# Kapitel 8

# Elektromagnetische Wellen

In diesem Kapitel werden wir zeitlich und räumlich veränderliche Felder – diese sind elektromagnetische Wellen – behandeln. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den Fall der Wellenausbreitung in *homogenen und linearen* Medien ohne freie Ladungsträger. Dann müssen wir die Maxwell-Gleichungen in der Form

$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{8.1}$$

lösen, wobei die Materialgrößen $\varepsilon_r$ und $\mu_r$ konstante Skalare sind. Lösungen dieser Gleichungen im Vakuum mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \varepsilon_0$ werden zu Lösungen mit beliebigen konstanten $\varepsilon$ und $\mu$, wenn man folgende Reskalierungen vornimmt:

$$t \longrightarrow \frac{t}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \quad \boldsymbol{E} \longrightarrow \boldsymbol{E} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} \longrightarrow \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}\,. \tag{8.2}$$

Aus den Vakuumlösungen können wir also leicht die Lösungen in homogenen und linearen Medien ohne freie Ladungsträger gewinnen. Deshalb dürfen wir im Folgenden $\mu_r = \varepsilon_r = 1$ setzen und uns auf Vakuumlösungen beschränken.

## 8.1 Vakuumlösungen

Die gekoppelten Gleichungen für das elektrische und magnetische Feld (8.1) können durch eine weitere Differentiation entkoppelt werden. Dazu nehmen wir von den beiden Gleichungen mit der Rotation selbst die Rotation und benutzen z.B. $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \Delta \boldsymbol{E}$ ist. Berücksichtigt man noch, dass im Vakuum die $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ ist, so gewinnt man die Wellengleichungen für die elektromagnetischen Felder im Vakuum

$$\Box \boldsymbol{E} = 0 \quad \text{und} \quad \Box \boldsymbol{B} = 0, \qquad \Box = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\,. \tag{8.3}$$

Die Größe $1/\varepsilon_0\mu_0$ hat die Einheit einer quadrierten Geschwindigkeit. Später werden wir sehen, das diese Geschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{8.4}$$

Alle Komponenten von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ erfüllen somit dieselbe Wellengleichung. Im Vakuum genügen auch die Potentiale dieser Gleichung, sofern die *Lorenz-Eichung* (7.42) gewählt wird,

$$\Box\Phi = 0, \quad \Box\boldsymbol{A} = 0, \qquad \Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\,. \tag{8.5}$$

Die Gleichungen (8.1) implizieren die Wellengleichungen (8.3) aber nicht umgekehrt. Im Folgenden werden wir zuerst die Wellengleichungen lösen und dann im zweiten Schritt Zusatzbedingungen finden, damit diese die Maxwellgleichungen erster Ordnung in (8.1) erfüllen.

Wegen der Transformation (8.2) ist

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \tag{8.6}$$

die Geschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen in linearen homogenen Medien, wenn $c$ die Geschwindigkeit im Vakuum ist. In der Optik war seit etwa 1850 auf Grund der Messungen von Fizeau der Zusammenhang

$$u = \frac{c}{n} \tag{8.7}$$

bekannt, wobei $n$ der *Brechungsindex* des Mediums ist. Die Maxwell'sche Theorie gibt also die Lichtgeschwindigkeit im Medium richtig wieder, wenn zwischen den elektromagnetischen Stoffkonstanten $\varepsilon_r, \mu_r$ und dem optischen Brechungsindex die *Maxwell-Beziehung* erfüllt ist:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}\,. \tag{8.8}$$

Für Wasser ist $n = 1.33$, $\mu_r \approx 1$ und $\varepsilon_r \approx 80$ und die Beziehung scheint nicht erfüllt zu sein. Diese Schlussfolgerung ist aber nicht statthaft, weil wir die Frequenzabhängigkeit der Materialkonstanten außer Acht ließen. Wir müssen für $\varepsilon_r$, $\mu_r$ und $n$ Werte einsetzen, die sich auf dieselbe Frequenz beziehen. Der Brechungsindex wird bei der Lichtfrequenz von etwa $10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$ gemessen, die elektromagnetischen Stoffkonstanten aber im Gleichfeld, d.h. bei einer verschwindenden Frequenz. Die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für frequenzabhängige Konstanten und die Theorie der Dispersion, welche die Frequenzabhängigkeit dieser Konstanten liefert, werden wir später behandeln. Wir werden sehen, dass die Maxwell'sche Beziehung gültig ist. Diese und weitere Resultate zeigen, dass die Theorie des Lichts in der Maxwell'schen Theorie enthalten ist. Licht ist elektromagnetische Strahlung in einem speziellen Frequenzband.

## 8.2 Ebene Wellen

Wir beginnen wir mit den einfachsten Lösungen der Maxwellgleichungen im Vakuum, den ebenen Wellen. Diese haben zu jedem Zeitpunkt auf jeder Ebene aus einer Schar von parallelen Ebenen einen konstanten Wert. Die Punkte auf der Ebene senkrecht zu einem konstanten Einheitsvektor erfüllen $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = u$. Deshalb hängen ebene Wellen nur von $ct$ und $u$ ab, $\Phi = \Phi(ct, u)$. Für ebene

