Fermionische Systeme auf gekrümmtem Hintergrund

Masterarbeit

zur Erlangung
des akademischen Grades
Master of Science (Physik)

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA
PHYSIKALISCH-ASTRONOMISCHE FAKULTÄT
THEORETISCH-PHYSIKALISCHES INSTITUT

eingereicht von: Stefan Lippoldt
geboren am: 31.07.1990

eingereicht am: 25. Oktober 2012

1. Gutachter: Prof. Dr. H. Gies
2. Gutachter: Prof. Dr. A. Wipf

Tag der Verleihung:

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Anfang des 20. Jahrhundert hat A. Einstein mit der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) die Krümmung des Raumes nahe gelegt. Auch die Quantennatur der Welt wurde in dieser Zeit entdeckt, sodass schon nach kurzer Zeit der Versuch unternommen wurde, Fermionen in gekrümmten Räumen zu beschreiben. Um die dazu notwendigen Gamma-Matrizen vom flachen Minkowski-Raum in einen gekrümmten zu übertragen, wurde 1929 unter anderen von H. Weyl der Vierbein-Formalismus (VF) vorgeschlagen [8]. Dieser wird seitdem als notwendig oder zumindest als *die* Übertragungsvorschrift angesehen, z. B. in [9]. Von A. Weldon stammt ein noch relativ neuer Formalismus, diesen nennen wir im Folgenden aus Ermangelung eines Namens und Anerkennung an den geistigen Vater dieser Idee „Weldon-Formalismus" (WF, siehe [5]). Hier wird im Gegensatz zum VF kein spezielles Koordinatensystem ausgezeichnet und damit ein grundlegender Gedanke der ART, die Gleichwertigkeit aller Bezugssysteme, wiederhergestellt.

Ziel dieser Arbeit soll sein, die Idee von Weldon aufzugreifen, weiter zu entwickeln und erste mögliche Konsequenzen abzuleiten. Wir werden in Kapitel 2 die nötigen Grundlagen zur ART zusammenfassen und zusätzlich eine kurze Einführung zu maximal symmetrischen Räumen geben. Weiterhin werden wir in Kapitel 3 darlegen, wie Spinoren in gekrümmte Räume übertragen werden, dabei den VF kurz beschreiben und den WF ausarbeiten. Danach berechnen wir in Kapitel 4 das Inverse des Dirac-Operators, um in Kapitel 6 den Fluss der Kopplungskonstanten im Gross-Neveu-Modell auf einem gekrümmten Hintergrund ermitteln zu können. Für die Ableitung des Flusses verwenden wir die Flussgleichung, die wir in Kapitel 5 herleiten.

2 Allgemeine Relativitätstheorie

Da wir wissen, dass der uns umgebende Raum durch die in ihm vorhandene Materie, oder besser in ihm vorhandene Masse, gekrümmt wird, wiederholen wir zunächst die wichtigsten Konzepte der ART und klären auf diese Weise auch unsere Konventionen. Für eine ausführliche Einführung in die ART verweisen wir auf [11].

2.1 Grundlagen zur ART

Die zwei wesentlichen Gedanken der ART sind die Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit und die Gleichwertigkeit aller Bezugssysteme. Wenn wir ein Koordinatensystem gewählt haben, dann können wir Punkte x im d-dimensionalen Raum durch ihre Koordinaten x^μ ($\mu = 0, \ldots, d-1$) darstellen. Die Eigenschaften des Raumes sind vollständig in der symmetrischen Metrik $g_{\mu\nu}$ mit Signatur $(-, +, \ldots, +)$ kodiert. Wir werden uns hier auf torsionsfreie Räume beschränken.

Nehmen wir einen Wechsel des Bezugssystems $x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$ vor, wir beschreiben den Punkt x jetzt also mit x'^μ und nicht mehr mit x^μ, dann transformiert sich die Metrik

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) \to g'_{\mu\nu}(x'^\alpha) = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} \, g_{\rho\lambda}(x^\alpha)$$

so, dass das Abstandsquadrat zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten $(\mathrm{d}d_G)^2$ unter Koordinatentransformationen

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}d_G)^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \to (\mathrm{d}d'_G)^2 &= g'_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu = g_{\rho\lambda}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\mathrm{d}x'^\mu \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}\mathrm{d}x'^\nu = g_{\rho\lambda}\mathrm{d}x^\rho \mathrm{d}x^\lambda \\ &= (\mathrm{d}d_G)^2\end{aligned}$$

invariant ist. Der endliche geodätische Abstand $d_G(x, y)$ zwischen zwei Punkten x und y, das ist der Abstand entlang einer Geodäte $z^\mu(\lambda)$ mit $z^\mu(0) = y^\mu$ und $z^\mu(1) = x^\mu$, wird als das Integral über $\mathrm{d}d_G$

$$d_G(x, y) = \int_0^1 \mathrm{d}\lambda \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}z^\mu(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}z^\nu(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}} \tag{2.1}$$

definiert. Dabei ist zu beachten, dass $g_{\mu\nu}$ nicht positiv definit ist. Der Integrand ist entlang der Geodäte konstant, daher kann man die Wurzel so ziehen, dass $d_G = \operatorname{Re} d_G \geq 0$ oder $|d_G| = \operatorname{Im} d_G \geq 0$ gilt.

Die Metrik soll vollen Rang besitzen, sodass wir auch das Inverse $g^{\mu\nu}$ mit $g^{\mu\rho}g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ einführen können. Würde die Metrik nicht vollen Rang haben, könnte sie nicht asymptotisch flach sein und somit kein Newtonscher Grenzfall existieren. Die Transformationseigenschaften von $g^{\mu\nu}$ erhalten wir aus der Invarianz von δ^μ_ν und finden unter Verwendung der Identität $\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \cdot \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu$

$$g^{\mu\nu} \to g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} g^{\rho\lambda},$$

eine Vorschrift analog zu $g_{\mu\nu}$.

Mit der inversen Metrik können wir das infinitesimale Abstandsquadrat $(\mathrm{d}d_G)^2$ auch mit unten indizierten Koordinatendifferentialen $\mathrm{d}x_\mu = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\nu$ über $(\mathrm{d}d_G)^2 = g^{\mu\nu}\mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu$ berechnen.

Wir unterscheiden nun untere Indizes „kovariant" von oberen Indizes „kontravariant" nach ihren Transformationseigenschaften unter Koordinatentransformationen und wählen dies als Ausgangspunkt, um Tensoren einzuführen. Tensoren sind Objekte mit Raumzeitindizes und transformieren in jedem Index wie die Differentiale der Koordinaten. Durch die Metrik und die Inverse können Indizes rauf und runter gezogen werden. Tensoren ohne Raumzeitindizes $\varphi_S(x^\alpha)$ nennen wir Skalare, sie transformieren

$$\varphi_S(x^\alpha) \to \varphi'_S(x'^\alpha) = \varphi_S(x^\alpha)$$

genauso wie der geodätische Abstand d_G. Vektoren $T^\mu(x^\alpha)$ sind Tensoren mit genau einem Index und transformieren

$$T^\mu(x^\alpha) \to T'^\mu(x'^\alpha) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} T^\nu(x^\alpha)$$

genauso wie die Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}x^\mu$. Tensoren höherer Stufe verhalten sich dann dazu analog. Im Folgenden verwenden wir, bis auf wenige Ausnahmen, griechische Indizes, um die Komponenten von Tensoren zu indizieren. Wir weisen darauf hin, dass sich die Koordinaten x^μ, trotz der griechischen Indizes, nicht wie Vektoren verhalten, lediglich die Koordinatendifferentiale bilden einen Vektor.

Da die partielle Ableitung ∂_μ eines Tensors im Allgemeinen nicht wieder einen Tensor liefert, wird die kovariante Ableitung D_μ für Tensoren so definiert, dass das entstehende Objekt ein um eine Stufe erhöhter Tensor ist und die *natürlichen* Bedingungen für die kovariante Ableitung

(i) Linearität: $D_\mu(T_1^\nu + T_2^\nu) = D_\mu T_1^\nu + D_\mu T_2^\nu$

(ii) Gültigkeit der Produktregel: $D_\mu(T_1^\nu T_2^\rho) = (D_\mu T_1^\nu)T_2^\rho + T_1^\nu(D_\mu T_2^\rho)$

(iii) Erhaltung der Indexstruktur: $D_\mu T_\nu = (D_\mu T^\rho)g_{\rho\nu}$

(iv) Torsionsfreiheit: $D_\mu T_\nu - D_\nu T_\mu = \partial_\mu T_\nu - \partial_\nu T_\mu$

erfüllt werden.

Die partielle Ableitung eines Skalars verhält sich bereits wie ein Tensor, es gilt hier $D_\mu \varphi_S = \partial_\mu \varphi_S$. Skalare sind die einzigen Tensoren, für die partielle und kovariante Ableitung zusammenfallen. Für Vektoren wird die kovariante Ableitung mit

$$D_\mu T^\nu = \partial_\mu T^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} T^\lambda \tag{2.2}$$

definiert. Der Raumzeit-Zusammenhang $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ wird so gebildet, dass $D_\mu T^\nu$ sich wie ein Tensor mit zwei Indizes verhält. Man findet unter der Forderung von (i) – (iv) auf eindeutige Weise

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \big(\partial_\mu g_{\rho\lambda} + \partial_\lambda g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\lambda} \big), \tag{2.3}$$

die Christoffelsymbole als Raumzeit-Zusammenhang. Diese transformieren, trotz der griechischen Indizes, ganz explizit nicht wie Tensoren, denn nur so können sie die Tensoreigenschaft von $D_\mu T^\nu$ sicherstellen. Wir finden mit den Bedingungen (i) – (iv) auch

$$D_\mu T_\nu = \partial_\mu T_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T_\lambda, \tag{2.4}$$

die kovariante Ableitung von T_ν.

Zur Bildung der kovarianten Ableitung von Tensoren höherer Stufe wird analog vorgegangen, man bildet die partielle Ableitung und addiert oder subtrahiert je nach Art des Index die Kontraktion mit den Christoffelsymbolen für jeden Raumzeit-Index. So finden wir, dass

$$D_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0, \tag{2.5}$$

die kovariante Ableitung der Metrik verschwindet.

Bei einigen Rechnungen ist die Ableitung des geodätischen Abstandes $\partial_\mu d_G(x,y)$ hilfreich. Da die partielle Ableitung eines Skalars ein Vektor ist, definieren wir den Vektor $n_\mu(x,y) = \partial_\mu d_G(x,y)$. Dazu sei $z(\lambda)$ die Geodäte von y nach x, wobei $z(0) = y$ und $z(1) = x$. Um die Ableitung zu berechnen, wählen wir ein $\delta > 0$ hinreichend klein, sodass $y'_\delta = z(1-\delta)$ so nahe an x ist, dass wir mit lokal inertialen Koordinaten an x dann $d_G(x, y'_\delta) \simeq \sqrt{\eta_{ab}(x^a - y'^a_\delta)(x^b - y'^b_\delta)}$ rechtfertigen können. Der Punkt y'_δ liegt auf der Geodäte von y nach x, daher gilt $d_G(x,y) = d_G(x,y'_\delta) + d_G(y'_\delta, y)$. Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} n_a(x,y) = \partial_a d_G(x,y) &= \lim_{\delta\to 0} \partial_a d_G(x, y'_\delta) = \lim_{\delta\to 0} \partial_a \sqrt{\eta_{bc}(x^b - y'^b_\delta)(x^c - y'^c_\delta)} \\ &= \lim_{\delta\to 0} \frac{\eta_{ab}(x^b - y'^b_\delta)}{d_G(x, y'_\delta)}, \end{aligned}$$

einen speziellen Ausdruck in lokal inertialen Koordinaten um x, vgl. dazu auch Gleichung (3.5). Vektoren sind eindeutig durch Betrag und Richtung bestimmt, daher berechnen wir den Betrag

$$\begin{aligned} n^\mu(x,y)n_\mu(x,y) &= n^a(x,y)n_a(x,y) = g^{ab}(x)\big(\partial_a d_G(x,y)\big)\big(\partial_b d_G(x,y)\big) \\ &= \eta^{ab}\frac{\eta_{ac}(x^c - y'^c_\delta)}{d_G(x,y'_\delta)}\frac{\eta_{bd}(x^d - y'^d_\delta)}{d_G(x,y'_\delta)} = 1 \end{aligned}$$

und erkennen, dass $n_\mu(x,y)$ ein Einheitsvektor ist. Die Richtung folgt aus der speziellen Darstellung in lokal inertialen Koordinaten, $n_\mu(x,y)$ ist der Tangentialvektor entlang der Geodäte von y nach x am Punkt x.

Die Informationen über die Krümmung des Raumes sind im Riemannschen Krümmungstensor $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ gespeichert. Er entspricht der Feldstärke der Geometrie des gekrümmten Raumes. Wir definieren ihn über den Kommutator der kovarianten Ableitung

$$D_\mu D_\nu T^\lambda - D_\nu D_\mu T^\lambda = R_{\mu\nu\cdot\rho}^{\cdot\cdot\lambda} T^\rho, \quad T^\rho \text{ beliebiger Tensor}$$

und finden

$$R_{\mu\nu\cdot\rho}^{\cdot\cdot\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}, \tag{2.6}$$

den Krümmungstensor in Abhängigkeit von den Christoffelsymbolen. Es ergeben sich einige Symmetrien, die wichtigsten

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\nu\mu\rho\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\rho\lambda\mu\nu} \\ &\text{(ii)} && R_{\mu\nu\rho\lambda} + R_{\mu\rho\lambda\nu} + R_{\mu\lambda\nu\rho} = 0 \\ &\text{(iii)} && D_\kappa R_{\mu\nu\rho\lambda} + D_\mu R_{\nu\kappa\rho\lambda} + D_\nu R_{\kappa\mu\rho\lambda} = 0 \end{aligned}$$

nennen wir hier kurz. Den Ricci-Tensor

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu\beta}\ g^{\alpha\beta} \tag{2.7}$$

und den Ricci-Skalar oder auch Krümmungsskalar

$$R = R_{\mu\nu}\ g^{\mu\nu} \tag{2.8}$$

definieren wir jeweils als Kontraktion über zwei Indizes.

Ein weiterer wichtiger Tensor ist der vollständig antisymmetrische Tensor $\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}$ der Stufe d. Diesen konstruieren wir aus dem Levi-Civita-Symbol $\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}$, das ebenfalls vollständig antisymmetrisch ist. Es gilt $\varepsilon_{1\ldots d} = \varepsilon^{1\ldots d} = 1$. Bei diesem Symbol gibt es keinen Unterschied zwischen oberen und unteren Indizes, es transformiert sich auch nicht wie ein Tensor und ist daher lediglich eine Kurznotation. Wenn wir nun einen Tensor konstruieren wollen, der sich unter Koordinatentransformationen wie

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}'_{\mu_1\ldots\mu_d} &= \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_d}}{\partial x'^{\mu_d}} \tilde{\varepsilon}_{\nu_1\ldots\nu_d} \\ &= \det{}^{(\mu)}_{(\nu)} \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right) \tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d} \end{aligned}$$

verhält, benötigen wir ein Objekt, das die Determinante eliminiert. Da sich die Metrik wie

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\rho\lambda}$$

transformiert, gilt für die Determinante $g = \det^{(\mu\nu)} g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} g \to g' = & \det{}^{(\mu\nu)} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu} g_{\rho\lambda} \right) = \det{}^{(\rho\lambda)} (g_{\rho\lambda}) \left[\det{}^{(\mu)}_{(\rho)} \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \right) \right]^2 \\ = & \det{}^{(\rho\lambda)} (g_{\rho\lambda}) \left[\det{}^{(\mu)}_{(\nu)} \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right) \right]^{-2} . \end{aligned}$$

Die Wurzel der Determinante transformiert sich somit genau richtig. Dabei müssen wir noch darauf achten, dass aufgrund der Signatur der Metrik die Determinante negativ ist, wir definieren daher $\mathcal{M}(x) = \sqrt{-g(x)}$ und finden

$$\tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_d} = \mathcal{M} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d}, \tag{2.9}$$

den gesuchten Tensor. Hier werden die Indizes nun wieder mit der Metrik hoch und runter gezogen. Wenn wir alle Indizes hoch ziehen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \dots \mu_d} & = g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_d \nu_d} \tilde{\varepsilon}_{\nu_1 \dots \nu_d} = \det{}_{(\mu\nu)} g^{\mu\nu} \mathcal{M} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_d} \\ & = - \frac{1}{\mathcal{M}} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_d}, \end{aligned}$$

sodass

$$\tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \dots \mu_d} \tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_d} = -\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_d} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} = -d!$$

gilt. Ebenfalls ist die Identität $D_\mu \tilde{\varepsilon}_{\mu_1 \dots \mu_d} = 0$ hilfreich.

Als Letztes benötigen wir noch das Integrationsmaß für die Volumenintegration. Da sich $\mathrm{d}^d x$ unter Koordinatentransformation wie

$$\mathrm{d}^d x \to \mathrm{d}^d x' \det{}^{(\mu)}_{(\nu)} \left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right)$$

verhält, brauchen wir ein Objekt, das diesen Faktor aufhebt, um zu einer koordinatenunabhängigen Darstellung zu gelangen. Außerdem sollte in lokal inertialen Koordinaten wieder $\mathrm{d}V = \mathrm{d}^d x$ stehen. Deshalb definieren wir als Maßfaktor $\mathcal{M}$ für das Volumenelement

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}^d x \mathcal{M} \tag{2.10}$$

und erhalten auch in lokal inertialen Koordinaten an x in x für $\mathcal{M} = \sqrt{-\det^{(ab)} \eta_{ab}} = 1$, also $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x^d$. Wir schreiben verkürzend $\int_x = \int \mathrm{d}x \mathcal{M}(x)$.

2.2 De-Sitter- und Anti-de-Sitter-Raum

In einer späteren Beispielrechung zum WF werden wir uns auf maximal symmetrische Räume beschränken. Daher geben wir auch dazu eine kurze Einführung und halten uns im Wesentlichen an [14].

In diesen Räumen ist der Krümmungsskalar konstant. Für den Krümmungstensor ergibt sich

$$R_{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{R}{d(d-1)}\big(g_{\mu\rho}\, g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}\, g_{\nu\rho}\big), \tag{2.11}$$

ein sehr einfacher Zusammenhang zur Metrik. Wir sprechen vom de-Sitter-Raum, wenn $R > 0$ und vom Anti-de-Sitter-Raum, wenn $R < 0$. Für verschwindende Krümmung, also $R = 0$, erreichen wir den flachen Minkowski-Raum. Wir können die maximal symmetrischen Räume als eine Einbettung einer Hyperfläche im $(d+1)$-dimensionalen flachen Raum auffassen. Für das infinitesimale Abstandsquadrat gilt

$$(\mathrm{d}d_G)^2 = \eta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + (\mathrm{d}x^d)^2,\ i,j = 0,\dots,d.$$

Wir definieren eine Hyperfläche

$$\frac{d(d-1)}{R} = \eta_{ij}x^ix^j \tag{2.12}$$

mit dem konstanten Parameter R. Es wird sich zeigen, dass R der Krümmungsskalar ist.

