

BACHELORARBEIT

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

Physikalisch-Astronomische Fakultät

Theoretisch-Physikalisches Institut



# Flussgleichungen für Systeme mit Instantonen

eingereicht von Julia Retzlaff (Matrikelnummer 110965)  
geboren am 14. November 1989 in Bielefeld

Erstkorrektor: Prof. Dr. Andreas Wipf

Zweitkorrektor: Dr. Axel Maas

Jena, 09.08.2012

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Mathematische und physikalische Vorbetrachtungen</b>                                 | <b>2</b>  |
| 2.1      | Rückblick: Klassische Mechanik [1] . . . . .  | 2         |
| 2.2      | Der Pfadintegralformalismus [3] [8] . . . . .   | 3         |
| 2.3      | Fermionen . . . . .   | 10        |
| 2.4      | Renormierungsgruppe und Flussgleichung [16][17] . . . . .                               | 13        |
| <b>3</b> | <b>Zustandssumme eines kreisenden Fermions</b>  | <b>15</b> |
| 3.1      | Problemstellung . . . . .   | 15        |
| 3.2      | Physikalischer Hintergrund - Eine anschauliche Erklärung . . . . .                      | 15        |
| 3.3      | Berechnung der kanonischen Zustandssumme auf dem quantenmechanischen Weg . . . . .      | 16        |
| 3.4      | Berechnung der kanonischen Zustandssumme mit Hilfe euklidischer Pfadintegrale . . . . . | 18        |
| 3.5      | Vergleich der Ergebnisse . . . . .  | 21        |
| 3.6      | Diskussion des Ergebnisses . . . . .  | 22        |
| <b>4</b> | <b>Eigenschaften eines nicht-fermionischen Teilchens auf einem Ring</b>                 | <b>24</b> |
| 4.1      | Betrachtung der Energieeigenwerte ohne fermionischen Anteil . . . . .                   | 24        |
| 4.2      | Berechnung der Zustandssumme nach der Flussgleichungsmethode . . . . .                  | 25        |
| 4.3      | Prüfung des Ergebnisses im Spezialfall . . . . .  | 27        |
| 4.4      | Berechnung des Schwingerfunktional . . . . .  | 28        |
| 4.5      | Bestimmung der effektiven Wirkung . . . . .   | 30        |
| 4.6      | Alternative Kopplung . . . . .  | 33        |
| 4.7      | Ansatz zur Berechnung der Grundzustandsenergie . . . . .                                | 34        |
| <b>5</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>   | <b>35</b> |
| <b>6</b> | <b>Anhang</b>   | <b>36</b> |
| 6.1      | Wichtige Integrale . . . . .  | 36        |
| 6.2      | Rechenmethoden . . . . .  | 36        |
| <b>7</b> | <b>Quellenangaben</b>   | <b>38</b> |
| <b>8</b> | <b>Eigenständigkeitserklärung</b>   | <b>39</b> |

# 1 Einleitung

In der modernen Physik spielen quantenmechanische Betrachtungen eine entscheidende Rolle. Viele Effekte können nur auf der quantenmechanischen Ebene vollkommen verstanden und ergründet werden. Daher ist es wichtig, einen Zugang zur Quantenmechanik zu erhalten. In der Bachelorausbildung wird als Zugang die *Schrödingersche Wellenmechanik* gewählt. Außerdem erhält man einen Einblick in die *Heisenbergsche Matrixmethode*.

In dieser Bachelorarbeit wird nun, angelehnt an die klassische Mechanik, zunächst ein weiterer Zugang, nämlich die *Feynmansche Pfadintegralmethode* erarbeitet. Diese wird dann auf ein physikalisches Problem angewandt. Zunächst wird dabei die kanonische Zustandssumme berechnet und das Ergebnis, mit dem verglichen, welches aus den bekannten Methoden resultiert.

Anschließend wird noch ein Schritt weiter gegangen und die effektive Wirkung bestimmt. Diese berücksichtigt alle quantenmechanischen Korrekturen, wie beispielsweise der Tatsache, dass es neben der klassischen Bahnkurve noch weitere Wege gibt, welche ebenfalls berücksichtigt werden müssen. Um einen korrekten Übergang zu dieser rein quantenmechanischen Größe zu gewährleisten, wird mit den Mechanismen der funktionalen Renormierungsgruppe gearbeitet.

Der physikalische Hintergrund sind Systeme mit Instantonen. Konkret geht es um Teilchen auf der  $S^1$ -Sphäre, deren Wirkungsfunktion durch die Anzahl an durchlaufenen Perioden beeinflusst wird.

## 2 Mathematische und physikalische Vorbetrachtungen

### 2.1 Rückblick: Klassische Mechanik [1]

In der klassischen Mechanik spielt das *Wirkungsprinzip* eine entscheidende Rolle. Dieses besagt, dass die tatsächliche, vom System durchlaufene Bahnkurve, sich gegenüber den anderen dadurch auszeichnet, dass die Wirkungsfunktion

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt$$

einen Extremwert, meist ein Minimum, annimmt.

Bei Kenntnis der Wirkungsfunktion ist es möglich die Lagrangefunktion  $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ , durch deren partielle Ableitung nach der Zeit zu bestimmen. Diese Funktion, hängt dann von einem Satz generalisierter Koordinaten ab. Dies sind Koordinaten, die die Bewegung des Systems vollständig beschreiben, aber keinen Nebenbedingungen unterworfen sind. Desweiteren ist eine explizite Zeitabhängigkeit möglich.

Aus der Lagrangefunktion lassen sich die Bewegungsgleichungen entweder sofort ableiten, oder man bestimmt zunächst die Hamiltonfunktion

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_i \dot{q}_i(q_k, p_k, t) p_i - L(q_k, \dot{q}_i(q_k, p_k, t), t). \quad (1)$$

Hierbei ist jedoch darauf zu achten die generalisierten Ortskoordinaten  $\dot{q}_k$  durch die generalisierten Impulse zu ersetzen.

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

Der Übergang von der Lagrangefunktion zur Hamiltonfunktion wird als Legendretransformation bezeichnet. Da diese im Verlauf dieser Arbeit noch eine wichtige Rolle spielen wird, soll sie veranschaulicht werden.

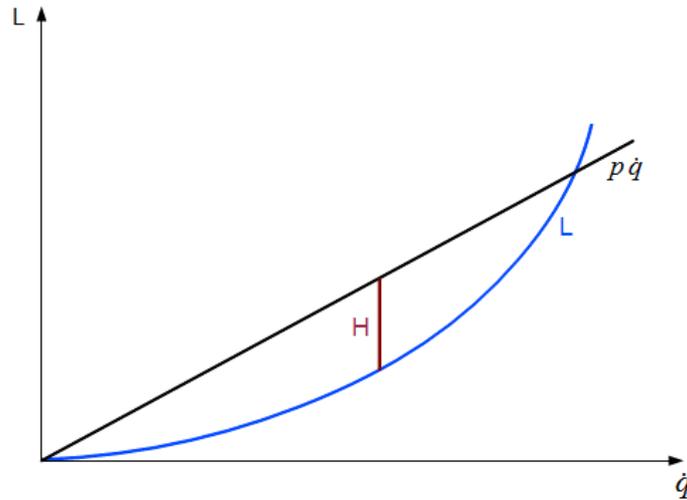


Abbildung 1: Anschauliche Darstellung der Legendretransformation für konvexe Lagrangefunktionen. Um die Hamiltonfunktion zu erhalten, ist der maximale Abstand zwischen der Geraden mit der Steigung, welche dem Impuls  $p$  entspricht, und der Lagrangefunktion zu ermitteln.

Geometrisch kann die Legendretransformation für konvexe Funktionen dadurch konstruiert werden, dass der maximale Abstand zwischen einer Geraden, mit der Steigung, welche dem Impuls  $p$  entspricht und der Funktion ermittelt wird [2].

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (p_k \dot{q}_k - L(\dot{q}_k)) = p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \stackrel{!}{=} 0$$

Aus dieser Forderung erhält man eine Bestimmungsgleichung für die Legendretransformierte

$$H(p_k) = \frac{dL}{d\dot{q}_k} \dot{q}_k - L(\dot{q}_k).$$

bzw.

$$H(p_k) = \sup_{\dot{q}_k} (p_k \dot{q}_k - L(\dot{q}_k))$$

Diese Bedingung ist für konvexe Funktionen eindeutig.

Die Bewegung des Systems im Phasenraum lässt sich nach der Transformation durch die beiden Gleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

erfassen. Es ist also zu erkennen, dass sich das System allein aus der Kenntnis der Wirkungsfunktion vollständig beschreiben lässt.

Diese Tatsache legt die Vermutung dar, dass sich für ein Quantenmechanisches System, ein Formalismus finden lässt, der der Wirkung eine ähnlich entscheidende Rolle zuordnet.

## 2.2 Der Pfadintegralformalismus [3] [8]

Im Folgenden wird darauf verzichtet, die Operatoren in der Notation speziell zu kennzeichnen. Außerdem werden viele Berechnungen auf eine Dimension beschränkt, da der Gegenstand dieser Arbeit ein Teilchen ist welches sich nur in einer Dimension aufhalten kann. Die Betrachtungen finden also im Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen des  $L_2(\mathbb{R})$  statt.

### 2.2.1 Zeitliche Entwicklung im Schrödingerbild [9]

Zur Einführung des Pfadintegralformalismus soll das Schrödingerbild gewählt werden. Die Observablen sind dementsprechend zeitunabhängig, wohingegen die Zustände, entsprechend der Schrödingergleichung  $i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle$ , mit der Zeit variieren.

Diese Differentialgleichung lässt sich, wenn der Hamiltonoperator nicht explizit zeitabhängig ist, sofort lösen. Es ergeben sich oszillierende Zustände

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-itH/\hbar} |\Psi(0)\rangle =: U(t) |\Psi(0)\rangle.$$

An dieser Stelle wurde der unitäre Zeitentwicklungsoperator  $U(t) = e^{-itH/\hbar}$  eingeführt. Dieser Zeitentwicklungsoperator besitzt neben der Unitarität  $U(t)^\dagger U(t) = 1$ , welche direkt aus der Tatsache resultiert, dass der Hamiltonoperator hermitisch ist, die Propagatoreigenschaft  $U(t_2) = U(t_2 - t_1)U(t_1)$ .

Besitzt der Hamiltonoperator eine explizite Zeitabhängigkeit, so lässt sich der Zeitentwicklungsoperator nicht mehr so einfach integrieren. Seine Eigenschaften bleiben dennoch erhalten [4].

### 2.2.2 Der Feynman-Kern

Die im vorherigen Abschnitt bestimmte, allgemeine Lösung der Schrödingergleichung kann nun in beliebige Darstellungsformen, wie etwa den Orts- und Impulsraum, transformiert werden. Für die folgenden Betrachtungen ist besonders die Ortsdarstellung interessant. In dieser Darstellung ist die Zerlegung der Eins gegeben durch [5]

$$\int dq |q\rangle \langle q| = 1.$$

Damit ergibt sich für die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Zustandes in der Ortsdarstellung

$$\Psi(t, q') = \langle q' | \Psi(t) \rangle = \int \langle q' | e^{-itH/\hbar} |q\rangle \langle q | \Psi(0) \rangle dq = \int K(t, q', q) \Psi(0, q) dq.$$

Hierbei wurde der Kern der unitären Zeitentwicklung

$$K(t, q', q) = \langle q' | e^{-itH/\hbar} |q\rangle \quad (2)$$

verwendet.

Dieser Kern entspricht der Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Bewegung vom Punkt  $q$  zum Punkt  $q'$  im Zeitintervall  $t$ .

Ist der Kern, welcher häufig auch als Feynman-Kern oder Propagator bezeichnet wird, bekannt, sind somit bei Kenntnis des Anfangszustandes  $\Psi(0)$  alle späteren Zustände  $\Psi(t)$  berechenbar. Ein gegebener Feynman-Kern ist also äquivalent zur Lösung der Schrödingergleichung.

### 2.2.3 Der Propagator des nicht-relativistischen, freien Teilchens in einer Dimension

Leitet man den Propagator  $K(t, q', q)$  nach der Zeit ab, so erkennt man, dass dieser die Schrödingergleichung erfüllt:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |K(t, q', q)\rangle = H |K(t, q', q)\rangle.$$

Des Weiteren muss die Anfangsbedingung

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(t, q', q) = \delta(q' - q)$$

erfüllt sein, da der Startpunkt des Teilchens als bekannt vorausgesetzt wird.

Lösen der Differentialgleichung unter Berücksichtigung, dass der Hamiltonoperator auf  $q'$  wirkt, führt auf

$$K(t, q', q) = \langle q' | e^{-itH/\hbar} | q \rangle = N \cdot e^{iHt/\hbar} \langle q | q \rangle.$$

Die Hamiltonfunktion des freien Teilchens ist gegeben durch

$$H = \frac{p^2}{2m} = \frac{m(q' - q)^2}{2t^2}.$$

Nun muss noch der Normierungsfaktor bestimmt werden. Um ein analytisches Integral zu haben, wird zunächst  $t \rightarrow t - i\tau$  mit  $\tau > 0$  substituiert und dann der Grenzwert  $t \rightarrow 0$  gebildet. Anschließend wird  $\tau \rightarrow it$  resubstituiert.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dq' K(t - i\tau, q', q) &= \int dq' N \cdot e^{i \frac{m(q' - q)^2}{2\hbar(t - i\tau)}} = N \cdot \sqrt{\frac{2\pi i \hbar (t - i\tau)}{m}} \rightarrow N \cdot \sqrt{\frac{2\pi i \hbar \tau}{m}} \equiv 1 \\ \Rightarrow N &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \end{aligned}$$

Der Feynman-Propagator des freien Teilchens ist somit gegeben durch

$$K(t, q', q) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \cdot e^{i \frac{m(q' - q)^2}{2\hbar t}}. \quad (3)$$

#### 2.2.4 Die Feynmansche Pfadintegraldarstellung

In diesem Abschnitt soll die Herleitung für die Feynmansche Pfadintegraldarstellung verdeutlicht, nicht jedoch exakt durchgeführt werden, da dies bereits in vielen Lehrbüchern getan wird. Ausgangspunkt ist der allgemeine Feynman-Kern  $K(t, q', q) = \langle q' | U(t) | q \rangle$ , bei dem nicht vorausgesetzt werden muss, dass der Hamiltonoperator keine explizite Zeitabhängigkeit aufweist.