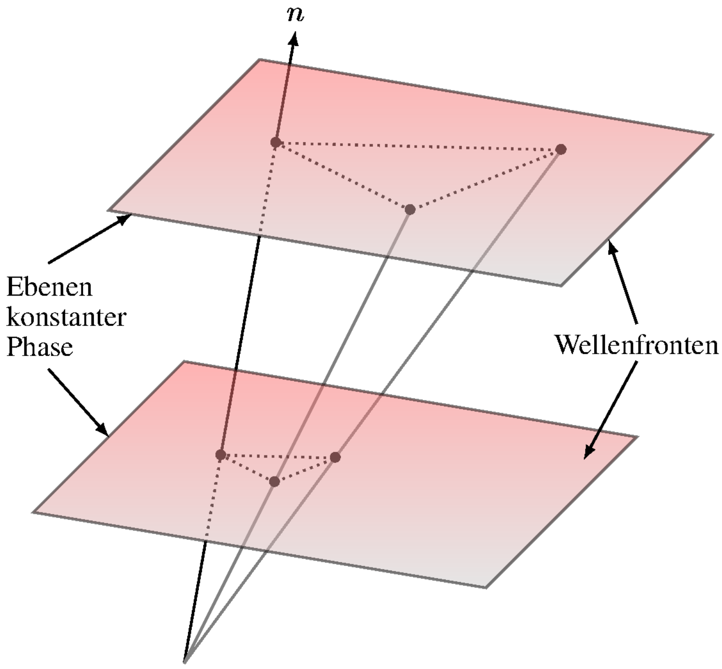


Abbildung 8.1: *Ebene Wellen haben auf den Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\boldsymbol{n}$ einen konstanten Wert.*

Wellen ist $\nabla\Phi = \boldsymbol{n}\,\partial\Phi/\partial u$ und $\Delta\phi = \partial^2\Phi/\partial u^2$ und die Wellengleichung vereinfacht sich zu

$$\Box\Phi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2}\right)\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial}{\partial(ct)} - \frac{\partial}{\partial u}\right)\Phi = 0\,. \tag{8.9}$$

Aus der zweiten Schreibweise erkennt man sofort, dass

$$\Phi = \Phi(ct - u) = \Phi(ct - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}) \quad \text{und} \quad \Phi = \Phi(ct + u) = \Phi(ct + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{8.10}$$

Lösungen der Wellengleichung sind. Die erste (zweite) beschreibt eine in $\boldsymbol{n}(-\boldsymbol{n})$-Richtung fortschreitende Welle. Die Ebenen, auf denen $\Phi$ denselben konstanten Wert annimmt, bewegen sich mit der Geschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ in die Richtung von $\pm\boldsymbol{n}$.

Wegen der Linearität der Wellengleichung ist mit $\Phi_1$ und $\Phi_2$ auch $a\Phi_1 + b\Phi_2$ eine Lösung. Dieses *Superpositionsprinzip* gilt allgemein für lineare Differentialgleichungen, und insbesondere für die Lösungen der Maxwell-Gleichungen im Vakuum.[1] Das Superpositionsprinzip erlaubt die Zusammensetzung beliebiger Wellenformen aus einfachen Grundtypen.

[1] In nichtlinearen Medien gilt das Superpositionsprinzip in dieser einfachen Form nicht mehr.

Im Vakuum müssen die Potentiale $\Phi, \boldsymbol{A}$ und Felder $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ alle die Wellengleichung lösen und haben, falls sie in $\boldsymbol{n}$-Richtung propagierende ebene Wellen beschreiben, die Form (8.10). Insbesondere

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(ct - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(ct - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\,. \tag{8.11}$$

Wegen $\partial_i \boldsymbol{E} = -n_i \boldsymbol{E}'$, wobei Strich die Ableitung nach dem Argument bedeutet, und der gleichen Formel für das magnetische Feld, folgt aus der Quellenfreiheit der beiden Felder

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = -(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})' = 0 \quad \text{und} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})' = 0\,.$$

. Damit sind die Projektionen der Felder in Ausbreitungsrichtung konstant. Konstante Feldanteile haben aber auf die Wellenausbreitung keinen Einfluss und deshalb gilt für ebene Wellen

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B} = 0\,. \tag{8.12}$$

Dies bedeutet, dass die Richtung beider Felder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle sind. Die restlichen Komponenten der Rotationsgleichungen lauten

$$c\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{E}' = 0, \quad \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}' - c\boldsymbol{B}' = 0\,, \tag{8.13}$$

wobei wir wieder von $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ Gebrauch machten. Für Wellenlösungen dürfen wir die konstanten Anteile wieder weglassen. Deshalb haben ebene Wellen die Form

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(ct - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}) \quad \text{und} \quad c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}(ct - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{8.14}$$

wobei nach (8.12) die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\boldsymbol{n}$ der Welle sind. Das elektrische und magnetische Feld haben bis auf den Faktor $c$ denselben Betrag, $|\boldsymbol{E}| = c|\boldsymbol{B}|$. Die ist in Abbildung 8.2 skizziert.

Wir fassen die Eigenschaften von ebenen Wellen zusammen:

- *Transversalität und Phasengleichheit:*

  $$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{B} \quad \text{und} \quad |\boldsymbol{E}| = c|\boldsymbol{B}| \tag{8.15}$$

  Die ersten zwei Eigenschaften bedeuten, dass ebene elektromagnetische Wellen *transversal* sind. Die letzte Gleichung besagt, dass die zueinander senkrechten Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ zu jeder Zeit und an jedem Ort bis auf den Faktor $c$ denselben Betrag haben. Sie haben an jeweils denselben Stellen Maxima und Nullstellen; sie sind in Phase oder *phasengleich.*

- *Phasengeschwindigkeit:* Eine in die $z$-Richtung fortschreitende Welle hat eine feste Phase, falls $z = ct + a$ gilt mit einer beliebigen Konstante $a$. Die Maxima (Nullstellen, Minima) verschieben sich mit der Lichtgeschwindigkeit, d.h. die Phasengeschwindigkeit der Wellen ist die *Lichtgeschwindigkeit.*

