

Kapitel 5

Elektrisches Feld in Materie

Bisher untersuchten wir das von einer Ladungsverteilung erzeugte elektrische Vakuumfeld, beschrieben durch die beiden Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Nun sollen die entsprechenden Gleichungen in Isolatoren besprochen werden. Ein materieller Körper enthält positive und negative Ladungen, und zwar von jeder Sorte gleich viele, wenn er elektrisch neutral ist. Während nun beim *Leiter* eine der beiden Sorten frei beweglich ist (Elektronen beim Metall, Ionen beim Elektrolyten), sind beim *Isolator* beide Sorten quasielastisch an feste Orte gebunden. In einem Dielektrikum gibt es keine frei beweglichen Ladungen und die geladenen Teilchen können schwerlich aus ihrer Gleichgewichtsposition verschoben werden. Unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes verschieben sich die positiven Ladungen ein wenig in Richtung des Feldes und die negativen entgegengesetzt dazu, und zwar um eine der Stärke des Feldes proportionale Wegstrecke. Diese gegenseitige Verschiebung der Ladungen nennen wir *Polarisation* und beschreiben sie durch einen Vektor \mathbf{P} . Die Polarisation induziert Zusatzfelder, die das äußere Feld überlagern.

5.1 Polarisation und dielektrische Verschiebung

Wir nehmen an, dass die Maxwell-Gleichungen des Vakuums mikroskopisch gültig sind:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_m = \frac{\rho_m}{\varepsilon_0} \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{E}_m = 0, \tag{5.1}$$

wobei \mathbf{E}_m und ρ_m das *mikroskopische* elektrische Feld die *mikroskopische* elektrische Ladungsdichte bezeichnen. Das mikroskopische Feld von etwa 10^{23} Ladungsträgern je Kubikzentimeter ist aber derart kompliziert, dass seine exakte Bestimmung in makroskopischen Dielektrika praktisch unmöglich ist. In einer Elementarzelle eines Festkörpers oder in einem Atom ist es von der Größe $E_m \approx e/(1A)^2 \approx 10^9 \text{V/cm}$, dabei ist e die Elementarladung und $1A = 10^{-8} \text{cm}$

ein Ångström. Noch schwerer wiegt unsere Unkenntnis über die Physik auf atomaren Skalen. Atomare Modelle lassen sich nur im Rahmen der Quantenmechanik korrekt entwickeln.

Messen wir allerdings nur Felder und Ladungsverteilungen auf makroskopischen Skalen, so mitteln wir automatisch über einen gewissen Raumbereich und ein Zeitintervall. Dabei werden die kurzwelligen und kurzzeitigen Fluktuationen des mikroskopischen Feldes geglättet. Die klassische Elektrodynamik in Medien ist deshalb nur sinnvoll für gemittelte Größen anwendbar.

Wir ordnen einem mikroskopischen Feld $A_m(t, \mathbf{r})$ sein geglättetes mittleres Feld

$$\langle A_m \rangle(t, \mathbf{r}) = \int d^3 r' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_m(t, \mathbf{r}') = \int d^3 r' f(\mathbf{u}) A_m(t, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (5.2)$$

zu. Die Funktion $f(\mathbf{r})$ sei in einer Umgebung des Ursprungs lokalisiert, nichtnegativ und auf Eins normiert, d.h. $\int d^3 r f(\mathbf{r}) = 1$. Mögliche Glättungsfunktionen sind

$$f(\mathbf{r}) = \frac{3}{4\pi b^3} \theta(b - r) \quad \text{oder} \quad f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/2} b^3} \exp\left(-\frac{r^2}{b^2}\right). \quad (5.3)$$

Mit der ersten Wahl mitteln wir über Kugeln vom Radius b , zentriert um \mathbf{r} . Die Gauß-Funktion

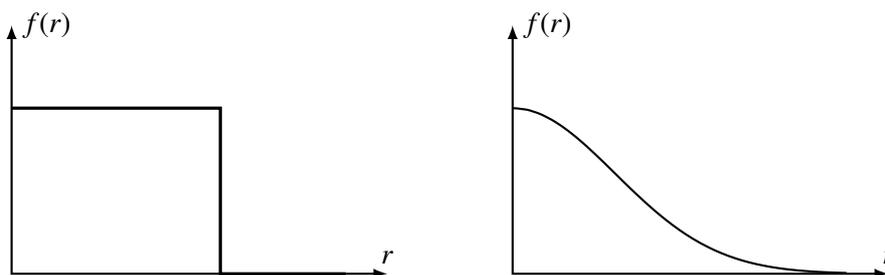


Abbildung 5.1: Zwei mögliche Glättungsfunktionen.

leistet im Wesentlichen das Gleiche, aber mit einer analytischen Glättung. Die Mittlung geschieht über eine Länge b , die viel größer als der typische Atomabstand von etwa $a \sim 10^{-8}$ cm sein soll. Auf der anderen Seite soll b klein sein gegenüber der Skala, auf der die zu studierenden Phänomene variieren. Für eine Welle ist diese Skala durch die Wellenlänge λ bestimmt, also fordern wir

$$a \ll b \ll \lambda. \quad (5.4)$$

Typische Mittelungslängen sind $\mu\text{m} \rightarrow \text{mm}$. Für $b \sim 10^{-2}$ cm sind etwa 10^{17} Teilchen in einem Mittelungsvolumen enthalten. Wegen der großen Zahl von Teilchen im Mittelungsvolumen werden durch die räumliche Mittlung auch die raschen zeitlichen Fluktuationen geglättet.