Die Zeit  $t$  wird nun in  $n$  kleine Teilintervalle  $\epsilon = \frac{t}{n}$  aufgeteilt. Es werden folglich  $n$  Zeitentwicklungsoperatoren nacheinander auf den Anfangszustand  $q_0$  angewandt, bis er in den Endzustand  $q_n$  übergeht

$$K(t, q_n, q_0) = \langle q_n | \prod_{k=0}^{n-1} U(t_k, t_{k-1}) | q_0 \rangle.$$

Dadurch, dass das Produkt von  $n$  bis 1 läuft ist die richtige Anwendungsreihenfolge gewährleistet. Im nächsten Schritt werden noch mehrere Zerlegungen der Eins  $\int dq_k |q_k\rangle \langle q_k| = 1$  hinzugefügt

$$K(t, q_n, q_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \prod_{k=0}^{n-1} \langle q_k | U(t_k, t_{k-1}) | q_{k-1} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \prod_{k=0}^{n-1} \langle q_{k+1} | U(t_{k+1}, t_k) | q_k \rangle.$$

Eine hinreichend kleine Wahl der Intervalle führt dazu, dass der Hamiltonoperator innerhalb dieser Intervalle immer als zeitunabhängig angesehen werden kann, sodass man den unitären Zeitentwicklungsoperator wieder durch seine explizite Darstellung ersetzen kann

$$U(t_k, t_{k-1}) = e^{-i\epsilon H(q_{k+1}, q_k, t_{k+1})/\hbar}.$$

Damit ergibt sich für den Feynman-Kern

$$K(t, q_n, q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \prod_{k=0}^{n-1} \langle q_{k+1} | e^{-i\epsilon H(q_{k+1}, q_k, t_k)} / \hbar | q_k \rangle. \quad (4)$$

Dieser Kern lässt sich noch weiter berechnen, indem man den Hamiltonoperator als Summe des Hamiltonoperators des freien Teilchens  $H_0(q_{k+1}, q_k, t_k)$  und eines ortsabhängigen Potentials  $V(q_k)$  schreibt. Bringt man diese Potential in Diagonalform, so kann es im Skalarprodukt vorgezogen werden:

$$\begin{aligned} K(t, q_n, q_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \prod_{k=0}^{n-1} \langle q_{k+1} | e^{-i\epsilon H_0((q_{k+1}, q_k, t_k)) / \hbar} e^{-i\epsilon V(q_k) / \hbar} | q_k \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \prod_{k=0}^{n-1} \langle q_{k+1} | e^{-i\epsilon H_0 / \hbar} | q_k \rangle e^{-i\epsilon V(q_k) / \hbar}. \end{aligned}$$

Der Propagator des freien Teilchens wurde bereits im vorherigen Abschnitt berechnet. Somit ergibt sich für den Feynman-Kern

$$K(t, q_n, q_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} dq_k \left( \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} \right)^n \cdot e^{i\epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} \right)^2 - V(q_k) \right] / \hbar}.$$

Dass es sich hierbei um ein Pfadintegral handelt wird deutlich, wenn man die Schritte einzeln betrachtet.

Für jeden unitären Zeitentwicklungsoperator  $U(q_{k+1}, q_k, t_k)$  wurde durch Abspalten des Potentials im wesentlichen der Hamiltonoperator des freien Teilchens angenommen. Das heißt die Bewegung in dieser Richtung erfolgt auf einer Geraden. Insgesamt bewegt sich das Teilchen damit entlang eines Polygonzugs von  $q_0$  nach  $q_n$ .

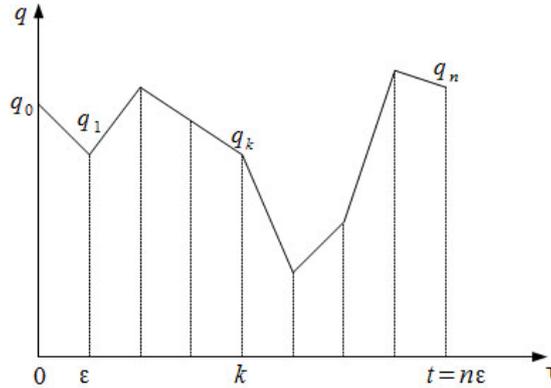


Abbildung 2: Bewegung des Teilchens von  $q_0$  nach  $q_n$ . Die Bewegung erfolgt entlang eines Polygonzugs, dessen einzelne Abschnitte durch die Bewegung eines freien Teilchens genähert werden können. Sie ergeben sich deshalb als Geraden.

Jetzt kann noch der Limes  $n \rightarrow \infty$  bzw.  $\epsilon \rightarrow 0$  vollzogen werden:

$$\epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{\epsilon} \right)^2 - V(q_k) \right] \rightarrow \int_0^t ds \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dq}{ds} \right)^2 - V(q(\tau)) \right]$$

$$= \int_0^t ds (T - V) = \int_0^t ds L = S.$$

Der Exponent geht demnach in die Wirkungsfunktion über. Bleibt noch die Frage, wie das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{k=1}^{n-1} dq_k$  zu verstehen ist. Eingeführt wurde es als Summe über die einzelnen Geraden möglicher Polygonzüge von  $q_0$  nach  $q_n$ . Dadurch, dass der Limes ausgeführt wird, wird jeder stetige Weg durch diese Polygone aus infinitesimalen Geraden erfasst. Das Integral ist somit gleichbedeutend zu der Summe über alle möglichen Wege von  $q_0 = q$  nach  $q_n = q'$ .

Die mathematische Bedeutung von einem unendlichem Produkt von Lebesquemaßen ist nicht geklärt. Theoretisch kann aber über imaginäre Zeiten ein Maß eingeführt werden. Das Maß soll mit  $\mathcal{D}q$  gekennzeichnet werden.

Das allgemeingültige Endresultat für den Feynman-Kern ist

$$K(t, q, q') = C \int_q^{q'} \mathcal{D}q e^{iS/\hbar}. \quad (5)$$

Die anfängliche Vermutung, dass es auch in der Quantenmechanik einen Formalismus geben könnte, in dem alle benötigten Information über das System aus der Wirkungsfunktion herleitbar sind, wurde also bestätigt. Der große Unterschied zur klassischen Mechanik liegt darin, dass nun alle Wege relevant sind, nicht nur der extreme. Den Wegen wird jeweils eine Übergangsamplitude zugeordnet. Diese ist proportional zu  $e^{iS_{Weg}/\hbar}$ . Der Propagator ist die Summe bzw. das Integral über alle diese Amplituden.

### 2.2.5 Euklidische Pfadintegrale [10]

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits erwähnt, dass durch einen Übergang zu imaginären Zeiten ein korrektes Maß eingeführt werden kann. Dieser Übergang löst nämlich die mathematische Schwierigkeit, dass durch den oszillierenden Integranden Distributionen auftreten. Realisiert wird der Übergang durch eine Wick-Rotation  $t = \tau e^{-i\alpha}$  mit  $\tau \in \mathbb{R}^+$ . Dabei ist allerdings darauf zu achten, dass dieser Übergang nur für nach unten beschränkte Hamiltonoperatoren mathematisch korrekt ist [10].

Bei einem Rotationswinkel von  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich der Übergang  $t \rightarrow -i\tau$ . Dadurch transformiert sich das Minkowskische Skalarprodukt zu einem negativ euklidischen:

$$(ct)^2 - \vec{x}^2 \rightarrow -((c\tau)^2 + \vec{x}^2).$$

Dies erklärt, warum diese Pfadintegrale als euklidisch bezeichnet werden.

Für den euklidischen Kern ergibt sich analog zu Gl. (2) bei der Ersetzung  $t \rightarrow -i\tau$

$$K(\tau, q', q) = \langle q' | e^{-\tau H/\hbar} | q \rangle.$$

Eine zur Feynmanschen Pfadintegraldarstellung analoge Rechnung zu Gl. (4), in der lediglich  $i\epsilon$  durch  $\epsilon$  ersetzt werden muss, liefert

$$K(\tau, q', q) = C \int_q^{q'} \mathcal{D}q e^{-S_E/\hbar}. \quad (6)$$

Hierbei bezeichnet  $S_E$  die euklidische Wirkung. Für ein nichtrelativistisches Teilchen im Potential  $V$  lautet diese

$$S_E(q) = \int_0^\tau d\kappa \left( \frac{m\dot{q}^2}{2} + V(q(\kappa)) \right).$$

Die Phasen im Feynmanschen Pfadintegral gehen in eine exponentielle Dämpfung über und es ist sichergestellt, dass das Integral konvergiert. In diesem Zusammenhang kann man das Pfadintegral auch als Summe über alle Wege betrachten, wobei diese Wege entsprechend der klassischen Wirkung gewichtet werden.

### 2.2.6 Die kanonische Zustandssumme in der Pfadintegraldarstellung [11]

In der statistischen Physik ist die kanonische Zustandssumme über

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{Sp } e^{-\beta H} \quad (7)$$

definiert [6]. Aus ihr lassen sich alle für das System relevanten Informationen gewinnen, genau wie aus dem Feynman-Kern. Dies legt einen Zusammenhang nahe, der auch tatsächlich nachgewiesen werden kann. Ausgangspunkt ist der euklidische Kern

$$K(\tau, q', q) = \langle q' | e^{-\tau H/\hbar} | q \rangle.$$

In diesen wird eine Zerlegung der Eins als Summe über die diskreten Eigenvektoren des Hamiltonoperators eingefügt:

$$\begin{aligned} K(\tau, q', q) &= \langle q' | e^{-\tau H/\hbar} \sum_n |n\rangle \langle n| q \rangle \\ &= \sum_n e^{-\tau E_n/\hbar} \langle n| q \rangle \langle q' | n \rangle. \end{aligned}$$

Nun wird der Startpunkt gleich dem Endpunkt gesetzt und  $\frac{\tau}{\hbar}$  mit der inversen Temperatur  $\beta$  identifiziert. Integration über  $q$  liefert das gewünschte Ergebnis

$$\int dq K(\hbar\beta, q, q) = \sum_n e^{-\beta E_n} \int dq \langle n| q \rangle \langle q| n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n| n \rangle = \sum_n e^{-\beta E_n}.$$

Daraus folgt aufgrund der Gleichheit von Start und Endpunkt die Integration über alle periodischen Wege

$$Z(\beta) = \int dq K(\hbar\beta, q, q) = C \oint \mathcal{D}q e^{-S_E/\hbar}. \quad (8)$$

In Zusammenhang mit der statistischen Physik ist es möglich sich die diskretisierten  $q_i$  als Gitterpunkte in einem eindimensionalen Gitter vorzustellen, die mit ihren nächsten Nachbarn wechselwirken. Dabei werden Start- und Endpunkt,  $q$  und  $q'$ , festgehalten. Die Summe über alle Wege ist dann gleichbedeutend mit der Summe über alle Gitterkonfigurationen. Periodische Wege sind also als periodische Randbedingungen zu verstehen.

### 2.2.7 Berechnung des Propagators des nicht-relativistischen, freien Teilchens in einer Dimension gemäß der euklidischen Pfadintegralmethode

#### Vorbetrachtung: Das Gauß'sche Integral[12]

Für die Berechnungen ist es hilfreich, das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_n e^{-\alpha(q_{n+1}-q_n)^2 - \beta(q_n - q_{n-1})^2} \quad (9)$$

zu kennen. Deshalb wird dieses zunächst für quadratische Ergänzung auf Gauß'sche Standardform gebracht und anschließend berechnet:

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} dq_n \exp \left[ -(\alpha + \beta) \left( q_n - \frac{\alpha q_{n+1} + \beta q_{n-1}}{\alpha + \beta} \right)^2 - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} (q_{n+1} - q_{n-1})^2 \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + \beta}} \exp \left[ -\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} (q_{n+1} - q_{n-1})^2 \right].
\end{aligned}$$

### Berechnung des Pfadintegrals [12]

In Abschnitt 2.2.3 wurde der Propagator für das nicht-relativistische, freie Teilchen mit Hilfe der Schrödingertheorie abgeleitet. Dieses Ergebnis soll nun durch die äquivalente Rechnung mittels des Pfadintegralformalismus überprüft werden. Dazu wird der Feynman-Kern des freien Teilchens verwendet

$$\begin{aligned}
K(\tau, q', q) &= C \cdot \int_q^{q'} \mathcal{D}q e^{-S_E/\hbar}. \\
&= C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_n \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} \sum_{k=0}^{n-1} (q_{k+1} - q_k)^2 \right]
\end{aligned}$$

Nun werden die ersten beiden Integrationen über  $dq_1$  und  $dq_2$  gemäß Gl. (9) ausgeführt.

$$\begin{aligned}
K(\tau, q_n, q_0) &= C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_n \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} ((q_1 - q_0)^2 + (q_2 - q_1)^2) \right] \\
&\quad \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} \sum_{k=2}^{n-1} (q_{k+1} - q_k)^2 \right] \\
&= C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 \dots dq_n \sqrt{\frac{\pi\epsilon\hbar}{m}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} \left( \frac{1}{2} (q_2 - q_0)^2 + (q_3 - q_2)^2 \right) \right] \\
&\quad \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} \sum_{k=3}^{n-1} (q_{k+1} - q_k)^2 \right] \\
&= C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_3 \dots dq_n \sqrt{\frac{\pi\epsilon\hbar}{m}} \sqrt{\frac{\pi 2\epsilon\hbar}{m}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} \left( \frac{1}{3} (q_3 - q_0)^2 + (q_4 - q_3)^2 \right) \right] \\
&\quad \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} \sum_{k=4}^{n-1} (q_{k+1} - q_k)^2 \right]
\end{aligned}$$

Nach n-facher Integration ergibt sich dementsprechend

$$K(\tau, q_n, q_0) = C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi\epsilon\hbar}{m}} \sqrt{\frac{\pi 2\epsilon\hbar}{m}} \dots \sqrt{\frac{\pi n\epsilon\hbar}{m}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} \left( \frac{1}{n} (q_n - q_0)^2 \right) \right].$$

Nun muss der Kern noch normiert werden:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dq_n C \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi\epsilon\hbar}{m}} \sqrt{\frac{\pi 2\epsilon\hbar}{m}} \dots \sqrt{\frac{\pi n\epsilon\hbar}{m}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} \left( \frac{1}{n} (q_n - q_0) \right)^2 \right] \\
&= C \cdot \sqrt{\frac{\pi\epsilon\hbar}{m}} \sqrt{\frac{\pi 2\epsilon\hbar}{m}} \dots \sqrt{\frac{\pi n\epsilon\hbar}{m}} \sqrt{\frac{2\pi\hbar n\epsilon}{m}} \equiv 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{\frac{m}{\pi\epsilon\hbar}} \cdots \sqrt{\frac{m}{\pi n\epsilon\hbar}} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar n\epsilon}}.$$

Damit ergibt sich das Pfadintegral zu

$$\begin{aligned} K(\tau, q_n, q_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar n\epsilon}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\epsilon} \left( \frac{1}{n} (q_n - q_0)^2 \right) \right] \\ &\rightarrow K(\tau, q', q) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar\tau}} \exp \left[ -\frac{m}{2\hbar\tau} (q_n - q_0)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Dies entspricht dem bereits berechneten Propagator in euklidischer Form, vergl. Gl.(3).

## 2.3 Fermionen

### 2.3.1 Eigenschaften von Fermionen [6]

Fermionen sind Elementarteilchen, welche durch eine total antisymmetrischen Wellenfunktion beschrieben werden.

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_n) = -\Psi(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

Die Wellenfunktion kann als Produkt einer Ortswellenfunktion und einer Spinwellenfunktion geschrieben werden.

Fermionen gehorchen damit der Fermi-Dirac-Statistik, welche in ihrem Ansatz diese Antisymmetrie berücksichtigt. Desweiteren resultiert aus dieser grundlegenden Eigenschaft, dass der Spin der Fermionen immer halbzahlig ist.

### 2.3.2 Grassmann-Variablen [13]

Um Fermionen mathematisch korrekt zu beschreiben, muss man mit *Grassmann-Variablen* arbeiten. Die Besonderheit der Grassmann-Variablen ist, dass diese antikommutierend sind, wodurch die Antisymmetrie der Wellenfunktion berücksichtigt wird. Die Grassmann-Algebra findet auf einem Körper statt, der von  $n = \dim(\text{Körper})$  antikommutierenden Variablen  $\eta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) aufgespannt wird [14]

$$\{\eta_j, \eta_k\} = 0.$$

Insbesondere für  $j=k$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \{\eta_k, \eta_k\} &= \eta_k^2 + \eta_k^2 = 0 \\ &\Rightarrow \eta_k^2 = 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man komplexe Grassmann-Variablen, so kann die N-dimensionale komplexe Algebra  $G$  durch eine  $2N$ -dimensionale reelle Algebra beschrieben werden. Aufgespannt wird sie von  $\eta$  und dessen komplex Konjugierter  $\bar{\eta}$ . Diese besitzen für  $\eta_k, \eta_j \in G$  und  $a \in \mathbb{C}$  die Eigenschaften

- $\bar{\bar{\eta}}_k = \eta_k$
- $\overline{\eta_k \eta_j} = \bar{\eta}_j \bar{\eta}_k$
- $\overline{a \eta_k} = a^* \bar{\eta}_k$
- $\bar{\eta}_k \eta_k = -\eta_k \bar{\eta}_k$ .