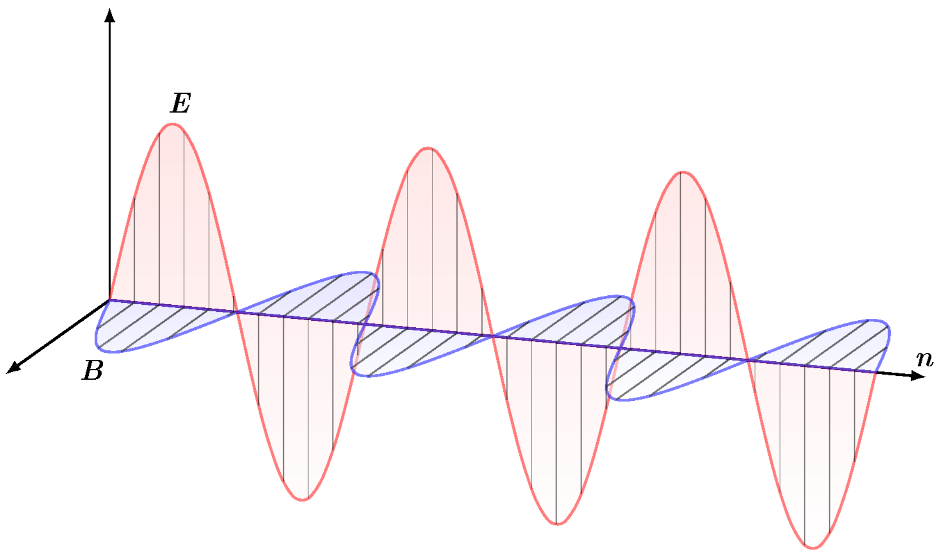


Abbildung 8.2: *Für eine ebene Welle bilden $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{n}$ ein Orthogonalsystem.*

### 8.2.1 Monochromatische ebene Wellen

Wir betrachten zunächst harmonisch schwingende ebene Wellen, so genannte *monochromatische ebene Wellen*, für welche

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(ct-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}) &= \Re\left(\boldsymbol{E}_0 e^{ik(ct-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})}\right) = \Re\left(\boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right), \quad \omega = c|\boldsymbol{k}| \\ \boldsymbol{B}(ct-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}) &= \Re\left(\boldsymbol{B}_0 e^{ik(ct-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})}\right) = \Re\left(\boldsymbol{B}_0 e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\right), \quad \boldsymbol{k} = |\boldsymbol{k}|\boldsymbol{n}\,, \end{aligned} \tag{8.16}$$

mit konstanten Amplitudenvektoren $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{B}_0$. Aus unseren vorherigen Überlegungen über ebene Wellen oder durch Einsetzen in die Wellengleichungen findet man folgende algebraischen Gleichungen für die reelle *Kreisfrequenz* $\omega = 2\pi\nu$, den reellen *Wellenzahlvektor* $\boldsymbol{k}$ und die konstanten Amplitudenvektoren:

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0, \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0, \quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 = \omega\boldsymbol{B}_0\,. \tag{8.17}$$

Wie erwartet, sind $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{B}_0$ orthogonal, haben bis auf einen konstanten Faktor dieselbe Länge und sind senkrecht zum Wellenzahlvektor. Zur vollständigen Festlegung einer monochromatischen ebenen Welle braucht es einen Wellenzahlvektor $\boldsymbol{k}$ und einen im Allgemeinen komplexen Amplitudenvektor $\boldsymbol{E}_0$, senkrecht zu $\boldsymbol{k}$.

Bei der Untersuchung der Lösungen dürfen wir annehmen, dass der Wellenzahlvektor in die $z$-Richtung zeigt, $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{e}_z$. Monochromatische und in die $z-$Richtung propagierende ebene Wellen haben die Form

$$\boldsymbol{E} = \Re\Big((E_{0x}\boldsymbol{e}_x + E_{0y}\boldsymbol{e}_y)e^{i(\omega t-kz)}\Big) \quad , \quad c\boldsymbol{B} = \Re\Big((-E_{0y}\boldsymbol{e}_x + E_{0x}\boldsymbol{e}_y)e^{i(\omega t-kz)}\Big)\,. \tag{8.18}$$

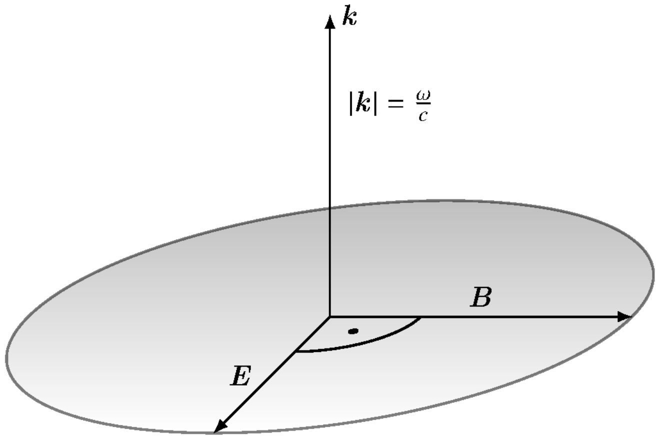


Abbildung 8.3: *Das elektrische und magnetische Feld sind transversal und haben dieselbe Amplitude.*

Zu einer festen Zeit gilt für den Abstand zweier benachbarter Maxima die Beziehung $k\Delta z = 2\pi$. Der entsprechende räumliche Abstand ist die *Wellenlänge*

$$\lambda = \Delta z = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}\,. \tag{8.19}$$

Da die Welle allein durch das $\boldsymbol{E}$-Feld (oder allein durch das $\boldsymbol{B}$-Feld) bestimmt ist, bezieht sich die folgende Diskussion auf das elektrische Feld. Wir schreiben die komplexen Koeffizienten gemäß

$$E_{0x} = |E_{0x}|e^{i\phi} \quad \text{und} \quad E_{0y} = |E_{0y}|e^{i(\phi+\delta)}\,.$$