Wenn wir (2.12) nach x^d als Funktion der x^μ

$$\begin{aligned} x^d &= \pm\sqrt{\frac{d(d-1)}{R} - \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu} \\ \mathrm{d}x^d &= (\partial_\mu x^d)\mathrm{d}x^\mu = -\frac{x^\nu\eta_{\nu\mu}\mathrm{d}x^\mu}{x^d} \end{aligned}$$

auflösen, haben wir zwei Möglichkeiten, die Wurzel zu ziehen. Daher bedecken die x^μ als Koordinatenwahl nicht den gesamten (Anti-)de-Sitter-Raum. Wir können so aber trotzdem das infinitesimale Abstandsquadrat

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}d_g)^2 &= \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + \frac{x^\rho\eta_{\rho\mu}x^\lambda\eta_{\lambda\nu}}{(x^d)^2}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \\ &= \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{x^\rho\eta_{\rho\mu}x^\lambda\eta_{\lambda\nu}}{\frac{d(d-1)}{R} - \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}\right)\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \end{aligned}$$

und auch die Metrik zu

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{x^\rho\eta_{\rho\mu}x^\lambda\eta_{\lambda\nu}}{\frac{d(d-1)}{R} - \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta} = \eta_{\mu\nu} + \frac{x^\rho\eta_{\rho\mu}x^\lambda\eta_{\lambda\nu}}{(x^d)^2}$$

bestimmen. Wir führen die Kurzschreibweisen $(x,y)_\eta = x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu$ und $(x)_\eta = (x,x)_\eta$ ein. Die inverse Metrik lautet dann

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{R}{d(d-1)} x^\mu x^\nu .$$

In diesen Koordinaten finden wir für die Ableitung der Metrik

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \frac{\eta_{\rho\mu}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\rho\nu}\eta_{\mu\lambda}}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta} x^\lambda + 2 \frac{\eta_{\rho\lambda}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}}{\left(\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta\right)^2} x^\alpha x^\beta x^\lambda$$

und somit für die Christoffelsymbole

$$\begin{aligned}
\Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \\
&= \left(\eta^{\lambda\rho} - \frac{R}{d(d-1)} x^\lambda x^\rho\right) \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta} + \frac{\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}}{\left(\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta\right)^2} x^\alpha x^\beta \right) \eta_{\rho\kappa} x^\kappa \\
&= \frac{R}{d(d-1)} g_{\mu\nu} x^\lambda
\end{aligned}$$

einen sehr einfachen Ausdruck. Damit errechnet sich der Krümmungstensor zu

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\kappa\rho} = R_{\mu\nu\cdot\rho}^{\cdot\cdot\lambda} g_{\lambda\kappa} &= \left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\right) g_{\lambda\kappa} \\
&= \frac{R}{d(d-1)} \left[(\partial_\mu g_{\nu\rho}) x^\lambda - (\partial_\nu g_{\mu\rho}) x^\lambda + g_{\nu\rho}\delta^\lambda_\mu - g_{\mu\rho}\delta^\lambda_\nu \right] g_{\lambda\kappa} \\
&\quad + \frac{R^2}{d^2(d-1)^2} \left(g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} g_{\mu\rho}\right) x^\lambda x^\sigma g_{\lambda\kappa} \\
&= \frac{R}{d(d-1)} \left(g_{\mu\kappa} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\kappa}\right) \\
&\quad + \frac{R}{d(d-1)} \left(\frac{\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta} + \frac{R}{d(d-1)} \left(g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma} g_{\mu\rho}\right) \right) x^\lambda x^\sigma g_{\lambda\kappa}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$
\begin{aligned}
\left(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}\right)x^\sigma = {} & \Bigg[\left(\eta_{\mu\sigma} + \frac{\eta_{\mu\alpha}\eta_{\sigma\beta}}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta}x^\alpha x^\beta\right)\left(\eta_{\nu\rho} + \frac{\eta_{\nu\kappa}\eta_{\rho\lambda}}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta}x^\kappa x^\lambda\right) \\
& - \left(\eta_{\nu\sigma} + \frac{\eta_{\nu\alpha}\eta_{\sigma\beta}}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta}x^\alpha x^\beta\right)\left(\eta_{\mu\rho} + \frac{\eta_{\mu\kappa}\eta_{\rho\lambda}}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta}x^\kappa x^\lambda\right)\Bigg] x^\sigma \\
= {} & \left(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho}\right)x^\sigma \\
& + \frac{\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\alpha}\eta_{\rho\beta} + \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\sigma\beta} - \eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\alpha}\eta_{\rho\beta} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\alpha}\eta_{\sigma\beta}}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta}x^\alpha x^\beta x^\sigma \\
= {} & \left(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho}\right)x^\sigma\left(1 + \frac{(x)_\eta}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta}\right) \\
= {} & -\frac{d(d-1)}{R} \cdot \frac{\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\rho}\eta_{\mu\sigma}}{\frac{d(d-1)}{R} - (x)_\eta}x^\sigma
\end{aligned}
$$

verschwindet der zweite Term und wir erhalten (2.11).

Den geodätischen Abstand direkt zu berechnen ist schwierig, wir gehen deshalb einen kleinen Umweg. Da der de-Sitter-Raum in einen $(d+1)$-dimensionalen flachen Minkowski-Raum eingebettet ist, verhält sich die Funktion

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{2}\eta_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j) \tag{2.13}$$

wie ein Skalar in x und y und ist außerdem wegen der eindeutigen Beziehung zwischen $(x,y) \to \sigma(x,y)$ eine Funktion des geodätischen Abstandes $\sigma(x,y) = \sigma\big(d_G(x,y)\big)$ im d-dimensionalen (Anti-)de-Sitter Raum. Die Ableitung von $\sigma(x,y)$

$$\partial_\mu \sigma = \frac{\mathrm{d}\sigma(d_G)}{\mathrm{d}d_G}\partial_\mu d_G = \frac{\mathrm{d}\sigma(d_G)}{\mathrm{d}d_G}n_\mu$$

ist daher proportional zu n_μ. Andererseits können wir die Ableitung auch direkt berechnen und bringen dazu σ zunächst in eine einfachere Form

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{1}{2}\eta_{\rho\lambda}(x^\rho - y^\rho)(x^\lambda - y^\lambda) + \frac{1}{2}(x^d - y^d)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left((x)_\eta + (x^d)^2\right) + \frac{1}{2}\left((y)_\eta + (y^d)^2\right) - \eta_{\rho\lambda}x^\rho y^\lambda - x^d y^d \\
&= \frac{d(d-1)}{R} - \eta_{ij}x^i y^j
\end{aligned}
$$

und finden

$$\partial_\mu \sigma = -\eta_{\mu\nu}y^\nu + \eta_{\mu\nu}x^\nu \frac{y^d}{x^d},$$

die partielle Ableitung. Wir erhalten für den Betrag

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}(\partial_\mu\sigma)(\partial_\nu\sigma) &= \left(\eta^{\mu\nu} - \frac{R}{d(d-1)}x^\mu x^\nu\right)\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}\left(-y^\rho + x^\rho\frac{y^d}{x^d}\right)\left(-y^\lambda + x^\lambda\frac{y^d}{x^d}\right)\\
&= (y)_\eta - \frac{R}{d(d-1)}(x,y)_\eta^2 + \left((x)_\eta\left(\frac{y^d}{x^d}\right)^2 - 2(x,y)_\eta\frac{y^d}{x^d}\right)\underbrace{\left(1 - \frac{R}{d(d-1)}(x)_\eta\right)}_{=\frac{R}{d(d-1)}(x^d)^2}\\
&= \frac{d(d-1)}{R} - (y^d)^2 + \frac{R}{d(d-1)}(x)_\eta(y^d)^2 - \frac{R}{d(d-1)}\left((x,y)_\eta^2 + 2(x,y)_\eta x^d y^d\right)\\
&= \frac{d(d-1)}{R} - \frac{R}{d(d-1)}\left((x,y)_\eta^2 + 2(x,y)_\eta x^d y^d + (x^d y^d)^2\right)\\
&= \frac{d(d-1)}{R}\left(1 - \frac{R^2}{d^2(d-1)^2}\left((x,y)_\eta + x^d y^d\right)^2\right)\\
&= \underbrace{\frac{d(d-1)}{R}\left(1 - \frac{R}{d(d-1)}\eta_{ij}x^i y^j\right)}_{=\sigma}\left(1 + \underbrace{\frac{R}{d(d-1)}\eta_{kl}x^k y^l}_{=1-\frac{R}{d(d-1)}\sigma}\right)\\
&= \sigma\left(2 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma\right)
\end{aligned}$$

wieder einen geometrischen, also koordinatenunabhängigen, Ausdruck. Daraus bilden wir nun

$$\sigma\left(2 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma\right) = g^{\mu\nu}(\partial_\mu\sigma)(\partial_\nu\sigma) = g^{\mu\nu}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}d_G}\right)^2 n_\mu n_\nu = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}d_G}\right)^2,$$

eine Differentialgleichung für $\sigma = \sigma(d_G)$. Da σ mit steigendem d_G ebenfalls wächst und $0 = \sigma(x,x) = \sigma\big(d_G(x,x) = 0\big)$ gilt, können wir die Wurzel ziehen. Durch weitere Umformungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
d_G(\sigma) &= \int_0^\sigma \frac{\mathrm{d}d_G(\sigma')}{\mathrm{d}\sigma'}\mathrm{d}\sigma' = \int_0^\sigma \frac{\mathrm{d}\sigma'}{\sqrt{\sigma'(2 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma')}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{d(d-1)}}}\cdot\int_0^\sigma \frac{\frac{R}{d(d-1)}\mathrm{d}\sigma'}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{d(d-1)}\sigma' - 1\right)^2}}\\
&= \sqrt{\frac{d(d-1)}{R}}\left[\arcsin\left(\frac{R}{d(d-1)}\sigma' - 1\right)\right]_{\sigma'=0}^{\sigma}\\
&= \sqrt{\frac{d(d-1)}{R}}\left[\arcsin\left(\frac{R}{d(d-1)}\sigma - 1\right) + \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

und durch Umstellen

$$\sigma(d_G) = \frac{d(d-1)}{R}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{R}{d(d-1)}}d_G\right)\right],$$

σ als Funktion von d_G. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass für negative Krümmungen

$$\sigma(d_G) = \frac{d(d-1)}{|R|}\left[\cosh\left(\sqrt{\frac{|R|}{d(d-1)}}d_G\right) - 1\right]$$

gilt.

Generell muss für negative Krümmungen R durch $-|R|$ ersetzt werden und damit zum Beispiel $\sqrt{R}$ durch $\mathrm{i}\sqrt{|R|}$. Außerdem muss für imaginäre geodätische Abstände $d_G = \mathrm{i}\,|d_G|$ berücksichtigt werden. Dieses Ergebnis ist konsistent mit [13] Abschnitt 2.3, leider befindet sich dort kein Beweis, sodass wir selbst einen geführt haben.

Für unsere Rechnungen werden wir auch die zweiten Ableitungen von σ

$$\begin{aligned}
D_\mu D_\nu \sigma &= D_\mu \partial_\nu \sigma = \partial_\mu \partial_\nu \sigma - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho \sigma \\
&= \partial_\mu \eta_{\nu\rho}\left(-y^\rho + x^\rho \frac{y^d}{x^d}\right) - \frac{R}{d(d-1)} g_{\mu\nu} x^\rho \eta_{\rho\lambda}\left(-y^\lambda + x^\lambda \frac{y^d}{x^d}\right) \\
&= \underbrace{\eta_{\mu\nu}\frac{y^d}{x^d} + \frac{\eta_{\mu\lambda}x^\lambda \eta_{\nu\rho}x^\rho}{(x^d)^2}\frac{y^d}{x^d}}_{=g_{\mu\nu}\frac{y^d}{x^d}} + \frac{R}{d(d-1)} g_{\mu\nu}(x,y)_\eta - \underbrace{\frac{R}{d(d-1)}(x)_\eta}_{=1-\frac{R}{d(d-1)}(x^d)^2} g_{\mu\nu}\frac{y^d}{x^d} \\
&= g_{\mu\nu}\frac{R}{d(d-1)}\left((x,y)_\eta + x^d y^d\right) \\
&= g_{\mu\nu}\left(1 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma\right)
\end{aligned}$$

benötigen. Damit können wir noch eine wichtige Eigenschaft von n_μ zeigen. Wir erhalten mit $n_\mu = \partial_\mu\sigma \big/ \sqrt{\sigma\left(2 - \left(R/d(d-1)\right)\sigma\right)}$

$$\begin{aligned}
D_\mu n_\nu &= D_\mu \frac{\partial_\nu \sigma}{\sqrt{\sigma\left(2 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma\right)}} = \frac{1 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma}{\sqrt{\sigma\left(2 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma\right)}}\left(g_{\mu\nu} - \frac{(\partial_\mu\sigma)(\partial_\nu\sigma)}{\sigma\left(2 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma\right)}\right) \\
&= \frac{1 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma}{\sqrt{\sigma\left(2 - \frac{R}{d(d-1)}\sigma\right)}}\left(g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu\right).
\end{aligned}$$

Den Vorfaktor definieren wir als $A(d_G)$ und führen die Abkürzung $\kappa = \sqrt{\frac{R}{d(d-1)}}$ ein, für negative R wählen wir $\kappa = \mathrm{i}\,|\kappa|$,

$$\begin{aligned}
A(d_G) &= \frac{1 - \kappa^2\sigma}{\sqrt{\sigma\left(2 - \kappa^2\sigma\right)}} = \kappa \cdot \frac{\cos(\kappa d_G)}{\sqrt{\left(1 - \cos(\kappa d_G)\right)\left(1 + \cos(\kappa d_G)\right)}} \\
&= \kappa \cot(\kappa d_G)\,.
\end{aligned}$$

Dann finden wir

$$D_\mu D_\nu d_G = D_\mu n_\nu = A(d_G)\big(g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu\big),$$

ein bereits aus [1] Gleichung (1.7) bekanntes Ergebnis.

3 Fermionen

In der Literatur wird sehr oft als Ausgangspunkt für die Beschreibung von Fermionen in gekrümmten Räumen die Clifford-Algebra (CA) im flachen Raum

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\eta_{ab}\mathrm{I}$$

gewählt, I ist das Einselement im Spinorraum. Diese Algebra entsteht aus der Bedingung, dass die Spinoren $\psi(x)$ neben der Dirac-Gleichung des Minkowski-Raumes

$$\gamma^a \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^a} - m\psi(x) = 0$$

auch die Klein-Gordon-Gleichung

$$\eta^{ab}\partial_a\partial_b\psi(x) - m^2\psi(x) = 0$$

erfüllen sollen. Die Klein-Gordon-Gleichung entspricht der speziell relativistischen Energiebilanz $p^\mu p_\mu = -m^2$ für Spinoren ψ ohne *Ladung*, dabei ist p_μ der Viererimpuls von ψ. Ausgehend von der CA wird nun postuliert, dass im gekrümmten Raum die Minkowski-Metrik durch die Metrik des gekrümmten Raumes ersetzt werden muss. In einigen Arbeiten wird zusätzlich gefordert, dass die kovariante Ableitung der Gamma-Matrizen verschwindet, analog zur partiellen Ableitung der Gamma-Matrizen im Flachen. Es ist klar, dass die partiellen Ableitungen durch kovariante ersetzt werden müssen, die auch die Spinorstruktur und die zugehörigen Symmetrien berücksichtigen.

Wir merken aber noch an, dass die Ersetzung der Minkowski-Metrik durch die Raumzeit-Metrik nicht die einzig *sinnvolle* Vorgehensweise ist, beispielsweise könnten wir auch einen Term proportional zum Ricci-Tensor dazu nehmen. Außerdem lässt die CA es zu, dass die kovariante Ableitung der Gamma-Matrizen nicht verschwindet. Solche Ansätze verdienen es, auch beachtet zu werden, jedoch diskutieren wir sie in dieser Arbeit nicht.

Im Sinne der ART wählen wir hier einen etwas anderen Zugang zur Beschreibung der Spinoren. Wir leiten aus den Bestimmungsgleichungen im flachen Raum die einfachsten kovarianten Fortsetzungen im gekrümmten Raum ab

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \gamma^\mu\nabla_\mu\psi(x) - m\psi(x) = 0 \\ &\text{(ii)} \quad g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi(x) + f(R_{\mu\nu\rho\lambda})\psi(x) - m^2\psi(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

und betrachten diese als neuen fundamentalen Ausgangspunkt. Auf diese Weise wird der *richtige* Flach-Raum-Limes explizit in die Theorie eingebaut. Die kovarianten Ableitungen ∇_μ müssen wir noch unter den auftretenden Symmetrien und entsprechend den Bedingungen der Konsistenz von (i) und (ii) konstruieren. Dabei werden wir die Deutung von (ii) als eine Energiebilanz aufgeben müssen, da in der ART die Gleichung $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ mit dem Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ an die Stelle der recht einfachen Energiebilanz der speziellen Relativitätstheorie tritt. So könnte das Ziel weiterer Arbeiten sein, eine *korrekte* Energiebilanz mit Hilfe des Energie-Impuls-Tensors aufzustellen und damit neue

Aussagen zu gewinnen. In der vorliegenden Arbeit werden wir aber trotzdem analog zur flachen Theorie fordern, dass eine Lösung von (i) auch eine Lösung von (ii) darstellt, denn (ii) können wir alternativ als eine Wellengleichung für ein Skalarfeld ohne *Ladung* lesen, die auf einen Spinor ψ angewendet wird.

Weiterhin haben wir zu berücksichtigen, dass Terme auftreten können, die im Flachen verschwinden. Daher fügen wir eine beliebige, möglicherweise spinorwertige, Funktion $f(R_{\mu\nu\rho\lambda})$ vom Krümmungstensor hinzu. Wenn wir für die Spinoren eine Ladung q mit zugehöriger Feldstärke $F_{\mu\nu}$ erlauben, dann ist f auch eine Funktion von $F_{\mu\nu}$ und es sollten alle im Flachen auftretenden echt spinorwertigen Terme mit einer Ladung behaftet sein, damit diese für das skalare Wellenfeld ohne Ladung verschwinden.

Zur Sicherstellung der Konsistenz von (i) und (ii)

$$\begin{aligned}
0 &= (\gamma^\mu \nabla_\mu + m)(\gamma^\nu \nabla_\nu - m)\psi(x) \\
&= \big(\gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu + \gamma^\mu (\nabla_\mu \gamma^\nu)\nabla_\nu - m^2\big)\psi(x) \\
&= \frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\nabla_\mu \nabla_\nu \psi(x) + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\nabla_\mu \nabla_\nu \psi(x) - m^2\psi(x) + \gamma^\mu(\nabla_\mu \gamma^\nu)\nabla_\nu \psi(x) \\
&\overset{!}{=} g^{\mu\nu}\nabla_\mu \nabla_\nu \psi(x) + f(R_{\mu\nu\rho\lambda}, F_{\mu\nu})\psi(x) - m^2\psi(x)
\end{aligned}$$

müssen wir in der CA η_{ab} durch $g_{\mu\nu}$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathrm{I} \tag{3.2}$$

ersetzen. Ein wichtiger Unterschied des gekrümmten Raumes gegenüber dem flachen besteht darin, dass $g_{\mu\nu}$ im Gegensatz zu η_{ab} Nebendiagonalelemente besitzen kann und somit Gamma-Matrizen mit verschiedenen unteren Indizes im Allgemeinen nicht mehr antikommutieren. Man kann aber alternativ zu (3.2) auch

$$\{\gamma_\mu, \gamma^\nu\} = 2\delta_\mu^\nu \mathrm{I}$$

schreiben und damit die Diagonalform wieder herstellen.