Man kann auch andere Mittelungen als in (5.2) benutzen. Die Resultate sollten aber von der Art der Mittlung unabhängig sein. Wir brauchen für die folgenden Betrachtungen die Annahme

$$\nabla \langle A_m \rangle = \langle \nabla A_m \rangle, \quad (5.5)$$

die auf die Mittlung (5.2) zutrifft,

$$\begin{aligned}\nabla\langle A_m\rangle(t, \mathbf{r}) &= \int d^3r' \nabla_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_m(t, \mathbf{r}') = - \int d^3r' \nabla_{\mathbf{r}'} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_m(t, \mathbf{r}') \\ &= \int d^3r' f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' A_m(t, \mathbf{r}') = \langle \nabla A_m \rangle(t, \mathbf{r}).\end{aligned}\quad (5.6)$$

Wir definieren nun das *makroskopische elektrostatische Feld*

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}_m \rangle(\mathbf{r}). \quad (5.7)$$

Da Mittlung und Ableitung vertauschen, erhalten wir aus den mikroskopischen Grundgleichungen (5.1) die makroskopischen Feldgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \rho_m \rangle(\mathbf{r}) \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (5.8)$$

Wegen

$$\langle \mathbf{E}_m \rangle(\mathbf{r}) = -\langle \nabla \Phi_m \rangle(\mathbf{r}) = -\nabla \langle \Phi_m \rangle(\mathbf{r}), \quad (5.9)$$

wobei Φ_m das mikroskopische Potential ist, können wir das makroskopische elektrische Feld als Gradient des gemittelten skalaren Potentials $\Phi = \langle \Phi_m \rangle$ schreiben.

Wir berechnen Φ nun näherungsweise. Das Material bestehe aus N Atomen (Ionen, Moleküle). Die Ladung q_n des n 'ten Atoms ist die Summe der Ladungen der Kerne und Elektronen, aus denen das Atom zusammengesetzt ist.¹ Die Atome sind einige Ångström groß und damit ist der Abstand der Elektronen und des Kerns im n 'ten Atom zum Schwerpunkt \mathbf{r}_n des Atoms sehr viel kleiner als der Abstand zwischen dem Aufpunkt \mathbf{r} (wo Φ gemessen wird) und \mathbf{r}_n . In der Multipolentwicklung für das vom n 'ten Atom am Orte \mathbf{r} erzeugte Potential dürfen wir damit die Dipolnäherung machen,

$$4\pi\varepsilon_0\Phi_n = \frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} + \frac{\mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3}\right), \quad (5.10)$$

wobei q_n die Ladung und \mathbf{p}_n das Dipolmoment des als klein angesehenen n 'ten Atoms ist. In dieser Näherung ist das von allen Atomen im Material erzeugte Potential durch die Summe der Monopol- und Dipolfelder der einzelnen Atome (Ionen) gegeben,

$$\begin{aligned}4\pi\varepsilon_0\Phi_m(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|} + \frac{\mathbf{p}_n \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} \right) \\ &= \int d^3r' \left(\frac{\rho_{m,f}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}_m(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right),\end{aligned}\quad (5.11)$$

¹In der klassischen Elektrodynamik dürfen wir die Kerne und Elektronen als Punktteilchen ansehen.

wobei wir die Ladungsdichte der elektrischen Monopole und die Dipoldichte einführen,

$$\rho_{\text{m,f}} = \sum_{n=1}^N q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_{\text{m}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{p}_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n). \quad (5.12)$$

Statt über das Potential hätten wir direkt über die Näherung für die mikroskopische Ladungsdichte argumentieren können. In der Dipolnäherung ist die Ladungsdichte der Atome die Summe aus dem Monopol- und Dipolterm, siehe (4.10),

$$\rho_{\text{m}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N (q_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) - \mathbf{p}_n \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n)) = \rho_{\text{m,f}} + \rho_{\text{m,P}}, \quad (5.13)$$

und (5.11) ist dann äquivalent zu

$$4\pi\epsilon_0\Phi_{\text{m}} = \int d^3r' \left(\frac{\rho_{\text{m,f}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\rho_{\text{m,P}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right). \quad (5.14)$$

Nun mitteln wir (5.11), um vom mikroskopischen Potential zum mittleren Potential zu gelangen:

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) = \int d^3u f(\mathbf{u}) \int d^3r' \left(\frac{\rho_{\text{m,f}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}_{\text{m}}(\mathbf{r}') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{u} - \mathbf{r}'|^3} \right).$$

Wir setzen $\mathbf{r}' + \mathbf{u} = \mathbf{r}''$, so dass

$$\begin{aligned} 4\pi\epsilon_0\Phi(\mathbf{r}) &= \int d^3r'' \int d^3u f(\mathbf{u}) \left(\frac{\rho_{\text{m,f}}(\mathbf{r}'' - \mathbf{u})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} + \mathbf{P}_{\text{m}}(\mathbf{r}'' - \mathbf{u}) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \right) \\ &= \int d^3r'' \left(\frac{\rho_f(\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}'') \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}''}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|^3} \right) \\ &= \int d^3r' \left(\frac{\rho_f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Im letzten Schritt haben wir die Integrationsvariable \mathbf{r}'' wieder mit \mathbf{r}' bezeichnet und die *makroskopische Ladungsdichte* der freien Ladungsträger (Ionen)