Dann wird das elektrische Feld zu

$$\boldsymbol{E} = |E_{0x}|\cos(\omega t - kz + \phi)\boldsymbol{e}_x + |E_{0y}|\cos(\omega t - kz + \phi + \delta)\boldsymbol{e}_y\,. \tag{8.20}$$

Je nach relativer Phase $\delta$ unterscheidet man nun drei Fälle (vgl. Abbildung 8.4):

- *Linear polarisierte Wellen:* Für $\delta = 0$ oder $\delta = \pm\pi$ ist

$$\boldsymbol{E} = (|E_{0x}|\boldsymbol{e}_x \pm |E_{0y}|\boldsymbol{e}_y)\cos(\omega t - kz + \phi)\,. \tag{8.21}$$

  Der Koeffizient ist ein orts- und zeitunabhängiger Vektor und damit liegt das elektrische Feld in einer *festen Schwingungsebene*. Eine linear polarisierte Welle lässt sich als Überlagerung von zwei linear unabhängigen, linear polarisierten Wellen schreiben. Die obige Welle ist eine Überlagerung von

$$\boldsymbol{e}_x\cos(\omega t - kz + \phi) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{e}_y\cos(\omega t - kz + \phi)\,.$$

- *Zirkular polarisierte Wellen:* Für $\delta = \pm\pi/2$ und $|E_{0x}| = |E_{0y}| = E$ ist

$$\boldsymbol{E} = E\left(\cos(\omega t - kz + \phi)\boldsymbol{e}_x \mp \sin(\omega t - kz + \phi)\boldsymbol{e}_y\right) . \tag{8.22}$$

An einem festen Ort durchläuft der Vektor zwischen den Klammern mit fortschreitender Zeit den Einheitskreis. Das elektrische Feld dreht einen Kreis vom Radius $E$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ in der Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Für $\delta = \pi/2$ gilt das obere Vorzeichen in (8.22). Blickt man in die Ausbreitungsrichtung, dreht der $\boldsymbol{E}$-Vektor nach links. Betrachten wir die Bewegung von $\boldsymbol{E}$ in Raum und Zeit, dann beschreibt $\boldsymbol{E}$ eine Kreisspirale. In diesem Sinn spricht man von einer *linkszirkular polarisierten* Welle. Für $\delta = -\pi/2$ ist die Welle rechtszirkular polarisiert.

- *Elliptisch polarisierte Wellen:* Für $\delta = \pm\pi/2$ und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$ ist

$$E_x = |E_{0x}|\cos(\omega t - kz + \phi) \quad \text{und} \quad E_y = \mp|E_{0y}|\sin(\omega t - kz + \phi) .$$

Die Komponenten des Feldes erfüllen die Ellipsengleichung mit den Halbachsen $|E_{0x}|$ und $|E_{0y}|$:

$$\left(\frac{E_x}{|E_{0x}|}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{|E_{0y}|}\right)^2 = 1 .$$

An einem festen Ort durchläuft der $\boldsymbol{E}$-Vektor eine Ellipse und seine Amplitude ist nicht mehr konstant.

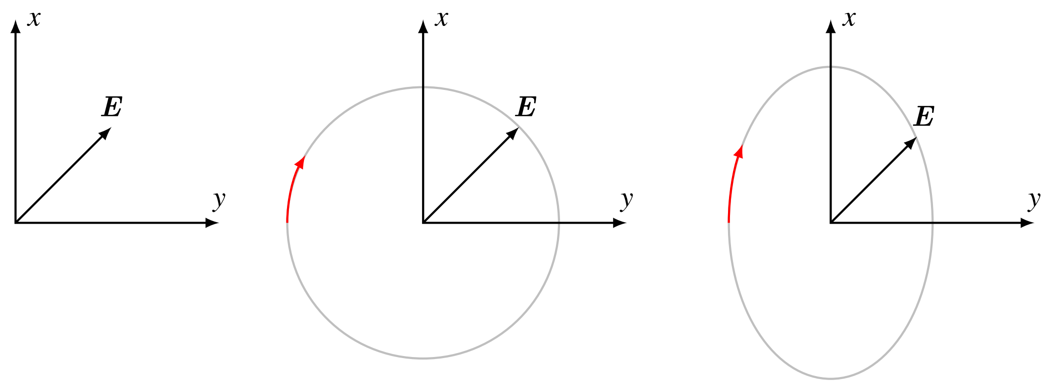


Abbildung 8.4: *Lineare Polarisation (links), rechts-zirkulare Polarisation (mittig) und rechts-elliptische Polarisation (rechts). Der* $\boldsymbol{k}$*-Vektor steht senkrecht zur Blattebene und in die Richtung, in die Sie schauen.*

Die Abbildung 8.5 zeigt, wie sich bei stetiger Veränderung von $\delta$ die Schwingungsellipse ändert. Für $\delta = 0$ entartet sie in eine Gerade und es liegt lineare Polarisation vor. Für $0 < \delta < \pi$ findet man linksläufige Ellipsen unter denen für $\delta = \pi/2$ ein Kreis ist. Für $\delta = \pi$ haben wir wieder lineare Polarisation und den Übergang von links- zu rechtspolarisierten ebenen Wellen.