Außerdem impliziert die Konsistenz, dass der Term

$$\frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\nabla_\mu \nabla_\nu \psi(x) = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi(x) \overset{!}{=} f(R_{\mu\nu\rho\lambda}, F_{\mu\nu})\psi(x)$$

nur noch eine Funktion des Krümmungstensors $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ und der Feldstärke $F_{\mu\nu}$ sein darf. So wissen wir schon aus der Elektrodynamik im flachen Raum, dass an dieser Stelle ein Term der Struktur $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu}$ stehen kann, wobei $F_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor des elektromagnetischen Feldes ist. Weiterhin muss die kovariante Ableitung der Gamma-Matrizen der Gleichung

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \gamma^\nu = 0 \tag{3.3}$$

genügen, da in (3.1) (ii) keine erste Ableitung von ψ auftritt.

Die CA des gekrümmten Raumes erfordert entsprechend *neue* Gamma-Matrizen. Zur Konstruktion dieser wird üblicherweise der VF herangezogen.

3.1 Vierbein-Formalismus

Der Name „Vierbein“ kommt aus der vierdimensionalen Raumzeit, für beliebige Dimensionen verwendet man auch „Vielbein“, um sich von dem expliziten Verweis auf vier Dimensionen zu lösen. Eine sehr mathematische Zusammenfassung zum Thema VF ist in der Literatur [2] gegeben. In [9] wird der VF verständlicher eingeführt und ist trotz einiger kleinerer Unzulänglichkeiten zum Einstieg besser geeignet.

Wesentliche Gedanken zum VF, die wir hier kurz angeben, entstanden im Rahmen der Auseinandersetzung mit der Einleitung der Arbeit von Weldon [5].

Die Algebra der Gamma-Matrizen im Flachen ist wohlbekannt, daher ist es naheliegend, an jedem Punkt x über eine Koordinatentransformation in lokal inertiale Koordinaten ξ^a das so genannte Vierbein $e_\mu^{\cdot\, a}$ mit

$$e_\mu^{\cdot\, a}(x) = \left.\frac{\partial \xi^a[x](y)}{\partial y^\mu}\right|_{y=x} \tag{3.4}$$

einzuführen. Dabei sind $\xi^a[x](y)$ die Koordinaten des Punktes y im lokal inertialen Koordinatensystem vom Punkt x mit der Eigenschaft

$$\eta^{ab} = g'^{ab}[x](x) = g'^{ab}[x](y)|_{y=x} = \left.\frac{\partial \xi^a[x](y)}{\partial y^\mu}\frac{\partial \xi^b[x](y)}{\partial y^\nu} g^{\mu\nu}(y)\right|_{y=x} . \tag{3.5}$$

Wir verwenden lateinische Indizes vom Anfang des Alphabets, um auf Bein-Indizes, also lokal flache, hinzuweisen sowie griechische für die Raumzeit-Indizes. Bein-Indizes werden mit der Minkowski-Metrik hinauf und herunter gezogen. Von diesen lokalen Koordinaten können wir wieder in unser beliebiges Koordinatensystem mit

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(y)|_{y=x} = \left.\frac{\partial \xi^a[x](y)}{\partial y^\mu}\frac{\partial \xi^b[x](y)}{\partial y^\mu} g'_{ab}[x](y)\right|_{y=x} = e_\mu^{\cdot\, a}(x) e_\nu^{\cdot\, b}(x)\eta_{ab}$$

zurück transformieren. Es ist zu beachten, dass

$$\begin{aligned}
\partial_\mu e_\nu^{\cdot\, a} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(e_\nu^{\cdot\, a}(x^\rho + h^\rho_{(\mu)}) - e_\nu^{\cdot\, a}(x^\rho)\right), \; h^\rho_{(\mu)} = h\delta^\rho_\mu \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\left.\frac{\partial \xi^a[x^\rho + h^\rho_{(\mu)}](y)}{\partial y^\nu}\right|_{y^\lambda = x^\lambda + h^\lambda_{(\mu)}} - \left.\frac{\partial \xi^a[x^\rho](y)}{\partial y^\nu}\right|_{y^\lambda = x^\lambda}\right) \\
&= \left[\frac{\partial^2 \xi^a[x](y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu} + \frac{\partial^2 \xi^a[x](y)}{\partial y^\mu \partial y^\nu}\right]_{y=x} \\
&\neq \left[\frac{\partial^2 \xi^a[x](y)}{\partial x^\nu \partial y^\mu} + \frac{\partial^2 \xi^a[x](y)}{\partial y^\nu \partial y^\mu}\right]_{y=x} = \partial_\nu e_\mu^{\cdot\, a}
\end{aligned}$$

gilt, da im Allgemeinen lokal inertiale Koordinaten an einem Punkt in einem benachbarten Punkt nicht mehr lokal inertial sein werden.

Wenn wir nun einen beliebigen Satz ortsunabhängiger Gamma-Matrizen γ^a aus dem Flachen wählen, so können wir die gesuchten Gamma-Matrizen durch

$$\gamma_\mu(x) = e_{\mu}^{\cdot a}(x)\gamma_a \tag{3.6}$$

darstellen. Diese Matrizen verhalten sich unter Koordinatentransformationen

$$\gamma'_{\mu}(x) = e'^{\cdot a}_{\mu}(x)\gamma_a = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e_{\nu}^{\cdot a}(x)\gamma_a$$

wie Vektoren, da sich die $e_{\mu}^{\cdot a}$ im griechischen Index wie Vektoren verhalten. So erhalten wir beispielsweise mit

$$\begin{aligned}
\gamma'^a\big(\xi[x](x)\big) &= \gamma'^a\big(\xi[x](y)\big)\Big|_{y=x} = \frac{\partial \xi^a[x](y)}{\partial y^\mu}\gamma^\mu(y)\bigg|_{y=x} \\
&= \frac{\partial \xi^a[x](y)}{\partial y^\mu} e^{\mu}_{\cdot b}(y)\gamma^b\bigg|_{y=x} = e_{\mu}^{\cdot a}(x) e^{\mu}_{\cdot b}(x)\gamma^b \\
&= \gamma^a
\end{aligned}$$

einen interessanten Zusammenhang.

Da wir frei in der Wahl des lokal inertialen Koordinatensystems sind, können neben den Koordinatentransformationen auch lokale Poincaré-Transformationen $\big(\Lambda(x), \mathrm{a}(x)\big)^{a}_{\cdot b}$, das sind die Lorentz-Transformationen des d-dimensionalen Raumes, in den lokal inertialen Koordinaten

$$\tilde{\xi}^a[x](y) = \big(\Lambda(x), \mathrm{a}(x)\big)^{a}_{\cdot b}\xi^b[x](y) = \Lambda^{a}_{\cdot b}(x)\xi^b[x](y) + \mathrm{a}^a(x)$$

durchgeführt werden. Für die $\Lambda^{a}_{\cdot b}$ soll die Minkowski-Metrik invariant bleiben, das heißt, es muss

$$\eta^{ab} \stackrel{!}{=} \tilde{g}'^{ab}[x](x) = \tilde{g}'^{ab}[x](y)\Big|_{y=x} = \frac{\partial \tilde{\xi}^a[x](y)}{\partial \xi^c[x](y)} \frac{\partial \tilde{\xi}^b[x](y)}{\partial \xi^d[x](y)} g'^{cd}[x](y)\bigg|_{y=x}$$

gelten. Wir finden mit $\partial_\mu^{(y)} = \frac{\partial}{\partial y^\mu}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{\xi}^a[x](y) &= \partial_\mu^{(y)}\tilde{\xi}^a[x](y)\mathrm{d}y^\mu = \Lambda^{a}_{\cdot b}(x)\partial_\mu^{(y)}\xi^b[x](y)\mathrm{d}y^\mu \\
&= \Lambda^{a}_{\cdot b}(x)\mathrm{d}\xi^b[x](y),
\end{aligned}$$

also muss $\Lambda^{a}_{\cdot b}$

$$\eta^{ab} = \Lambda^{a}_{\cdot c}(x)\Lambda^{b}_{\cdot d}(x)\eta^{cd} \tag{3.7}$$

erfüllen und damit (Λ, a) ein Element der Poincaré-Gruppe

$$\mathrm{i}L = \Big\{(\Lambda, \mathrm{a}) : \mathrm{a} \in \mathbb{R}^d, \Lambda \in GL(\mathbb{R}^d), \Lambda^{a}_{\cdot c}\Lambda^{b}_{\cdot d}\eta^{cd} = \eta^{ab}\Big\} \tag{3.8}$$

sein.

Die $e_\mu^{\cdot a}$ transformieren in den lateinischen Indizes

$$\tilde{e}_\mu^{\cdot a}(x) = \partial_\mu^{(y)}\tilde{\xi}^a[x](y)\Big|_{y=x} = \Lambda^a_{\cdot b}(x)\partial_\mu^{(y)}\xi^b[x](y)\Big|_{y=x} = \Lambda^a_{\cdot b}(x)e_\mu^{\cdot b}(x)$$

genauso wie die ξ^a. Damit ergibt sich für die Gamma-Matrizen

$$\tilde{\gamma}_\mu = \tilde{e}_\mu^{\cdot a}\gamma_a = e_\mu^{\cdot b}\Lambda^a_{\cdot b}\gamma_a = e_\mu^{\cdot b}\tilde{\gamma}_b$$

zunächst kein einfaches Verhalten. Jedoch kann man aus der Gruppentheorie ableiten, dass eine Matrix $\mathcal{S}_{Lor}$ existiert, die

$$\tilde{\gamma}_a = \Lambda^b_{\cdot a}\gamma_b = \mathcal{S}_{Lor}(\Lambda)\,\gamma_a\,\mathcal{S}_{Lor}^{-1}(\Lambda)$$

erfüllt, da aus den Gamma-Matrizen Objekte konstruiert werden können, die eine Darstellung der Poincaré-Algebra bilden.

Um den Zusammenhang zwischen der Poincaré-Transformation und der Darstellung im Spinorraum zu finden, benötigen wir die Lie-Algebra der Poincaré Gruppe, die Poincaré-Algebra. Daher betrachten wir zuerst die Poincaré-Gruppe (3.8) mit den Lorentz-Transformationen $\Lambda^a_{\cdot b}$ und den Lorentz-Boosts a^a, jeweils in d Dimensionen. Es gilt die Transformationsvorschrift

$$x^a \to \tilde{x}^a = (\Lambda, \mathrm{a})^a_{\cdot b} = \Lambda^a_{\cdot b}x^b + \mathrm{a}^a.$$

Mit der Ausführung zweier Poincaré-Transformationen $(\Lambda_{(1)}, \mathrm{a}_{(1)})$ und $(\Lambda_{(2)}, \mathrm{a}_{(2)})$ direkt hintereinander gewinnen wir

$$(\Lambda_{(2)}, \mathrm{a}_{(2)})(\Lambda_{(1)}, \mathrm{a}_{(1)}) = (\Lambda_{(2)}\Lambda_{(1)}, \Lambda_{(2)}a_{(1)} + a_{(2)}),$$

die Gruppenmultiplikation.

Die Poincaré-Algebra wird durch die $d(d-1)/2$ Matrizen $(M_{ab})^c_{\cdot d} = -(M_{ba})^c_{\cdot d}$ und die d Operatoren $(P_a)^b_{\cdot c}$ mit

$$(\Lambda, \mathrm{a})^a_{\cdot b} = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{cd}M_{cd} + \mathrm{i}\mathrm{a}^c P_c\right)^a_{\cdot b}$$

generiert. Dabei ist $\omega^{ab} = \omega^a_{\cdot c}\eta^{cb} = -\omega^{ba}$ durch $\Lambda^a_{\cdot b}$ mit

$$(\Lambda)^a_{\cdot b} = (\mathrm{e}^\omega)^a_{\cdot b}$$

gegeben.

Die Herleitung der Poincaré-Algebra geben wir aus Gründen der Vollständigkeit im Anhang A.1 an.

Wir finden drei Bedingungen

$$
\begin{aligned}
\text{(i)} \quad [M_{ab}, M_{cd}] &= \mathrm{i}\,(\eta_{ac}M_{bd} + \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{ad}M_{bc} - \eta_{bc}M_{ad}) \\
\text{(ii)} \quad [P_a, M_{bc}] &= \mathrm{i}\,(\eta_{ac}P_b - \eta_{ab}P_c) \\
\text{(iii)} \quad [P_a, P_b] &= 0
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

für die Generatoren.

Um nun eine Darstellung $D(M_{ab})$ der M_{ab} im Spinorraum mit Hilfe der Gamma-Matrizen zu konstruieren, verwenden wir die Antisymmetrie in den Indizes und wählen den Ansatz

$$D(M_{ab}) = \alpha[\gamma_a, \gamma_b].$$

Durch Einsetzen in die Algebra unter Verwendung von $[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}$

$$
\begin{aligned}
\big[\alpha[\gamma_a, \gamma_b], \alpha[\gamma_c, \gamma_d]\big] &= \alpha^2\,(\gamma_a[\gamma_b, \gamma_c\gamma_d] - \gamma_a[\gamma_b, \gamma_d\gamma_c] + [\gamma_a, \gamma_c\gamma_d]\gamma_b - [\gamma_a, \gamma_d\gamma_c]\gamma_b \\
&\quad - \gamma_b[\gamma_a, \gamma_c\gamma_d] + \gamma_b[\gamma_a, \gamma_d\gamma_c] - [\gamma_b, \gamma_c\gamma_d]\gamma_a + [\gamma_b, \gamma_d\gamma_c]\gamma_a) \\
&= (4\mathrm{i}\alpha)\mathrm{i}\,(\eta_{ac}\alpha[\gamma_b, \gamma_d] + \eta_{bd}\alpha[\gamma_a, \gamma_c] - \eta_{ad}\alpha[\gamma_b, \gamma_c] + \eta_{bc}\alpha[\gamma_a, \gamma_d])
\end{aligned}
$$

erhalten wir die gesuchte Darstellung

$$D(M_{ab}) = \frac{1}{4\mathrm{i}}[\gamma_a, \gamma_b].$$

Also erwarten wir, dass wir die Lorentz-Transformation als

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{b}_{\cdot\,a}\gamma_b = (\mathrm{e}^{\omega})^{b}_{\cdot\,a}\gamma_b &= \mathcal{S}_{Lor}(\Lambda)\gamma_a\mathcal{S}^{-1}_{Lor}(\Lambda) \text{ mit} \\
\mathcal{S}_{Lor}(\Lambda) &= \exp\left(\frac{1}{8}\omega^{ab}[\gamma_a, \gamma_b]\right)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

parametrisieren können. Den expliziten Beweis führen wir im Anhang A.2.

Damit können wir das Transformationsverhalten der γ_μ

$$
\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_\mu &= e_{\mu}^{\cdot\,a}\Lambda^{b}_{\cdot\,a}\gamma_b = e_{\mu}^{\cdot\,a}\mathcal{S}_{Lor}(\Lambda)\gamma_a\mathcal{S}^{-1}_{Lor}(\Lambda) \\
&= \mathcal{S}_{Lor}(\Lambda)\gamma_\mu\mathcal{S}^{-1}_{Lor}(\Lambda)
\end{aligned}
$$

bestimmen.

Nun benötigen wir noch das Transformationsverhalten der Spinoren $\psi(x)$. Wir fordern, dass die Dirac-Gleichung (i) von (3.1) invariant unter den auftretenden Transformationen bleibt.

Bei Koordinatentransformationen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
0 = \gamma^\mu\nabla_\mu\psi - m\psi \to 0 = \gamma'^\mu\nabla'_\mu\psi' - m\psi' &= \gamma^\nu\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu}\nabla_\kappa\psi' - m\psi' \\
&= \gamma^\mu\nabla_\mu\psi' - m\psi'.
\end{aligned}
$$

Da Spinoren auch Tensoren bilden sollten und somit noch mögliche Skalierungen oder Ähnliches ausgeschlossen sind, muss sich ψ unter Koordinatentransformationen

$$\psi'(x'^{\mu}) = \psi(x^{\mu})$$

wie ein Skalar verhalten.

Im Flachen folgt mit der Forderung nach Kovarianz in (3.1), dass für die Lorentz-Transformationen

$$\tilde{\psi}(x) = \mathcal{S}_{Lor}(\Lambda)\psi(x)$$

gelten muss. Dieses Verhalten überträgt sich völlig identisch in den gekrümmten Raum. Jedoch können wir hier an jedem Raumpunkt x ein spezielles lokal inertiales Koordinatensystem auswählen. Das bedeutet, dass wir an jedem weiteren Punkt x' eine andere Lorentz-Transformation

$$\tilde{\psi}(x') = \mathcal{S}'_{Lor}(\Lambda)\psi(x')$$

durchführen können, sodass

$$\tilde{\psi}(x) = \mathcal{S}_{Lor}\big(\Lambda(x)\big)\psi(x)$$

für alle Raumpunkte gilt. Daraus folgt aber insbesondere, dass wir für die kovariante Ableitung

$$\mathcal{S}_{Lor}\big(\Lambda(x)\big)\nabla_{\mu}\psi(x) = \big(\widetilde{\nabla_{\mu}\psi}\big)(x) \stackrel{!}{=} \widetilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\psi}(x) = \widetilde{\nabla}_{\mu}\mathcal{S}_{Lor}\big(\Lambda(x)\big)\psi(x)$$

sicherstellen müssen.

Damit haben wir alle wichtigen Ideen des VF zusammen, das sind

die Vierbeine mit

$$\begin{aligned}
e_{\mu}^{\cdot\, a}(x) &= \partial_{\mu}^{(y)}\xi^{a}[x](y)|_{y=x} \\
e'^{\cdot\, a}_{\mu}(x) &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} e_{\nu}^{\cdot\, a}(x) \\
\tilde{e}_{\mu}^{\cdot\, a}(x) &= \Lambda^{a}_{\cdot\, b}(x) e_{\mu}^{\cdot\, a}(x),
\end{aligned}$$

die Gamma-Matrizen mit

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mu}(x) &= e_{\mu}^{\cdot\, a}(x)\gamma_{a} \\
\gamma'_{\mu}(x) &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\gamma_{\nu}(x) \\
\tilde{\gamma}_{\mu}(x) &= \mathcal{S}_{Lor}\big(\Lambda(x)\big)\gamma_{\mu}(x)\mathcal{S}_{Lor}^{-1}\big(\Lambda(x)\big)
\end{aligned}$$

sowie die Spinoren ψ mit

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{i}\gamma^{\mu}(x)\nabla_{\mu}\psi(x) - m\psi(x) \\ \psi'(x) &= \psi'(x'\mu) = \psi(x^{\mu}) = \psi(x) \\ \tilde{\psi}(x) &= \mathcal{S}_{Lor}\big(\Lambda(x)\big)\psi(x). \end{aligned}$$

Aus diesen Symmetrien müssen wir nun die kovariante Ableitung konstruieren, jedoch wird diese als Spezialfall im WF enthalten sein.