Aufgrund der Tatsache, dass die Variablen antikommutierend sind, ist zwischen links- und rechtsseitiger Ableitung zu unterscheiden. In dieser Arbeit wird die Ableitung als linksseitig aufgefasst, sodass

$$\frac{\partial}{\partial \eta_l} \eta_k \eta_j := \frac{\partial^L}{\partial \eta_l} \eta_k \eta_j = \delta_{kl} \eta_j - \eta_k \delta_{lj} = -\frac{\partial^R}{\partial \eta_l} \eta_j \eta_k$$

gilt.

Eine weitere Besonderheit der Grassmann-Variablen ist, dass die Integration der Differentiation entspricht, wobei wieder zwischen links- und rechtsseitiger Integration unterschieden werden muss [14]

$$\int d\eta_k \eta_j = \frac{\partial}{\partial \eta_k} \eta_j = \delta_k^j = \int \eta_j d\eta_k.$$

Oftmals ist es in der Physik notwendig, Variablensubstitutionen durchzuführen. Daher muss bekannt sein, wie eine solche Substitution sich auf Integrationen auswirkt.

$$\begin{aligned} \eta'_j &= \sum_{k=1}^n A_{jk} \eta_k \\ \Rightarrow \prod_j \eta'_j &= \prod_j \sum_{k=1}^n A_{jk} \eta_k = \prod_j \eta_j \left( \sum_k \text{sgn}(\sigma) \prod_j A_{jk} \right) = \det A \prod_j \eta_j \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass das Quadrat einer Grassmann-Variable verschwindet und verschiedene Grassmann-Variablen antikommutieren.  $\sigma$  bezeichnet gerade die Permutationen von  $j$  und  $k$ .

Unter Verwendung der Integrationseigenschaften ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \prod_j d\eta_j \eta_j &= \int \prod_j d\eta'_j \eta'_j = \det A \int \prod_j d\eta'_j \eta_j = 1. \\ &\Rightarrow \int \prod_j d\eta_j = \det A \int \prod_j d\eta'_j \end{aligned} \quad (11)$$

### 2.3.3 Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung [15]

Wie in der klassischen Mechanik, lässt sich auch in der klassischen Feldtheorie eine Lagrangefunktion  $L$  aufstellen. Diese hängt dann nur von dem jeweiligem Feld  $\Phi(x)$  und dessen vierer-Ableitung  $\partial_\mu \Phi$  ab. Oftmals wird jedoch die Lagrange-Dichte anstatt der Lagrangefunktion betrachtet  $L = \int d^4x \mathcal{L}$ . Die Wirkung ergibt sich damit zu

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi).$$

Nun soll die Variation der Wirkung betrachtet werden, die genau wie in der klassischen Mechanik auch verschwindet.

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \delta \Phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes lässt sich der letzte Term in ein Oberflächenintegral verwandeln, welches allerdings Null wird, da physikalisch sinnvolle Felder im Unendlichen nicht mehr vorhanden sind. Somit bleibt nur noch.

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \right] \delta \Phi = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) &= 0 \quad (\text{Euler-Lagrange-Gleichung}),\end{aligned}$$

beziehungsweise in nicht-relativistischer Form in einer Dimension

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \Phi)} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\Phi})} \right) = 0.$$

### 2.3.4 Feldquantisierung [12]

Für die Bewegung eines nichtrelativistischen Teilchens in einem Potential erfüllt die Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} \Psi + V(x, t) \Psi.$$

Im Sinne der Feldquantisierung ist es sinnvoll die Wellenfunktion mit einem klassischen Feld zu identifizieren. Durch Vergleich der Schrödingergleichung mit der Euler-Lagrange-Gleichung lässt sich die zugehörige Lagrangedichte bestimmen.

$$\mathcal{L} = i\hbar \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} - V(x, t) \Psi^* \Psi \quad (12)$$

Dabei sind  $\Psi$  und  $\Psi^*$  als zwei unabhängige Felder zu betrachten.

Der Übergang zur kanonischen Feldquantisierung wird nun dadurch vollzogen, dass  $\Psi$  und  $\Psi^*$  übergehen in die Feldoperatoren  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$ .

Im fermionischen Fall müssen diese beiden Operatoren die Antikommutatorregeln

$$\{\Psi(x, t), \bar{\Psi}(x', t)\} = \delta(x - x')$$

und

$$\{\Psi(x, t), \Psi(x', t)\} = \{\bar{\Psi}(x, t), \bar{\Psi}(x', t)\} = 0$$

erfüllen. Daraus folgt, wie bereits bei den Grassmann-Variablen gezeigt,

$$\Psi^2 = \bar{\Psi}^2 = 0.$$

Die beiden Operatoren  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$  können als quantenmechanische Ab- und Aufsteigeoperatoren verstanden werden. Da ihre Quadrate verschwinden folgt sofort, dass es nur den Zustand  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  geben kann. Betrachtet man nur die Zeitabhängigkeit so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Psi |0\rangle &= 0 \\ \bar{\Psi} |0\rangle &= |1\rangle \\ \Psi |1\rangle &= \Psi \bar{\Psi} |0\rangle = |0\rangle - \bar{\Psi} \Psi |0\rangle = |0\rangle \\ \bar{\Psi} |1\rangle &= \bar{\Psi} \bar{\Psi} |0\rangle = 0.\end{aligned}$$

Daraus lässt sich eine Matrixdarstellung

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

gewinnen. Multiplikation mit den Zustandsvektoren zeigt sofort, dass die oben geforderten Bedingungen erfüllt werden.

## 2.4 Renormierungsgruppe und Flussgleichung [16][17]

### 2.4.1 Erzeugende Funktionale

Im Folgenden wird die euklidische Pfadintegraldarstellung verwendet.

In der Quantenmechanik interessiert man sich oft für die Erwartungswerte von Größen, da diese experimentell messbar sind. Im Zusammenhang mit der Zustandssumme betrachtet man deshalb oft Korrelationsfunktionen, die die gesamten physikalischen Informationen des Systems enthalten.

$$\langle x(\tau_1) \dots x(\tau_n) \rangle = \int \mathcal{D}x \, x(\tau_1) \dots x(\tau_n) e^{-S[x]}.$$

Um diese Korrelationsfunktionen bestimmen zu können, ist es sinnvoll, ein mathematisches Hilfsmittel einzuführen, nämlich einen zusätzlichen Quellterm  $\int Jx = \int d^Dx J(\tau)x(\tau)$ . Dieser wird in der Zustandssumme zur Wirkung addiert gemäß

$$Z[J] = \int \mathcal{D}x e^{-S[x] + \int Jx}. \quad (14)$$

Die Korrelationsfunktionen ergeben sich damit direkt zu

$$\langle x(\tau_1) \dots x(\tau_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left( \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(\tau_1) \dots \delta J(\tau_n)} \right)_{J=0}.$$

Um die Erzeugung des  $Z[0]$ -Terms bei der Ableitung zu vermeiden empfiehlt es sich nicht mit der Zustandssumme, sondern dem Schwingerfunktional zu arbeiten. Dieses ist als natürlicher Logarithmus der Zustandssumme definiert,

$$W[J] = \ln Z[J] \quad (15)$$

$$\Rightarrow \langle x(\tau_1) \dots x(\tau_n) \rangle_c = \langle x(\tau_1) \dots x(\tau_n) \rangle - \langle x(\tau_1) \rangle \dots \langle x(\tau_n) \rangle = \left( \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(\tau_1) \dots \delta J(\tau_n)} \right)_{J=0}.$$

Es wurden die zusammenhängenden Korrelationsfunktionen eingeführt.

### 2.4.2 Die effektive Wirkung

Genau wie im klassischen Fall lässt sich auch in der Quantenmechanik eine Wirkung berechnen. Diese muss jedoch Quantenkorrekturen enthalten. Sie wird daher als effektive Wirkung  $\Gamma$  bezeichnet und ist als Legendretransformierte des Schwingerfunktionals definiert. Für konvexe Schwingerfunktionale ergibt sich somit

$$\Gamma[\chi] = \mathbf{sup}_J \left[ \int J\chi - W[J] \right]. \quad (16)$$

Dass das Schwingerfunktional konvex sein muss, lässt sich mit Hilfe von Erwartungswerten zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W[j(\tau)]}{\delta j(\tau)^2} &= \frac{\delta}{\delta j(\tau)} \left( \frac{\mathcal{D}x x(\tau) e^{-S[x] + \int Jx}}{\mathcal{D}x e^{-S[x] + \int Jx}} \right) \\ &= \frac{\mathcal{D}x x(\tau)^2 e^{-S[x] + \int Jx}}{(\mathcal{D}x e^{-S[x] + \int Jx})^2} - \left( \frac{\mathcal{D}x x(\tau) e^{-S[x] + \int Jx}}{\mathcal{D}x e^{-S[x] + \int Jx}} \right)^2 \\ &= \langle x(\tau)^2 \rangle - \langle x(\tau) \rangle^2 = (\Delta x(\tau))^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Die zweite Ableitung des Schwingerfunktionals liefert also die Varianz von  $x(\tau)$  bzw. bei mehreren Zeitabhängigkeiten der Korrelationsfunktion. Die Varianz einer Größe ist jedoch immer positiv, was impliziert, dass das Schwingerfunktional konvex sein muss.

Die Forderung nach einem Supremum legt  $\chi$  fest

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J} \left[ \int J\chi - W[J] \right] &= 0 \\ \Rightarrow \chi &= \frac{\delta W[J]}{\delta J} = \langle x(\tau) \rangle_J. \end{aligned}$$

$\chi$  entspricht damit dem Erwartungswert der Orts- bzw. Feldpunkte bei nichtverschwindender Quelle  $J$ , ist also der effektive, makroskopische Felderwartungswert.

### 2.4.3 Einführung einer Skalenabhängigkeit

Bei der Renormierungsgruppe wird ein physikalisches Problem über einen großen Skalenbereich betrachtet. Es wird der komplette Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik abgedeckt. Dies ist oft mit starken Divergenzen und mathematisch nicht handhabbaren Problemen verbunden. Deshalb ist es notwendig, regulierende Terme einzubauen, die mit den betrachteten Skalen variieren und die mathematische Korrektheit garantieren. Die Idee ist es dann, diesen sogenannten Regulator nach erfolgter Rechnung wieder verschwinden zu lassen um ein unverfälschtes Ergebnis zu erhalten.

Bei der funktionalen Renormierungsgruppe geht es konkret darum, über alle Moden einer festgelegten, wellenlängenabhängigen Skala auszuintegrieren. Ein solcher Bereich wird oft als Impulsschale bezeichnet.

Gesucht ist jetzt eine skalenabhängige, mittlere effektive Wirkung  $\Gamma_k$ , die von der Impulsskala  $k$  abhängt. Diese sollte für kleine Impulse  $k \rightarrow 0$  in die effektive Wirkung übergehen und für Impulse  $k \rightarrow \Lambda$  in die (bekannte) Wirkung  $S_\Lambda$ , oftmals die klassische Wirkung.

Ein Ansatz ist es die erzeugenden Funktionale skalenabhängig zu machen,

$$e^{W_k} = Z_k = \int_{\Lambda} \mathcal{D}x \exp \left[ -S[x] - \Delta S_k[x] + \int Jx \right], \quad (18)$$

wobei als Regulator ein quadratisches Funktional gewählt wird, welches durch eine impulsabhängige Masse bestimmt wird. In einer Dimension hat dieses die Struktur

$$\Delta S_k[x] = \frac{1}{2} \int \frac{dp}{2\pi} x(p)^* R_k(p) x(p).$$

An die *cutoff-Funktion*  $R_k$  werden dabei folgende Anforderungen gestellt:

1.  $R_k(p) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$  für ein festes  $p$ . Dies gewährleistet den Übergang zur effektiven Wirkung bei kleinen Skalen.
2.  $R_k(p) \xrightarrow{k \rightarrow \Lambda} \infty$  für ein festes  $p$ . Dies gewährleistet den Übergang zur klassischen Wirkung bei einer festgelegten, oberen Skala.
3.  $R_k(p) > 0$  für  $p \rightarrow 0$ . Dies gewährleistet, die Regularisierung im IR (kleine Impulse).

Die skalenabhängige effektive Wirkung ist über eine modifizierte Legendretransformation definiert

$$\Gamma_k[\chi] = \int d\tau j[\tau] \chi[\tau] - W_k[j] - \Delta S_k[\tau] \quad \text{mit} \quad \chi(\tau) = \frac{\delta W_k[j]}{\delta j(\tau)}. \quad (19)$$

### 2.4.4 Die Flussgleichung im engeren Sinne

Die eigentliche Flussgleichung beschreibt die Veränderung der effektiven, skalenabhängigen Wirkung in Bezug auf eben jene Skala bei festgehaltenem Argument  $\chi$

$$\partial_k \Gamma_k = \int d\tau \partial_k j(\tau) \chi(\tau) - \partial_k W_k[j] - \int d\tau \frac{\partial W_k[j]}{\partial j(\tau)} \partial_k j(\tau) - \partial_k \Delta S_k[\chi].$$

Dabei rührt der zweite Integralterm von der Skalenabhängigkeit der  $j$ 's her; wohingegen die Ableitung des Schwingerfunktionals als Variation der ebenfalls skalenabhängigen Parameter bei festgehaltenem  $j$  zu verstehen ist. Benutzt man, dass  $\chi$  auch als Variation von  $W_k$  bezüglich  $j$  ausgedrückt werden kann, vereinfacht sich die Flussgleichung zu

$$\partial_k \Gamma_k = -\partial_k W_k[j] - \partial_k \Delta S_k[\chi].$$

Diese Ableitung lässt sich unter Berücksichtigung, dass  $\Gamma_k$  die modifizierte Legendre-Transformation von  $W_k$  ist, noch weiter umformen zur sogenannten *Wetterich Gleichung*:

$$\partial_k \Gamma_k[\chi] = \frac{1}{2} \text{Sp} \left( \frac{\partial_k R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\chi] + R_k} \right), \quad (20)$$

wobei  $\Gamma_k^{(2)}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \chi(\tau_1) \delta \chi(\tau_2)}$ .

## 3 Zustandssumme eines kreisenden Fermions

Die folgenden Berechnungen werden im Planckschen Einheitensystem durchgeführt. Dies bedeutet, dass die Konstanten  $\hbar = c = 1$  gesetzt werden.

### 3.1 Problemstellung

Die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Methoden sollen jetzt auf ein konkretes Problem angewendet werden.

Betrachtet wird ein Fermion, welches sich auf einer Kreisbahn der Länge  $L$  bewegt, also in einer Dimension mit periodischen Randbedingungen gefangen ist.

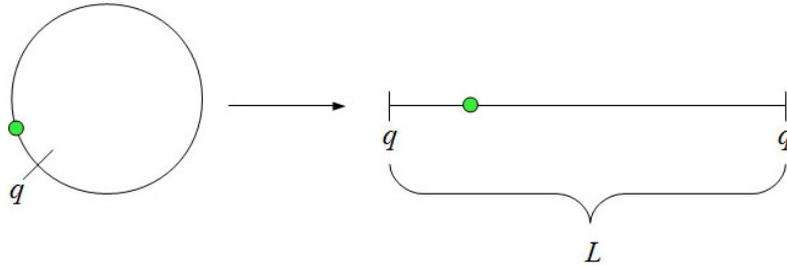


Abbildung 3: Bahn des betrachteten Fermions. Diese kann als Ring des Umfangs  $L$  oder auch als Gerade der Länge  $L$ , mit periodischen Randbedingungen, aufgefasst werden.