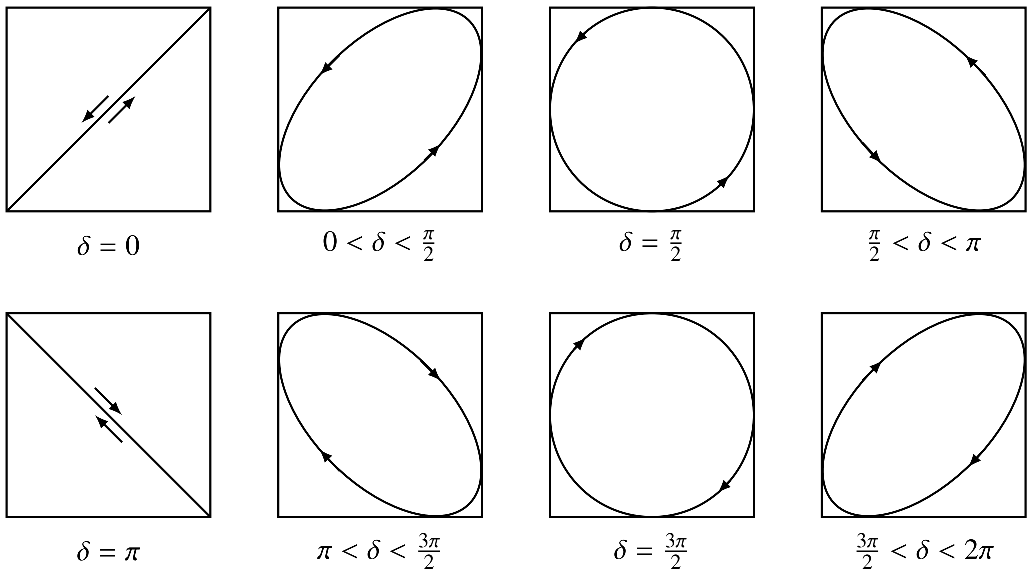


Abbildung 8.5: *Elliptisches Licht verschiedener Phasendifferenz der rechtwinkligen Komponenten. Der* $\boldsymbol{k}$*-Vektor steht senkrecht zur Blattebene und in die Richtung, in die Sie schauen.*

Für $\pi < \delta < 2\pi$ sind die Ellipsen rechtsläufig. Insbesondere für $\delta = 3\pi/2$ handelt es sich um rechtshändig polarisierte Wellen.

## 8.3 Kugelwellen

Eine bei der Erzeugung von Wellen oft gebrauchte Wellenform ist die Kugelwelle. Um zu einer Darstellung von Kugelwellen zu kommen, schreibt man die Wellengleichung zweckmäßig in Kugelkoordinaten $(r, \theta, \phi)$ um:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Delta\Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) - \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega \Phi = 0\,. \tag{8.23}$$

In der Elektrostatik haben wir gezeigt, dass jede Funktion der Winkelvariablen eine Linearkombination der Kugelfunktionen ist. Daher ist es angezeigt, Lösungen der Form

$$\Phi = \frac{1}{r} F(t, r) \mathcal{Y}_{\ell m}(\theta, \phi) \tag{8.24}$$

zu suchen. Setzen wir diesen Ansatz ein und benutzen $\Delta_\Omega \mathcal{Y}_{\ell m} = -\ell(\ell+1)\mathcal{Y}_{\ell m}$, dann reduziert sich (8.23) auf folgende 2-dimensionale Wellengleichung für $F$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} F = 0\,. \tag{8.25}$$

Während ebene Wellen auf parallelen Ebenen konstant sind, sind Kugelwellen auf konzentrischen Kugelflächen konstant. Sie hängen deshalb nicht von den Winkelvariablen ab und haben $\ell = 0$. Dann vereinfacht sich die Wellengleichung (8.25) zu

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0\,. \tag{8.26}$$

Damit haben die Wellengleichungen (8.3) für die elektromagnetischen Felder die Lösungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{E}_+(ct-r) + \boldsymbol{E}_-(ct+r)\right] \\ \boldsymbol{B} &= \frac{1}{r}\left[\boldsymbol{B}_+(ct-r) + \boldsymbol{B}_-(ct+r)\right]. \end{aligned} \tag{8.27}$$

$E_+$ ist eine auslaufende Kugelwelle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit vom Ursprung ausgehend nach außen ausbreitet, und $E_-$ eine einlaufende Welle, da sie sich auf den Ursprung zusammenzieht. Die Quellenfreiheit der Felder ist äquivalent zu

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 B_r\right) = 0\,,$$

und deshalb sind $r^2 E_r$ und $r^2 B_r$ konstant. Für am Ursprung reguläre Lösungen verschwinden die Konstanten und

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B} = 0\,. \tag{8.28}$$

Es handelt sich also wieder um *transversale elektromagnetische (TEM) Wellen*, deren Amplitude mit wachsendem Abstand vom Ursprung gemäß $1/r$ abnimmt. Für die Polarisation dieser Wellen gilt dasselbe wie bei den ebenen Wellen.

## 8.4 Bessel-Wellen

Die Wellengleichung $\Box \boldsymbol{E} = 0$ besitzt interessante Lösungen, die erst 1987 gefunden wurden, die Klasse der *beugungsfreien Wellen*[2]. Beugungsfrei bedeutet, dass die Welle bei der Ausbreitung im freien Raum in $z$-Richtung ihre Intensitätsverteilung in der $(x, y)$-Ebene unabhängig von $z$ beibehält (zur Definition der Intensität siehe später). Normalerweise würde man erwarten, dass ein im Querschnitt stark lokalisierter Lichtbündel bei der Ausbreitung seine Form nicht beibehalten kann. Genau solche Lösungen gibt es jedoch, und sie konnten auch annähernd realisiert werden[3]. Das einfachste Beispiel ist die *fundamentale Bessel-Welle*. Wir machen den Ansatz

$$\Phi = \Phi_0 J(\alpha\rho) e^{i(\omega t - kz)}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2\,. \tag{8.29}$$

[2] J. Durnin, J.J. Miceli Jr. und J.H. Eberly, Diffraction-free beams, Phys. Rev. Lett. 58, 1987, 1499.
[3] A. Vasara, J. Turunen und A.T. Friberg, Realisation of general nondiffracting beams with computer-generated holograms, J. Opt. Soc. Am. A6, 1989, 1748.