3.2 Weldon-Formalismus

Wir werden jetzt die erweiterten Symmetrien und damit die neue Sichtweise von A. Weldon kennen lernen, um dann in diesem Formalismus die kovariante Ableitung zu bestimmen. Die folgende Diskussion wird an einigen Stellen explizit in zwei, drei oder vier Dimensionen geführt, da die Dimension der Gamma-Matrizen $d_\gamma \times d_\gamma$ in der irreduziblen Darstellung von der Dimension des Raumes d über $d_\gamma = 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ abhängt und damit die Basis der CA, ausgedrückt durch die Gamma-Matrizen, unterschiedlich ist. Daher sind einige der Beweise für beliebige Dimensionen sehr schwierig oder möglicherweise gar nicht durchführbar. Wir wählen $d = 2$ als einfachsten nicht trivialen Fall, $d = 3$ in der Anwendung des WF, insbesondere im Hinblick auf die Anwendung in Graphenstrukturen und $d = 4$, da das Paper [5] von A. Weldon explizit in vier Dimensionen geschrieben ist und dem üblichen Fall von drei räumlichen und einer zeitlichen Komponente in der uns vertrauten Raumzeit gleicht.

A. Weldon geht in seiner Arbeit etwas anders vor als wir, einige seiner Schritte werden anders motiviert und auch die Spin-Metrik führt er auf anderem Wege ein. Die Gründe liegen einerseits in dem Zugang, den wir über die Dirac- und Klein-Gordon-Gleichung gewählt haben, andererseits in für unsere Zwecke geeigneteren Konventionen.

Zunächst motivieren wir ausgehend vom VF, warum es sinnvoll sein kann, eine verallgemeinerte Symmetrie heranzuziehen. Am auffälligsten im VF ist, dass an jedem Punkt ein spezielles Koordinatensystem ausgezeichnet werden muss, um das Vierbein $e_{\mu}^{\cdot a}$ zu definieren. Diese Vorgehensweise scheint aber nicht zu dem Grundsatz der Gleichwertigkeit aller Koordinatensysteme zu passen, es wirkt viel mehr so, als würde man in der Elektrodynamik immer in einer speziellen Eichung rechnen.

Zusätzlich zeigt sich, wenn wir die Determinante von $e^{\mu}_{\cdot a}$

$$\det{}^{(a)}_{(\mu)} e^{\mu}_{\cdot a} = \sqrt{-\left(\det{}^{(a)}_{(\mu)} e^{\mu}_{\cdot a}\right)^2 \cdot \det{}_{(bc)}\eta^{bc}} = \sqrt{-\det{}_{(\mu\nu)}\left(e^{\mu}_{\cdot a}\eta^{ab}e^{\nu}_{\cdot b}\right)} = \sqrt{-\det{}_{(\mu\nu)} g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\mathcal{M}}$$

berechnen, dass die in geraden Dimensionen für die Basis der CA notwendige Matrix γ_* mit

$$\gamma_* = \frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_d} \tag{3.11}$$

im VF durch

$$
\begin{aligned}
\gamma_* &= \mathrm{i}(-\mathrm{i})^{d/2}\frac{\mathcal{M}}{d!}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_d}e^{\mu_1}_{\cdot\, a_1}\dots e^{\mu_d}_{\cdot\, a_d}\gamma^{a_1}\dots\gamma^{a_d} \\
&= \mathrm{i}(-\mathrm{i})^{d/2}\frac{\mathcal{M}}{d!}\det{}^{(a)}_{(\mu)}\left(e^{\mu}_{\cdot\, a}\right)\varepsilon_{a_1\dots a_d}\gamma^{a_1}\dots\gamma^{a_d} \\
&= \mathrm{i}(-\mathrm{i})^{d/2}\frac{1}{d!}\varepsilon_{a_1\dots a_d}\gamma^{a_1}\dots\gamma^{a_d} \\
&= \mathrm{i}(-\mathrm{i})^{d/2}\gamma^{(0)}\dots\gamma^{(d\,-\,1)}
\end{aligned}
$$

die Matrix $\gamma_{(*)}$ des flachen Raumes gegeben und damit von x unabhängig ist.

Weiterhin fällt es auf, dass die CA (3.2) nicht nur bezüglich der Lorentz-Transformationen, sondern bezüglich aller Transformationen $\mathcal{S}(x) \in GL(d_\gamma, \mathbb{C})$

$$
\begin{aligned}
2g_{\mu\nu}\mathrm{I} &= \mathcal{S}(x)2g_{\mu\nu}\mathcal{S}^{-1}(x) = \mathcal{S}(x)\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}\mathcal{S}^{-1}(x) \\
&= \{\tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_\nu\}, \text{ mit } \tilde{\gamma}_\mu = \mathcal{S}(x)\gamma_\mu\mathcal{S}^{-1}(x)
\end{aligned}
$$

invariant ist.

Mit diesem Wissen erkennen wir auch, dass der VF dem Ansatz

$$\gamma_\mu(x) = e_\mu^{\cdot\, a}(x)\gamma_a \tag{3.12}$$

mit zu bestimmenden Funktionen $e_\mu^{\cdot\, a}$ entspricht. Denn so folgt aus der CA (3.2)

$$
\begin{aligned}
2g_{\mu\nu}\mathrm{I} &= \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = e_\mu^{\cdot\, a}e_\nu^{\cdot\, b}\{\gamma_a, \gamma_b\} \\
\Rightarrow g_{\mu\nu} &= e_\mu^{\cdot\, a}e_\nu^{\cdot\, b}\eta_{ab}
\end{aligned}
$$

sofort, dass die $e_\mu^{\cdot\, a}$ die oben beschriebenen Vierbeine sind. Der Ansatz (3.12) ist jedoch ein sehr spezieller, denn um jede denkbare Form der Gamma-Matrizen zuzulassen, müsste man eine vollständige Basis der CA ansetzen, also auch Kommutatoren der Gamma-Matrizen. Würde man dies jedoch erlauben, wären die Betrachtungen des VF nicht mehr ausreichend, sodass ein allgemeineres Konzept notwendig wird.

3.2.1 Erweiterung der Symmetrie – kovariante Ableitung

Obige Auffälligkeiten nehmen wir zum Anlass, die Symmetrie bezüglich der Lorentz-Transformationen zu erweitern. Im WF gehen wir ebenfalls von der CA (3.2) aus und geben uns einen beliebigen Satz Gamma-Matrizen vor. Dieser Satz kann beispielsweise mit Hilfe des VF gefunden werden. Wir lassen hier ebenfalls Koordinatentransformationen gemäß

$$
\begin{aligned}
\gamma'_\mu(x) &= \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\gamma_\nu(x) \\
\psi'(x) &= \psi(x)
\end{aligned}
$$

zu, um die relativistische Kovarianz zu sichern.

Bei den Lorentz-Transformationen erweitern wir die Transformationsgruppe auf die gesamte $GL(d_\gamma, \mathbb{C})$ und bilden Transformationen gemäß

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}^\mu(x) &= \mathcal{S}(x)\gamma^\mu(x)\mathcal{S}^{-1}(x)\\ \tilde{\psi}(x) &= \mathcal{S}(x)\psi(x)\end{aligned}$$

für eine Transformationsmatrix $\mathcal{S} \in GL(d_\gamma, \mathbb{C})$, die auch eine Funktion vom Ort sein darf. Diese größere Gruppe von Transformationen nennen wir *Spinbasen-Transformationen.* Da es noch keinen deutschen Namen für diese Transformationen gibt, haben wir den englischen Namen direkt übersetzt. Für spezielle Eigenschaften der Gamma-Matrizen, die wir in den folgenden Rechnungen verwenden werden, verweisen wir auf den Anhang A.3.

Um die Theorie mit den oben genannten Symmetrien aufstellen zu können, benötigen wir Skalare unter Spinbasen-Transformationen und unter Koordinatentransformationen. Die Skalare unter Koordinatentransformationen werden aus Kontraktion der Raumzeitindizes über die Metrik $g_{\mu\nu}$ erzeugt. Skalare unter Spinbasen-Transformationen gewinnen wir analog durch Kontraktion der Spinorindizes. Wir benötigen also ko- und kontravariante Spinoren sowie eine zugehörige *Spin-Metrik h*. Während die Raumzeit-Metrik direkt zwischen ko- und kontravarianten Vektoren vermittelt, sollte die Spin-Metrik auch die komplexwertige Natur der Spinoren berücksichtigen. Daher klären wir zuerst die Indexstruktur der Spinoren.

Wir bezeichnen mit ψ^I die I-te Komponente des Spinors ψ. Dieser verhält sich unter Spinbasen-Transformationen

$$\psi^I \to \tilde{\psi}^I = (\mathcal{S}\psi)^I = \mathcal{S}^I_{\cdot J}\psi^J$$

wie ein kontravarianter (oben indizierter) Spinor. Kovariante Indizes (untere) transformieren in diesem Sinne mit $\mathcal{S}^{-1}$. Die Gamma-Matrizen indizieren wir dann mit $(\gamma^\mu)^I_{\cdot J}$, sodass das Produkt eines Spinors mit einer Gamma-Matrix

$$(\gamma^\mu\psi)^I = (\gamma^\mu)^I_{\cdot J}\psi^J$$

ist und sich mit dem Transformationsverhalten unter Spinbasen-Transformationen

$$(\widetilde{\gamma^\mu\psi}) = \tilde{\gamma}^\mu\tilde{\psi} = \mathcal{S}\gamma^\mu\psi$$

verträgt, also dass $\gamma^\mu\psi$ sich wieder wie ein Spinor verhält und γ^μ ein Spin-Tensor zweiter Stufe mit einem kovarianten und einem kontravarianten Index ist.

Zur Konstruktion eines Skalar benötigen wir, neben dem kontravarianten Spinor ψ, einen kovarianten Spinor, der sich mit der Matrix $\mathcal{S}^{-1}$ transformiert. Dieser kovariante Spinor sollte unabhängig von ψ sein, sodass wir $\psi^\dagger$ mit den Komponenten $(\psi^\dagger)_{\dot{I}} = (\psi^I)^*$ und dem Transformationsverhalten

$$\psi^\dagger \to \tilde{\psi}^\dagger = (\mathcal{S}\psi)^\dagger = \psi^\dagger\mathcal{S}^\dagger$$

heranziehen. Mit $*$ kennzeichnen wir die komplexe Konjugation. Wir sehen am Transformationsverhalten, dass $\psi^\dagger$ sich nicht wie ein kovarianter Spinor verhält, daher setzen wir einen Punkt über den Index und führen die Spinmetrik h über

$$\psi^\dagger h \psi = (\psi^\dagger)_{\dot{I}} h^{\dot{I}}_{\cdot J} \psi^J \to \tilde{\psi}^\dagger \tilde{h} \tilde{\psi} \stackrel{!}{=} \psi^\dagger h \psi \tag{3.13}$$

ein. So finden wir das Transformationsverhalten von h

$$h \to \tilde{h} = (\mathcal{S}^\dagger)^{-1} h \mathcal{S}^{-1}.$$

Wir definieren in Analogie zum flachen Raum und zum VF

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger h, \tag{3.14}$$

den Dirac-konjugierten Spinor $\bar{\psi}$ mit den Komponenten $\bar{\psi}_I = (\psi^\dagger)_{\dot{J}} h^{\dot{J}}_{\cdot I}$. Dieser Spinor ist nun nach Konstruktion ein kovarianter. Wie wir h im konkreten Fall erhalten, werden wir später aus Eigenschaften der Gamma-Matrizen ableiten.

Weiterhin benötigen wir eine kovariante Ableitung ∇_μ, die wir ähnlich zur ART einführen. Entsprechend den Bedingungen der ART (vgl. Kapitel 2.1)

(i) Linearität: $D_\mu(T_1^\nu + T_2^\nu) = D_\mu T_1^\nu + D_\mu T_2^\nu$

(ii) Gültigkeit der Produktregel: $D_\mu(T_1^\nu T_2^\rho) = (D_\mu T_1^\nu) T_2^\rho + T_1^\nu (D_\mu T_2^\rho)$

(iii) Erhaltung der Indexstruktur: $D_\mu T_\nu = (D_\mu T^\rho) g_{\rho\nu}$

(iv) Torsionsfreiheit: $D_\mu T_\nu - D_\nu T_\mu = \partial_\mu T_\nu - \partial_\nu T_\mu$,

fordern wir hier die angepassten *natürlichen* Bedingungen

(i) Linearität: $\big(\nabla_\mu(\psi_1 + \psi_2)\big)^I = (\nabla_\mu \psi_1)^I + (\nabla_\mu \psi_2)^I$

(ii) Gültigkeit der Produktregel: $\big(\nabla_\mu(\psi\bar{\psi})\big)^I_{\cdot J} = (\nabla_\mu \psi)^I \bar{\psi}_J + \psi^I (\nabla_\mu \bar{\psi})_J$

(iii) Erhaltung der Indexstruktur: $(\nabla_\mu \bar{\psi})_I = (\overline{\nabla_\mu \psi})_I$

(iv) Sicherstellung von (ii) aus (3.1): $\gamma^\mu \nabla_\mu \gamma^\nu = 0$

(v) Hermitezität: $(\nabla_\mu \psi^\dagger)_{\dot{I}} = (\nabla_\mu \psi)^\dagger_{\dot{I}}$.

(3.15)

Die Torsionsfreiheit haben wir ersetzt, da wir die Torsion in der Raumzeit bereits durch D_μ ausschließen. Am Anfang des Kapitels haben wir gezeigt, dass die kovariante Ableitung der Gamma-Matrizen (iv) erfüllen soll, um nicht nur die Dirac-Gleichung zu sichern, sondern auch die Klein-Gordon-Gleichung des gekrümmten Raumes. Außerdem müssen wir überprüfen, ob $\gamma^\mu\gamma^\nu[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ so vom Krümmungstensor abhängt, dass der Anteil proportional zur I im Flachen verschwindet und ob wir den echt spinorwertigen Anteilen eine *Ladung* verleihen können. Zudem haben wir noch eine zusätzliche Bedingung explizit formuliert, die in der ART stillschweigend vorausgesetzt wird. Dort arbeiten wir nur mit reellen Feldern und konstruieren am Ende reelle Wirkungen, um reelle Energien sicherzustellen. Da wir hier aber komplexe Zahlen und sogar Graßmann-wertige Objekte vorliegen haben, müssen wir die Hermitezität explizit verlangen, um am Ende auch wieder reelle Wirkungen zu erhalten. Wir können Bedingung (v) auch als Spezialfall von (iii) deuten, dabei gilt die Erhaltung der Indexstruktur jedoch für die gepunkteten Indizes. Zusätzlich setzen wir voraus, dass sich ∇_μ wie ein Tensor verhält und dass $\nabla_\mu = D_\mu \mathrm{I}$ für nicht spinorwertige Objekte gilt.

Nun gilt es, aus diesen Axiomen die kovariante Ableitung zu konstruieren. Es ist klar, dass wir für jedes der unterschiedlich transformierenden Objekte $\psi, \bar{\psi}, h$ und $\psi\bar{\psi}$ eine andere kovariante Ableitung benötigen, um die Kovarianz sicherzustellen. Wir betrachten zuerst das Produkt $\bar{\psi}\psi$. Da dieses nach Konstruktion ein Skalar unter Spinbasen-Transformationen ist, bilden wir mit Hilfe der Produktregel

$$\begin{aligned}(\nabla_\mu\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(\nabla_\mu\psi) = \nabla_\mu\bar{\psi}\psi = D_\mu\bar{\psi}\psi = (D_\mu\bar{\psi})\psi + \bar{\psi}(D_\mu\psi)\\ \Rightarrow \bar{\psi}(\nabla_\mu\psi - D_\mu\psi) = (D_\mu\bar{\psi} - \nabla_\mu\bar{\psi})\psi\end{aligned}$$

eine Gleichung, die aufgrund der Unabhängigkeit von $\bar{\psi}$ und ψ impliziert, dass

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\psi &= D_\mu\psi + \Gamma_\mu\psi\\ \nabla_\mu\bar{\psi} &= D_\mu\bar{\psi} - \bar{\psi}\Gamma_\mu\end{aligned} \tag{3.16}$$

gelten muss. Dabei ist Γ_μ der Spin-Zusammenhang, der die Kovarianz sichert, daher muss er sich im griechischen Index wie ein Vektor verhalten. In den lateinischen Spinorindizes darf er keinen Spin-Tensor bilden, sollte aber eine echte Spinorwertigkeit aufweisen, also nicht proportional zu I sein. Da die Spinoren ψ Skalare unter Koordinatentransformationen sind, gilt $D_\mu\psi = \partial_\mu\psi$. Das Transformationsverhalten von Γ_μ unter Spinbasen-Transformationen finden wir mit der Bedingung für die Kovarianz

$$\begin{aligned}\mathcal{S}D_\mu\psi + \mathcal{S}\Gamma_\mu\psi = \mathcal{S}\nabla_\mu\psi = \widetilde{\nabla_\mu\psi} = \tilde{\nabla}_\mu\tilde{\psi} &= D_\mu\mathcal{S}\psi + \tilde{\Gamma}_\mu\mathcal{S}\psi\\ &= \mathcal{S}D_\mu\psi + (\partial_\mu\mathcal{S})\psi + \tilde{\Gamma}_\mu\mathcal{S}\psi\end{aligned}$$

und mit der Gültigkeit für alle Spinoren ψ zu

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_\mu &= \mathcal{S}\Gamma_\mu\mathcal{S}^{-1} - (\partial_\mu\mathcal{S})\mathcal{S}^{-1}\\ &= \mathcal{S}\big(\Gamma_\mu + (\partial_\mu\mathcal{S}^{-1})\mathcal{S}\big)\mathcal{S}^{-1}.\end{aligned}$$

Die konkrete Gestalt des Spin-Zusammenhangs werden wir im Wesentlichen aus der Bedingung $\gamma^\mu\nabla_\mu\gamma^\nu = 0$ konstruieren. Daher betrachten wir als Nächstes die kovariante Ableitung von Spin-Tensoren, wie $\psi\bar{\psi}$ oder γ^μ. Erneut unter Verwendung der Produktregel finden wir

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\psi\bar{\psi} &= (\nabla_\mu\psi)\bar{\psi} + \psi(\nabla_\mu\bar{\psi}) = (D_\mu\psi)\bar{\psi} + \psi(D_\mu\bar{\psi}) + \Gamma_\mu\psi\bar{\psi} - \psi\bar{\psi}\Gamma_\mu\\ &= D_\mu\psi\bar{\psi} + [\Gamma_\mu, \psi\bar{\psi}],\end{aligned}$$

die kovariante Ableitung eines Spin-Tensors.

Um dies auf die Gamma-Matrizen anwenden zu können, benötigen wir zuerst noch ein Theorem, das wir „Weldon-Theorem“ nennen, da es für den WF sehr bedeutsam ist und nach dem Kenntnisstand des Autors dieser Arbeit noch keinen Namen besitzt.

$$\textbf{Weldon-Theorem:} \quad \Delta\gamma^\mu = \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})\gamma_\nu - [M,\gamma^\mu], \quad \mathrm{tr}\, M = 0, \quad \text{vgl. [5]} \tag{3.17}$$

Es beschreibt die erlaubten infinitesimalen Variationen $\Delta\gamma^\mu$ der Gamma-Matrizen bei infinitesimaler Variation der Metrik $\Delta g^{\mu\nu}$ innerhalb der CA. Unter Vorgabe der $\Delta\gamma^\mu$ kann auf eindeutige Weise auf die Variation $\Delta g^{\mu\nu}$ der Metrik und die infinitesimale und spurlose Matrix M geschlossen werden. Daher ist die Abbildung

$$\Delta\gamma^\nu \leftrightarrow \Delta g^{\mu\nu}, M$$

bijektiv. Es ist, wenn es überhaupt möglich ist, sehr schwierig, dieses Theorem für beliebige Dimensionen zu beweisen. Lediglich für zwei, drei und vier Dimensionen ist der Beweis im Anhang B.1 geführt, daher beschränken wir uns darauf im Folgenden. Außerdem benutzen wir im Beweis, dass wir in der irreduziblen Darstellung sind, daher gilt von nun an stets $d_\gamma = 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$.