### 3.2 Physikalischer Hintergrund - Eine anschauliche Erklärung

Ein anschaulicher Zugang wäre ein Elektron zu betrachten, das sich auf einer Leiterschleife durch ein Vektorpotential bewegt, dessen Feldlinien parallel zu dessen Bewegungsrichtung ausgerichtet sind. Denkbar wäre ein Vektorpotential, das durch ein magnetisches

Feld ausgebildet wird. So ein Feld könnte beispielsweise durch weitere Elektronen in der Leiterschleife erzeugt werden, wobei in diesem Fall darauf zu achten ist, dass eine homogene Ladungsverteilung durch diese Elektronen vorliegen muss, um elektrische Wechselwirkungsprozesse zu vermeiden. Das resultierende Vektorpotential wäre auf dem Kreis, wo das Teilchen betrachtet wird, konstant.

Die klassische Lagrangefunktion für ein solches Teilchen ist gegeben durch

$$L_{klassisch} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + e\vec{v}\vec{A} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + eA\dot{x} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + c_1\dot{x} \quad [7].$$

Man erhält also die klassische Lagrangefunktion für ein Potential  $V \propto \dot{x}$ . Die Variable  $x$  bezeichnet hierbei einen Winkel. Aus der Euler-Lagrange-Gleichung,  $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ , erhält man damit die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = 0.$$

Es handelt sich also um ein Teilchen, das sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit auf dieser Kreisbahn bewegt. In der klassischen Mechanik hat somit der  $\dot{x}$ -abhängige Term keinerlei Einfluss auf die Bewegung des Teilchens, was auch sinnvoll erscheint, da dieser Term vollkommen zeitunabhängig, also konstant ist und somit auch unbedeutend bezüglich Variation der Wirkung. Aus ihm resultiert keine Kraft, die das Teilchen angreifen könnte. Im Folgenden soll nun analysiert werden, ob dieser Term auch quantenmechanisch ohne Einfluss bleibt.

Zunächst muss jedoch auch noch der nicht klassische, fermionische Euler-Lagrange-Term für die fermionische Wellenfunktion  $\Psi = \Psi(t)$  berücksichtigt werden. Dieser ist entsprechend Gl. (12) gegeben durch

$$\mathcal{L}_{fermi} = i\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} - V\bar{\Psi}\Psi = i\bar{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t} + c_3\dot{x}\bar{\Psi}\Psi.$$

Für die gesamte Wirkung  $S$ , über periodische Wege  $\beta$  integriert, ergibt sich damit die Gleichung

$$S = \frac{m}{2}\int_0^\beta \dot{x}^2 dt + c_1\int_0^\beta \dot{x} dt + \int_0^\beta \bar{\Psi}(i\frac{d}{d\tau} + c_3\dot{x})\Psi dt.$$

Genauere Betrachtung des zweiten Summanden, unter Berücksichtigung der Periodizität  $x(t_0 + \beta) = x(t_0) + nL$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$c_1\int_0^\beta \dot{x} dt = c_1[x(0 + \beta) - x(0)] = c_1nL$$

legt nah, die Konstante  $c_1$  durch eine andere Konstante  $\frac{\theta}{L}$  mit  $\theta \in \mathbb{R}$  zu ersetzen, da dieser Term dann direkt die durchlaufenen Perioden zählt.

Die Konstante  $c_3$  wird durch die Konstante  $\lambda$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  substituiert.  $\lambda$  beschreibt hierbei die Kopplung an die fermionische Wellenfunktion, was in der Feldtheorie der Kopplung an das Feld der Fermionen entspricht. Die endgültige Formulierung der Wirkung ergibt sich damit zu

$$S = \frac{m}{2}\int_0^\beta \dot{x}^2 dt + \frac{\theta}{L}\int_0^\beta \dot{x} dt + \int_0^\beta \bar{\Psi}(i\frac{d}{d\tau} + \lambda\dot{x})\Psi dt.$$

### 3.3 Berechnung der kanonischen Zustandssumme auf dem quantenmechanischen Weg

Um die Zustandssumme über den kanonischen Zugang der Quantenmechanik zu berechnen, greift man auf die ursprüngliche Definition (7) der Zustandssumme  $Z = \sum_n e^{-\beta E_n} =$

Sp  $e^{-\beta H}$  zurück. Gelingt es einem die Energieeigenwerte zu bestimmen, so kann man durch exponenzieren und summieren die zugehörige Zustandssumme ermitteln. Im Folgenden wird daher aus der gegebenen Wirkungsfunktion der resultierende Hamiltonoperator berechnet, sodass aus der stationären Schrödingergleichung die Energieeigenwerte herausgefiltert werden können.

Um den Übergang zur Quantenmechanik zu erreichen, muss zunächst die Lagrange-Funktion in die Hamiltonfunktion überführt werden, da in dieser die Substitution von den beschreibenden, generalisierten Größen in die zugehörigen Operatoren vollzogen werden kann. Es müssen daher zunächst die generalisierten Impulse aus der Lagrangefunktion bestimmt werden

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{\theta}{L}\dot{x} + \bar{\Psi}\left(i\frac{d}{d\tau} + \lambda\dot{x}\right)\Psi \\ \Rightarrow p_x := p &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{\theta}{L} + \bar{\Psi}\lambda\Psi \\ p_\Psi &= \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\Psi}} = -i\bar{\Psi} \quad , \quad p_{\bar{\Psi}} = 0.\end{aligned}$$

Mit den generalisierten Impulsen und der in der unter Gl. (1) beschriebenen Legendretransformation lässt sich nun die Hamiltonfunktion  $H(p, p_\Psi, p_{\bar{\Psi}}, x, \Psi, \bar{\Psi})$  bestimmen.

$$\begin{aligned}H &= \dot{x}p + \dot{\Psi}p_\Psi - \tilde{L} \\ \Rightarrow H &= \frac{1}{2m}\left(p - \frac{\theta}{L}\right)^2 - \bar{\Psi}\frac{\lambda}{m}\left(p - \frac{\theta}{L} + \frac{\lambda}{2}\right)\Psi\end{aligned}$$

Jetzt kann der Übergang von der Hamiltonfunktion zum Hamiltonoperator vollzogen werden, indem man die Koordinaten und die zugehörigen Impulse als Operatoren auffasst. Um die kanonische Zustandssumme zu bestimmen, wird zunächst das Spektrum des Hamiltonoperators untersucht. Dieses setzt sich im Wesentlichen aus den Impulseigenwerten und den Eigenwerten der Feldoperatoren  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$  zusammen.

1. Es wird eine Kreisbewegung untersucht. Um eine nicht verschwindende Wellenfunktion zu erhalten sind nur Impulseigenwerte zugelassen, die zur Ausbildung einer stehenden Welle führen. Dabei ist es wichtig, dass die Wellenfunktion an den Randpunkten exakt identisch ist. Die Phase muss übereinstimmen. Es sind nur Wellenlängen zugelassen, für die  $\lambda = \frac{L}{n}$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  gilt.

$$\Rightarrow p = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{L}$$

Mit den Impulseigenwerten ist gleichzeitig eine mögliche Matrixdarstellung des Impulsoperators gegeben, nämlich seine diagonalisierte Form mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonalen.

2. In Gl. (13) wurde die Matrixdarstellung von den beiden Feldoperatoren bestimmt. Verwendet man diese jetzt, so ergibt sich für das Produkt

$$\bar{\Psi}\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich der gesamte Hamiltonoperator in Matrixdarstellung schreiben:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m}\left(p - \frac{\theta}{L}\right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2m}\left(p - \frac{\theta}{L}\right)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{m}\left(p - \frac{\theta}{L} + \frac{\lambda}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(2\pi n - \theta)^2}{2mL^2} & 0 \\ 0 & \frac{(2\pi n - \theta)^2}{2mL^2} - \frac{\lambda}{mL} \left(2\pi n - \theta + \frac{\lambda L}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Da der Hamiltonoperator bereits in diagonalisierter Form vorliegt, lassen sich die Energieeigenwerte und damit die Zustandssumme direkt als Summe über die Hauptdiagonale ablesen.

$$Z = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( e^{-\beta \frac{(2\pi n - \theta)^2}{2mL^2}} \left( 1 + e^{-\beta \frac{\lambda}{mL} \left( \theta - 2\pi n - \frac{\lambda L}{2} \right)} \right) \right)$$

Während im klassischen Fall der Wert von  $\theta$  die Energiewerte nicht beeinflusst, da der kontinuierliche Impuls  $p$  jederzeit über eine Substitution  $p \rightarrow p + \theta$  überführt werden kann, hat dieser Wert, welcher in diesem Zusammenhang als Phase angesehen werden kann, in der quantenmechanischen Betrachtung durchaus einen Einfluss. Dieser Einfluss wird durch die veränderten Quantisierungsbedingungen des Impulsoperators hervorgerufen, welcher auf dem Kreis nur diskrete Werte annehmen kann.

### 3.4 Berechnung der kanonischen Zustandssumme mit Hilfe euklidischer Pfadintegrale

In diesem Abschnitt soll die Zustandssumme über Gl. (8) bestimmt werden. Um das Integral zu lösen, werden dabei im folgenden die periodischen Eigenschaften der Funktion ausgenutzt. Es wird sich herausstellen, dass sich die Zustandssumme nach Abspalten der periodischen Terme und Berechnung des fermionischen Anteils in das bereits bestimmte Pfadintegral des freien Teilchens überführen lässt. Des Weiteren werden verschiedene Rechenmethoden, wie die Methode der Zeta-Funktion, verwendet, die genauer im Anhang nachgelesen werden können.

Die Rechnung soll in euklidischer Signatur durchgeführt werden. Die gegebene Wirkung muss daher in eine euklidische umgeformt werden. Um diesen Übergang zu vollziehen muss eine Wickrotation  $t \rightarrow -i\tau$  ausgeführt werden. Die euklidische Wirkung  $S_E$  ist somit durch

$$iS_E = \tilde{S} = i \left[ \frac{m}{2} \int_0^\beta \dot{x}^2 d\tau - \frac{i\theta}{L} \int_0^\beta \dot{x} d\tau + \int_0^\beta \bar{\Psi} \left( i \frac{d}{d\tau} + \lambda \dot{x} \right) \Psi d\tau \right]$$

gegeben.

Die Zustandssumme berechnet sich nun durch exponentieren und Integration über alle periodischen Wege:

$$Z(\beta) = C \oint \mathcal{D}x e^{-S_E}.$$

Bei der Berechnung kann man sich dabei die Periodizität der Wege  $x(\tau + \beta) = x(\tau) + nL$  an verschiedenen Stellen zunutze machen:

1. Der  $\dot{x}$ -Term lässt sich sofort integrieren

$$\int_0^\beta \dot{x} d\tau = x(\beta) - x(0) = nL.$$

2. Von allen Wegen lässt sich ein periodischer Anteil mit  $x_p(\tau + \beta) = x_p(\tau)$  abspalten:

$$x(\tau) = x_p(\tau) + nL \frac{\tau}{\beta}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(\tau) = \dot{x}_p(\tau) + \frac{nL}{\beta}.$$

Dadurch lässt sich auch ein Teil des  $\dot{x}^2$ -Terms direkt integrieren

$$\int_0^\beta \dot{x}^2 d\tau = \int_0^\beta \dot{x}_p^2 d\tau + \frac{n^2 L^2}{\beta^2} \int_0^\beta d\tau = \int_0^\beta \dot{x}_p^2 d\tau + \frac{n^2 L^2}{\beta}.$$

Der Mischterm der binomischen Formel verschwindet sofort beim Integrieren aufgrund seiner linearen Abhängigkeit von  $\dot{x}_p$ .

3. Auch an die Felder der Fermionen müssen, analog zur Quantisierungsbedingung des Impulses, entsprechende Randbedingungen gestellt werden. Da die Wellenfunktion von Fermionen antisymmetrisch ist, muss auch der Anschluss an den periodischen Rändern antisymmetrisch sein:

$$\Psi(\tau + \beta) = -\Psi(\tau).$$

4. Da über alle periodischen Wege integriert wird, sind Wege beliebiger Rundenzahl zugelassen. Es ist daher über alle  $n \in \mathbb{Z}$  zu summieren. Es sind auch negative  $n$  zugelassen, weil sich das Teilchen natürlich im mathematisch positiven und negativen Sinne drehen kann.

Insgesamt ergibt sich die Zustandssumme somit zu

$$Z = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{mn^2 L^2}{2\beta} + i\theta n} \int \mathcal{D}x_p \exp\left(-\frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \dot{x}_p^2\right) \cdot \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp\left(-\int_0^\beta d\tau \bar{\Psi} \left[i \frac{d}{d\tau} + \lambda \dot{x}\right] \Psi\right).$$

Das Integral über das Fermionenfeld hat die bekannte Form des Gaußintegrals für Grassmann-Variablen<sup>1</sup> und lässt sich damit sofort bestimmen.

$$Z = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{mn^2 L^2}{2\beta} + i\theta n} \int \mathcal{D}x_p \exp\left(-\frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \dot{x}_p^2\right) \cdot \det\left(i \frac{d}{d\tau} + \lambda \dot{x}\right)$$

### Berechnung der Determinante

Die Determinante von  $A = i \frac{d}{d\tau} + \lambda \dot{x}$  wird nun über die Methode der Zeta-Funktion bestimmt, vgl. (6.2.1). Dazu werden die Eigenwerte  $a$  der Determinante benötigt. Die Eigenfunktion  $\Phi$  folgt unmittelbar aus:

$$i\dot{\Phi} + \lambda \dot{x}\Phi = a\Phi \quad | \cdot \frac{1}{\Phi}$$

$$\frac{d}{d\tau} \ln \Phi - i\lambda \dot{x} = -ia \quad | \int d\tau$$

$$\ln \Phi - i\lambda x = -ia\tau + c$$

$$\Phi = C e^{i(\lambda x - a\tau)}$$

<sup>1</sup>Die Herleitung und das allgemeine Ergebnis eines solchen Integrals können im Anhang unter (6.1.1) nachvollzogen werden.