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \int d^3u f(\mathbf{u}) \rho_{\text{m,f}}(\mathbf{r} - \mathbf{u}) = \sum_n q_n f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (5.16)$$

und die *makroskopische Polarisation*

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \int d^3u f(\mathbf{u}) \mathbf{P}_{\text{m}}(\mathbf{r} - \mathbf{u}) = \sum_n \mathbf{p}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n) \quad (5.17)$$

eingeführt. Für die erste Wahl für f in (5.3) ist

$$\rho_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{|V|} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} q_n \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|V|} \sum_{\mathbf{r}_n \in V} \mathbf{p}_n, \quad (5.18)$$

wobei V die Kugel mit Radius b und \mathbf{r} als Zentrum ist. Die makroskopische Ladungsdichte entsteht durch Mittlung über alle Ladungen in V . Die gebundenen Ladungen werden sich in der Regel kompensieren, so dass ρ_f aus freien Überschussladungen resultiert. Die Polarisation \mathbf{P} ist das Dipolmoment je Volumeneinheit. Verschwindet das Dipolmoment der „Teilchen“, wie zum Beispiel das Dipolfeld der Elementarzelle eines Siliziumkristalls, dann muss man unter Umständen die Entwicklung (5.11) zu höheren Multipolmomenten fortsetzen. Für die Maxwell-Gleichungen benötigen wir die Quellen des elektrischen Feldes,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= -\Delta\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho_f(\mathbf{r}) + \int d^3r' \mathbf{P}(\mathbf{r}') \nabla' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})).\end{aligned}\quad (5.19)$$

Die Ladungsdichte ρ setzt sich zusammen aus einer frei beweglichen Ladungsdichte ρ_f (zum Beispiel die Ladungsdichte, die auf eine Kondensatorplatte aufgebracht wird) und der *Polarisationsladungsdichte*

$$\rho_P(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (5.20)$$

Wir veranschaulichen diese Gleichung. Wir betrachten einen Festkörper auf Skalen groß gegen den Atomabstand, so dass sich die Ladungen der Ionen und Elektronen kompensieren, siehe Abb. 5.2a. Legt man ein elektrisches Feld an, so verschieben sich die Elektronen gegenüber den Ionen wie in Abb. 5.2b. Im Inneren des Festkörpers hat man Ladungskompensation. Nur am Rand bleiben Netto-Ladungen übrig. Im dritten Bild ist die Polarisation in Feldrichtung eingezeichnet. In der Abb. 5.2d ist die Polarisationladungsdichte $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ aufgetragen.

Damit setzt sich die Ladungsdichte ρ zusammen aus einer frei beweglichen Dichte ρ_f und der Polarisationladungsdichte ρ_P ,

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) + \rho_P(\mathbf{r}) = \rho_f(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}). \quad (5.21)$$

Nun führt man in der Maxwell-Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (5.22)$$

die *dielektrische Verschiebung* (elektrische Erregung) \mathbf{D} ein

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad (5.23)$$

so dass $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ ist. Deshalb lauten die Grundgleichungen der Elektrostatik für die gemittelten Felder in Medien

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \quad (5.24)$$

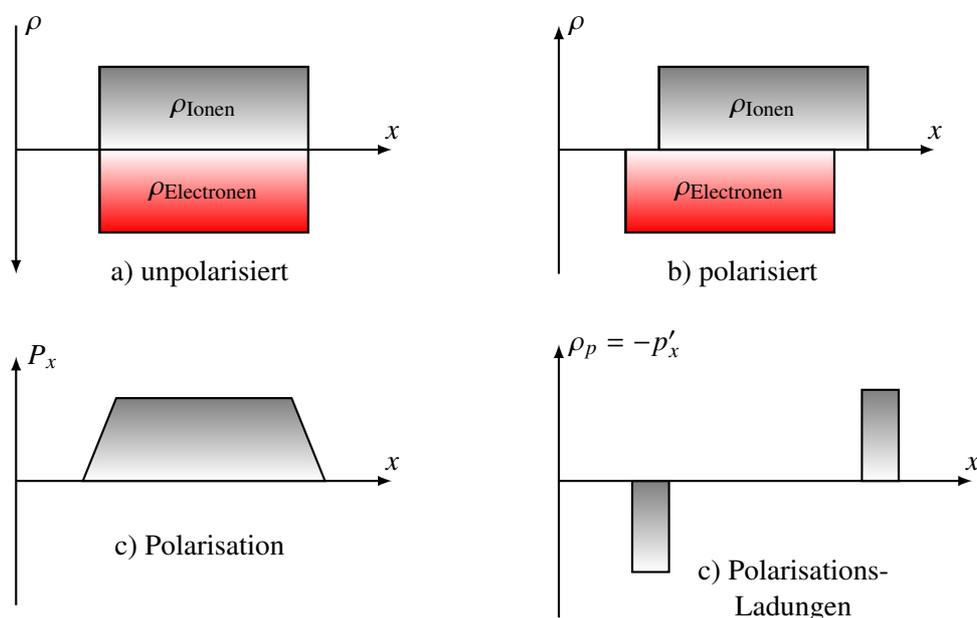


Abbildung 5.2: Zur Veranschaulichung der Polarisationsladungen.