Mit Hilfe des Weldon-Theorems können wir $D_\mu\gamma^\nu$ in eine Form bringen, mit der wir dann sehr leicht die Bedingung (iv) der kovarianten Ableitung (3.15) einarbeiten können. Wir variieren die Metrik bezüglich der Koordinatendifferentiale $\mathrm{d}x^\mu$ und verwenden (2.5)

$$\Delta g^{\nu\lambda} = (\partial_\mu g^{\nu\lambda})\mathrm{d}x^\mu = -(\Gamma^\nu_{\mu\kappa} g^{\kappa\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} g^{\nu\kappa})\mathrm{d}x^\mu.$$

Analog dazu drücken wir die Variation der Gamma-Matrizen

$$\Delta\gamma^\nu = (\partial_\mu\gamma^\nu)\mathrm{d}x^\mu$$

und die Matrix M

$$M = M_\mu \mathrm{d}x^\mu$$

ebenfalls durch die Koordinatendifferentiale aus und setzen dies in das Weldon-Theorem ein, um

$$\begin{aligned}
(\partial_\mu\gamma^\nu)\mathrm{d}x^\mu = \Delta\gamma^\nu &= -\frac{1}{2}(\Gamma^\nu_{\mu\kappa} g^{\kappa\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} g^{\nu\kappa})\gamma_\lambda \mathrm{d}x^\mu - [M_\mu,\gamma^\nu]\mathrm{d}x^\mu \\
\Rightarrow (D_\mu\gamma^\nu)\mathrm{d}x^\mu = (\partial_\mu\gamma^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\gamma^\lambda)\mathrm{d}x^\mu &= \frac{1}{2}(\Gamma^\nu_{\mu\kappa} g^{\kappa\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} g^{\nu\kappa})\gamma_\lambda \mathrm{d}x^\mu - [M_\mu,\gamma^\nu]\mathrm{d}x^\mu \\
&= -\frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}(g^{\beta\nu}\gamma_\alpha - \delta^\nu_\alpha\gamma^\beta)\mathrm{d}x^\mu - [M_\mu,\gamma^\nu]\mathrm{d}x^\mu \\
&= -\frac{1}{8}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}\big[[\gamma_\alpha,\gamma^\beta],\gamma^\nu\big] - [M_\mu,\gamma^\nu]\mathrm{d}x^\mu \\
&= -[\hat{\Gamma}_\mu,\gamma^\nu]\mathrm{d}x^\mu
\end{aligned}$$

zu erhalten. Dabei hängt die explizite Gestalt der Matrizen

$$\hat{\Gamma}_\mu = \frac{1}{8}\Gamma^\alpha_{\mu\beta}[\gamma_\alpha, \gamma^\beta] + M_\mu$$

von der Wahl der Gamma-Matrizen ab, sie ist aber eindeutig, solange wir $\operatorname{tr} M_\mu = 0$ fordern.

Für die kovariante Ableitung der Gamma-Matrizen können wir nun mit $\Delta\Gamma_\mu = \Gamma_\mu - \hat{\Gamma}_\mu$

$$\nabla_\mu \gamma^\nu = D_\mu \gamma^\nu + [\Gamma_\mu, \gamma^\nu] = [\Delta\Gamma_\mu, \gamma^\nu]$$

schreiben. Die Bedingung (iv) aus (3.15) lautet dann

$$0 = \gamma^\mu \nabla_\mu \gamma^\nu = \gamma^\mu [\Delta\Gamma_\mu, \gamma^\nu].$$

Mit weiteren Umformungen, ähnlich denen im Anhang B.1, lässt sich ein zweites Theorem zeigen.

$$\textbf{zweites Theorem:} \quad 0 = \gamma^\mu[\Delta\Gamma_\mu, \gamma^\nu] \quad \Rightarrow \quad \Delta\Gamma_\mu = s_\mu \mathrm{I} \tag{3.18}$$

Dabei ist s_μ eine nicht spinorwertige, aber sonst beliebige Funktion. Den Beweis dieses zweiten Theorems geben wir im Anhang B.2.

Wenn $\Delta\Gamma_\mu$ aber proportional zur I ist, dann muss die kovariante Ableitung der Gamma-Matrizen verschwinden, $\nabla_\mu \gamma^\nu = 0$. Das bedeutet im Umkehrschluss, dass wir die Γ_μ bis auf den Anteil proportional zur I aus den Gamma-Matrizen konstruieren können. Wir betrachten dazu

$$[\Gamma_\mu, \gamma^\nu] = -D_\mu \gamma^\nu$$

und können mit der Parametrisierung

$$\Gamma_\mu = \begin{cases} s_\mu \mathrm{I} + p_\mu \gamma_* + v_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma_\alpha & , d=2 \\ s_\mu \mathrm{I} + v_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma_\alpha & , d=3 \\ s_\mu \mathrm{I} + p_\mu \gamma_* + v_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma_\alpha + a_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma_\alpha\gamma_* + t_\mu^{\cdot\,\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta],\ t_\mu^{\cdot\,\alpha\beta} = t_\mu^{\cdot\,[\alpha\beta]} & , d=4 \end{cases}$$

die Koeffizienten aus

$$\begin{aligned} d=2:&\quad [\Gamma_\mu, \gamma^\kappa] = p_\mu[\gamma_*, \gamma^\kappa] + v_\mu^{\cdot\,\alpha}[\gamma_\alpha, \gamma^\kappa] = 2p_\mu\gamma_*\gamma^\kappa + v_\mu^{\cdot\,\alpha}[\gamma_\alpha, \gamma^\kappa] \\ d=3:&\quad [\Gamma_\mu, \gamma^\kappa] = v_\mu^{\cdot\,\alpha}[\gamma_\alpha, \gamma^\kappa] \\ d=4:&\quad [\Gamma_\mu, \gamma^\kappa] = p_\mu[\gamma_*, \gamma^\kappa] + v_\mu^{\cdot\,\alpha}[\gamma_\alpha, \gamma^\kappa] + a_\mu^{\cdot\,\alpha}[\gamma_\alpha\gamma_*, \gamma^\kappa] + t_\mu^{\cdot\,\alpha\beta}\big[[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\kappa\big] \\ &\qquad\qquad\quad = 2p_\mu\gamma_*\gamma^\kappa + v_\mu^{\cdot\,\alpha}[\gamma_\alpha, \gamma^\kappa] - 2a_\mu^{\cdot\,\kappa}\gamma_* + 8t_\mu^{\cdot\,\alpha\kappa}\gamma_\alpha, \end{aligned} \tag{3.19}$$

zu

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{1}{2d_\gamma d}\operatorname{tr}(\gamma_*\gamma_\alpha D_\mu\gamma^\alpha) &&= \frac{1}{2d_\gamma d}\operatorname{tr}(\gamma_*\gamma_\alpha D_\mu\gamma^\alpha) &&, d=2,4 \\ v_\mu^{\cdot\,\alpha} &= \frac{1}{4d_\gamma(d-1)}\operatorname{tr}\left([\gamma^\alpha, \gamma_\beta]D_\mu\gamma^\beta\right) &&= \frac{1}{4d_\gamma(d-1)}\operatorname{tr}\left([\gamma^\alpha, \gamma_\beta]D_\mu\gamma^\beta\right) &&, d=2,3,4 \\ a_\mu^{\cdot\,\alpha} &= \frac{1}{2d_\gamma}\operatorname{tr}(\gamma_* D_\mu\gamma^\alpha) &&= \frac{1}{8}\operatorname{tr}(\gamma_*\partial_\mu\gamma^\alpha) &&, d=4 \\ t_\mu^{\cdot\,\alpha\beta} &= -\frac{1}{8d_\gamma}\operatorname{tr}(\gamma^\alpha D_\mu\gamma^\beta) &&= -\frac{1}{32}\operatorname{tr}(\gamma^\alpha\partial_\mu\gamma^\beta) - \frac{1}{8}g^{\alpha\kappa}\Gamma^\beta_{\kappa\mu} &&, d=4 \end{aligned}$$

ablesen. Damit haben wir den Spin-Zusammenhang fast vollständig durch die Gamma-Matrizen bestimmt. Der einzige verbleibende Freiheitsgrad ist die Vektorfunktion s_μ. In geraden Dimensionen können wir aus $\nabla_\mu \gamma^\nu = 0$ auch

$$\nabla_\mu \gamma_* = 0$$

ableiten.

Unsere Aufgabe ist es nun, die letzte wichtige Forderung, (iii) aus (3.15) (die Erhaltung der Indexstruktur), einzuarbeiten. Wir betrachten dazu

$$(\nabla_\mu \psi^\dagger)h + \psi^\dagger \nabla_\mu h = \nabla_\mu \bar{\psi} \stackrel{!}{=} \overline{\nabla_\mu \psi} = (\nabla_\mu \psi)^\dagger h \stackrel{!}{=} (\nabla_\mu \psi^\dagger)h$$

und erkennen, dass die kovariante Ableitung von h

$$\nabla_\mu h = 0$$

verschwinden muss. Da h aber nicht wie ein Spin-Tensor transformiert, müssen wir noch herausfinden, wie die kovariante Ableitung von h überhaupt gebildet wird und was die Konsequenzen des Verschwindens sind.

Die Bildung können wir aus der Untersuchung von

$$\begin{aligned}(D_\mu \psi^\dagger)h + \psi^\dagger(D_\mu h) - \psi^\dagger h \Gamma_\mu = D_\mu(\psi^\dagger h) - \psi^\dagger h \Gamma_\mu = \nabla_\mu \bar{\psi} &= (\nabla_\mu \psi^\dagger)h + \psi^\dagger(\nabla_\mu h) \\ &= (D_\mu \psi^\dagger)h + \psi^\dagger \Gamma_\mu^\dagger h + \psi^\dagger(\nabla_\mu h)\end{aligned}$$

als

$$\nabla_\mu h = D_\mu h - h\Gamma_\mu - \Gamma_\mu^\dagger h \tag{3.20}$$

ablesen. Das Verschwinden der kovarianten Ableitung können wir als

$$\Gamma_\mu^\dagger = (D_\mu h)h^{-1} - h\Gamma_\mu h^{-1}$$

verstehen.

3.2.2 Spin-Metrik

Bisher haben wir nur gesagt, dass wir eine Spin-Metrik h benötigen, aber noch nicht, woher und wie wir sie erhalten. Dazu betrachten wir das Verhalten der Gamma-Matrizen unter hermitescher Konjugation und nehmen erneut das Produkt $\psi\bar{\psi}$ zu Hilfe. Wir erkennen

$$\left(\psi\bar{\psi}\right)^\dagger = h^\dagger \psi \psi^\dagger = h^\dagger \left(\psi\bar{\psi}\right) h^{-1},$$

sodass uns für die Gamma-Matrizen

$$\gamma_\mu^\dagger = h^\dagger \gamma_\mu h^{-1}$$

ein Transformationsverhalten unter hermitescher Konjugation diktiert wird. Wenn wir nun noch berücksichtigen, dass die $\gamma_\mu^\dagger$ auch die CA erfüllen müssen, dann ergibt sich

$$h^\dagger = \begin{cases} \pm h e^{\alpha\gamma_*}, \alpha \in \mathbb{R} & , d = 2 \\ \pm h & , d = 3 \end{cases}. \tag{3.21}$$

Den Beweis dazu führen wir im Anhang C.1. Vermutlich gilt in vier Dimensionen die gleiche Aussage wie in zwei Dimensionen. Falls dies stimmt, dann ist der Beweis dazu sehr schwierig oder trickreich und ist dem Autor bisher nicht gelungen. Aber in jedem Fall erfüllt $h^\dagger = \pm h e^{\alpha\gamma_*}$ die Forderungen und stellt zumindest eine spezielle Lösung für $d = 4$ dar. Wenn die kovariante Ableitung von h verschwindet und somit auch die von $h^\dagger$, dann gilt $0 = \pm\nabla_\mu h^{-1} h^\dagger = \nabla_\mu e^{\alpha\gamma_*}$. Daher muss α konstant sein.

Da die zu konstruierenden Wirkungen reell sein sollen und Produkte der Art $\bar{\psi}\psi$ enthalten werden, fordern wir, dass $\bar{\psi}\psi$ reell ist. Wenn wir diese Forderung explizit ausschreiben

$$\bar{\psi}\psi \stackrel{!}{=} (\bar{\psi}\psi)^* = \psi^{\mathrm{T}} h^* \psi^* = -\psi^\dagger h^\dagger \psi = \bar{\psi} h^{-1}(-h^\dagger)\psi,$$

dann erkennen wir, dass wir h antihermitesch wählen müssen. Also muss der Parameter α verschwinden. Somit wird die Relation

$$\gamma_\nu^\dagger = -h\gamma_\nu h^{-1} \tag{3.22}$$

erfüllt. Diese Gleichung fassen wir von nun an als Definitionsgleichung für h auf und zusammen mit der Antihermitezität legen wir h bis auf ein Vorzeichen eindeutig fest. Wir nehmen an, dass ein solches h existiert, da im Flachen ebenfalls eine „Spin-Metrik“ vorhanden ist und wir immer über eine Koordinatentransformation in lokal flache Koordinaten zurückkehren können.

Durch die Forderung, dass h (3.22) genügt, wird es bis auf einen Faktor bestimmt, denn für zwei Matrizen h_1 und h_2, die

$$\gamma_\nu^\dagger = -h_1\gamma_\nu h_1^{-1} = -h_2\gamma_\nu h_2^{-1}$$

erfüllen, gilt

$$0 = [h_2^{-1}h_1, \gamma_\nu].$$

Damit ersehen wir aus unseren obigen Betrachtungen, vgl (3.19), dass $h_2^{-1}h_1 = z\mathrm{I}$ mit einem nicht spinorwertigen Faktor z gelten muss.

Wir untersuchen nun die Konsequenzen dieser Einschränkung, dazu schreiben wir für zwei Möglichkeiten der Metrik h_1 und h_2 kurz h_i, $i = 1, 2$. Die h_i sind invertierbar, deshalb dürfen wir sie als $h_i = e^{M_i}$ darstellen. Dann können wir die M_i in

$$M_i = \hat{M}_i + \ln(\hat{s}_i)\mathrm{I}$$

zerlegen, wobei $\hat{M}_i = M_i - \frac{1}{d_\gamma}(\operatorname{tr} M_i)\mathrm{I}$ und $\hat{s}_i = \mathrm{e}^{\frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr} M_i}$. Da $[\hat{M}_i, \ln(\hat{s}_i)\mathrm{I}] = 0$ gilt, folgt $h_i = \hat{s}_i \mathrm{e}^{\hat{M}_i}$. Daran erkennen wir nun, dass wir mit dem Faktor z nur $\hat{s}_i$ verändern können, die $\hat{M}_i$ sind aber für alle h_i im Prinzip identisch. Es verbleiben Freiheiten dadurch, dass der Logarithmus einer Matrix nicht eindeutig ist, dies hat aber keinen Einfluss auf die h_i, daher können wir die $\hat{M}_i$ identisch wählen und schreiben

$$\hat{M} = \hat{M}_i. \tag{3.23}$$

Wir haben nun als Freiheitsgrad für die gesuchte Metrik noch $\hat{s}$ mit $h = \hat{s}\mathrm{e}^{\hat{M}}$.

Wir müssen noch überprüfen, ob die Forderung nach dem Verschwinden der kovarianten Ableitung konsistent und gerechtfertigt ist. Es ist uns aber möglich aus

$$\begin{aligned}
0 &= h^{-1}(\nabla_\mu \gamma_\nu)^\dagger h = h^{-1}\big(D_\mu \gamma_\nu^\dagger + [\gamma_\nu^\dagger, \Gamma_\mu^\dagger]\big)h \\
&= h^{-1}(D_\mu h)\gamma_\nu + D_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu (D_\mu h^{-1})h - [h^{-1}\Gamma_\mu^\dagger h, \gamma_\nu] \\
&= h^{-1}(D_\mu h)\gamma_\nu - [\Gamma_\mu, \gamma_\nu] - \gamma_\nu h^{-1}(D_\mu h) - [h^{-1}\Gamma_\mu^\dagger h, \gamma_\nu] \\
&= [h^{-1}\nabla_\mu h, \gamma_\nu]
\end{aligned}$$

direkt $\nabla_\mu h = c_\mu h$ zu folgern, wobei c_μ ein einfacher Faktor ist. Diesen können wir aus der Spur von $h^{-1}D_\mu h$ ermitteln und finden

$$\begin{aligned}
c_\mu &= \frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}(h^{-1}\nabla_\mu h) = \frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}(h^{-1}D_\mu h - \Gamma_\mu - h^{-1}\Gamma_\mu^\dagger h) \\
&= \frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}(h^{-1}\partial_\mu h) - \frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}\Gamma_\mu - \frac{1}{d_\gamma}(\operatorname{tr}\Gamma_\mu)^* \\
&= \frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}(h^{-1}\partial_\mu h) - s_\mu - s_\mu^* = \frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}(h^{-1}\partial_\mu h) - 2\operatorname{Re} s_\mu .
\end{aligned}$$

Wir verwenden dieses Ergebnis für die Spin-Metrik $h = \hat{s}\mathrm{e}^{\hat{M}}$ und leiten so

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}(h^{-1}\partial_\mu h) &= \frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}(\hat{s}^{-1}\mathrm{e}^{-\hat{M}}(\partial_\mu \hat{s})\mathrm{e}^{\hat{M}}) + \frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}(\hat{s}^{-1}\mathrm{e}^{-\hat{M}}\hat{s}\partial_\mu \mathrm{e}^{\hat{M}}) \\
&= \hat{s}^{-1}\partial_\mu \hat{s}
\end{aligned}$$

ab. Dabei haben wir genutzt, dass $\operatorname{tr}(\mathrm{e}^{-\hat{M}}\partial_\mu \mathrm{e}^{\hat{M}}) = 0$ für $\operatorname{tr}\hat{M} = 0$. Das zeigen wir, indem wir die Zyklizität der Spur und die Produktregel gemäß

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathrm{e}^{-\hat{M}}\partial_\mu \mathrm{e}^{\hat{M}}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\operatorname{tr}(\mathrm{e}^{-\hat{M}}\partial_\mu \hat{M}^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n!}\operatorname{tr}(\mathrm{e}^{-\hat{M}}\hat{M}^k(\partial_\mu \hat{M})\hat{M}^{n-k-1}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n!}\operatorname{tr}(\mathrm{e}^{-\hat{M}}\hat{M}^{n-1}(\partial_\mu \hat{M})) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\operatorname{tr}(\mathrm{e}^{-\hat{M}}\hat{M}^{n-1}(\partial_\mu \hat{M})) \\
&= \operatorname{tr}\partial_\mu \hat{M} = \partial_\mu \operatorname{tr}\hat{M} = 0
\end{aligned}$$

verwenden.