Es sind jedoch nicht alle beliebigen Eigenwerte  $a$  zugelassen, sondern nur solche, deren Eigenfunktionen die antiperiodischen Randbedingungen der Fermionenfelder erfüllen.

$$\Phi(\tau + \beta) = -\Phi(\tau)$$

Damit ergeben sich diskrete Eigenwerte  $a_l$ :

$$-e^{i\lambda x(\tau) - ia\tau} = e^{i\lambda x(\tau + \beta) - ia(\tau + \beta)}$$

$$\Rightarrow a_l = \frac{-1}{\beta} \left( 2\pi \left( l + \frac{1}{2} \right) - \lambda n L \right).$$

Mit diesen lässt sich jetzt die zugehörige Zeta-Funktion berechnen, die direkt über die Eigenwerte definiert ist.

$$\begin{aligned} \zeta_A(s) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_l^s} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{-1}{\beta}\right)^s (2\pi(l + \frac{1}{2}) - \lambda n L)^s} \\ &= \left(\frac{-\beta}{2\pi}\right)^s \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\left(l + \frac{1}{2} - \frac{\lambda n L}{2\pi}\right)^s} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\left(l + \frac{1}{2} + \frac{\lambda n L}{2\pi}\right)^s} \right] \end{aligned}$$

Es soll  $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\lambda n L}{2\pi}$  substituiert werden.

$$\zeta_A(s) = \left(\frac{-\beta}{2\pi}\right)^s \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l + \alpha)^s} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(l + 1 - \alpha)^s} \right]$$

Damit wurde die Zeta-Funktion auf die Summe zweier Hurwitz'schen Zeta-Funktionen  $\zeta_H$  zurückgeführt, deren Funktionswerte und Ableitungen an der Stelle  $s=0$  bekannt sind<sup>2</sup>.

$$\zeta_A(s) = \left(\frac{-\beta}{2\pi}\right)^s [\zeta_H(s, \alpha) + (-1)^s \zeta_H(s, 1 - \alpha)]$$

Im nächsten Schritt muss die gesamte Funktion nach  $s$  abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \zeta_A(s) &= \left(\frac{-\beta}{2\pi}\right)^s \ln\left(\frac{-\beta}{2\pi}\right) [\zeta_H(s, \alpha) + (-1)^s \zeta_H(s, 1 - \alpha)] \\ &+ \left(\frac{-\beta}{2\pi}\right)^s [\zeta_H'(s, \alpha) + (-1)^s \zeta_H'(s, 1 - \alpha) + (-1)^s \ln(-1) \zeta_H(s, 1 - \alpha)] \end{aligned}$$

An der Stelle  $s=0$  ergibt sich somit

$$\frac{d}{ds} \zeta_A(0) = -\ln(2\pi) + \ln(\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha)) + i\pi\left(-\frac{1}{2} + \alpha\right).$$

---

<sup>2</sup>Die Hurwitz'sche Zeta-Funktion ist definiert über

$$\zeta_H(s, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + r)^s}.$$

Ableitung und Funktionswert an der Stelle  $s=0$  sind gegeben durch

$$\zeta_H(0, r) = \frac{1}{2} - r \quad \text{und} \quad \frac{d}{ds} \zeta_H(0, r) = \ln(\Gamma(r)) - \frac{1}{2} \ln(2\pi). \quad [8]$$

Daraus lässt sich nun direkt die Determinante berechnen. Es wird die Eigenschaft der  $\Gamma$ -Funktion,  $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$ , ausgenutzt.

$$\begin{aligned}\det(A) &= e^{-\frac{d}{ds}\zeta_A(0)} \\ &= 2\pi \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \cdot e^{\frac{1}{2}-\alpha}\end{aligned}$$

Resubstitution von  $\alpha$  führt auf:

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{d}{d\tau} - i\lambda\dot{x}\right) &= -i \left[ e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-i\frac{\lambda n L}{2}} - e^{-\frac{i\pi}{2}} e^{i\frac{\lambda n L}{2}} \right] e^{i\frac{\lambda n L}{2}} \\ &= 1 + e^{i\lambda n L}.\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird nun wieder in die kanonische Zustandssumme eingesetzt. Es ergibt sich damit ein Pfadintegral, welches noch bezüglich  $x_p$  zu integrieren ist.

$$Z = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{mn^2 L^2}{2\beta} + i\theta n} \left[ 1 + e^{i\lambda n L} \right] \int \mathcal{D}x_p \exp\left(-\frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \dot{x}_p^2\right)$$

Der Kern des noch zu berechnenden Pfadintegrals wurde bereits in Gl. (10) bestimmt. Für periodische Wege ergibt er sich zu

$$K(\beta, x, x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\beta}}.$$

Es bleibt damit lediglich eine Integration über eine Konstante.

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}x_p \exp\left(-\frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \dot{x}_p^2\right) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\beta}} \int \mathcal{D}x_p \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\beta}} \cdot L\end{aligned}$$

Die errechnete Zustandssumme lautet also insgesamt

$$Z = \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{mn^2 L^2}{2\beta} + i\theta n} \left[ 1 + e^{i\lambda n L} \right].$$

### 3.5 Vergleich der Ergebnisse

Vergleicht man das Ergebnis, das aus dem euklidischem Pfadintegral folgt mit dem quantenmechanischen, so scheinen diese beiden zunächst nicht überein zu stimmen.

$$Z_{QM} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\beta \frac{(2\pi n - \theta)^2}{2mL^2}} \left[ 1 + e^{-\beta \frac{\lambda}{mL} (\theta - 2\pi n - \frac{\lambda L}{2})} \right]$$

und

$$Z_{Pfad} = \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{mn^2 L^2}{2\beta} + i\theta n} \left[ 1 + e^{i\lambda n L} \right].$$

Dies liegt allerdings lediglich daran, dass die quantenmechanischen Betrachtungen im Impulsraum durchgeführt wurden, weshalb die einzelnen Summanden in fouriertransformierter Form vorliegen. Bei Durchführung einer Poissonresummation, vergl. Gl.(6.2.2),

muss die quantenmechanische Zustandssumme folglich in die der Pfadintegraldarstellung übergehen. Zunächst soll der erste Summand der quantenmechanischen Zustandssumme betrachtet werden.

$$S_1 = \exp \left[ -\beta \frac{(2\pi n - \theta)^2}{2mL^2} \right]$$

Dieser wird nun fouriertransformiert. Dabei ist die Richtung der Transformation egal, da die Summe später über alle ganzen Zahlen läuft. Der neue Summenindex wird mit  $l$  bezeichnet.

$$\tilde{S}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dn \exp \left[ -\beta \frac{4\pi^2 n^2 - 4\pi n \theta + \theta^2}{2mL^2} + 2\pi i l n \right]$$

Dieses Gaußintegral kann nach den bekannten Methoden berechnet werden. Es ergibt sich:

$$\tilde{S}_1 = \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \exp \left[ -\frac{ml^2 L^2}{2\beta} + il\theta \right].$$

Analog wird auch der zweite Summand berechnet.

$$\Rightarrow S_2 = \exp \left[ -\beta \left( \frac{(2\pi n - \theta)^2}{2mL^2} + \frac{\lambda}{mL} \left( \theta - 2\pi n - \frac{\lambda L}{2} \right) \right) \right]$$

$$\tilde{S}_2 = \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \exp \left[ -\frac{ml^2 L^2}{2\beta} + il\theta + ilL\lambda \right]$$

Nun kann der Summenindex  $l$  wieder durch den Index  $n$  ersetzt werden und man sieht sofort, dass die beiden berechneten Zustandssummen übereinstimmen.

$$Z = \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{mn^2 L^2}{2\beta} + i\theta n} \left[ 1 + e^{i\lambda n L} \right]$$

### 3.6 Diskussion des Ergebnisses

Die Zustandssumme lässt sich noch ein wenig umschreiben. Dabei wird die dritte Jacobi'sche Theta-Funktion verwendet werden. Diese ist über

$$\Theta(z, \tau) := 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2} \cos(2\pi n z) \quad (21)$$

definiert, wobei  $z, \tau \in \mathbb{C}$  und  $Im\tau > 0$ .

Zunächst muss die Zustandssumme also in eine ähnliche Form gebracht werden.

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \left[ 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{mn^2 L^2}{2\beta} \right) [\cos(n\theta) + \cos(n\theta + nL\lambda)] \right] \\ &= \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \left[ \Theta \left( \frac{\theta}{2\pi}, \frac{imL^2}{2\pi\beta} \right) + \Theta \left( \frac{\theta + L}{2\pi}, \frac{imL^2}{2\pi\beta} \right) \right] \end{aligned}$$

Man kann sofort schlussfolgern, dass

$$Z = Z\left(\theta, \frac{L}{\beta}, mL, \lambda L\right).$$

In dieser Variablenkonfiguration hängt die dimensionslose Zustandssumme nämlich selbst auch nur von dimensionslosen Größen ab.

Von besonderem Interesse ist das Verhalten der Zustandssumme bezüglich des  $x$ -Terms, was sich im Ergebnis durch Variation der Phase  $\theta$  untersuchen lässt. Als Erstes ist erkennbar, dass die Zustandssumme  $2\pi$ -periodisch in  $\theta$  ist, was der Tatsache entspricht, dass  $\theta$  mit einem Winkel identifiziert wird.

Es sollen noch kurz die Ergebnisse der Funktionsuntersuchung präsentiert werden. Oftmals interessiert man sich anstatt für die Zustandssumme für die physikalisch messbare Größe der freien Energie  $F = -\frac{1}{\beta} \ln Z$ . Diese verhält sich aufgrund des negativen Logarithmus prinzipiell genau gegenläufig zur Zustandssumme.

|   | Zustandssumme   | freie Energie   |
|---|---|---|
| Extrema   | $\theta_e = -\frac{L\lambda}{2} + m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$  |   |
| Maximalbedingung<br>( $0 < \frac{L\lambda}{2} < 2\pi$ ) | $\cos(mn\pi) \cos(\frac{nL\lambda}{2}) > 0$<br>erfüllt für m gerade und $L\lambda < \pi$ bzw. $L\lambda > 3\pi$<br>erfüllt für m ungerade und $\pi < L\lambda < 3\pi$ | $\cos(mn\pi) \cos(\frac{nL\lambda}{2}) < 0$<br>erfüllt für m ungerade und $L\lambda < \pi$ bzw. $L\lambda > 3\pi$<br>erfüllt für m gerade und $\pi < L\lambda < 3\pi$ |
| Sonderfall  | $L\lambda = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ es treten doppelt so viele Extrema auf   |   |

Im folgendem wurde die beiden Größen beispielhaft für  $\frac{L}{\beta} = mL = \lambda L = 2\pi$  geplottet. Wie berechnet, liegen die Maxima der freien Energie bei m gerade.

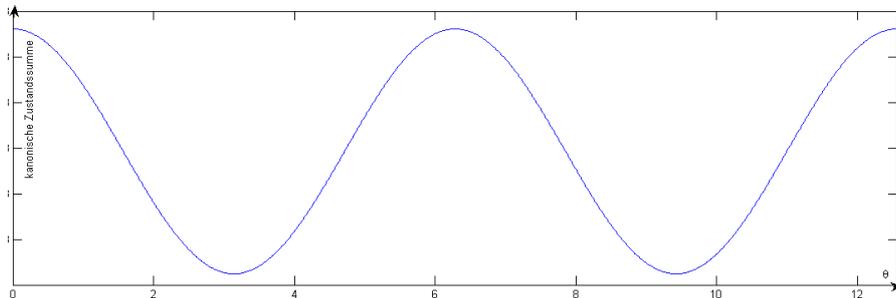


Abbildung 4: Verlauf der kanonischen Zustandssumme bei Variation von  $\theta$  bei festem  $\frac{L}{\beta} = mL = \lambda L = 2\pi$ . Der Verlauf ist  $2\pi$ -periodisch und weist Maxima bei ungeraden, ganzen Vielfachen von  $\pi$  auf.

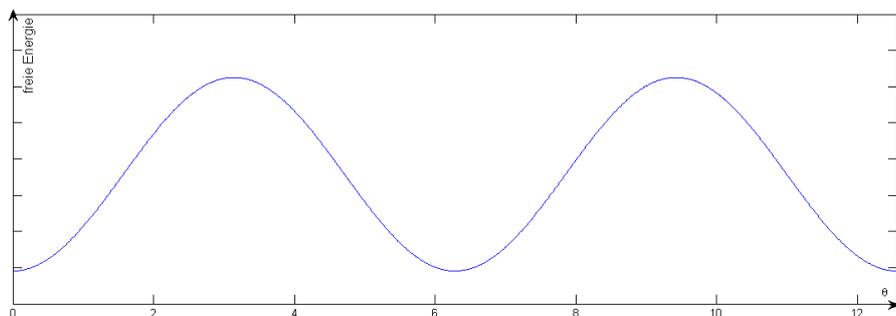


Abbildung 5: Verlauf der freien Energie bei Variation von  $\theta$  bei festem  $\frac{L}{\beta} = mL = \lambda L = 2\pi$ . Der Verlauf ist  $2\pi$ -periodisch und weist Maxima bei geraden, ganzen Vielfachen von  $\pi$  auf.

Das erhaltene Ergebnis könnte man nun anschaulich so interpretieren, dass jede vom Fermion durchlaufene Runde eine gewisse Phasenverschiebung  $\theta$  hervorruft. Damit ist die  $2\pi$ -Periodizität von  $\theta$  sofort einsichtig. Die Phasenverschiebung hat nachweisbar Einfluss auf die freie Energie des Teilchens. Diese Tatsache ist sehr interessant, da man aus physikalischer Sicht zunächst davon ausgehen würde, dass die Phaseninformation nur für die Wechselwirkung von mehreren Teilchen untereinander von Bedeutung ist, wie beispielsweise bei Interferenzen. Die analytische Rechnung zeigt jedoch, dass auch direkt messbare Größen betroffen sind. Man könnte demnach eine Messung durchführen und würde aus dieser die Phasenverschiebung  $\theta$  ermitteln können. Zugänglich wird der Einfluss, wenn man sich wieder des Modells der stehenden Welle auf dem Kreis bedient. Dieses führte dazu, dass nur diskrete Impulswerte zugelassen sind. Eine Änderung der Phase pro Umdrehung führt also sofort zu veränderten Impulseigenwerten bzw. veränderten Wellenlängen. Dies führt, wie bereits diskutiert, zu veränderten Energieeigenwerten, die wiederum die freie Energie beeinflussen. Auf die veränderten Energieeigenwerte wird im nächsten Abschnitt noch genauer eingegangen werden.

## 4 Eigenschaften eines nicht-fermionischen Teilchens auf einem Ring

Im Folgenden werden die fermionischen Eigenschaften des Teilchens fallen gelassen. Es wird demnach ein quantenmechanisches Teilchen auf der  $S^1$ -Sphäre beschrieben. Zur Beschreibung der Teilchenposition soll wieder ein Winkel verwendet werden. Des Weiteren soll sich der Ring, auf dem sich das Teilchen bewegt, in einem konstantem Vektorpotential befinden, sodass sich, analog zum obigen Fall, ein Term ergibt, der linear mit der Winkelgeschwindigkeit geht.

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{\theta}{L}\dot{x}$$

### 4.1 Betrachtung der Energieeigenwerte ohne fermionischen Anteil

Die Energieeigenwerte entsprechen natürlich denen aus dem vorherigem Abschnitt, bloß ohne die Fermionenkorrektur,

$$E_n = \frac{1}{2m} \left( p - \frac{\theta}{L} \right)^2$$

bzw. in der Quantenmechanik, wo nur diskrete Impulse zugelassen sind

$$E_n = \frac{1}{2m} \left( \frac{2\pi n}{L} - \frac{\theta}{L} \right)^2. \quad (22)$$

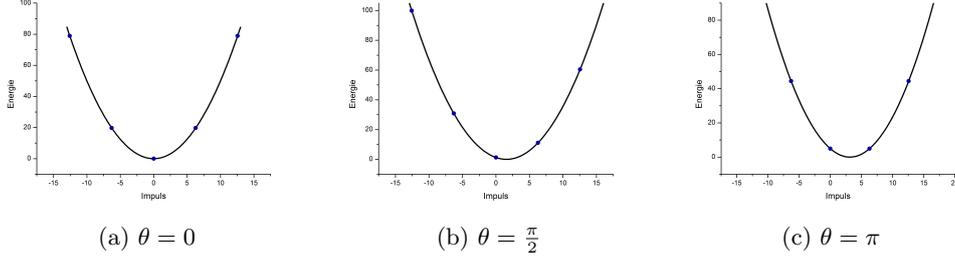


Abbildung 6: Die schwarze Linie stellt die Energie im klassischen Sinne dar, es handelt sich um die kinetische Energie eines freien Teilchens, nur um den konstanten Wert  $\theta$  verschoben. Die blauen Punkte charakterisieren die diskreten Energieeigenwerte in der Quantenmechanik. Es ist erkennbar, dass diese stark durch  $\theta$  beeinflusst werden. Bei der Wahl von  $\theta = \frac{\pi}{2}$  sind diese sogar nicht mehr symmetrisch bezüglich  $n$  und  $-n$ , also der Umlaufrichtung des Teilchens und bei  $\theta = \pi$  ist der Grundzustand entartet.