Für den Fluss der dielektrischen Verschiebung durch die Oberfläche eines beliebigen Volumens erhält man dann die frei bewegliche Ladung $q_f(V)$ innerhalb des Volumens

$$\oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = q_f(V). \quad (5.25)$$

Die Polarisationsladungsdichte resultiert aus induzierten Dipolen, d.h. aus Ladungsverschiebungen. Dabei wird Ladung weder zu- noch abgeführt. Die gesamte Polarisationsladung muss also verschwinden:

$$Q_P = \int_V d^3r \rho_P = - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{P} = - \oint_{\partial V} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{P} = 0. \quad (5.26)$$

Hier ist V ein das Dielektrikum umschließendes Gebiet. Im SI-System wird \mathbf{E} in V/m, \mathbf{D} und \mathbf{P} in As/m² gemessen.

Für viele dielektrische und paraelektrische Substanzen, man nennt sie *lineare Medien*, sind für schwache Felder \mathbf{P} und \mathbf{E} in guter Näherung proportional

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}), & \chi_e & \text{elektrische Suszeptibilität} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}), & \varepsilon & \text{Dielektrizitätskonstante (Permittivität)}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Man definiert die relative Dielektrizitätskonstante (Permittivität) ε_r eines Mediums gemäß

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e. \quad (5.28)$$

Als Verhältnis der Permittivität ε des Mediums zu derjenigen des Vakuums ε_0 ist die dimensionslos. Für anisotrope lineare Stoffe sind χ_e und ε_r Tensoren und deshalb können \mathbf{E} und \mathbf{P} in verschiedenen Richtungen zeigen. Für isotrope lineare Medien sind Feld und Polarisation aber parallel und ε ein Skalar. Die Materialgrößen ε und χ_e hängen von den äußeren Bedingungen wie Druck (bei Quarz) oder Temperatur ab. Ferroelektrika sind nichtlinear, da bei tiefen Temperaturen \mathbf{P} bereits für $\mathbf{E} = 0$ von Null verschieden sein kann.

Man unterscheidet die Dielektrika nach den verschiedenen Typen von Polarisationen, die auftreten können:

- **Eigentliche Dielektrika:** Hier verschieben sich die in einem Teilchen gebundenen positiven und negativen elektrischen Ladungen relativ zueinander, wobei elektrische Dipole erzeugt werden. Man spricht von *Deformationpolarisation*. Die Dielektrizitätskonstante ist von der Stärke des elektrischen Feldes und (bei konstanter Dichte) der Temperatur unabhängig. Helium, Luft oder Kohlendioxid bei Raumtemperaturen sind eigentliche Dielektrika mit ε_r sehr nahe bei eins. Zum Beispiel hat Luft mit 1 atm und 18°C eine relative Permittivität $\varepsilon_r = 1.00059$
- **Paraelektrikum:** Hier besteht die Materie aus permanenten Dipolen. Wasser, dessen H₂O-Moleküle ein permanentes Dipolmoment besitzen, ist ein Paraelektrikum. In einem äußeren elektrischen Feld haben diese Momente die Energie $-\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}$. Diese wird durch Ausrichtung der Momente in Feldrichtung erniedrigt. Die thermischen Fluktuationen verhindern eine vollständige Ausrichtung. Je tiefer die Temperatur, desto größer ist diese so genannte *Orientierungspolarisation*. Methylalkohol, Glyzerin oder Wasser bei Raumtemperatur sind paraelektrische Stoffe. Bei 18°C haben sie Dielektrizitätskonstanten 31.2, 56.2 und 81.1.
- **Ferroelektrikum:** Hier können sich die permanenten Dipolmomente unterhalb einer kritischen Temperatur T_C spontan, d.h. ohne äußeres Feld, ausrichten. Dies ist ein ähnlicher Effekt, wie die spontane Ausrichtung von permanenten magnetischen Dipolen in Ferromagneten, z.B. Eisen. Vertreter dieser Gruppe sind Bariumtitanat oder Kaliumdiwasserstoffphosphat. Ferromagnetische Stoffe sind durch die außerordentliche Größe der erreichbaren Dielektrizitätskonstanten gekennzeichnet. Man kann Werte von etlichen 10^4 beobachten. Diese sind aber nicht konstant und hängen von der angelegten Feldstärke und der Vorgeschichte des Stoffes ab. Ferroelektrika zeigen im Feld ein kompliziertes Verhalten und werden im Folgenden nicht mehr betrachtet.

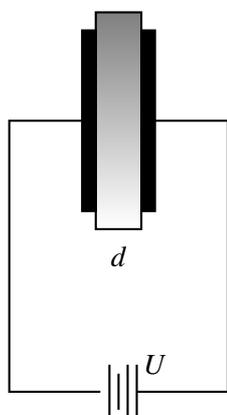
Für lineare Medien setzen wir $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ in die Gleichung für \mathbf{D} ein und finden

$$\rho_f = \nabla \cdot \mathbf{D} = -\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi). \quad (5.29)$$

Ist das Medium zusätzlich homogen, dann folgt die Poisson-Gleichung für das gemittelte Potential,