Zur Vereinbarung von $\nabla_\mu h = c_\mu h$ und $\nabla_\mu h = 0$ müssen wir

$$\begin{aligned} 0 = c_\mu &= \frac{1}{d_\gamma}\operatorname{tr}(h^{-1}\partial_\mu h) - 2\operatorname{Re} s_\mu = \hat{s}^{-1}\partial_\mu \hat{s} - 2\operatorname{Re} s_\mu \\ &\Rightarrow s'_\mu = -\frac{1}{2}\hat{s}^{-1}\partial_\mu \hat{s} = -\frac{1}{2}\partial_\mu \ln \hat{s} \end{aligned}$$

fordern. Wir erhalten also eine Bedingung an die Größe s'_μ, die wir als Realteil von s_μ definiert haben. Damit diese Gleichung erfüllbar für $\hat{s}$ wird, muss

$$\partial_\mu s'_\nu - \partial_\nu s'_\mu = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\nu \ln \hat{s} - \partial_\nu\partial_\mu \ln \hat{s}\right) = 0$$

gelten. Daher besitzt s'_μ ein reelles Potential Ω mit $s'_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu\Omega$. Daraus folgt auch schon die Lösung von $\hat{s}$

$$\hat{s} = A\mathrm{e}^{-\Omega} \tag{3.24}$$

mit dem konstanten Faktor A als echten letzten Freiheitsgrad. Wir können den Faktor A in seinen Betrag $|A|$ und seine Phase $\arg A$ zerlegen. Den Betrag können wir durch die reelle Funktion Ω mit der Ersetzung $\Omega \to \Omega - \frac{1}{2}\ln|A|$ eliminieren. Die Phase wählen wir so, dass h antihermitesch wird. Dass dies möglich ist, zeigen wir an einer kurzen Rechnung.

Wir transponieren und komplex konjugieren Gleichung (3.22)

$$\gamma^\mu = -(h^{-1})^\dagger \gamma_\mu^\dagger h^\dagger \Rightarrow \gamma_\mu^\dagger = -h^\dagger \gamma_\mu (h^{-1})^\dagger,$$

dann erhalten wir mit den Betrachtungen von oben, dass

$$\gamma_\mu^\dagger = -\mathrm{e}^{\hat{M}}\gamma_\mu \mathrm{e}^{-\hat{M}} = -\mathrm{e}^{\hat{M}^\dagger}\gamma_\mu \mathrm{e}^{-\hat{M}^\dagger} \Rightarrow [\mathrm{e}^{-\hat{M}}\mathrm{e}^{\hat{M}^\dagger}, \gamma_\mu] = 0$$

und damit muss $\mathrm{e}^{-\hat{M}}\mathrm{e}^{\hat{M}^\dagger} = z\mathrm{I}$ gelten. Durch Bildung der Determinante und unter Verwendung der wohlbekannten Formel $\det A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}\ln A}$ sehen wir, dass

$$\det \mathrm{e}^{\hat{M}} = \det \mathrm{e}^{-\hat{M}} = \det \mathrm{e}^{\hat{M}^\dagger} = 1$$

und somit $|z| = 1$. Wir schreiben $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$ und erkennen so, dass

$$\mathrm{e}^{\hat{M}^\dagger} = \mathrm{e}^{\hat{M} + \mathrm{i}\arg z \mathrm{I}}.$$

Bis auf Freiheiten bei der Bildung des Logarithmus können wir $\hat{M}^\dagger = \hat{M} + \mathrm{i}\arg z\mathrm{I}$ ablesen und aus $\operatorname{tr}\hat{M} = 0$ dann $\hat{M}^\dagger = \hat{M}$ folgern. Wir haben gezeigt, dass wir $\hat{M}$ so wählen dürfen, dass $\hat{M}^\dagger = \hat{M}$. Aus der Forderung der Antihermitezität von $h = \mathrm{e}^{-\Omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg A}\mathrm{e}^{\hat{M}}$ ergibt sich, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg A} = \pm\mathrm{i}$. Wir wählen aus Gründen der Einfachheit das positive Vorzeichen und haben damit

$$h = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\Omega}\mathrm{e}^{\hat{M}}. \tag{3.25}$$

Mit der gerade gefundenen Metrik ist es uns auch möglich, eine Dirac-Konjugation für bereits Dirac-konjugierte Spinoren und damit auch für Spin-Tensoren zweiter Stufe zu definieren. Es ist naheliegend zu fordern, dass die Dirac-Konjugation eines bereits Dirac-konjugierten Spinors den ursprüglichen Spinor liefert, außerdem sollte die hermitesche Konjugation eine Rolle spielen. Daher definieren wir

$$\begin{aligned}(\bar{\bar{\psi}}) &= -h^{-1}\bar{\psi}^\dagger \\ &\equiv -h^{-1}(\psi^\dagger h)^\dagger = -h^{-1}h^\dagger\psi = \psi.\end{aligned}$$

Wir konstruieren die Transformation eines Spin-Tensors zweiter Stufe, indem wir das Produkt zwischen einem Spinor $\psi(x)$ und einem Dirac-konjugierten Spinor $\bar{\chi}(y)$

$$h^{-1}(y)\big(\psi(x)\bar{\chi}(y)\big)^\dagger h(x) = -h^{-1}(y)\bar{\chi}^\dagger(y)\psi^\dagger(x)h(x) = \chi(y)\bar{\psi}(x) \tag{3.26}$$

untersuchen. Wir erkennen so, dass die einzig sinnvolle Definition für die Dirac-Konjugation eines Spin-Tensor zweiter Stufe M durch

$$\bar{M} = h^{-1}M^\dagger h$$

gegeben ist, da nur auf diese Weise in (3.26) $\psi(x)$ und $\chi(y)$ ihre Bedeutung als Spinor bzw. Dirac-konjugierter Spinor tauschen.

Fassen wir die Schritte noch einmal zusammen. Wir haben jetzt definiert, dass wir die Spin-Metrik h als (3.22) einführen, motiviert aus dem Verschwinden der kovarianten Ableitung der Spin-Metrik und der Konsistenz der Indexstruktur an sich. Daraus hat sich ergeben, dass wir den bisher noch völlig freien Realteil s'_μ der Größe s_μ, das ist der Anteil proportional zur I des Spin-Zusammenhangs Γ_μ, durch ein reelles Potential Ω als $s'_\mu = \frac{1}{2}\partial_\mu\Omega$ darstellen können müssen. Weiterhin konnten wir die Spin-Metrik auf die Gestalt $h = \hat{s}\mathrm{e}^{\hat{M}}$ bringen. Dabei ergibt sich $\mathrm{e}^{\hat{M}}$ eindeutig aus den Bedingungen (3.22), $\mathrm{tr}\,\hat{M} = 0$ und $\hat{M}^\dagger = \hat{M}$. Die Größe $\hat{s}$ konnten wir bis auf einen globalen konstanten Faktor A zu $\hat{s} = A\mathrm{e}^{-\Omega}$ bestimmen. Der Betrag $|A|$ des globalen Faktors kann durch Ersetzung der Funktion Ω durch $\Omega - \frac{1}{2}\ln|A|$ eliminiert werden, das hat keinen Einfluss auf die kovariante Ableitung, denn s'_μ bleibt bei dieser Ersetzung unverändert. Die konstante Phase von A setzen wir auf $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg A} = \mathrm{i}$, damit die Metrik antihermitesch wird. Als Freiheitsgrad bleibt nur noch die Funktion Ω und der Imaginärteil von s_μ. Alle Komponenten des Spin-Zusammenhangs Γ_μ, die Spin-Metrik h und auch die Metrik des gekrümmten Raumes $g_{\mu\nu}$, sind vollständig durch die Vorgabe der Gamma-Matrizen γ_μ, des Potentials Ω und des Imaginärteils von s_μ definiert.

Im Prinzip haben wir damit alles Notwendige für den WF erarbeitet und einen konsistenten Formalismus konstruiert, in dem wir nun die gesamte $GL(d_\gamma, \mathbb{C})$ Symmetriegruppe zur Verfügung haben und nicht mehr nur die Lorentz-Transformationen. Weiterhin sind wir auch nicht mehr gezwungen, lokal inertiale Koordinatensysteme oder Ähnliches einzuführen.

3.2.3 Gruppentheoretische Zerlegung der Spinbasen-Transformationen

In diesem Abschnitt werden wir als Letztes noch die Bedeutung des Imaginärteils von s_μ untersuchen und anschließend berechnen, wie sich der Term $\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi$ verhält. Auf diesen Term sind wir bei der Konstruktion der Eigenschaften der kovarianten Ableitung gestoßen und haben gefordert, dass etwaige echt spinorwertige Anteile eine Ladung erhalten müssen. An den bereits erfolgten Rechnungen sehen wir aber, dass eine solche Ladung nur entweder in dem Potential Ω stecken könnte oder aber im Imaginärteil von s_μ. Wir machen uns die Bedeutung dieses Imaginärteils klar, indem wir den Anteil s_μ explizit aus dem Spin-Zusammenhang Γ_μ heraus ziehen und den spurlosen Anteil $\hat{\Gamma}_\mu$ über

$$\Gamma_\mu = \hat{\Gamma}_\mu + s_\mu \mathrm{I} = \hat{\Gamma}_\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Omega)\mathrm{I} + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, s_\mu \mathrm{I}$$

definieren. Wir erkennen, dass $\mathrm{Im}\, s_\mu$ die Rolle eines $U(1)$ Eichfeldes A_μ spielt, in dem der Spinor ψ eine Ladung q besitzen darf und setzen daher

$$\mathrm{Im}\, s_\mu = q A_\mu.$$

Auch die Spinbasen-Transformationen können wir passend zerlegen. Wir schreiben für die Transformationsmatrix $\mathcal{S} = \mathrm{e}^T$ und trennen dann die Matrix T in einen spurlosen Anteil $\hat{T} = T - \frac{1}{d_\gamma} \operatorname{tr} T$ und den Anteil $\hat{t} = \frac{1}{d_\gamma} \operatorname{tr} T$ proportional zur I. Damit folgt $\mathcal{S} = \mathrm{e}^{\hat{t}} \mathrm{e}^{\hat{T}}$, eine Zerlegung in einen Anteil $\mathrm{e}^{\hat{T}} \in SL(d_\gamma, \mathbb{C})$ und $\mathrm{e}^{\hat{t}} \in GL(1, \mathbb{C})$. Wenn wir nun noch $\hat{t}$ nach Real- $\hat{t}'$ und Imaginärteil $\hat{t}''$ unterscheiden, dann zerfällt $\mathrm{e}^{\hat{t}} = \mathrm{e}^{\hat{t}'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{t}''}$ in einen Anteil $\mathrm{e}^{\hat{t}'} \in GL(1, \mathbb{R}^+)$ und einen Anteil $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{t}''} \in U(1)$. Wir teilen die Spinbasen-Transformationen $GL(d_\gamma, \mathbb{C})$ also in $SL(d_\gamma, \mathbb{C}) \times GL(1, \mathbb{R}^+) \times U(1)$. Dabei wirkt der Anteil aus der Gruppe $SL(d_\gamma, \mathbb{C})$ auf den spurlosen Anteil $\hat{\Gamma}_\mu$ des Spin-Zusammenhangs

$$\hat{\Gamma}_\mu \to \mathrm{e}^{\hat{T}} \hat{\Gamma}_\mu \mathrm{e}^{-\hat{T}} - (\partial_\mu \mathrm{e}^{\hat{T}}) \mathrm{e}^{-\hat{T}},$$

der Anteil $GL(1, \mathbb{R}^+)$ auf das Potential Ω

$$\Omega \to \Omega - 2\hat{t}'$$

und der Anteil $U(1)$ auf das Eichfeld A_μ

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \hat{t}''.$$

Daher können wir das Potential Ω immer mit einer Transformation $\hat{t}' = -\frac{1}{2}\Omega$ eliminieren. Somit ist es möglich, die Transformationsgruppe der Spinbasen-Transformationen auf

$SL(d_\gamma, \mathbb{C})$ einzuschränken und das Potential Ω auf Null zu setzen sowie den $U(1)$-Anteil als gesonderte Symmetrie zu betrachten.

Nun werten wir noch den Kommutatorterm der kovarianten Ableitung aus. Dazu definieren wir die Spin-Krümmung $\Phi_{\mu\nu}$ mit

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \psi - \nabla_\nu \nabla_\mu \psi = \Phi_{\mu\nu}\psi \tag{3.27}$$

analog zum Krümmungstensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ der ART. Durch Einsetzen finden wir

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu\nu} &= \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] \\ &= \partial_\mu \hat{\Gamma}_\nu - \partial_\nu \hat{\Gamma}_\mu + [\hat{\Gamma}_\mu, \hat{\Gamma}_\nu] + \mathrm{i}q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\mathrm{I} \\ &= \hat{\Phi}_{\mu\nu} + \mathrm{i}qF_{\mu\nu}\mathrm{I}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

wobei wir wieder den spurlosen Anteil $\hat{\Phi}_{\mu\nu}$ von der Spur $\mathrm{i}qF_{\mu\nu} = \mathrm{i}q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$ separiert haben. Den echt spinorwertigen Anteil der Spin-Krümmung können wir uns aus

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu \nabla_\nu \gamma^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu \gamma^\lambda = D_\mu \nabla_\nu \gamma^\lambda + [\Gamma_\mu, \nabla_\nu \gamma^\lambda] - D_\nu \nabla_\mu \gamma^\lambda - [\Gamma_\nu, \nabla_\mu \gamma^\lambda] \\ &= D_\mu D_\nu \gamma^\lambda + D_\mu [\Gamma_\nu, \gamma^\lambda] + \big[\Gamma_\mu, D_\nu \gamma^\lambda + [\Gamma_\nu, \gamma^\lambda]\big] \\ &\quad - D_\nu D_\mu \gamma^\lambda - D_\nu [\Gamma_\mu, \gamma^\lambda] - \big[\Gamma_\nu, D_\mu \gamma^\lambda + [\Gamma_\mu, \gamma^\lambda]\big] \\ &= R_{\mu\nu\cdot\rho}^{\cdot\cdot\lambda}\gamma^\rho + [D_\mu \Gamma_\nu - D_\nu \Gamma_\mu, \gamma^\lambda] + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu \gamma^\lambda - \gamma^\lambda \Gamma_\nu] - [\Gamma_\nu, \Gamma_\mu \gamma^\lambda - \gamma^\lambda \Gamma_\mu] \\ &= R_{\mu\nu\cdot\rho}^{\cdot\cdot\lambda}\gamma^\rho + [\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu, \gamma^\lambda] + \Gamma_\mu \Gamma_\nu \gamma^\lambda - \Gamma_\nu \Gamma^\lambda \Gamma_\mu - \Gamma_\mu \gamma^\lambda \Gamma_\nu + \gamma^\lambda \Gamma_\nu \Gamma_\mu \\ &\qquad - \Gamma_\nu \Gamma_\mu \gamma^\lambda + \Gamma_\mu \gamma^\lambda \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \gamma^\lambda \Gamma_\mu - \gamma^\lambda \Gamma_\mu \Gamma_\nu \\ &= R_{\mu\nu\cdot\rho}^{\cdot\cdot\lambda}\gamma^\rho + [\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu, \gamma^\lambda] + \big[[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu], \gamma^\lambda\big] \\ &= R_{\mu\nu\cdot\rho}^{\cdot\cdot\lambda}\gamma^\rho + [\hat{\Phi}_{\mu\nu}, \gamma^\lambda] \end{aligned}$$

beschaffen. Wir stellen das Ergebnis um

$$\big[[\hat{\Phi}_{\mu\nu}, \gamma^\lambda], \gamma_\lambda\big] = R_{\mu\nu\lambda\rho}[\gamma^\lambda, \gamma^\rho]$$

und parametrisieren die spurlose Matrix $\hat{\Phi}_{\mu\nu}$

$$\hat{\Phi}_{\mu\nu} = \begin{cases} t_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] + v_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha}\gamma_\alpha & , d = 2 \\ t_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] & , d = 3 \\ p_{\mu\nu}\gamma_* + v_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha}\gamma_\alpha + a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha}\gamma_*\gamma_\alpha + t_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] & , d = 4 \end{cases}$$

mit den Gamma-Matrizen. Dabei haben wir verwendet, dass in zwei Dimensionen für die Gamma-Matrizen $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] = -2\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}\gamma_*$ gilt und in drei Dimensionen die $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$ eine vollständige Basis für die spurlosen Matrizen bilden. Dabei ergibt sich

$$\big[[\hat{\Phi}_{\mu\nu}, \gamma^\lambda], \gamma_\lambda\big] = \begin{cases} 8t_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] + 4v_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha}\gamma_\alpha & , d = 2 \\ 8t_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] & , d = 3 \, , \\ 16p_{\mu\nu}\gamma_* + 12v_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha}\gamma_\alpha + 4a_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha}\gamma_*\gamma_\alpha + 8t_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] & , d = 4 \end{cases}$$

sodass wir

$$\hat{\Phi}_{\mu\nu} = \frac{1}{8} R_{\mu\nu\alpha\beta}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \tag{3.29}$$

ablesen können. Damit können wir nun auch den Term

$$\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\Phi_{\mu\nu}\psi = \frac{1}{32} R_{\mu\nu\alpha\beta}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\psi + \mathrm{i}\frac{q}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu}\psi$$

auswerten. Wir sehen, dass der $F_{\mu\nu}$-Term genau derjenige aus der Elektrodynamik ist. Weiterhin erkennen wir, dass der Term mit dem Krümmungstensor proportional zur I ist. Das können wir mit den Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors zeigen, dazu verweisen wir auf den Anhang C.2. Das Ergebnis

$$\frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = -\frac{R}{4}\psi + \mathrm{i}\frac{q}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu}\psi$$

ist dann völlig konform mit unseren Überlegungen vom Anfang.

3.2.4 Zusammenhang zum VF

Zum Abschluss des WF zeigen wir noch den Zusammenhang zum VF auf. Wir werden untersuchen, ob wir immer eine Spinbasen-Transformation finden können, sodass wir den VF mit

$$\gamma^\mu(x) \to \tilde{\gamma}^\mu(x) = \mathcal{S}(x)\gamma^\mu(x)\mathcal{S}^{-1}(x) \stackrel{!}{=} e^\mu_{\cdot a}(x)\gamma^a$$

erreichen.