Wie bereits diskutiert wird die klassische Energie nicht durch den zusätzlichen  $\theta$ -Term beeinflusst. Dieser bewirkt lediglich eine Verschiebung im Phasenraum  $p \rightarrow p + \frac{\theta}{L}$ . In der quantenmechanischen Betrachtung allerdings ist der Einfluss von  $\theta$  nicht mehr wegzudiskutieren. Die diskreten Energieeigenwerte werden nämlich durch die Wahl von  $\theta$  beeinflusst. Veränderung von  $\theta$  führt zu anderen, messbaren Energiewerten. Bei der Wahl von  $\theta = \pi$  kommt es sogar zu einer Entartung des Grundzustandes.

## 4.2 Berechnung der Zustandssumme nach der Flussgleichungsmethode

Die Zustandssumme wird analog zum Abschnitt 3.4 berechnet. Es wird jedoch ein erzeugendes Funktional, sowie ein Regulatorterm hinzugefügt. Das erzeugende Funktional ermöglicht eine einfache Reproduktion der Erwartungswerte, sowie im späteren Verlauf der Energiezustände, insbesondere der Grundzustandsenergie. Da die gesamte Wirkungsfunktion nur von  $\dot{x}$  abhängt und der Winkel  $x$  ein konservatives Feld darstellt, koppelt der Strom- bzw. Quellterm  $j$  direkt an  $\dot{x}$ . Der Regulator sorgt für einen korrekten Übergang von den kleinen Impulsskalen zu den großen.

Die skalenabhängige Zustandssumme berechnet sich damit in euklidischer Signatur zu

$$Z_k = \int \mathcal{D}x \exp \left[ -S[\dot{x}] + i \int j \dot{x} - \Delta S_k[\dot{x}] \right].$$

Ausgeschrieben bedeutet dies für das gegebene Problem

$$Z_k = \int \mathcal{D}x \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \left( -\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{i\theta}{L} \dot{x} + ij\dot{x} \right) - \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' \dot{x}(\tau) R_k(\tau - \tau') \dot{x}(\tau') \right].$$

Von der Winkelvariablen  $x$  lässt sich nun wieder ein periodischer Anteil  $x_p$  abspalten.

$$Z_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m(nL)^2}{2\beta} + i\theta n + \frac{inL}{\beta} \int_\tau j(\tau) - \frac{1}{2} \left( \frac{nL}{\beta} \right)^2 \int R_k(\tau' - \tau) \right] \cdot \int \mathcal{D}x_p \exp \left[ \int_\tau -\frac{m}{2} \dot{x}(\tau)_p^2 + ij\dot{x}_p(\tau) - \frac{1}{2} \left( \frac{nL}{\beta} \right) \int_{\tau, \tau'} (\dot{x}_p(\tau) R_k(\tau' - \tau) + R_k(\tau' - \tau) \dot{x}_p(\tau')) \right] \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{\tau, \tau'} \dot{x}_p(\tau) R_k(\tau' - \tau) \dot{x}_p(\tau') \right]$$

Bei der Berechnung im Ortsraum ist immer auf die korrekten Randbedingungen zu achten, was sich besonders bei der Behandlung des Regulators als schwierig erweist, weshalb es sich anbietet eine Transformation in den Impulsraum vorzunehmen.

Da alle Größen zur Beschreibung des kreisenden Teilchen die Periode  $\beta$  aufweisen, lassen sie sich in dieser Periode fourierentwickeln. Es ergibt sich als Fourierreihe

$$x_p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} x'_l e^{i\omega_l \tau} \quad \text{mit} \quad \omega_l = \frac{2\pi l}{\beta} \quad (23)$$

bzw.

$$\dot{x}_p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} x_l \omega_l e^{i\omega_l \tau}. \quad (24)$$

Die imaginäre Einheit, die bei der Ableitung als Vorfaktor entsteht, kann als Konstante mit in die Fourierkoeffizienten gezogen werden ( $x'_l \rightarrow -ix_l$ ).

Wichtig ist, dass es in dieser Fourierreihe keinen konstanten Teil gibt, denn dieser wird durch das  $\omega_0$  eliminiert. Der konstante Winkelgeschwindigkeitsanteil wurde bereits durch den Ansatz  $\dot{x} = \dot{x}_p + \frac{nl}{\beta}$  abgespalten und entwickelt. Die Größen  $j$  und  $R_k$  entwickeln sich analog zu Gl. (23). Dabei spannen die einzelnen Fourierkoeffizienten ein Orthogonalsystem auf.

$$\frac{1}{\beta} \int_0^\beta e^{\frac{2\pi i}{\beta}(l-k)\tau} = \delta_{lk}$$

Die Integrale gehen im Impulsraum in diskrete Summen über

$$\begin{aligned} \int d\tau \dot{x}^2 &= \frac{1}{\beta} \sum_l \sum_k x_l \omega_l x_k \omega_k \underbrace{\int d\tau e^{\frac{2\pi i}{\beta}(l+k)\tau}}_{\beta \delta(l-k)} \\ &= \sum_l x_l \omega_l x_{-l} \omega_{-l} \end{aligned}$$

Unter der Berücksichtigung, dass das Ergebnis insgesamt reell sein muss, ergibt sich, dass  $x_{-l}$  gleichgesetzt werden kann mit dem komplex konjugierten  $x_l^*$ . Umwandeln aller Integrale führt auf eine Zustandssumme der Form

$$\begin{aligned} Z_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m(nL)^2}{2\beta} + i\theta n + \frac{inL}{\sqrt{\beta}} j_0 - \frac{1}{2} \frac{(nL)^2}{\sqrt{\beta}} R_0 \right] \\ &\int \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi}} \prod_{l=1}^{\infty} \int \frac{dx_l dx_{-l}}{2\pi} \exp \left[ -m x_l \omega_l x_{-l} \omega_{-l} - \sqrt{\beta} x_l \omega_l x_{-l} \omega_{-l} R_l + 2i j_l x_{-l} \omega_{-l} \right], \end{aligned}$$

wobei das Integral über alle periodischen Wege von  $x$  in das unendliche Produkt der Integrale über die möglichen Werte der einzelnen Fourierkoeffizienten  $x_l$  übergeht. Diese Gaußintegrale sind durch quadratische Ergänzung auflösbar.

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx_l dx_{-l}}{2\pi} \exp \left[ -m x_l \omega_l x_{-l} \omega_{-l} - \sqrt{\beta} x_l \omega_l x_{-l} \omega_{-l} R_l + 2i j_l x_{-l} \omega_{-l} \right] \\ &= \int \frac{dx_l dx_{-l}}{2\pi} \exp \left[ -\left( x_l \omega_l \sqrt{m + \sqrt{\beta} R_l} - \frac{i j_l}{\sqrt{m + \sqrt{\beta} R_l}} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[ \frac{-j_l j_{-l}}{m + \sqrt{\beta} R_l} \right] \\ &= \frac{1}{\omega_l \sqrt{m + \sqrt{\beta} R_l}} \exp \left[ \frac{-j_l j_{-l}}{m + \sqrt{\beta} R_l} \right] \end{aligned}$$

Einsetzen in die Zustandssumme und Substitution von  $\alpha_l = m + \sqrt{\beta}R_l$  führt auf

$$Z_k = \sum_n \exp \left[ -\frac{\alpha_l(nL)^2}{2\beta} + \frac{inL}{\sqrt{\beta}}j_0 + i\theta n \right] \int_0^L \frac{dx_0}{\sqrt{2\pi}} \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_l \sqrt{\alpha_l}} \exp \left[ \frac{-j_l j_{-l}}{\alpha_l} \right].$$

Die Integration über die Nullmode lässt sich natürlich sofort ausführen. Der konstante Anteil wird substituiert mit  $a = \prod_{l=1}^{\infty} \frac{L}{\omega_l \sqrt{2\pi\alpha_l}}$ .

$$Z_k = a \sum_n \exp \left[ -\frac{\alpha_l(nL)^2}{2\beta} + \frac{inL}{\sqrt{\beta}}j_0 + i\theta n \right] \prod_{l=0}^{\infty} \exp \left[ \frac{-j_l j_{-l}}{\alpha_l} \right] \quad (25)$$

### 4.3 Prüfung des Ergebnisses im Spezialfall

Um dieses Ergebnis zu bestätigen, wurde es nochmals im Ortstraum, allerdings ohne Regulator, berechnet:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}x \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \left( -\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{i\theta}{L}\dot{x} + ij\dot{x} \right) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m(nL)^2}{2\beta} + i\theta n + \frac{inL}{\beta} \int_\tau j(\tau) \right] \int \mathcal{D}x_p \exp \left[ \int d\tau \left( -\frac{m}{2}\dot{x}(\tau)_p^2 + ij\dot{x}_p(\tau) \right) \right]. \end{aligned}$$

Das Integral über alle periodischen Wege lässt sich auf das des freien Teilchens zurückführen, dessen Ergebnis bereits bekannt ist, vergl. Gl. (10)

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}x_p \exp \left[ -\int_0^\beta d\tau \left( \frac{m}{2}\dot{x}_p^2 - ij\dot{x}_p \right) \right] \\ &= \exp \left[ \int_0^\beta d\tau \frac{j^2}{2m} \int \mathcal{D}x_p \exp \left[ -\int_0^\beta d\tau \frac{m}{2} \left( \dot{x}_p - \frac{ij}{m} \right)^2 \right] \right] \end{aligned}$$

Substitution von  $\dot{x}_p - \frac{ij}{m} = \dot{y}_p$  bzw.  $y_p = x_p - \frac{i}{m} \int j d\tau$  liefert die gewünschte Form.

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}x_p \exp \left[ -\int_0^\beta d\tau \frac{m}{2} \left( \dot{x}_p - \frac{ij}{m} \right)^2 \right] = \int \mathcal{D}y_p \exp \left[ -\int_0^\beta d\tau \frac{m}{2} (\dot{y}_p)^2 \right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\beta}} \int \mathcal{D}y_p \exp \left[ -\frac{m}{2\beta} (\dot{y}_p(\beta) - \dot{y}_p(0))^2 \right] = \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta} \left( \frac{i}{m} \int_0^\beta d\tau j \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Die Zustandssumme lautet demnach

$$Z = \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m(nL)^2}{2\beta} + i\theta n + \frac{inL}{\beta} \int_\tau j(\tau) \right] \exp \left[ -\int_0^\beta \frac{j(\tau)^2}{2m} + \frac{1}{2m\beta} \left( \int_0^\beta d\tau j(\tau) \right)^2 \right].$$

Dies entspricht genau dem Ergebnis aus Gl. (25) für  $R_k \rightarrow 0$ , denn bei einer Fouriertransformation analog zu Gl. (24) würde sich im letzten Exponenten die Nullmode des Stroms  $j_0$  komplett wegheben.

#### 4.4 Berechnung des Schwingerfunktionals

Nachdem das Ergebnis nun bestätigt wurde, soll dieses als Ausgangspunkt für weitere Berechnungen verwendet werden. Zunächst soll das Schwingerfunktional bestimmt werden. Dieses wurde in Def. (15) als natürlicher Logarithmus der Zustandssumme eingeführt und ergibt sich damit zu

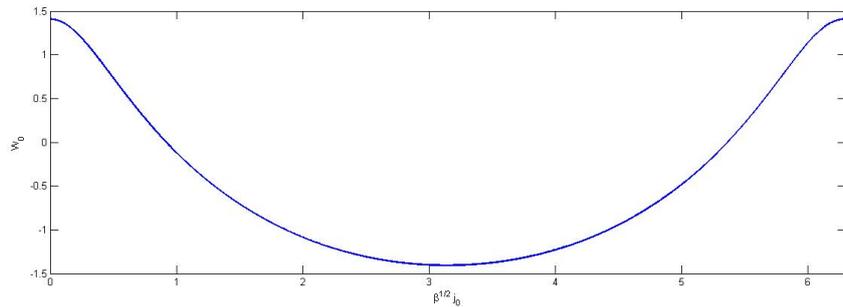
$$\begin{aligned} W_k[j_l] &= \ln[Z_k(j_l)] = \ln(a) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{j_l j_{-l}}{\alpha_l} + \ln \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 + \frac{inL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right] \right] \\ &= \ln(a) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{j_l j_{-l}}{\alpha_l} + \ln \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 \right] \cos \left[ \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right] \right]. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis soll nun genauer betrachtet werden. In Gl.(17) wurde bewiesen, dass das Schwingerfunktional bezüglich des Stroms  $j$  konvex sein muss. Dies ist für den quadratischen Term, also für alle angeregten Moden ( $l \geq 1$ ) des Stromes gegeben. Eine Legendretransformation bezüglich dieser Variablen, die entsprechend Gl. (18) auf die effektive Wirkung führt, wird demnach problemlos möglich sein. Doch wie verhält sich das Schwingerfunktional bezüglich der Nullmode ( $l = 0$ ), die ähnlich wie der Winkel  $\theta$  koppelt, der (wie im vorherigen Abschnitt gezeigt) auch konkave Bereiche in der Zustandssumme hervorruft?

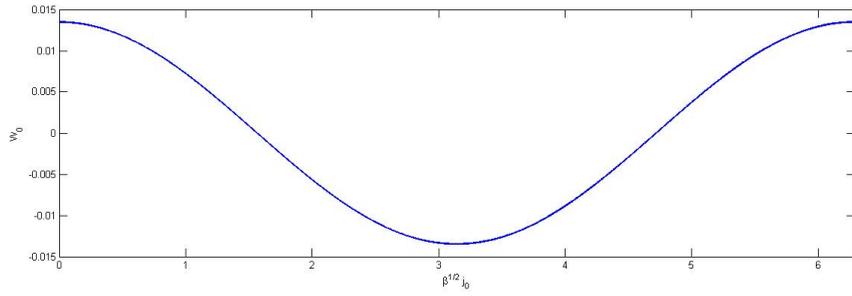
Als erstes fällt auf, dass das Schwingerfunktional neben  $\theta$  auch periodisch in  $j_0$  ist, wobei die Periode  $\frac{2\pi\sqrt{\beta}}{L}$  beträgt. Daher wird die Legendretransformierte der Nullmode  $j_0$  auch nur innerhalb dieser Intervall bestimmbar sein. Dies ist eine Einschränkung, die gestellt werden muss. Da sich die Funktion außerdem je nach Wahl von  $\theta$  verschiebt ist es sinnvoll immer das Intervall  $[-\theta, \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}}L - \theta]$  zu betrachten.

Einige typische, mit Matlab geplottete, Funktionsverläufe des  $j_0$ -abhängigen Terms des Schwingerfunktionals  $\ln \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 \right] \right]$ .

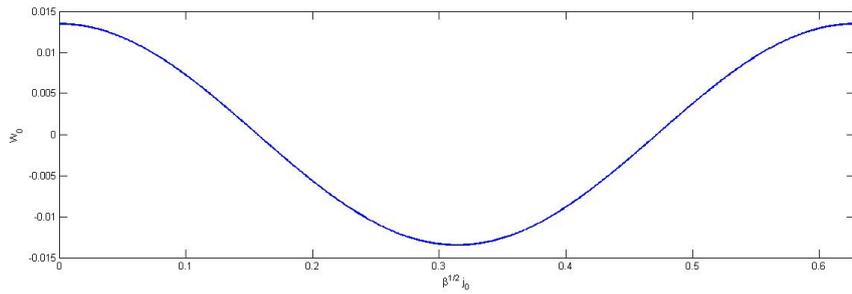
$\cos \left[ \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right] := W_0$ , sind im folgenden abgebildet. Da  $W_0$  selbst eine dimensionslose Größe ist wurden ihre Parameter ebenfalls als dimensionslose Größen angelegt. Deshalb wurden im folgenden immer nur Verhältnisse  $mL, \frac{L}{\beta}$  variiert.