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_f. \quad (5.30)$$

In Isolatoren existieren in guter Näherung keine freien Ladungsträger und das gemittelte Potential



ist harmonisch. Bringen wir ein isotropes Dielektrikum zwischen die Platten eines Kondensators, so erhöht sich dessen Kapazität. Ist die x -Achse senkrecht zu den (als unendlich groß angenommenen) Platten mit Abstand d , dann ist das Potential des homogenen Feldes gleich

$$\phi = \frac{U}{d} x.$$

Bei festgehaltener Spannung U ist die Verschiebungsdichte D_m mit Materie proportional zur Dielektrizitätskonstante des Mediums zwischen den Kondensatorplatten,

$$\varepsilon_r = \frac{|D_m|}{|D_0|}. \quad (5.31)$$

Bei fester Spannung ist das elektrische Feld zwischen den Platten mit und ohne Medium gleich, $E_m = E_0$. Deshalb muss beim Einbringen des Dielektrikums die Ladung auf den Platten um einen Faktor ε erhöht werden, um die Abschirmung durch die Polarisationsladungen an den Oberflächen des Dielektrikums zu kompensieren. Dies führt zu einer Zunahme der Kapazität,

$$\varepsilon_r = \frac{\text{Kapazität des mit Materie gefüllten Kondensators}}{\text{Kapazität des leeren Kondensators}}. \quad (5.32)$$

Umgekehrt ist bei abgenommener Spannungsquelle die Ladung Q auf den Platten konstant und das elektrische Feld auf den Kondensatorplatten ändert nicht. Wegen der Stetigkeit der Normalkomponente von D_n beim Übergang ins Medium ist die dielektrische Verschiebung dann mit und ohne Medium gleich, $D_m = D_0$, und es gilt

$$\varepsilon_r = \frac{|E_0|}{|E_m|}. \quad (5.33)$$

Die Eigenschaft (5.32) ergibt eine Vorschrift zur Messung der Permittivität.

5.2 Grenzflächen zwischen Dielektrika

Wir betrachten die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika oder Dielektrikum und Vakuum. Unsere früheren Resultate über die Randbedingungen für Metalle können beinahe unverändert übernommen werden.

Wegen $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ verschwindet auch in Materialien die Ringspannung und

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad \text{an der Grenzfläche,} \quad (5.34)$$

d.h. die *Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ist stetig*. Anstelle von (3.5) finden wir die Übergangsbedingung

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_f. \quad (5.35)$$

Sind auf der Grenzfläche keine frei beweglichen Ladungen, so ist die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung \mathbf{D} stetig. Schließt das elektrische Feld in isotropen Medien ohne frei bewegliche Ladungen mit der Grenzflächennormalen \mathbf{n} die Winkel α_1 und α_2 ein, so gelten, wie

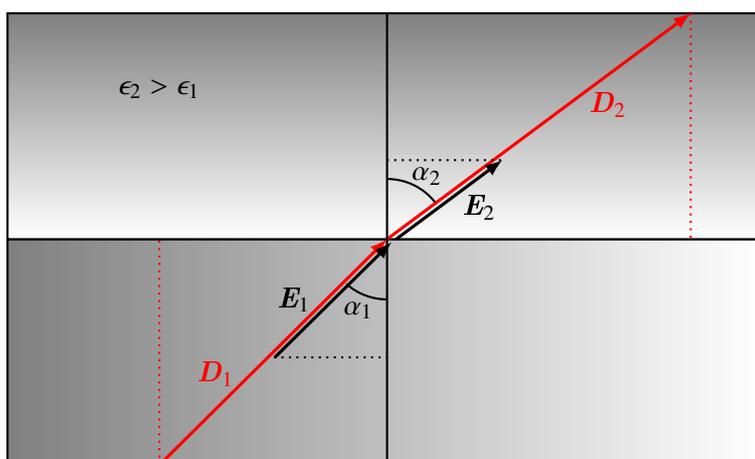


Abbildung 5.3: Beim Übergang in ein elektrisch dichteres Medium werden das \mathbf{E} und \mathbf{D} -Feld von der Grenzflächennormalen weggebrochen.

man aus obiger Abbildung leicht abliest, die Relationen

$$|\mathbf{E}_1| \sin \alpha_1 = |\mathbf{E}_2| \sin \alpha_2 \quad , \quad |\mathbf{D}_1| \cos \alpha_1 = |\mathbf{D}_2| \cos \alpha_2. \quad (5.36)$$

Der „Einfallswinkel“ und „Brechungswinkel“ der Feldlinien stehen zueinander in der Beziehung

$$\frac{\tan \alpha_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\varepsilon_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{\varepsilon_{2,r}}{\varepsilon_{1,r}}. \quad (5.37)$$

Dieses Brechungsgesetz der elektrischen Kraftlinien weicht von dem optischen Brechungsgesetz auf zwei Arten ab: Es tritt die Tangens anstelle der Sinusfunktion auf und die elektrische Kraftlinie wird beim Eintritt in das elektrisch dichtere Medium von der Einfallsnormale fortgebrochen. Elektrisch dichter wird das Material mit der größeren Dielektrizitätskonstante bezeichnet. Ist Medium 2 elektrisch dichter, so folgt aus Gl. (5.37) in der Tat

$$\tan \alpha_2 > \tan \alpha_1.$$

Der Grenzfall des idealen Leiters mit $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$ ist enthalten. Hier wird $\alpha_1 = 0$ und die Kraftlinien verlaufen senkrecht zur Leiteroberfläche.