In Zylinderkoordinaten ist

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,, \tag{8.30}$$

so dass die Wellengleichung $\Box\Phi = 0$ äquivalent zu folgender gewöhnlichen Differentialgleichung für $J$ in (8.29) ist,

$$v^2 J'' + vJ' + \left(\frac{\omega^2 - k^2c^2}{\alpha^2c^2}\right)v^2 J = 0, \qquad v = \alpha\rho, \quad {}' = \frac{d}{dv}\,.$$

Wählen wir den freien Parameter $\alpha$ so, dass

$$\omega^2 = \left(\alpha^2 + k^2\right)c^2, \quad 0 < \alpha < \frac{\omega}{c} \tag{8.31}$$

gilt, dann erhalten wir die einfache Besselsche Differentialgleichung

$$v^2 J'' + vJ' + v^2 J = 0\,, \tag{8.32}$$

deren am Ursprung reguläre Lösung die nullte Bessel-Funktion $J_0$ ist. Also löst

$$\Phi = \Phi_0 J_0(\alpha\rho)e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\,, \tag{8.33}$$

die Wellengleichung. Die Lösung ist axialsymmetrisch und der Parameter $\alpha$ charakterisiert die Breite des zentralen Lichtbündels. Es erfolgt keine Ausweitung in den freien Raum.

In der Lorenz-Eichung haben die Potentiale die Form

$$\Phi = \Phi_0\, J_0(\alpha\rho)e^{i(\omega t - kz)} \quad , \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0\, J_0(\alpha\rho)e^{i(\omega t - kz)}\,. \tag{8.34}$$

Die Lorenz-Bedingung lautet

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = e^{i(\omega t - kz)}\left(i\left(\frac{\omega}{c^2}\Phi_0 - kA_{0z}\right)J_0 + \frac{\alpha}{\rho}(xA_{0x} + yA_{0y})J_0'\right) = 0\,.$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, falls

$$A_{0z} = \frac{\omega}{kc^2}\Phi_0 \quad \text{und} \quad A_{0x} = A_{0y} = 0$$

gelten. Die nicht verschwindenden Potentiale der fundamentalen Bessel-Welle lauten deshalb

$$\Phi = \Phi_0 J_0(\alpha\rho)e^{i(\omega t - kz)} \quad \text{und} \quad A_z = \frac{\omega}{kc^2}\Phi_0 J_0(\alpha\rho)e^{i(\omega t - kz)}\,. \tag{8.35}$$

Aus diesen Potentialen in der Lorenz-Eichung kann man nun das elektromagnetische Feld $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$

gewinnen.[4]

## 8.5 TE- und TM-Wellen

Ebene Wellen sind transversalelektromagnetische Wellen oder TEM-Wellen, bei denen sowohl der elektrische als auch der magnetische Anteil in Ausbreitungsrichtung verschwindet. Neben TEM-Wellen gibt es transversal-elektrische Wellen (TE-Wellen) und transversal-magnetische Wellen (TM-Wellen). Bei TE-Wellen verschwindet nur die elektrische Komponente in Ausbreitungsrichtung während die magnetische Komponente Werte ungleich 0 annehmen kann, bei TM-Wellen verschwindet nur die magnetische Komponente in Ausbreitungsrichtung während die elektrische Komponente Werte ungleich 0 annehmen kann. Solche Wellen findet man zum Beispiel in Hohlleitern.

Für ihre Konstruktion überlagern wir zwei monochromatische ebene Wellen mit *gleicher Frequenz* und gleichem elektrischen *oder* magnetischen Amplitudenvektor, aber *unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung.* Bei TE-Wellen haben die beiden elektrischen Wellen gleiche Amplitude, und man überlagert die ebenen Wellen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{E}_0 \cos\left(\omega t - (\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}\right), \quad \boldsymbol{B}_1 = \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{E}_1\\ \boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{E}_0 \cos\left(\omega t - (\boldsymbol{k}-\Delta\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}\right), \quad \boldsymbol{B}_2 = \frac{1}{\omega}(\boldsymbol{k}-\Delta\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{E}_2\,.\end{aligned} \tag{8.36}$$

Die erste Welle propagiert in Richtung von $\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k}$ und die zweite in Richtung von $\boldsymbol{k}-\Delta\boldsymbol{k}$. Damit diese Wellen die Maxwell-Gleichungen erfüllen, muss $\omega = c|\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k}| = c|\boldsymbol{k}-\Delta\boldsymbol{k}|$ gelten. Daraus folgen die Relationen

$$\boldsymbol{k}\perp\Delta\boldsymbol{k} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{E}_0\perp\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{E}_0\perp\Delta\boldsymbol{k}, \quad \omega = c\sqrt{\boldsymbol{k}^2+(\Delta\boldsymbol{k})^2}\,. \tag{8.37}$$

Die Überlagerung ergibt das *transversale* elektrische Feld

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2 = 2\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\cos(\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,, \tag{8.38}$$

wobei wir $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ benutzten. Diese Lösung beschreibt eine in $\boldsymbol{k}$-Richtung fortschreitende *transversale* nichtebene Welle mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{|\boldsymbol{k}|} = \frac{c}{|\boldsymbol{k}|}\sqrt{\boldsymbol{k}^2+(\Delta\boldsymbol{k})^2} > c\,. \tag{8.39}$$

Die Phasengeschwindigkeit liegt über der Lichtgeschwindigkeit. Das ist möglich und nicht im Widerspruch zur Relativitätstheorie, nach der keine Signalgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit übertreffen darf. Als Signalgeschwindigkeit kommt die Gruppengeschwindigkeit, und nicht die Phasengeschwindigkeit, in Frage. Und diese ist kleiner als $c$.