(a)  $\theta = 0, \frac{L}{\beta} = 1, mL = 1$



(b)  $\theta = 0, \frac{L}{\beta} = 1, mL = 10$



(c)  $\theta = 0, \frac{L}{\beta} = 10, mL = 1$

Abbildung 7: Graphische Darstellung der Abhängigkeit des Schwingerfunktionals von  $\sqrt{\beta}j_0$  für verschiedene Parameterverhältnisse. Es ist deutlich erkennbar, wie die Wahl von  $\frac{L}{\beta}$  die Periode verändert. Das Produkt  $mL$  beeinflusst die Breite des Tals, da dieses Verhältnis die Gewichtung der einzelnen Summanden bestimmt. Bei steigenden  $mL$  werden höhere Summanden verhältnismäßig weniger gewichtet.

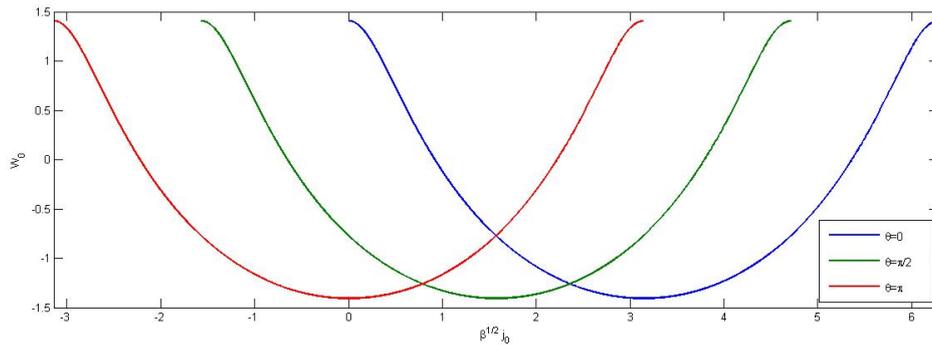


Abbildung 8: Graphische Darstellung des Schwingerfunktionals für verschiedene Winkel  $\theta$  (blau:  $\theta = 0$ ; grün:  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ; rot:  $\theta = \pi$ ) bei  $\frac{L}{\beta} = mL = 1$ . Es wird deutlich, wie die Kurve sich je nach Wahl von  $\theta$  um eben diesen Wert nach links verschiebt.

Der  $j_0$ -abhängige Teil des Schwingerfunktionals wird eindeutig durch den Kosinusanteil dominiert. Dies führt jedoch dazu, dass es auch einen konkaven Anteil (für  $W_0 > 0$ ) gibt, sodass die Legendretransformation nicht mehr klar definiert ist. Auch scheint dieser Anteil der Physik zu widersprechen, denn in Gl.(17) war es möglich, allgemein zu zeigen, dass

Schwingerfunktionale immer konvex sein müssen.

Im Folgenden wird nun untersucht, wie sich dieses Verhalten auf die effektive Wirkung ausübt.

#### 4.5 Bestimmung der effektiven Wirkung

Als nächstes soll die skalenabhängige Wirkung entsprechend Gl. (19) über die zugehörige, modifizierte Legendretransformation bestimmt werden. Dabei wird der Strom  $j$  durch die zugehörigen, effektiven Felderwartungswerte  $\chi$  ersetzt.

$$\Gamma_k = i \int_{\tau} j(\dot{\chi})\dot{\chi} - W_k[j] - \Delta S_k(\dot{\chi}). \quad (26)$$

Was genau ein effektiver Felderwartungswert ist, wird durch Variation des Schwingerfunktionals nach dem Strom an einem bestimmten Punkt bzw. in diesem Fall bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit deutlich

$$-i \frac{\delta W_k}{\delta j(\dot{x})} = \dot{\chi}(\tau) = \frac{\int \mathcal{D}x \dot{x} \exp \left[ -S(\dot{x}) + i \int j \dot{x} - \Delta S_k(\dot{x}) \right]}{\int \mathcal{D}x \exp \left[ -S(\dot{x}) + i \int j \dot{x} - \Delta S_k(\dot{x}) \right]} = \langle \dot{x}(\tau) \rangle.$$

Die Abhängigkeit von  $\dot{x}$  wird demnach ersetzt durch eine Abhängigkeit vom Erwartungswert von  $\dot{x}$ . Während in der klassischen Mechanik also direkt die Winkelgeschwindigkeit betrachtet wird, ist in der Quantenmechanik nur noch ihr Erwartungswert zur jeweils betrachteten Zeit von Bedeutung. Diese können, im Sinne der Quantenfeldtheorie, auch als effektive Felderwartungswerte aufgefasst werden.

Da die Winkelgeschwindigkeit periodisch in  $\beta$  ist und immer der Erwartungswert an einem konkreten Punkt betrachtet wird, muss auch dieser periodisch in  $\beta$  sein.  $\dot{\chi}$  kann daher ebenfalls in eine Fourierreihe entwickelt werden.

$$\dot{\chi}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_n e^{i\omega_n \tau} \quad \text{mit} \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$$

Die Bestimmungsgleichung für die  $\chi_n$  lässt sich nun entweder direkt aus der Extremalbedingung an die Legendretransformation aufschreiben oder durch das Einführen einer Zerlegung der Eins herleiten.

$$\frac{-i}{\beta} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{\delta W_k}{\delta j_l} \frac{\delta j_l}{\delta j(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \chi_l e^{i\omega_l \tau}$$

Die Ableitung von  $j(\tau)$  nach einem konkreten Fourierkoeffizienten  $j_l$  ist gegeben als  $\frac{\delta j(\tau)}{\delta j_l} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{i\omega_n \tau}$ . Damit ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{-i}{\sqrt{\beta}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{\delta W_k}{\delta j_l} e^{-i\omega_l \tau} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \chi_{-n} e^{i\omega_{-l} \tau}.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert sofort

$$-i \frac{\delta W_k}{\delta j_l} = \chi_{-l}. \quad (27)$$

Zunächst soll der Fall  $l \neq 0$  betrachtet werden, für den bereits festgestellt wurde, dass eine Legendretransformation problemlos möglich ist.

$$\chi_{-l} = -i \frac{\delta}{\delta j_l} \left( \ln(a) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{j_l j_{-l}}{\alpha_l} + \ln \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 \right] \cos \left[ \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right] \right] \right)$$

$$\Leftrightarrow \chi_{-l} = i \frac{j_{-l}}{\alpha_l}$$

$$\Leftrightarrow j_l = -i\alpha_{-l}\chi_l \text{ bzw. } j_{-l} = j_l^* = i\alpha_l\chi_{-l} \text{ f\u00fcr } l \neq 0$$

### Legendretransformation der Nullmode des Stroms

In diesem Abschnitt wird die hypothetische Transformation der Nullmode besprochen, obwohl diese zun\u00e4chst, da die Funktion im gegebenen Intervall nicht konvex ist, physikalisch nicht fassbar ist. Es wird sich jedoch ein Hinweis auf die zu erwartenden Zusammenh\u00e4nge im Schwingerfunktional erhofft. Ableiten der Schwingerfunktion nach  $j_0$ , analog zur Berechnung der  $j_l$  nach Gl. (27), f\u00fchrt auf die Gleichung

$$\chi_0 = \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{nL}{\sqrt{\beta}} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 + \frac{inL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta}j_0 \right) \right]}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 + \frac{inL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta}j_0 \right) \right]}$$

bzw.

$$\chi_0 = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2inL}{\sqrt{\beta}} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 \right] \sin \left[ \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta}j_0 \right) \right]}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 \right] \cos \left[ \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta}j_0 \right) \right]}.$$

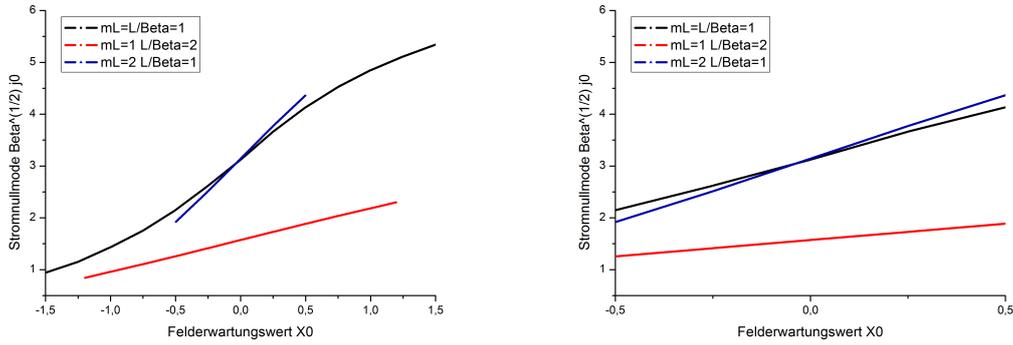
Diese Gleichung ist nun allerdings nicht mehr analytisch l\u00f6sbar. Deshalb wurde zun\u00e4chst naiv eine numerische Legendretransformation programmiert. \u00c4hnlich wie bei den Fourierkoeffizienten der Winkelgeschwindigkeit, l\u00e4sst sich auch hier f\u00fcr die  $\chi_l$  der \u00dcbergang zu  $-i\chi_l$  machen, da eine unabdingbare Voraussetzung an die effektive Wirkung ist, dass diese reell sein muss. Der \u00dcbergang hat den Vorteil, dass bei der numerischen Betrachtung kein komplexes Problem betrachtet werden muss. Die Gleichung f\u00fcr die effektive Wirkung ergibt sich somit zu

$$\Gamma_k = \int_{\tau} j(\dot{\chi})\dot{\chi} - W_k[j] - \Delta S_k(\dot{\chi}). \quad (28)$$

\u00dcber die Supremumsbedingung ergibt sich damit als Bestimmungsgleichung f\u00fcr  $j_0$

$$\sup_{j_0} \left[ j_0\chi_0 - \ln \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 \right] \cos \left[ \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta}j_0 \right) \right] \right] \right]$$

Zun\u00e4chst wurde nun der Grenzwert  $R_k \rightarrow 0$  betrachtet, wodurch der Parameter  $\alpha$  in die Masse  $m$  \u00fcbergeht. Die dadurch entstehende Gleichung wurde jetzt numerisch gel\u00f6st, indem Arrays mit vielen  $\sqrt{\beta}j_0$  erzeugt wurden, auf die Gleichung angewandt und dann das  $\sqrt{\beta}j_0$  herausgesucht wurde, f\u00fcr die die Gleichung maximal wird. Es wurde absichtlich mit  $\sqrt{\beta}j_0$  gerechnet, um wieder ausschlie\u00dflich dimensionslose Gr\u00f6\u00dfen zu verwenden. Die Variation wurde bei festen Parametern f\u00fcr mehrere  $\chi_0$  durchgef\u00fchrt, um einen funktionellen Zusammenhang zu erhalten. Diese Zusammenh\u00e4nge wurden dann auch noch f\u00fcr verschiedene Parameter ausgewertet, um deren Einfluss analysieren zu k\u00f6nnen.



(a) gesamter Gültigkeitsbereich

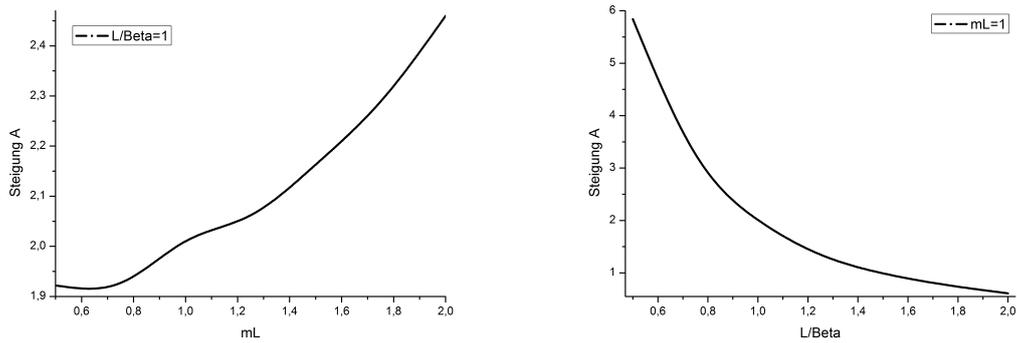
(b) linearer Bereich

Abbildung 9: Ergebnis der numerischen Legendretransformation. Es ist erkennbar, dass der Zusammenhang zwischen  $\chi_0$  und  $\sqrt{\beta}j_0$  für mikroskopische Größen linear ist. Des Weiteren sieht man, dass die Parameterwahl Einfluss auf die Steigung hat und der Wert von  $\frac{L}{\beta}$  den y-Achsenabschnitt festlegt.

Das Verhalten im linearen Bereich wurde nun genauer untersucht. Die Verschiebung der Kurven in Abhängigkeit des Winkels  $\theta$  wurde bereits in Abb. 8 gezeigt. Somit ist es eingängig, dass dieser Parameter im Wesentlichen den y-Achsenabschnitt festlegt. Berücksichtigt man noch den Einfluss von  $\frac{L}{\beta}$  so ergibt sich

$$\sqrt{\beta}j_0 = A \left( mL, \frac{L}{\beta} \right) \chi_0 + \frac{(\pi - \theta)\beta}{L}.$$

Für die Steigung  $A$  lässt sich zunächst festhalten, dass diese nicht von  $\theta$  abhängt. Die Abhängigkeit der Steigung von den anderen beiden Parametern,  $mL$  und  $\frac{L}{\beta}$  ist kompliziert und nicht sehr aussagekräftig und soll deswegen nur einmal in der nachfolgenden Abbildung veranschaulicht werden.



(a) Einfluss von  $mL$  bei konstantem  $\frac{L}{\beta}$

(b) Einfluss von  $\frac{L}{\beta}$  bei konstantem  $mL$

Abbildung 10: Der Parameter  $mL$  hat einen exponentiellen Einfluss auf die Steigung. Die Abhängigkeit von  $\frac{L}{\beta}$  ist wesentlich komplizierter. Hier überlagern sich der exponentielle und der periodische Einfluss, der durch den Kosinus hervorgerufen wird.

Einsetzen des numerisch ermittelten Zusammenhangs und der Legendretransformation der höheren Moden des Stromes in Gl.(28), unter Berücksichtigung, dass diese reell bleiben

müssen, führt auf eine effektive Wirkung der Form

$$\begin{aligned}
\Gamma_k &= -\ln(a) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \chi_n \chi_{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \chi_n \chi_{-n} + \alpha_0 \chi_0^2 + j_0 \chi_0 \\
&\quad - \ln \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\alpha_0}{2\beta} (nL)^2 \right] \cos \left[ \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right] \right] - \Delta S_k \xrightarrow{R_k \rightarrow 0} \\
\Gamma &= -\ln(a) - m \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \chi_{-n} + j_0 \chi_0 - \ln \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta} (nL)^2 \right] \cos \left[ \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right] \right] \\
&= -\ln(a) - \frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi}^2 + \left( \frac{A \left( ml, \frac{L}{\beta} \right)}{\sqrt{\beta}} + \frac{m}{2} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi} \right)^2 + \frac{(\pi - \theta)}{L} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi} \\
&\quad - \ln \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta} (nL)^2 \right] \cos \left[ \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\pi}{L} + \frac{A \left( ml, \frac{L}{\beta} \right)}{\sqrt{\beta}} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi} \right) \right] \right]
\end{aligned}$$

Diese berechnete Wirkung führt jedoch nicht auf die oben beschriebenen Grundzustandsenergie  $E_0 = \frac{\theta^2}{2mL^2}$ , was vermutlich dadurch zu erklären ist, dass nur der konvexe Bereich der Nullmode betrachtet wurde, eine Vereinfachung die, wie man an diesem Ergebnis erkennt, nicht gerechtfertigt war. Dennoch kann man aus den Ergebnissen schlussfolgern, dass die effektive Wirkung nicht nur quadratische Terme in  $\dot{\chi}$  aufweisen wird, sondern vermutlich auch lineare.