5.2.1 Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

Wir betrachten eine dielektrische Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante ε_i , eingebettet in einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ε_a . Feld und Potential innerhalb der Kugel tragen den Index i und außerhalb der Kugel den Index a . In beiden Dielektrika gilt

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = -\varepsilon\nabla\Phi. \quad (5.38)$$

Die Stetigkeit von $\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}$ und $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ impliziert für das harmonische Potential Φ die Übergangsbedingungen

$$\Phi_a|_R = \Phi_i|_R \quad \text{und} \quad \varepsilon_a \frac{\partial\Phi_a}{\partial r}|_R = \varepsilon_i \frac{\partial\Phi_i}{\partial r}|_R. \quad (5.39)$$

Gilt die erste Gleichung an einem Punkt der Kugeloberfläche, dann gilt sie wegen der Stetigkeit von $\mathbf{t} \cdot \mathbf{E}$ an allen Punkten auf der Oberfläche. Aber an einem Punkt können wir immer $\Phi_a = \Phi_i$ erreichen. Weit weg von der Kugel ist das Feld homogen,

$$\Phi_a(\mathbf{r}) \approx -\mathbf{E}_\infty \cdot \mathbf{r} \quad \text{für} \quad r \gg R. \quad (5.40)$$

Die lineare Funktion $\mathbf{E}_\infty \cdot \mathbf{r}$ ist eine harmonische Funktion mit $\ell = 1$. Deshalb erwarten wir für die Außenlösung eine harmonische Funktion mit $\ell = 1$, also eine Linearkombination des homogenen Feldes und eines Dipolfeldes,

$$\Phi_a(\mathbf{r}) = \left(-\mathbf{E}_\infty + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r}, \quad r > R. \quad (5.41)$$

Da am Ursprung kein (makroskopischer) Dipol sitzt, können wir ein konstantes elektrisches Innenfeld mit Potential

$$\Phi_i(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{r}, \quad r < R, \quad (5.42)$$

ansetzen. Die Anschlussbedingungen (5.39) führen auf

$$\mathbf{E}_\infty - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \mathbf{E}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_\infty + \frac{\mathbf{p}}{2\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_a} \mathbf{E}_i. \quad (5.43)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man das konstante Innenfeld und das induzierte Dipolmoment der dielektrischen Kugel als Funktionen des angelegten Feldes:

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \mathbf{E}_\infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a} \mathbf{E}_\infty R^3. \quad (5.44)$$

Speziell für eine Kugel mit dielektrischer Konstante ε im Vakuum mit $\varepsilon_a = \varepsilon_0$ ist

$$\mathbf{E}_i = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} \mathbf{E}_\infty, \quad \mathbf{D}_i = \frac{3\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 2} \varepsilon_0 \mathbf{E}_\infty \quad \text{und} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{p} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} R^3 \mathbf{E}_\infty. \quad (5.45)$$

Durch die Polarisierung wird das elektrische Kraftfeld \mathbf{E} in einer dielektrischen Kugel schwächer als das primäre Außenfeld. Dies nennt man *Entelektrisierung*. Die Kraftlinien dringen in das Ku-

gelinnere ein. Außen werden sie durch die Wirkung des (virtuellen) Dipolmomentes gekrümmt, während sie innerhalb der Kugel parallel zur z -Achse verlaufen.

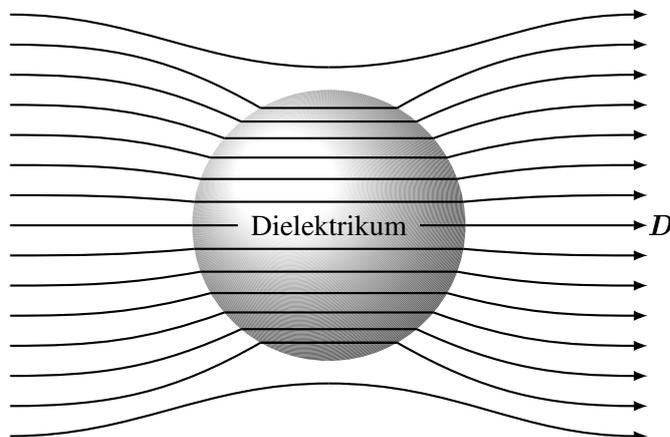


Abbildung 5.4: Eine dielektrische Kugel im Vakuum; Darstellung der quellenfreien Erregungslinien, d.h. der Feldlinien von \mathbf{D} . Ein Teil der (nicht eingezeichneten) Kraftlinien, d.h. der Feldlinien von \mathbf{E} , enden an der Oberfläche der Kugel.

Die Feldlinien zu \mathbf{D} , die so genannten *Erregungslinien*, sind überall quellenfrei, siehe Abbildung (5.4). Das gilt nicht für die *Kraftlinien*, d.h. den Feldlinien zum elektrischen Feld \mathbf{E} . Der Grenzfall $\varepsilon \rightarrow \infty$ beschreibt die ideal leitende Kugel im Vakuum. Dabei ist zu beachten, dass $\mathbf{D}_i = \varepsilon \mathbf{E}_i$ beim Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow \infty$ endlich bleibt, was mit $\mathbf{E}_i \rightarrow 0$ verträglich ist. Ist die Dipoldichte in der Kugel annähernd konstant, dann ist die Polarisierung in der Kugel gleich dem Dipolmoment dividiert durch das Volumen der Kugel,

$$\mathbf{P} = \frac{3}{4\pi R^3} \mathbf{p}. \quad (5.46)$$

Die Felder \mathbf{E}_∞ , \mathbf{E}_i und \mathbf{P} sind parallel und wegen (5.43) ist der Unterschied von Innenfeld und asymptotischen Feld proportional zur Polarisierung,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_\infty - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{R^3} = \mathbf{E}_\infty - \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}. \quad (5.47)$$

Die Polarisierung im Innern der Kugel bewirkt eine Veränderung des mittleren elektrischen Feldes in der Kugel.

