen, die Spektralzerlegung eines linearen Operators auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum ableiten und insbesondere die obige Formel (3.161) beweisen. Erinnern wir uns an die KRAMERsche Regel zur Bildung einer inversen Matrix, so folgt sofort, daß die Resolvente meromorph ist. Sie hat

Pole der Ordnung $\leq n$ bei den Nullstellen $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} \equiv \sigma(M)$ des charakteristischen Polynoms $P_M(\lambda)$ von M, d.h. bei den Eigenwerten von M. Wir untersuchen nun das Verhalten der Resolvente bei einem Eigenwert den wir der Einfachheit wegen nach $\lambda = 0$ legen.

Die Koeffizienten in der LAURENT-Reihe

$$R(\lambda) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \lambda^p \tag{3.163}$$

berechnen sich nach der bekannten Formel aus der Funktionentheorie gemäß

$$A_p = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma d\lambda\, \lambda^{-p-1} R(\lambda). \tag{3.164}$$

Hier ist Γ ein (kleiner) Kreis um den Eigenwert 0, der außer diesem keinen weiteren Punkt des Spektrums $\sigma(M)$ einschließt. Da die Pole maximal die Ordnung n haben ist

$$A_p = 0 \quad \text{für} \quad p < -n.$$

Das Produkt zweier Koeffizientenmatrizen A_p und A_q ist entweder die Nullmatrix oder eine dritte Koeffizientenmatrix:

Lemma 3 *Die Entwicklungskoeffizienten der Resolvente erfüllen*

$$A_p A_q = (1 - \eta_p - \eta_q) A_{p+q+1}, \quad \textit{wobei} \quad \eta_p = \begin{cases} 1 & \textit{für} \;\; p \geq 0 \\ 0 & \textit{für} \;\; p < 0. \end{cases} \tag{3.165}$$

Im Beweis benutzen wir die wichtige *Resolventengleichung*

$$\frac{1}{\lambda - M} - \frac{1}{\lambda' - M} = \frac{1}{\lambda - M} - \frac{1}{\lambda' - M} = \big\{(\lambda' - M) - (\lambda + M)\big\} \frac{1}{\lambda - M} \frac{1}{\lambda' - M}$$

also

$$R(\lambda) - R(\lambda') = (\lambda' - \lambda)\, R(\lambda) R(\lambda'). \tag{3.166}$$

Mit dieser Identität folgt

$$\begin{aligned} A_p A_q &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_\Gamma \oint_{\Gamma'} d\lambda d\lambda' \lambda^{-p-1} \lambda'^{-q-1} R(\lambda) R(\lambda') \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_\Gamma \oint_{\Gamma'} d\lambda d\lambda' \lambda^{-p-1} \lambda'^{-q-1} \frac{R(\lambda') - R(\lambda)}{\lambda - \lambda'}. \end{aligned}$$

Wählen wir Γ mit größerem Radius als Γ', dann kann das Linienintegral über Γ' leicht berechnet werden, wenn wir die LAURENT-Entwicklungen für die Resolventen auf der rechten Seite einsetzen und

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} d\lambda' \frac{1}{\lambda'} \frac{\lambda'^{-m}}{\lambda - \lambda'} = \eta_m \lambda^{-m-1}$$

benutzen. Man findet

$$\begin{aligned} A_p A_q &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k \oint_\Gamma d\lambda \lambda^{k-q-p-2} \big(\eta_{q-k} - \eta_q\big) A_k \\ &= \big(\eta_{-p-1} - \eta_q\big) A_{p+q+1} = (1 - \eta_p - \eta_q) A_{p+q+1}, \end{aligned}$$

d.h. die Behauptung (3.166) des Lemmas. Daraus folgt unmittelbar, dass die Matrizen A_p paarweise kommutieren.

Dieselben Relationen erlauben uns, alle Matrizen A_p durch

$$A_0 \equiv -S, \quad A_{-1} \equiv P \quad \text{und} \quad A_{-2} \equiv D. \tag{3.167}$$

auszudrücken. In der Tat, wir finden

$$\begin{array}{lll} A_p A_0 = -A_{p+1} & \longrightarrow & A_p = -S^{p+1}, \quad p = 0, 2, 3, \ldots \\ A_{-1} A_{-1} = A_{-1} & \longrightarrow & P^2 = P \\ A_{-2} A_{-p} = A_{-p-1} & \longrightarrow & A_{-p} = D^{p-1}, \quad p = 2, 3, \ldots \\ A_0 A_{-1} = 0 & \longrightarrow & SP = PS = 0 \\ A_{-1} A_{-2} = A_{-2} & \longrightarrow & DP = PD = D \end{array} \tag{3.168}$$

Somit erhalten wir folgende LAURENT-Entwicklung der Resolvente um einen beliebigen Eigenwert $\lambda_i \in \sigma(M)$,

$$R(\lambda) = -\sum_{p=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_i)^p S_i^{p+1} + \frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} + \sum_{p=2}^{\infty} (\lambda - \lambda_i)^{-p} D_i^{p-1}. \tag{3.169}$$