In zwei Dimensionen wählen wir die Matrix γ_* als Ausgangspunkt. Wir wissen, dass $[\gamma_*(x)]^2 = \mathrm{I}$ gilt. Die Eigenwerte sind ± 1 und es existiert eine Matrix $\mathcal{S}(x)$, sodass die Matrix $\gamma_{(*)} = \mathcal{S}(x)\gamma_*(x)\mathcal{S}^{-1}(x)$ diagonal und damit auch ortsunabhängig wird. Natürlich können noch weitere Transformationen durchgeführt werden, um $\gamma_{(*)}$ in eine gewünschte Form zu bringen, entscheidend ist die Ortsunabhängigkeit. Zu dieser Matrix gehört ein Satz konstanter Gamma-Matrizen γ^a mit $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}\mathrm{I}$ und $\gamma_{(*)} = \gamma^{(0)}\gamma^{(1)}$. Nun bilden die Matrizen I, $\gamma_{(*)}$ und γ^a ebenfalls eine vollständige Basis und wir können insbesondere

$$\tilde{\gamma}^\mu(x) = \mathcal{S}(x)\gamma^\mu(x)\mathcal{S}^{-1}(x)$$

als Linearkombination der Matrizen $\gamma_{(*)}$ und γ^a ausdrücken. Da zusätzlich aber

$$\{\gamma_{(*)}, \tilde{\gamma}^\mu(x)\} = \mathcal{S}(x)\{\gamma_*(x), \gamma^\mu\}\mathcal{S}^{-1}(x) = 0$$

gilt, ist $\tilde{\gamma}^\mu$ tatsächlich nur eine Linearkombination aus den konstanten Gamma-Matrizen γ^a. Also finden wir

$$\tilde{\gamma}^\mu(x) = e^\mu_{\cdot a}(x)\gamma^a.$$

Aus der CA wird sofort klar, dass $g^{\mu\nu} = e^{\mu}_{\cdot a} e^{\nu}_{\cdot b} \eta^{ab}$ und $\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e^{\mu}_{\cdot a} e^{\nu}_{\cdot b}$ gelten.

Für drei Dimensionen ist der Beweis trivial, denn wir können einen beliebigen Satz konstanter Gamma-Matrizen γ^a des flachen Raumes wählen und wissen, dass dieser zusammen mit I eine vollständige Basis bildet. Außerdem wissen wir, dass die γ^μ spurlos sind. Also können wir sogar ohne Spinbasen-Transformation immer

$$\gamma^\mu(x) = e^{\mu}_{\cdot a}(x)\gamma^a$$

schreiben.

Die Aussage für $d = 4$ gewinnen wir sehr ähnlich zum Fall $d = 2$, wir beschaffen uns völlig analog eine Matrix $\mathcal{S}_1(x)$, die $\gamma_{(*)}$ konstant macht und erhalten damit auch den zugehörigen Satz konstanter Gamma-Matrizen γ^a. Nach wie vor ist $\{\gamma_{(*)}, \tilde{\gamma}^\mu(x)\} = 0$. Also ist

$$\gamma'^\mu(x) = \mathcal{S}_1(x)\gamma^\mu(x)\mathcal{S}_1^{-1}(x) = V^{\mu}_{\cdot a}(x)\gamma^a + A^{\mu}_{\cdot a}(x)\gamma_{(*)}\gamma^a.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in die CA ein und finden

$$\begin{aligned} 2g^{\mu\nu}(x)\mathrm{I} = \{\gamma'^\mu(x), \gamma'^\nu(x)\} &= 2\big(V^{\mu}_{\cdot a}(x)V^{\nu}_{\cdot b}(x) - A^{\mu}_{\cdot a}(x)A^{\nu}_{\cdot b}(x)\big)\eta^{ab}\mathrm{I} \\ &\quad - \big(V^{\mu}_{\cdot a}(x)A^{\nu}_{\cdot b}(x) + V^{\nu}_{\cdot a}(x)A^{\mu}_{\cdot b}(x)\big)[\gamma^a, \gamma^b]\gamma_{(*)}. \end{aligned}$$

Daher müssen

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad g^{\mu\nu}(x) = \big(V^{\mu}_{\cdot a}(x)V^{\nu}_{\cdot b}(x) - A^{\mu}_{\cdot a}(x)A^{\nu}_{\cdot b}(x)\big)\eta^{ab} \\ &\text{(ii)} \quad 0 = V^{\mu}_{\cdot a}(x)A^{\nu}_{\cdot b}(x) + V^{\nu}_{\cdot a}(x)A^{\mu}_{\cdot b}(x) - V^{\mu}_{\cdot b}(x)A^{\nu}_{\cdot a}(x) - V^{\nu}_{\cdot b}(x)A^{\mu}_{\cdot a}(x) \end{aligned}$$

gelten, Gleichung (ii) kann aber nur erfüllt werden, wenn $A^{\mu}_{\cdot a}(x)$ und $V^{\mu}_{\cdot b}(x)$ linear abhängig sind. Dazu müssen sich $A^{\mu}_{\cdot a}(x)$ und $V^{\mu}_{\cdot a}(x)$ in den griechischen Indizes wie Tensoren verhalten. Wir setzen $A^{\mu}_{\cdot a}(x) = V^{\mu}_{\cdot a}(x)\tanh\theta(x)$, wobei $\theta(x)$ eine Funktion von x sein darf. Damit lautet Gleichung (i) dann

$$g^{\mu\nu}(x) = V^{\mu}_{\cdot a}(x)V^{\nu}_{\cdot b}(x)\eta^{ab}\big(1 - \tanh^2\theta(x)\big) = \frac{V^{\mu}_{\cdot a}(x)}{\cosh\theta(x)}\frac{V^{\nu}_{\cdot b}(x)}{\cosh\theta(x)}\eta^{ab}.$$

Wir definieren also das *Vierbein* $e^{\mu}_{\cdot a}(x)$ als

$$e^{\mu}_{\cdot a}(x) = \frac{V^{\mu}_{\cdot a}(x)}{\cosh\theta(x)}.$$

Die Gamma-Matrizen stellen sich nun als

$$\begin{aligned} \gamma'^\mu(x) &= e^{\mu}_{\cdot a}(x)\gamma^a\big(\cosh\theta(x)\,\mathrm{I} - \sinh\theta(x)\,\gamma_{(*)}\big) = e^{\mu}_{\cdot a}(x)\gamma^a \mathrm{e}^{-\theta(x)\gamma_{(*)}} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\theta(x)}{2}\gamma_{(*)}} e^{\mu}_{\cdot a}(x)\gamma^a \mathrm{e}^{-\frac{\theta(x)}{2}\gamma_{(*)}} \end{aligned}$$

dar. Mit der Spinbasen-Transformation $\mathcal{S}_2(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\theta(x)}{2}\gamma_{(*)}}$ erhalten wir endgültig

$$\mathcal{S}(x)\gamma^\mu(x)\mathcal{S}^{-1}(x) = e^{\mu}_{\cdot a}(x)\gamma^a,$$

wobei wir $\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}_2(x)\mathcal{S}_1(x)$ definiert haben.

Wir haben damit aber lediglich gezeigt, dass es Spinbasen-Transformationen gibt, sodass wir

$$\mathcal{S}(x)\gamma^\mu(x)\mathcal{S}^{-1}(x) = e^\mu_{\cdot a}(x)\gamma^a$$

schreiben können. Es ist nicht klar, ob die $e^\mu_{\cdot a}(x)$ reell sind oder aus lokal inertialen Koordinaten gemäß (3.4) entstehen.

3.3 Konsequenzen des WF

Wenn wir unsere vorangegangenen Überlegungen noch einmal genauer betrachten, zeigt sich eins sehr deutlich: Alle relevanten Größen des gekrümmeten Raumes, also die Metrik $g_{\mu\nu}$, die Spin-Metrik h und der spinorwertige Anteil $\hat{\Gamma}_\mu$ des affinen Zusammenhangs lassen sich vollständig aus den Gamma-Matrizen berechnen.

Es ist daher denkbar, dass die Gamma-Matrizen eine wichtigere als bisher angenommene Rolle spielen. Möglicherweise bilden die Gamma-Matrizen sogar den fundamentalen Freiheitsgrad für die Gravitation. Wir nehmen dies im Folgenden an und untersuchen erste Konsequenzen.

Im Sinne einer Eichtheorie ist es das Naheliegendste, eine Wirkung aus der Feldstärke zu konstruieren. Als Feldstärke wird der Kommutator der kovarianten Ableitung bezeichnet, was in unserem Fall der Spin-Krümmung $\Phi_{\mu\nu}$ entspricht. Zunächst sollte die Wirkung zu niedrigster Ordnung in der Feldstärke konstruiert werden. Entgegen zur Eichtheorie ist es möglich, einen linearen Term zu konstruieren. So erhalten wir die linearisierte Wirkung als

$$S[\gamma^\alpha] = -\frac{1}{16\pi d_\gamma}\int_x \mathrm{tr}\left(\Phi_{\mu\nu}(x)[\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)]\right). \tag{3.30}$$

Wenn wir den Ausdruck noch etwas vereinfachen, dann finden wir

$$S[\gamma^\alpha] = -\frac{1}{16\pi d_\gamma}\int_x \mathrm{tr}\left(\Phi_{\mu\nu}(x)[\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)]\right) = \frac{1}{16\pi}\int_x R(x),$$

was erstaunlicherweise der Einstein-Hilbert-Wirkung gleicht.

Analog zur ART können wir aus dieser Wirkung die einsteinschen Feldgleichungen herleiten, indem wir hier nach den Gamma-Matrizen und deren Komponenten variieren. Wir verwenden dabei, dass $R(x)$ nur von der Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ abhängt und somit

$$\frac{\delta S[\gamma^\alpha]}{\delta\left(\gamma^\lambda\right)^I_{\cdot J}(x)} = \int_z \frac{\delta g^{\mu\nu}(z)}{\delta\left(\gamma^\lambda\right)^I_{\cdot J}(x)} \cdot \frac{\delta S[\gamma^\alpha]}{\delta g^{\mu\nu}(z)}$$

gilt. Den ersten Term leiten wir aus der CA zu

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta g^{\mu\nu}(z)}{\delta\left(\gamma^{\lambda}\right)^{I}_{\cdot J}(x)} &= \frac{\delta}{\delta\left(\gamma^{\lambda}\right)^{I}_{\cdot J}(x)} \frac{1}{d_\gamma} \left(\gamma^{\mu}\right)^{K}_{\cdot L}(z) \left(\gamma^{\nu}\right)^{L}_{\cdot K}(z) \\
&= \frac{1}{d_\gamma} \left(\delta^{\mu}_{\lambda} \delta^{K}_{I} \delta^{J}_{L} \left(\gamma^{\nu}\right)^{L}_{\cdot K}(x) + \delta^{\nu}_{\lambda} \delta^{L}_{I} \delta^{J}_{K} \left(\gamma^{\mu}\right)^{K}_{\cdot L}(x) \right) \frac{\delta(x-z)}{\mathcal{M}} \\
&= \frac{1}{d_\gamma} \left(\delta^{\mu}_{\lambda} \left(\gamma^{\nu}\right)^{J}_{\cdot I}(x) + \delta^{\nu}_{\lambda} \left(\gamma^{\mu}\right)^{J}_{\cdot I}(x) \right) \frac{\delta(x-z)}{\mathcal{M}}
\end{aligned}
$$

ab. Der zweite Term ist allgemein bekannt, die Ableitung kann in den meisten Standardwerken zur ART nachvollzogen werden. Es stellt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S[\gamma^\alpha]}{\delta g^{\mu\nu}(z)} &= \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(z)} \frac{1}{16\pi} \int \mathrm{d}y\, \mathcal{M}(y) R(y) = \frac{1}{16\pi} \int \mathrm{d}y\, \mathcal{M}(y) \frac{\delta R(y)}{\delta g^{\mu\nu}(z)} + \frac{1}{16\pi} \int \mathrm{d}y\, \frac{\delta \mathcal{M}(y)}{\delta g^{\mu\nu}(z)} R(y) \\
&= \frac{1}{16\pi} \left(R_{\mu\nu}(z) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(z) R(z) \right)
\end{aligned}
$$

heraus. Für die Variation nach den Gamma-Matrizen erhalten wir

$$
\frac{\delta S[\gamma^\alpha]}{\delta\left(\gamma^{\lambda}\right)^{I}_{\cdot J}(x)} = \frac{1}{8\pi d_\gamma} \left(R_{\lambda\mu}(x) - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(x) R(x) \right) \left(\gamma^{\mu}\right)^{J}_{\cdot I}(x).
$$

Daraus können wir mit Hilfe des Prinzips der Stationarität der Wirkung und durch Multiplikation mit $8\pi\gamma_\rho(x)$ sowie anschließender Spurbildung

$$
\begin{aligned}
0 &= 8\pi \operatorname{tr} \left(\frac{\delta S[\gamma^\alpha]}{\delta \gamma^\lambda(x)} \gamma_\rho(x) \right) = \frac{1}{d_\gamma} \left(R_{\lambda\mu}(x) - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(x) R(x) \right) \operatorname{tr} \left(\gamma^\mu(x) \gamma_\rho(x) \right) \\
&= R_{\lambda\rho}(x) - \frac{1}{2} g_{\lambda\rho}(x) R(x)
\end{aligned}
$$

die einsteinschen Feldgleichungen ableiten.

Dieses Ergebnis ist sehr interessant und könnte die Grundlage für weitere Arbeiten bilden.

4 Propagator

Im folgenden Abschnitt werden wir uns mit dem Inversen des Dirac-Operators beschäftigen, dem Propagator. Wir haben bereits die kovariante Ableitung berechnet, sodass wir den Dirac-Operator als

$$\nabla\!\!\!/\psi - m\psi$$

mit $\nabla\!\!\!/ = \gamma^\mu \nabla_\mu$ einführen. Mit dem Propagator meinen wir die Greensche Funktion des Dirac-Operators, daher suchen wir die Funktion $S_m(x,y)$ für die

$$(\nabla\!\!\!/ - m\mathrm{I})S_m(x,y) = \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}(x)} \tag{4.1}$$

erfüllt ist.

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf maximal symmetrische Räume und Spinoren ohne Ladung. Bei der Lösung halten wir uns zu Beginn im Wesentlichen an [15]. Die explizite Lösung berechnen wir dann aber nur für $d = 3$, da dieser Fall für Graphenstrukturen relevant ist.

Es ist zu beachten, dass $\delta(x,y)$ Spinorindizes trägt und sich dabei in x wie ein Spinor und in y wie ein Dirac-konjugierter Spinor verhält. Sonst entspricht diese spinorwertige Delta-Distribution im Wesentlichen der gewöhnlichen Delta-Distribution $\delta(x-y)$, da die Gleichungen $\int_y \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}}\psi(y) = \psi(x)$ und $\int_x \bar{\psi}(x)\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} = \bar{\psi}(y)$ erfüllt werden. Die Besonderheit von $\delta(x,y)$ gegenüber $\delta(x-y)$ zeigt sich bei der kovarianten Differentiation, denn es gelten

$$\nabla_\mu^{(x)}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}(x)} = \partial_\mu^{(x)}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}(x)} + \Gamma_\mu(x)\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}(x)} \text{ und } \nabla_\mu^{(y)}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}(x)} = \partial_\mu^{(y)}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}(x)} - \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}(x)}\Gamma_\mu(y),$$

gemäß dem speziellen Verhalten von Spinoren bzw. Dirac-konjugierten Spinoren.

4.1 Parallel-Propagator

Zur Lösung der Gleichung (4.1) benötigen wir das Konzept des Parallel-Propagators $U(x,y)$. Er ist definiert als

$$U(x,y) = \mathrm{P}\exp\left(-\int_0^1 \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}z^\mu(t)}{\mathrm{d}t}\Gamma_\mu\big(z(t)\big)\right), \tag{4.2}$$

dabei steht P für das pfadgeordnete Produkt entlang der Geodäte $z(t)$ von $y = z(0)$ nach $x = z(1)$, vgl. [12]. Das pfadgeordnete Produkt ist durch

$$\mathrm{P}\Gamma_\mu\big(z(t_1)\big)\Gamma_\nu\big(z(t_2)\big) = \begin{cases} \Gamma_\mu\big(z(t_1)\big)\Gamma_\nu\big(z(t_2)\big) & \text{, für } t_1 > t_2 \\ \Gamma_\nu\big(z(t_2)\big)\Gamma_\mu\big(z(t_1)\big) & \text{, für } t_1 < t_2 \end{cases}$$

bestimmt. Eine wichtige Eigenschaft des Parallel-Propagators ist $U(x,x) = \mathrm{I}$. Weiterhin genügt der Parallel-Propagator der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}U\big(z(s),y\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^n\int_0^s \mathrm{d}t_1\ldots\int_0^s \mathrm{d}t_n \frac{\mathrm{d}z^{\mu_1}(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\ldots\frac{\mathrm{d}z^{\mu_n}(t_n)}{\mathrm{d}t_n}\mathrm{P}\Gamma_{\mu_1}\big(z(t_1)\big)\ldots\Gamma_{\mu_n}\big(z(t_n)\big) \\
&= -\frac{\mathrm{d}z^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\Gamma_\mu\big(z(s)\big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\int_0^s \mathrm{d}t_1\ldots\int_0^s \mathrm{d}t_{n-1}\times \\
&\quad\times\frac{\mathrm{d}z^{\mu_1}(t_1)}{\mathrm{d}t_1}\ldots\frac{\mathrm{d}z^{\mu_{n-1}}(t_{n-1})}{\mathrm{d}t_{n-1}}\mathrm{P}\Gamma_{\mu_1}\big(z(t_1)\big)\ldots\Gamma_{\mu_{n-1}}\big(z(t_{n-1})\big) \\
&= -\frac{\mathrm{d}z^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\Gamma_\mu\big(z(s)\big)U\big(z(s),y\big),
\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\nabla_\mu^{(z)}U\big(z(s),y\big) &= \frac{\mathrm{d}z^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\Big(\partial_\mu^{(z)}U\big(z(s),y\big)+\Gamma_\mu\big(z(s)\big)U\big(z(s),y\big)\Big) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}U\big(z(s),y\big)+\frac{\mathrm{d}z^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\Gamma_\mu\big(z(s)\big)U\big(z(s),y\big) = 0
\end{aligned}$$

gilt. Unter Spinbasen-Transformationen verhält sich der Parallel-Propagator

$$U(x,y)\to\tilde{U}(x,y) = \mathcal{S}(x)U(x,y)\mathcal{S}^{-1}(y)$$

wie ein Spinor in x und wie ein Dirac-konjugierter Spinor in y. Das zeigen wir, indem wir verwenden, dass die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung mit Randbedingung eindeutig ist. Daher untersuchen wir das Verhalten von

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{S}\big(z(s)\big)U\big(z(s),y\big)\mathcal{S}^{-1}(y) \\
&\quad= \frac{\mathrm{d}\mathcal{S}\big(z(s)\big)}{\mathrm{d}s}U\big(z(s),y\big)\mathcal{S}^{-1}(y)+\mathcal{S}\big(z(s)\big)\frac{\mathrm{d}U\big(z(s)\big)}{\mathrm{d}s}\mathcal{S}^{-1}(y) \\
&\quad= \frac{\mathrm{d}z^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\left[\partial_\mu\mathcal{S}\big(z(s)\big)\right]\mathcal{S}^{-1}\big(z(s)\big)\mathcal{S}\big(z(s)\big)U\big(z(s),y\big)\mathcal{S}^{-1}(y) \\
&\quad\quad-\frac{\mathrm{d}z^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\mathcal{S}\big(z(s)\big)\Gamma_\mu\big(z(s)\big)\mathcal{S}^{-1}\big(z(s)\big)\mathcal{S}\big(z(s)\big)U\big(z(s),y\big)\mathcal{S}^{-1}\big(z(s)\big) \\
&\quad= -\frac{\mathrm{d}z^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\tilde{\Gamma}_\mu\big(z(s)\big)\mathcal{S}\big(z(s)\big)U\big(z(s),y\big)\mathcal{S}^{-1}\big(z(s)\big)
\end{aligned}$$

und erhalten so, dass $\tilde{U}\big(x,y\big) = \mathcal{S}(x)U(x,y)\mathcal{S}^{-1}(y)$ der Parallel-Propagator zum transformierten Spinzusammenhang $\tilde{\Gamma}_\mu$ ist.