Die Entelektrifizierung in einem Dielektrikum hängt von dessen Geometrie ab. In einem Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse parallel zum äußeren Feld liegt, ist das Innenfeld ebenfalls homogen und parallel zum asymptotischen Außenfeld,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_\infty - \frac{N}{\varepsilon_0} \mathbf{P}. \quad (5.48)$$

Die Zahl N ist geometrieabhängig und heißt *Entelektrifizierungsfaktor*. Sind $2a$ und $2b$ die Länge

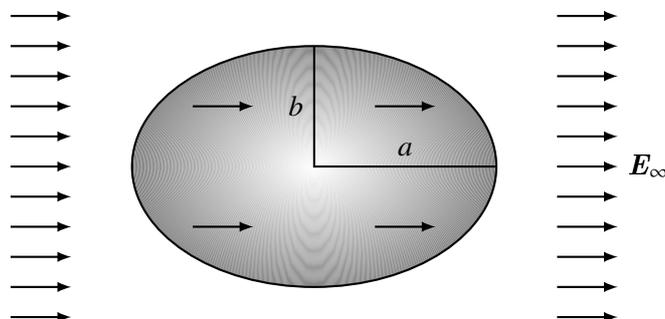


Abbildung 5.5: Das Elektrische Feld in einem dielektrischen Rotationsellipsoid wird abgeschwächt. Die Abschwächung wird durch den Entelektrifizierungsfaktor charakterisiert.

und der Durchmesser des Ellipsoids, dann lautet die Formel für den Entelektrifizierungsfaktor² als Funktion der Exzentrizität $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$

$$N = \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^3} \left(\frac{1}{2} \log \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} - \varepsilon \right). \quad (5.49)$$

Für die Kugel ist der Faktor $1/3$ und er verschwindet für einen langen Stab in Richtung des äußeren Feldes. Das Resultat (5.49) ist in der folgenden Abbildung geplottet. Bei einem langen

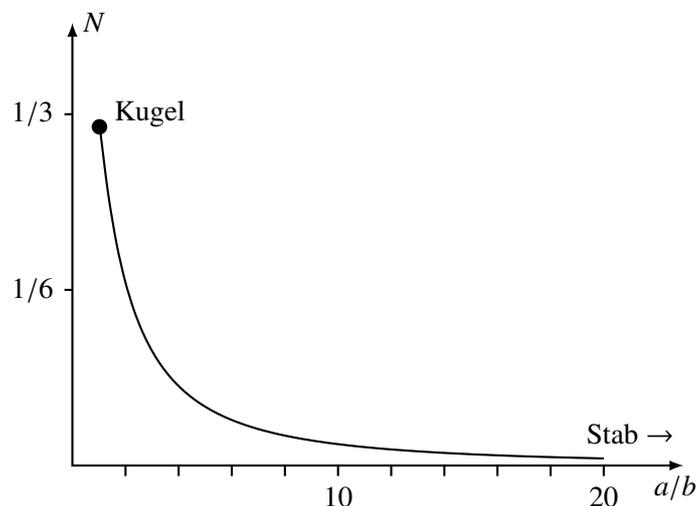


Abbildung 5.6: Die Abhängigkeit des Entelektrifizierungsfaktors eines Rotationsellipsoids von der Geometrie des Körpers. Für die Kugel ist $N = 1/3$.

²Siehe z.B. A. Sommerfeld „Elektrodynamik“ §13

Stab in Feldrichtung sind die weit voneinander entfernten Polarisationsladungen nicht mehr in der Lage, das Dielektrikum merklich zu entelektrifizieren. Dagegen ist für eine dünne Platte mit $a/b = 0$ der Entmagnetisierungsfaktor maximal, $N = 1$.

Vertauscht man die dielektrische Materie und den leeren Raum, dann ergibt sich ein *kugelförmiger Hohlraum* umgeben von einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ε . Man findet im Hohlraum ein größeres Feld als im Außenraum,

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\varepsilon_r}{1 + 2\varepsilon_r} \mathbf{E}_\infty. \quad (5.50)$$

5.3 Clausius-Mosottische Formel

Wir verlassen vorübergehend den phänomenologischen Standpunkt und versuchen, ein molekulares Modell des Dielektrikums zu konstruieren. Für ein unpolares Molekül werden die Ladungen erst nach Anlegen eines elektrischen Feldes getrennt und bilden dann einen Dipol. Das dem äußeren Feld proportionale elektrische Moment \mathbf{p} ist charakteristisch für das Molekül. In der Beziehung

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (5.51)$$

ist \mathbf{E} das angelegte, makroskopisch messbare Feld, das auch bei Abwesenheit der Moleküle vorhanden wäre; der zweite Term ist die Polarisation. Wir wollen \mathbf{P} aus dem Verhalten der Moleküle im elektrischen Feld bestimmen.