[4] Übung: Berechne und diskutiere $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ für die fundamentale Bessel-Welle.

Die Überlagerung der magnetischen Felder führt auf

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2&=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)+\frac{1}{\omega}\Delta\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)\\&=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}+2\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\ \sin(\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\frac{1}{\omega}\Delta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\,.\end{aligned}\tag{8.40}$$

Auch das $\boldsymbol{B}$-Feld breitet sich in $\boldsymbol{k}$-Richtung aus. Im Gegensatz zum elektrischen Feld ist $\boldsymbol{B}$ *nicht transversal*,

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{2}{\omega}\boldsymbol{E}_0\cdot(\boldsymbol{k}\times\Delta\boldsymbol{k})\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\ \sin(\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\neq 0\,.$$

Das Magnetfeld hat eine longitudinale Komponente, d.h eine Komponente parallel zur Ausbreitungsrichtung. Die konstruierte Lösung heißt *transversale elektrische Welle*, abgekürzt TE-Welle. Die Amplituden hängen von $\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ ab.

Ganz ähnlich kann man zwei harmonische, ebene Wellen mit gleicher Frequenz, gleichem *magnetischen* Amplitudenvektor aber verschiedenen Ausbreitungsrichtungen überlagern, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$ mit

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_1&=\boldsymbol{B}_0\cos\left(\omega t-(\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}\right),\quad &\boldsymbol{E}_1&=-\frac{1}{\omega}(\boldsymbol{k}+\Delta\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2&=\boldsymbol{B}_0\cos\left(\omega t-(\boldsymbol{k}-\Delta\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}\right),\quad &\boldsymbol{E}_2&=-\frac{1}{\omega}(\boldsymbol{k}-\Delta\boldsymbol{k})\times\boldsymbol{B}_2\,.\end{aligned}\tag{8.41}$$

Damit diese ebenen Wellen die Maxwell-Gleichungen lösen, müssen die Wellenzahlvektoren und Amplituden wieder die Relationen (8.37) erfüllen, wobei $\boldsymbol{E}_0$ durch $\boldsymbol{B}_0$ zu ersetzen ist. Die Überlagerung ergibt das *transversale* magnetische Feld

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=2\boldsymbol{B}_0\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\cos(\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,,\tag{8.42}$$

Dies ist eine in $\boldsymbol{k}$-Richtung fortschreitende *transversale* nichtebene Welle. Die Überlagerung der elektrischen Felder führt auf

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}-2\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\ \sin(\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\frac{1}{\omega}\Delta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0\,.$$

Nun ist das in $\boldsymbol{k}$-Richtung propagierende elektrische Feld *nicht transversal*,

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{2}{\omega}\,(\boldsymbol{B}_0,\boldsymbol{k}\times\Delta\boldsymbol{k})\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\ \sin(\Delta\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\neq 0\,.$$

Man nennt eine derartige Welle deshalb *transversal magnetisch*, abgekürzt TM-Welle.

## 8.6 Überlagerung von ebenen Wellen

Die Wellengleichung ist linear und deshalb kann jede Lösung der Wellengleichung, zum Beispiel das elektrische oder magnetische Feld im ladungsfreien Raum, als Fourier-Integral geschrieben werden, zum Beispiel

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\omega d^3k\; \tilde{\boldsymbol{E}}(\omega,\boldsymbol{k})e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\,. \tag{8.43}$$

Eine Welle ist eine lineare Überlagerung von ebenen Wellen. Jede Komponente des Feldes ist also ein *Fourier-Integral*. Fourier-Reihen und Fourier-Integrale treten deshalb in der Wellentheorie immer wieder auf. Im Anhang zu diesem Kapitel habe ich die wesentlichen Tatsachen über Fourier-Integrale zusammengetragen. Sie werden diese in der Quantenmechanik wieder brauchen.

Die Fourier-Koeffizienten des elektrischen Feldes in (8.43) sind durch die inverse Fourier-Transformation bestimmt,

$$\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega,\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dtd^3x\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})e^{-i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\,. \tag{8.44}$$

Nun können wir die allgemeinste Lösung der Maxwell-Gleichungen im Vakuum (bzw. in linearen homogenen Medien) angeben. Dazu transformieren wir die entsprechenden Maxwell-Gleichungen in den $(\omega,\boldsymbol{k})$-Raum. Mit (8.58) finden wir die Maxwell-Gleichungen im $(\omega,\boldsymbol{k})$-Raum,

$$\boldsymbol{k}\times\tilde{\boldsymbol{B}}+\omega\tilde{\boldsymbol{E}}=0 \quad , \quad \boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}}=0 \tag{8.45}$$

$$\boldsymbol{k}\times\tilde{\boldsymbol{E}}-\omega\tilde{\boldsymbol{B}}=0 \quad , \quad \boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{B}}=0. \tag{8.46}$$

Nicht unerwartet sind dies die Bedingungen (8.17) für monochromatische ebene Wellen. Benutzen wir die Resultate über derartige Lösungen, dann finden wir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\Re\int d^3k\,\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega,\boldsymbol{k})\,e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\\ \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) &= \frac{c}{(2\pi)^2}\Re\int d^3k\,\hat{\boldsymbol{k}}\times\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega,\boldsymbol{k})\,e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}\,,\end{aligned} \tag{8.47}$$

wobei $\omega=|\boldsymbol{k}|c$ ist und $\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega,\boldsymbol{k})$ senkrecht auf dem Wellenzahlvektor $\boldsymbol{k}$ steht.