Die letzte Reihe bricht spätestens nach $p = n$ ab. P_i heisst der *Eigenprojektor* und D_i die *Eigennilpotente* zum Eigenwert λ_i. Die folgende Relationen sind leicht zu beweisen,

$$\begin{array}{rcl} -(\lambda_i - M) S_i & = & -S_i (\lambda_i - M) = 1 - P_i \\ -(\lambda_i - M) P_i & = & -P_i (\lambda_i - M) = D_i, \end{array} \tag{3.170}$$

wenn man in der Formel

$$(\lambda_i - M) R(\lambda) = \big\{ (\lambda_i - \lambda) + (\lambda - M) \big\} R(\lambda) = \mathbb{1} + (\lambda_i - \lambda) R(\lambda)$$

das Resultat (3.169) einsetzt und Koeffizienten vergleicht. Nun sind wir in der Lage, daß folgende Lemma zu beweisen

Lemma 4 *Es sei Γ ein positiv orientierter Kreis, der das ganze Spektrum $\sigma(M)$ von M umschließt. Dann ist*

$$\mathbb{1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma d\lambda \; R(\lambda) = \sum_{i=1}^{r} P_i, \tag{3.171}$$

wobei $P_1, \ldots, P_r$ die Eigenprojektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von M. Diese erfüllen

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_j. \tag{3.172}$$

Zum Beweis des Lemmas führen wir auf dem Raum der Matrizen eine Norm ein. Für $|\lambda| > \|M\|$ ist dann

$$\frac{1}{\lambda - M} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{M}{\lambda} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{M}{\lambda} + \frac{M^2}{\lambda^2} + \ldots \right).$$

Somit ist $R(\lambda) \sim 1/\lambda$ für $\lambda \to \infty$ und dies führt zur ersten Gleichung in (3.171). Andererseits kann man Γ auf r kleine Kreise Γ_i um λ_i zusammenziehen; dies führt auf

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma d\lambda\, R(\lambda) = \sum_{i=1}^r P_i.$$

Die Gleichung (3.172) folgt aus der Formel

$$P_i P_j = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_\Gamma \oint_{\Gamma'} d\lambda d\lambda' R(\lambda) R(\lambda')$$

die man wie im Beweis von Lemma 3 berechnet. Nun folgt der wichtige

Satz 5 (Spektralzerlegung) *Jede Matrix hat die Zerlegung*

$$M = \sum_{i=1}^r \big(\lambda_i P_i + D_i\big) = \sum_{i=1}^r \big(\lambda_i + D_i\big) P_i, \tag{3.173}$$

wobei P_i der Eigenprojektor und D_i die Eigennilpotente zum Eigenwert λ_i ist, $P_i P_j = \delta_{ij} P_j$ und $D_i P_i = P_i D_i = D_i$.

Der Beweis ist denkbar einfach,

$$M = M \sum P_i = \sum \big(\lambda_i P_i + (M - \lambda_i) P_i\big) \overset{(3.170)}{=} \sum \big(\lambda_i P_i + D_i\big) = \sum \big(\lambda_i + D_i\big) P_i.$$

Diese Zerlegung ist identisch zur JORDANschen Normalform, allerdings in einer beliebigen Basis. Danach ist der Vektorraum V die direkte Summe der Eigenräume $V_i = P_i V$ die invariant unter M sind,

$$M V_i = M P_i V \overset{[M,P_i]=0}{=} P_i M V \in V_i.$$

Auf dem Eigenraum V_i reduziert sich M auf $\lambda_i + D_i$ mit einem nilpotenten Operator D_i,

$$D_i^{n_i} = 0 \quad \text{mit} \quad n_i = \dim V_i.$$

Insbesondere ist $D_i = 0$ für $\dim P_i = 1$, d.h. für einen einfachen Eigenwert. Es sei nun

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n$$

eine ganze Funktion. Wir definieren die entsprechende Matrixfunktion

$$f(M) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, M^n. \tag{3.174}$$

Auf jedem Eigenraum V_i sind die Potenzen von M einfach auszurechnen,

$$\frac{1}{n!} P_i M^n = \frac{1}{n!} P_i (\lambda_i + D_i)^n = \sum_{p+q=n} P_i \frac{\lambda_i^p\, D_i^q}{p!\, q!}.$$

Wir setzen in (3.174) ein und erhalten die *Spektraldarstellung* der Matrixfuntion $f(M)$:

$$f(M) = \sum_i P_i \sum_{p,q} \frac{1}{q!} f^{(p+q)} \lambda_i^q \, \frac{1}{p!} D_i^p = \sum_i \Big(f(\lambda_i) P_i + \sum_p^{n_i} \frac{1}{p!} \, f^{(p)}(\lambda_i) D_i^p \Big).$$

Diese Darstellung kann auf alle Funktionen ausgedehnt werden, die in einer Umgebung jedes Eigenwertes hinreichend oft differenzierbar sind. Speziell erhält man für $f(z) = (\lambda - z)^{-1}$ die Partialbruchentwicklung der Resolventen,

$$\frac{1}{\lambda - M} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} + \frac{D_i}{(\lambda - \lambda_i)^2} + \ldots + \frac{D_i^{n_i - 1}}{(\lambda - \lambda_i)^{n_i}} \right). \tag{3.175}$$

Mit (3.162) folgt daraus die Darstellung (3.161) für eine (beinahe) beliebige Matrixfunktion.