Das Feld \mathbf{E}_{eff} am Ort des Moleküls ist verschieden vom makroskopischen Feld \mathbf{E} . Im Feld \mathbf{E}_{eff} ist das mittlere Dipolmoment

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}, \quad (5.52)$$

wobei α eine in der Quantenmechanik berechenbare atomare Konstante ist. Bei einer Dichte der Dipole (Atome, Moleküle) n ergibt sich die Polarisation

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}}. \quad (5.53)$$

Wir müssen daher das effektive Feld \mathbf{E}_{eff} bestimmen, das auf den Dipol wirkt. Dazu schneiden wir eine Kugel vom Radius R aus der Materie um den Dipol heraus. Diese Dipole erzeugen, wie wir gerade gesehen haben, ein mittleres Feld

$$\mathbf{E}_p = \mathbf{E}_i - \mathbf{E}_\infty = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P},$$

und dieses Feld fehlt nach dem Herausschneiden der Kugel. In Abwesenheit der Kugel ist das Feld $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{E}_i + \mathbf{P}/3\varepsilon_0$. Dafür ist das mikroskopische, schnell veränderliche Feld der einzelnen Dipole in der Kugel zu addieren,

$$\mathbf{E}_{\text{eff}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{\text{m,p}}, \quad \mathbf{E}_{\text{m,p}} = \sum_n \frac{3(\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{r}_n) \mathbf{r}_n - r_n^2 \mathbf{p}_n}{r_n^5}. \quad (5.54)$$

Die Summe hängt von der Anordnung der Dipole, d.h. von der Kristallstruktur ab. Falls die Dipole auf einem kubischen Gitter sitzen, verschwindet die Summe.³ Um dies einzusehen, setzen wir

$$\mathbf{r}_n = a\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3,$$

wobei a die Gitterkonstante ist. Die Summe über die Positionen \mathbf{r}_n der Teilchen wird zu einer Summe über das ganzzahlige Gitter,

$$\mathbf{E}_{\text{m,p}} = \frac{1}{a^3} \sum_{\mathbf{n}} \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}^2 \mathbf{p}}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^{5/2}}. \quad (5.55)$$

Aus Symmetriegründen ist

$$\sum \frac{n_i n_j}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^{5/2}} = 0 \quad \text{für } i \neq j,$$

da sich die Beiträge der Dipole bei (n_i, n_j) und $(n_i, -n_j)$ wegheben, und weiterhin ist

$$\sum \frac{n_i^2}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^{5/2}}$$

unabhängig von i . Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. Damit bleibt für ein kubisches Gitter

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = n\alpha \mathbf{E}_{\text{eff}} = n\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P} \right) = n\alpha \left(1 + \frac{\chi_e}{3} \right) \mathbf{E}, \quad (5.56)$$

woraus wir ablesen

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0 - n\alpha/3} \quad \text{oder} \quad \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad (\text{Clausius-Mosotti}). \quad (5.57)$$

Wir haben die Relation $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ benutzt. Die letzte Beziehung in (5.57) heißt *Clausius-Mosottische Formel*. Ins Optische übertragen, wobei ε das Quadrat des Brechungsindex bedeutet, heißt sie *Lorenz-Lorentzsche Formel*. Erweitern wir die rechte Seite dieser Formel mit m , der Masse der einzelnen Moleküle, so entsteht

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{\alpha}{m} \rho. \quad (5.58)$$

Die linke Seite ist demnach proportional zur Dichte ρ des Mediums und der Atomkonstanten α/m . Für stark *verdünnte Gase* ist $\varepsilon_r \sim 1$ und entsprechend gilt

$$\varepsilon_r - 1 = \frac{\alpha}{m\varepsilon_0} \rho. \quad (5.59)$$

³Der Beweis stammt von H.A. Lorentz. Für andere Symmetrien ist das Verschwinden der Summe unbewiesen.

5.4 Feldenergie im Dielektrikum

Im Vakuum hatten wir in (2.48) für die elektrostatische Energie

$$U = \frac{1}{2} \int d^3r \Phi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \quad (5.60)$$

gefunden. Wir hatten uns die endgültige Ladungsanordnung dadurch entstanden gedacht, dass die einzelnen Ladungselemente nacheinander aus dem Unendlichen in das betrachtete Gebiet gebracht werden. Bei Anwesenheit von Dielektrika muss nicht nur Arbeit verrichtet werden, um die makroskopische Ladung an den gewünschten Ort zu bringen, sondern auch, um im Medium einen bestimmten Polarisationsgrad zu erzeugen. Deshalb kann der Ausdruck (2.48) nicht ohne Weiteres übernommen werden. Bei Verschiebung der Ladungsdichte $\delta\rho = \delta\rho_f + \delta\rho_P$ wird die elektrostatische Energie

$$\int d^3r \delta\rho_f \Phi + \int d^3r \delta\rho_P \Phi \quad (5.61)$$

zugeführt. Gleichzeitig sind in der Materie innere Potentiale Φ_i vorhanden, so dass die Polarisation ins Gleichgewicht kommt, das heißt

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_f \Phi + \int d^3r \delta\rho_P (\Phi + \Phi_i).$$

Die Potentialkräfte müssen so beschaffen sein, dass für eine sehr langsame (adiabatische) Verschiebung der Polarisationsladungen $\delta U = 0$ gilt, damit die Polarisation im Gleichgewicht ist, $\Phi + \Phi_i = 0$. Damit folgt

$$\delta U = \int d^3r \delta\rho_f \Phi = \int d^3r \nabla \cdot \delta \mathbf{D} \Phi = - \int d^3r \delta \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi$$

beziehungsweise

$$\delta U = \int d^3r \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}. \quad (5.62)$$

Für lineare Medien ist $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ und die gesamte elektrostatische Energie ist

$$U = \int d^3r u(\mathbf{r}'), \quad u(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (5.63)$$

Die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist ε_0 und (5.62) vereinfacht auf das frühere Resultat (2.50) für die elektrostatische Energie. Während (5.62) allgemeine Gültigkeit hat, gilt (5.63) nur für lineare Medien mit *konstantem* ε .