#### 4.6 Alternative Kopplung

Da mit der anfangs angenommenen Kopplung kein zufriedenstellendes Ergebnis erzielt werden konnte, wurde noch eine alternative Kopplung, zunächst ohne Regulator, erprobt. Bei dieser wurde der Strom nicht an  $\dot{x}$ , sondern direkt an  $x$  gekoppelt. Die Zustandssumme ist damit gegeben als

$$Z[j] = \int \mathcal{D}x e^{-S[x] + \int jx}.$$

Eine zum Abschnitt 4.2 analoge Rechnung, die wieder mit einer Transformation in den Fourierraum durchgeführt wurde, führt auf das folgende Schwingerfunktional

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \ln \left( \frac{1}{\sqrt{m\omega_l}} \right) - \frac{j_l j_{-l}}{m\omega_l} \right] + \\
&\quad \ln \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta} (nL)^2 + i\theta n + nL \left( \frac{\sqrt{\beta}}{2} j_0 - \sum_{l \neq 0} \frac{j_l}{\sqrt{\beta}\omega_l} \right) \right] \right).
\end{aligned}$$

Es ist sofort zu erkennen, dass eine, zum vorherigen Abschnitt, fast analoge Kopplung von  $j_0$  an die übrigen Terme auftritt. Dies würde dann auf die selben Probleme führen. Nämlich, dass die effektive Wirkung nicht auf ihrem gesamten Definitionsgebiet konvex werden würde. Das merkwürdige Verhalten der Funktionale bezüglich der Nullmoden ist also auch mit einer anderen Kopplung nicht zu vermeiden.

#### 4.7 Ansatz zur Berechnung der Grundzustandsenergie

Da die Legendretransformation der Nullmode nicht mit den klassischen Methoden zu bestimmen war, wird im Folgenden der Ansatz gemacht, diese Nullmode als eine von allen  $\chi_l$  mit  $l \in \mathbb{Z}$  unabhängige Variable zu betrachten, die nicht transformiert werden muss. Es wurde bereits festgestellt, dass  $j_0$  nur an  $\chi_0$  koppelt, weshalb die höheren Moden nicht beeinflusst werden. Die aus den Berechnungen folgende Wirkung hat damit entsprechend Gl. (26) die Form

$$\Gamma = -\frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi}^2 - \ln(a) - \ln \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta} (nL)^2 + \frac{inL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right] \right).$$

Das konsistente negative Vorzeichen ist durch die gewählte Kopplung an den Strom und der daraus resultierenden modifizierten Legendretransformation (26) bedingt.

Die effektive Wirkung wird nun nacheinander bezüglich  $\dot{\chi}$  und  $j_0$  minimiert, um die Grundzustandsenergie zu erhalten. Die Variation bezüglich  $\dot{\chi}$  entspricht der des freien Teilchens mit dem bekannten Ergebnis  $\dot{\chi} = 0$ . Als Bedingung für  $j_0$  ergibt sich

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta j_0} = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{inL}{\sqrt{\beta}} \exp \left( -\frac{m}{2\beta} (nL)^2 \right) \sin \left( \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right)}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{m}{2\beta} (nL)^2 \right) \cos \left( \frac{nL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right)} \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese ist Bedingung ist allgemein nur dann erfüllt, wenn

$$j_0 = -\frac{\sqrt{\beta}\theta}{L}. \quad (29)$$

Einsetzen dieses Ergebnisses und Verwendung der Konstanten a, wie sie sich aus Gl.(4.3) ergibt, liefert eine Grundzustandsenergie, welche unabhängig vom Winkel  $\theta$  ist.

$$\begin{aligned} E_0 &= -\frac{1}{\beta} \ln \left( \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \right) - \frac{1}{\beta} \ln \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta} (nL)^2 \right] \right) \\ &= -\frac{1}{\beta} \ln \left( \sqrt{\frac{mL^2}{2\pi\beta}} \right) - \frac{1}{\beta} \ln \left( \Theta \left( 0, \frac{imL^2}{2\pi\beta} \right) \right) \end{aligned}$$

Es wurde Def.(21) der Jacobischen Theta-Funktion verwendet.

Eine Vernachlässigung der Kopplung der beiden Nullmoden führt also auf eine Grundzustandsenergie, welche nicht mehr durch die Winkelverschiebung  $\theta$  beeinflusst wird, sodass man im wesentlichen bei dem Ergebnis des freien Teilchens landet. Die entscheidende Information muss also gerade in dieser Kopplung stecken, weswegen sie, entgegen des gemachten Ansatzes nicht vernachlässigt werden darf. Ohne Kenntnis des Zusammenhanges zwischen  $j_0$  und  $\chi_0$  ist es jedoch nicht möglich, bezüglich dieser Variablen zu minimieren. Um die Grundzustandsenergie zu erhalten, müsste demnach zunächst geklärt werden, wie Legendretransformationen für nicht konvexe Schwingerfunktionale physikalisch verstanden werden können.

Abschließend lässt sich jedoch festhalten, dass die effektive Wirkung für das Teilchen auf einer  $S^1$ -Sphäre gegeben ist durch

$$\Gamma = -\frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi}^2 + C_1 j_0 \chi_0 + C_2 - \ln \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta} (nL)^2 + \frac{inL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right] \right)$$

$$= -\frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi}^2 + \frac{C_1 j_0}{\sqrt{\beta}} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi} + C_2 - \ln \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta} (nL)^2 + \frac{inL}{\beta} \left( \frac{\beta\theta}{L} + \sqrt{\beta} j_0 \right) \right] \right)$$

Für konkrete Berechnungen müssen allerdings zunächst die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ , sowie der Zusammenhang zwischen  $j_0$  und  $\chi_0$  bestimmt werden.

Zuletzt soll noch ein etwas spekulativer Ansatz gewählt werden. Ausgehend von der Tatsache, dass die Nullmode des Stroms eine Konstante sein muss, die auch den oben berechneten Spezialfall einer verschwindenden Kopplung zwischen Strom und Feld erfüllen muss, ist sie durch die Bedingung aus Gl.(29) eindeutig bestimmt. Damit würde sich die effektive Wirkung dann zu

$$\Gamma = -\frac{m}{2} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi}^2 - \frac{\theta}{L} \int_0^\beta d\tau \dot{\chi} = \int_0^\beta d\tau \left( -\frac{m}{2} \dot{\chi}^2 - \frac{\theta}{L} \dot{\chi} \right)$$

ergeben. Die Extremalbedingung führt dann auf

$$\dot{\chi}_{min} = -\frac{\theta}{mL}.$$

Die hieraus resultierende Grundzustandsenergie stimmt dann auch mit den quantenmechanischen Überlegungen aus Gl.(22) überein.

$$E_0 = \left( -\frac{m}{2} \dot{\chi}_{min}^2 - \frac{\theta}{L} \dot{\chi}_{min} \right) = -\frac{\theta^2}{2mL^2} + \frac{\theta^2}{mL^2} = \frac{\theta^2}{2mL^2}$$

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Bachelorarbeit hat einen guten Einstieg in die Methoden der modernen theoretischen Physik gegeben. Während der Ausarbeitung konnten Kenntnisse über den Feynmanschen Pfadintegralformalismus gesammelt werden und es wurde ein Grundverständnis über die funktionale Renormierungsgruppe vermittelt.

Neben mathematischen Fähigkeiten wurde auch ein tieferes Verständnis über die Bedeutung von Zustandssummen, Schwingerfunktionalen und insbesondere der effektiven Wirkung erzeugt.

Es wurden periodische Systeme mit Instantonen untersucht. Diese Instantonen wurden über Terme realisiert, die einen linearen Zusammenhang mit der (Winkel-)Geschwindigkeit aufwiesen. Dabei wurde festgestellt, dass die Phasenverschiebung, die Teilchen dieser Systeme, bzw. deren Wirkungsfunktion während einer Periode erfahren, einen nachweisbaren Einfluss auf die Größen des Systems haben. So verschieben sich beispielsweise die Energieeigenwerte, insbesondere die Grundzustandsenergie.

Während der Untersuchung sind jedoch auch physikalische Probleme aufgetreten. Es wurde ein atypisches Verhalten des Schwingerfunktionals und damit auch der effektiven Wirkung bezüglich der konstanten Mode des erzeugenden Funktionals festgestellt. Entgegen allgemeingültiger Überlegen wurden bezüglich dieser Variablen eine konkave Abhängigkeit beobachtet. Diese konnte nicht erklärt werden. Deshalb wäre es gut, die effektive Wirkung noch auf anderen Wegen, beispielsweise durch Lösen der *Wetterich Gleichung*<sup>2</sup> zu bestimmen, um die erzielten Resultate vergleichen zu können und eventuell eine tiefere physikalische Anschauung zu erlangen.

<sup>2</sup>Diese ist als Gl. (20) in den Vorbetrachtungen aufgeführt worden.

## 6 Anhang

### 6.1 Wichtige Integrale

#### 6.1.1 Das Gaußintegrale für Grassmann-Variablen [14]

Das Gaußintegral für Fermionen ergibt sich unter Verwendung der Substitutions- und Integrationsregeln von Grassmann-Variablen entsprechend Gl.(11). Außerdem wird die Taylorreihe der Exponentialfunktion benutzt. Diese besteht für Grassmann-Variablen nur aus einem konstanten und einem linearen Anteil, da die höheren Ordnungen verschwinden ( $\eta^2 = 0$ ).

$$\int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}A\eta} = \int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta'} = \det A \int d\bar{\eta}d\eta' e^{-\bar{\eta}\eta'} = \det A \int d\eta' d\bar{\eta}(-1 + \bar{\eta}\eta') = \det A$$

Mit der Substitution  $A\eta = \eta'$ .

### 6.2 Rechenmethoden

#### 6.2.1 Die Methode der Zeta-Funktion [8]

Lösen von Gaußintegralen für Grassmann-Variablen, beispielsweise für einen Operator  $A$  mit den  $n$  Eigenwerten  $a_k$ , führt also auf die Determinante dieses Operator. Aber wie ist diese zu berechnen? Eine elegante Möglichkeit führt auf die Methode der spektralen Zeta-Funktion, welche über

$$\zeta_A(s) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^s} = \sum_{k=1}^n e^{-s \ln a_k} = \text{Sp} \left( e^{-s \ln A} \right)$$

definiert ist.

Diese Funktion wird nun nach  $s$  differenziert und anschließend die Stelle  $s=0$  betrachtet.

$$\frac{d}{ds} \zeta_A(s) = - \sum_{k=1}^n \ln a_k e^{-s \ln a_k}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \zeta_A(0) &= - \sum_{k=1}^n \ln a_k = - \ln \prod_{k=1}^n a_k = - \ln \det A \\ &\Rightarrow \det A = e^{-\zeta'_A(0)} \end{aligned}$$

#### 6.2.2 Poissonresummation [8]

Die Poissonresummation folgt direkt, wenn man eine unendliche Summe von Delta-Distributionen fourierentwickelt.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$$

Die Summe kann als eine periodische, quadratintegrale Funktion mit einer Periode von  $T=1$  aufgefasst werden. Daraus ergibt sich dann die Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}.$$

Die Konstanten sind bestimmt durch

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T dx f(x) e^{-ik} = \int_0^1 dx \sum_n \delta(x - n) e^{-2\pi i k x}.$$

Die Substitution von  $y = x - n$  ergibt:

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_n \int_{-n}^{1-n} dy \delta(y) e^{-2\pi i k (y+n)} = \sum_n \int_{-n}^{1-n} dy \delta(y) e^{-2\pi i k y} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y) e^{-2\pi i k y} = 1 \\ &\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x}. \end{aligned}$$

Damit gilt für eine beliebige Funktion  $f(n)$  mit  $f \in S(\mathbb{R})$  und ihrer Fouriertransformierten  $\tilde{f}(2\pi k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (e^{2\pi i k x} f(x))$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) f(x) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k x} f(x) \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx (e^{2\pi i k x} f(x)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(2\pi k). \end{aligned}$$

Dies wird grade als Poisson-Resummation bezeichnet.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(2\pi k) \tag{30}$$

## 7 Quellenangaben

### Literatur

- [1] HANS STEPHANI / GERHARD KLUGE *Theoretische Mechanik, Punkt- und Kontinuumsmechanik* Spektrum, Akademischer Verlag ISBN 3-686025-284-4
- [2] PROF. DR. KLAUS-DIETER SCHOTTE *Skript zur Thermodynamik SS 2005* Fachbereich Physik der Freien Universität Berlin, Institut für Theoretische Physik
- [3] PROF. DR. ANDREAS WIPF *Quantenfeldtheorie II, SS 2009* Theoretisch Physikalisches Institut der Friedrich-Schiller-Universität Jena
- [4] PROF. DR. STEFAN KEHREIN *T II: Quantenmechanik, 25.02.2011, S.60* Arnold Sommerfeld Center for Theoretical Physics, Department Physik, Universität München
- [5] PROF. DR. MARCUS ANSORG *Quantenmechanik SS 2011* Theoretisch Physikalisches Institut der Friedrich-Schiller-Universität Jena
- [6] PROF. DR. REINHARD MEINEL *Thermodynamik und statistische Physik, 24. Februar 2011* Friedrich-Schiller-Universität Jena
- [7] PROF. DR. SCHÄFER *handschriftliche Mitschrift der Vorlesung Relativistische Physik, WS 2011/2012* Theoretisch Physikalisches Institut der Friedrich-Schiller-Universität Jena
- [8] BERNHARD SCHIEKEL *Zeta-Funktionen in der Physik - eine Einführung* 2007-2011, D-89073 Ulm, B. Schiekel
- [9] HENNING JÜRGENS *Das Pfadintegral in der Quantenmechanik* Universität Münster, 19. November 2002
- [10] SVEN MUSBERG *Euklidisches Pfadintegral und erzeugende Funktionale* Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder - Sommersemester 2010
- [11] CHRISTOPHER PINKE *Pfadintegrale in Quantenmechanik und Feldtheorie - Die kanonische Zustandssumme* 30.01.2008
- [12] WALTER GREINER, JOACHIM REINHARDT *Theoretische Physik Band 7A, Feldquantisierung, S. 65 bis S.75, sowie S. 399* Verlag Harri Deutsch ISBN 3-87144-975-X
- [13] EBERHARD ZEIDLER *Quantum Field Theory 1 - Basics in Mathematics and Physics* Springer Berlin Heidelberg New York ISBN-13 978-3-540-34762-0
- [14] C.C. NOACK *Quantenelektrodynamik - Grassmann-Algebren, SS 2005* Universität Bremen, Institut für Theoretische Physik
- [15] MATTHIAS R. GABERDIEL *QUANTENFELDTHEORIE, WS 2004/2005* Institut für Theoretische Physik, ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich
- [16] PROF. DR. ANDREAS WIPF *Chapter 12, Functional Renormalization Group* Theoretisch Physikalisches Institut der Friedrich-Schiller-Universität Jena
- [17] PROF. DR. HOLGER GIES *Introduction to the Functional RG and Applications to Gauge Theories* Institute for Theoretical Physics, Heidelberg University, Philosophenweg 16, D-69120 Heidelberg

## 8 Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen angefertigt habe.

Die eingereichte Arbeit ist nicht anderweitig als Prüfungsleistung verwendet worden oder in deutscher oder einer anderen Sprache als Veröffentlichung erschienen.

Seitens der Verfasserin bestehen keine Einwände, die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Benutzung zur Verfügung zu stellen.

Jena, 09.08.12

Julia Retzlaff