## 8.7 Anhang: Fourier-Reihen und Integrale

Die Fourier-Reihe einer Funktion mit Periode $L$, $f(x+L)=f(x)$, lautet

$$f(x) = a\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{2\pi inx/L} \Leftrightarrow f=\mathcal{F}\left(\{f_n\}\right)\,, \tag{8.48}$$

wobei $a$ eine reelle Konstante ungleich Null ist. Die $f_n$ sind die Fourier-Koeffizienten der periodischen Funktion $f$. Die Darstellung ist möglich für quadratintegrierbare Funktionen, $f\in L_2[-L/2,L/2]$. Die Decktransformationen, das heißt die Berechnung der Fourier-Koeffizienten, gewinnt man aus

$$f_n = \frac{1}{aL}\int_{-L/2}^{L/2} dx\,e^{-2\pi inx/L}f(x) \Leftrightarrow \{f_n\} = \mathcal{F}^{-1}(f) \tag{8.49}$$

wie man leicht durch Einsetzen von (8.48) und Vertauschen von Summation und Integration sehen kann:

$$\frac{1}{L}\int dx\, e^{-2\pi inx/L}\sum_m f_m e^{2\pi imx/L} = \frac{1}{L}\sum_m L\delta_{mn}f_m = f_n\,.$$

Für $a^2 = 1/L$ ist die invertierbare Abbildung $L_2 \ni f(x) \to \{f_n\} \in l_2$ vom Raum der quadratintegrierbaren Funktionen in den Raum der quadratsummierbaren Folgen längenerhaltend:

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{L_2} &= \int dx\, f^*(x)f(x) = a^2\int dx \sum_{m,n} f^*_m e^{-2\pi i(m-n)x} f_n\\ &= a^2 L\sum_n |f_n|^2 = a^2 L\|\{f_n\}\|^2_{l_2}\,.\end{aligned} \tag{8.50}$$

Seien nun $f = \mathcal{F}(\{f_n\})$ und $g = \mathcal{F}(\{g_n\})$. Wir wollen berechnen, welche Funktion die Koeffizienten $\{f_n g_n\}$ hat:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\{f_n g_n\}\right) &= a\sum_n f_n g_n e^{2\pi inx/L} = \frac{a}{L}\sum_{n,m} f_n g_m e^{2\pi inx/L}\int dy e^{2\pi iy(m-n)/L}\\ &= \frac{1}{aL}\int dy f(x-y)g(y)\,.\end{aligned}$$

Damit geht das Produkt in die Faltung über:

$$f = \mathcal{F}(\{f_n\}),\ g = \mathcal{F}(\{g_n\}) \Longrightarrow \mathcal{F}(\{f_n g_n\}) = \frac{1}{aL}\int dy f(x-y)g(y)\,. \tag{8.51}$$

Die Fourier-Transformation für eine von $-\infty$ bis $+\infty$ definierte, nicht notwendig periodische Funktion $f(x)$ gewinnt man, indem man den Grenzübergang $L \to \infty$ macht und

$$k := \frac{2\pi n}{L},\quad f_n = \tilde{f}(k),\quad \Delta k = \frac{2\pi}{L}\quad \text{und}\quad a = \frac{\sqrt{2\pi}}{L} \tag{8.52}$$

definiert. Dann geht (8.48) über in die Riemann-Summe

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum \Delta k\tilde{f}(k)e^{ikx}$$

das für $L \to \infty$ in das Riemannsche Integral von $-\infty$ bis $\infty$ übergeht. Deshalb ist die Fourier-Transformation auf der reellen Achse

$$\mathcal{F}(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\tilde{f}(k)e^{ikx}\,, \tag{8.53}$$

und die Umkehrtransformation lautet

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)e^{-ikx}\,. \tag{8.54}$$

Aus (8.50) und mit unserer Wahl für die Konstante $a$ ergibt sich unmittelbar die *Parseval-Beziehung*, nach der $f$ und $\tilde{f}$ die gleiche $L_2$-Norm haben,

$$\|f\|^2 = \int dx |f(x)|^2 = \int dk |\tilde{f}(k)|^2 = \|\tilde{f}\|^2 \,. \tag{8.55}$$

Die Fourier-Transformation ist eine lineare und längenerhaltende Abbildung. Lassen wir in (8.51) die Intervallänge gegen Unendlich streben, dann schließen wir unmittelbar

$$f = \mathcal{F}(\tilde{f}),\; g = \mathcal{F}(\tilde{g}) \Longrightarrow \mathcal{F}(\tilde{f} \cdot \tilde{g}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dy f(x-y) g(y) \,. \tag{8.56}$$

Dies bedeutet, dass die Fourier-Transformation des Produktes zweier Funktionen gleich der Faltung der Fourier-Transformierten der Funktionen ist. Als Beispiel wählen wir die konstante Funktion $\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}$ und bestimmen ihre Fourier-Transformierte $f$. Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dy f(x-y) g(y) = \mathcal{F}\left(\sqrt{2\pi}\tilde{g}\right) = \int dk\, \tilde{g}(k) e^{ikx} = \sqrt{2\pi} g(x)$$

für eine Testfunktion $g(x)$. Daraus folgt die Relation

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-y)} dk = \delta(x-y) \,. \tag{8.57}$$

Wir werden diese wichtige Formel in der Vorlesung oft brauchen. Ist $\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1}(f)$, dann gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ik\tilde{f} \,. \tag{8.58}$$

Ableitungen gehen bei der Fourier-Transformation bis auf einen Faktor in die Multiplikation mit der dualen Variablen über.