Für unsere Rechnung ist es sehr hilfreich, die kovariante Ableitung von $U(x,y)$ explizit zu kennen. R. Camporesi hat in seiner Arbeit [15] für den VF gezeigt, dass in maximal symmetrischen Räumen

$$\nabla_\mu^{(x)}U(x,y) = -B\big(d_G(x,y)\big)\cdot[\gamma_\mu(x),\gamma_\nu(x)]n^\nu(x,y)U(x,y) \tag{4.3}$$

gilt, wobei $B(d_G) = \frac{\kappa}{4}\tan\frac{\kappa d_G}{2}$ eine nicht spinorwertige Funktion ist. Da dieser Term unter Spinbasen-Transformationen kovariant transformiert, ist diese Aussage dennoch auch im WF und damit allgemein verwendbar, bleibt aber natürlich weiterhin auf maximal symmetrische Räume beschränkt.

Im Folgenden unterdrücken wir die Argumente bei einigen Rechnungen zugunsten der Übersichtlichkeit.

So erkennen wir auch leicht mit Hilfe von $\nabla_\mu B = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}d_G} n_\mu \mathrm{I}$ und $\nabla_\mu n_\nu = \nabla_\nu n_\mu$, wie der Operator $\nabla^2 = \nabla^\mu \nabla_\mu$ auf U

$$\begin{aligned}\nabla^2 U =& \frac{\kappa}{4}\nabla^\mu \tan\frac{\kappa d_G}{2} n_\nu [\gamma^\nu, \gamma_\mu] U = -\frac{\kappa^2}{16}\tan^2\frac{\kappa d_G}{2} n_\nu [\gamma^\nu, \gamma_\mu][\gamma^\mu, \gamma_\rho] n^\rho U \\ =& -(d-1)\frac{\kappa^2}{4}\tan^2\frac{\kappa d_G}{2} U = -4(d-1)B^2 U\end{aligned}$$

wirkt.

4.2 Eigenzeitdarstellung des Propagators

Wir suchen nun die Lösung der Gleichung (4.1), wobei wir S_m in der Eigenzeitdarstellung berechnen werden. Zuerst betrachten wir den Operator

$$\nabla\!\!\!/^2 = \gamma^\nu \gamma^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu = \left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right)\nabla_\mu \nabla_\nu = \nabla^\mu \nabla_\mu + \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \nabla^2 - \frac{R}{4}\mathrm{I}$$

und dann die Gleichung

$$\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} = \left(\nabla^2 - \left[\frac{R}{4} + m^2\right]\mathrm{I}\right) G = (\nabla\!\!\!/^2 - m^2 \mathrm{I}) G = (\nabla\!\!\!/ - m\mathrm{I})(\nabla\!\!\!/ + m\mathrm{I}) G. \qquad (4.4)$$

Wir erkennen, dass wir mit Hilfe von G ganz einfach S_m als

$$S_m = (\nabla\!\!\!/ + m\mathrm{I}) G$$

berechnen können. Für die spinorwertige Funktion G wählen wir nun die Eigenzeitdarstellung mit

$$G(x,y;m) = -\mathrm{i}\int_0^\infty \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s} K(x,y;s). \qquad (4.5)$$

Wir fassen G also bezüglich des Parameters $\mathrm{i}m^2$ als negative Laplace-Transformierte einer Funktion $K(x,y;s)$ der Eigenzeit s auf. Die Bestimmungsgleichung für K erhalten wir durch Einsetzen in (4.4) und finden

$$\begin{aligned}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} =& -\mathrm{i}(\nabla\!\!\!/^2 - m^2\mathrm{I})\int \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s} K = -\int \mathrm{d}s \left(\mathrm{i}\nabla\!\!\!/^2 K + K\partial_s\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s} \\ =& -\int \mathrm{d}s\left(\mathrm{i}\nabla\!\!\!/^2 K - (\partial_s K)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s} - \left[K\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}\right]_{s=0}^{\infty},\end{aligned}$$

sodass wir K über die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad 0 = \big(\nabla\!\!\!/^2 + \mathrm{i}\partial_s\big)K && \text{(bestimmende Differentialgleichung)} \\ &\text{(ii)} \quad \lim_{s\searrow 0} K = \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} && \text{(Randbedingung)} \end{aligned}$$

definieren können. Die Eigenzeitdarstellung von S_m

$$S_m = (\nabla\!\!\!/ + m\mathrm{I})G = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}(\nabla\!\!\!/ + m\mathrm{I})K$$

können wir dann leicht aus K ableiten.

Schauen wir uns die Struktur der Bestimmungsgleichung für K an, ist es plausibel, dass K faktorisierbar ist in eine skalare nicht spinorwertige Funktion von s und d_G und in eine spinorwertige Funktion von x und y. Wenn wir diesen Ansatz in (i) einsetzen, so sehen wir, dass sich die gesamte Spinorwertigkeit eliminieren lässt, indem wir die spinorwertige Funktion als $U(x,y)$ wählen. Daher machen wir den naheliegenden Ansatz

$$K(x,y;s) = \mathrm{f}\big(d_G(x,y), s\big) \cdot U(x,y), \tag{4.6}$$

wobei f eine skalare Funktion des geodätischen Abstandes d_G und der Eigenzeit s ist und keine Spinorwertigkeit trägt. Zur Verkürzung schreiben wir $\mathrm{f}' = \partial_{d_G}\mathrm{f}$ und $\dot{\mathrm{f}} = \partial_s \mathrm{f}$. Zunächst werten wir die Terme einzeln aus, wir erhalten

$$\begin{aligned} \nabla^2 K &= \nabla^\mu(\nabla_\mu \mathrm{f})U + \nabla^\mu \mathrm{f}(\nabla_\mu U) = (\nabla^2\mathrm{f})U + 2(\nabla^\mu\mathrm{f})(\nabla_\mu U) + \mathrm{f}(\nabla^2 U) \\ &= \big(\mathrm{f}'' + (d-1)A\,\mathrm{f}' - 4(d-1)B^2\,\mathrm{f}\big)U \end{aligned}$$

und können die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = U^{-1}(\nabla\!\!\!/^2 + \mathrm{i}\partial_s)K &= U^{-1}\left(\nabla^2 - \frac{3}{2}\kappa^2\mathrm{I} + \mathrm{i}\partial_s\right)K \\ &= -\left(4(d-1)B^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\right)\mathrm{f} + (d-1)A\,\mathrm{f}' + \mathrm{f}'' + \mathrm{i}\dot{\mathrm{f}} \end{aligned}$$

zusammensetzen.

Diese Gleichung allgemein zu lösen ist möglich, aber sehr schwierig und nicht unbedingt intuitiv. Für eine allgemeine Lösung verweisen wir auf [15], wir verfolgen hier einen anderen Weg, da wir nur eine Lösung für den Fall $d = 3$ und $R < 0$ suchen.

Wir wissen, dass K für $s \searrow 0$ im Wesentlichen gleich der Delta-Distribution sein soll. Da aber $U(x,y)$ nicht von s abhängt und für $x = y$ identisch zu I ist, muss die Delta-Struktur aus der Funktion f

$$\lim_{s\searrow 0} f = \frac{\delta(x-y)}{\mathcal{M}}$$

kommen. Eine mögliche Darstellung der Delta-Distribution im Grenzwert $s \searrow 0$ ist

$$\frac{\delta(x-y)}{\mathcal{M}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi s)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}\right), \tag{4.7}$$

vgl. Anhang D.2. Daher faktorisieren wir dieses Verhalten

$$\mathrm{f}(d_G, s) = \frac{\mathrm{g}(d_G, s)}{\sqrt{s}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}} \tag{4.8}$$

bis auf einen Faktor s^{-1} heraus in der Vermutung, dass Lösungen für verschiedene Dimensionen in gewisser Weise zusammenhängen. Die neue gesuchte Funktion g muss sich für kleine s wie s^{-1} verhalten und kann sonst beliebig sein. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}' &= \left(\mathrm{g}' + \mathrm{i}\frac{d_G}{2s}\mathrm{g}\right) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}} \\
\mathrm{f}'' &= \left(\mathrm{g}'' + \mathrm{i}\frac{d_G}{s}g' + \left[\mathrm{i}\frac{1}{2s} - \frac{d_G^2}{4s^2}\right]\mathrm{g}\right) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}} \\
\dot{\mathrm{f}} &= \left(\dot{\mathrm{g}} - \left[\frac{1}{2s} + \mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s^2}\right]\mathrm{g}\right) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}}
\end{aligned}$$

für die benötigten Ableitungen von f. Die entstehende Differentialgleichung für g

$$\begin{aligned}
0 &= \left(-\left[8B^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\right]\mathrm{f} + 2A\,\mathrm{f}' + \mathrm{f}'' + \mathrm{i}\dot{\mathrm{f}}\right) \cdot (4\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}} \\
&= -\left(8B^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\right)\mathrm{g} + 2A\left(g' + \mathrm{i}\frac{d_G}{2s}\mathrm{g}\right) + \mathrm{g}'' + \mathrm{i}\frac{d_G}{s}g' + \mathrm{i}\dot{\mathrm{g}} \\
&= \left(\mathrm{i}Ad_G \cdot \frac{1}{s} - \left[8B^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\right]\right)\mathrm{g} + \left(\mathrm{i}d_G \cdot \frac{1}{s} + 2A\right)\mathrm{g}' + g'' + \mathrm{i}\dot{\mathrm{g}}
\end{aligned}$$

ermöglicht es uns, g nach Potenzen von $\frac{1}{s}$ zu entwickeln. Aus dem notwendigen Verhalten der Delta-Struktur von f für $s \searrow 0$ sehen wir aber bereits, dass es keinen Term geben darf, der stärker als s^{-1} wächst. Also verbleiben

$$\mathrm{g}(d_G, s) = \frac{1}{s}\mathrm{g}_1(d_G) + \mathrm{i}\mathrm{g}_0(d_G), \tag{4.9}$$

nur noch zwei Funktionen g_1 und g_0 von d_G als Freiheiten. Einsetzen und sortieren nach Potenzen liefert ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad 0 = \mathrm{i}\frac{d_G}{s^2}\left(-\left[\frac{1}{d_G} - A\right] \cdot \mathrm{g}_1 + \mathrm{g}_1'\right) \\
&\text{(ii)} \quad 0 = -\frac{1}{s}\left(d_G A \cdot \mathrm{g}_0 + d_G \cdot \mathrm{g}_0' + \left[8B^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\right] \cdot \mathrm{g}_1 - 2A \cdot \mathrm{g}_1' - g_1''\right) \\
&\text{(iii)} \quad 0 = \mathrm{i}\frac{1}{s^0}\left(-\left[8B^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\right] \cdot g_0 + 2A \cdot g_0' + g_0''\right)
\end{aligned}$$

für diese beiden Funktionen. Wir können aus (i) die Funktion g_1

$$\frac{\mathrm{g}_1'}{\mathrm{g}_1} = \frac{1}{d_G} - \kappa\cot(\kappa d_G) \Rightarrow g_1 = \frac{C_1 d_G}{\sin(\kappa d_G)}$$

mit der Integrationskonstanten C_1 ableiten. Aus $\mathrm{f}(0,s) \to \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi s)^{\frac{3}{2}}}$ für $s \searrow 0$ erhalten wir $\mathrm{g}_1(0) = 1$ und damit $C_1 = \kappa$.

Jetzt können wir aus Gleichung (ii) die Funktion g_0 bis auf eine Integrationskonstante ermitteln. Dazu berechnen wir zuerst die Inhomogenität

$$\begin{aligned}
&\left[8B^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\right]\mathrm{g}_1 - 2A\mathrm{g}_1' - g_1'' \\
&\quad= \left[\frac{\kappa^2}{2}\tan^2\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right) + \frac{3}{2}\kappa^2\right]\frac{\kappa d_G}{\sin\kappa d_G} - 2\kappa^2\frac{\cos(\kappa d_G)}{\sin^2(\kappa d_G)}\left(1 - \kappa d_G\frac{\cos(\kappa d_G)}{\sin(\kappa d_G)}\right) \\
&\qquad + 2\kappa^2\frac{\cos(\kappa d_G)}{\sin^2(\kappa d_G)} - \kappa^3 d_G\frac{1+\cos^2(\kappa d_G)}{\sin^3(\kappa d_G)} \\
&\quad= \frac{\kappa^3 d_G}{\sin(\kappa d_G)}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\tan^2\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right) - \frac{1}{\sin^2(\kappa d_G)} + \cot^2(\kappa d_G)\right) \\
&\quad= \frac{\kappa^3 d_G}{2\sin(\kappa d_G)\cos^2\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$0 = \cot(\kappa d_G)\cdot\mathrm{g}_0 + \frac{1}{\kappa}\cdot\mathrm{g}_0' + \frac{\kappa^2}{2\sin(\kappa d_G)\cos^2\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)}$$

und wir können die Lösung

$$\mathrm{g}_0 = \frac{C_0}{\sin(\kappa d_G)} - \frac{\kappa^2}{2\cos^2\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)}$$

ablesen. Aus Konsistenz mit Gleichung (iii) erhalten wir durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
0 &= -\left[8B^2 + \frac{3}{2}\kappa^2\right]\cdot g_0 + 2A\cdot g_0' + g_0'' \\
&= -C_0\frac{\kappa^2}{2\sin(\kappa d_G)\cos^2\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)},
\end{aligned}$$

dass $C_0 = 0$ gelten muss. Damit ergibt sich die Lösung für K zu

$$\begin{aligned}
K = \mathrm{f}\,U &= \frac{\mathrm{g}}{\sqrt{s}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}}U \\
&= \frac{\kappa}{2\cos\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)}\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{d_G}{\sin\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} - \mathrm{i}\frac{\kappa}{\cos\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}}U \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

und wir können unter Verwendung von $\nabla\!\!\!/ U = -\kappa \tan\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right) n\!\!\!/ U$, $n\!\!\!/ = n_\mu \gamma^\mu$ die Ableitung von K

$$\begin{aligned}
\nabla\!\!\!/ K = & \frac{\kappa \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}} \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{\sin(\kappa d_G) - \kappa d_G \cos(\kappa d_G)}{\sin^2(\kappa d_G)} - \mathrm{i}\frac{\kappa^2}{2} \frac{\sin\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} + \frac{\mathrm{i}}{s^2} \cdot \frac{d_G^2}{2\sin(\kappa d_G)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{s} \cdot \frac{\kappa d_G}{4\cos^2\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} - \frac{1}{s} \cdot \frac{\kappa d_G}{2\cos^2\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} + \mathrm{i}\frac{\kappa^2}{2} \frac{\sin\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}} n\!\!\!/ U \\
= & \frac{\kappa}{2\sin\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} \left(\frac{1 + 2\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}}{\cos\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} - \frac{\frac{\kappa d_G}{2}}{\sin\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} \right) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi s)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}} n\!\!\!/ U
\end{aligned}$$

berechnen. So können wir den Propagator endgültig als

$$S_m = -\mathrm{i}\int \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m^2 s}}{2} \left(\frac{\kappa}{\sin w} \left[\frac{1 + 2\mathrm{i}\frac{w^2}{\kappa^2 s}}{\cos w} - \frac{w}{\sin w} \right] n\!\!\!/ + \frac{m}{\cos w} \left[\frac{2w}{\sin w} - \mathrm{i}\frac{\kappa^2 s}{\cos w} \right] \mathrm{I} \right) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi s)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{w^2}{\kappa^2 s}} U \tag{4.11}$$

angeben, wobei $w = \frac{\kappa d_G}{2}$.

Um diesen Ausdrücken einen Sinn zu verleihen, müssen wir uns auf Spinoren beschränken, für die eine *Inversion* von $\nabla\!\!\!/ - m\mathrm{I}$ überhaupt möglich ist. Wir untersuchen hier nicht, inwieweit diese Spinoren existieren oder an welche Bedingungen deren Existenz geknüpft ist. Aber wenn wir uns auf diese beschränken, dann können wir aus (4.1) auch

$$-\big(\nabla_\mu S_m(y,x)\big)\gamma^\mu(x) - m S_m(y,x) = \frac{\delta(y,x)}{\mathcal{M}} \tag{4.12}$$

ableiten, indem wir die Gleichung

$$\big(\nabla\!\!\!/ - m\mathrm{I}\big)\chi(x) = \psi(x)$$

betrachten. Wir wissen wegen der Invertierbarkeit von $\nabla\!\!\!/ - m\mathrm{I}$, dass es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen $\chi(x)$ und $\psi(x)$ gibt. Demnach finden wir

$$\begin{aligned}
\chi(y) &= \int_x S_m(y,x)\psi(x) = \int_x S_m(y,x)\big(\nabla\!\!\!/ - m\mathrm{I}\big)\chi(x) \\
&= \int_y \left[-\big(\nabla_\mu S_m(y,x)\big)\gamma^\mu(x) - m S_m(y,x)\right] \chi(x)
\end{aligned}$$

für alle Spinoren $\chi(x)$, die in dem invertierbaren Regime von $\nabla\!\!\!/ - m\mathrm{I}$ existiern und damit gilt auch (4.12).

5 Flussgleichung

Eines unserer Ziele ist es, das Gross-Neveu Modell in $d = 3$ Raumzeitdimensionen auf einem gekrümmten Hintergrund mit zwei raumartigen Richtungen zu untersuchen. Diese Betrachtungen werden wir mit Hilfe der Flussgleichung anstellen können, sobald wir in der Lage sind, die klassische Quantenfeldtheorie (QFT), die in flachen Räumen stattfindet, auf einen nicht fluktuierenden gekrümmten Hintergund zu transformieren.

5.1 Grundlagen zur QFT

Die entscheidende Grundlage dieser Betrachtungen wird die Flussgleichung sein. Um sie zu verstehen, werden wir sie herleiten. Die Idee stammt von C. Wetterich (vgl. [3]). Eine aufbereitete Einführung ist in [6] zu finden. Wir weichen hier etwas von der üblichen Konvention ab, da sich sonst im gekrümmten Raum Probleme ergeben. Wir weisen an geeigneter Stelle noch einmal darauf hin.

Die Flussgleichung liefert eine Möglichkeit, die Renormierunsgruppen exakt zu behandeln. Damit sind wir dann in der Lage, Verbindungen zwischen mikrophysikalischen und effektiven makrophysikalischen Wechselwirkungen herzustellen. So können wir dann nicht störungstheoretische Bereiche der QFT untersuchen.

Diese Gleichung unterscheidet sich für bosonische und fermionische Felder, kann aber elegant als ein Ausdruck für alle auftretenden Felder zusammengefasst werden. Sie beschreibt die Änderung der effektiven Wirkung bei Änderung der Renormierungsskala k, daher leiten wir zuerst aus der klassischen Wirkung S die skalenabhängige effektive Wirkung Γ_k ab.

Im flachen d-dimensionalen Minkowski-Raum mit Signatur $(-,+,\ldots,+)$ sind die N-Punkt-Funktionen die eine bestimmte QFT definierenden Funktionen. Sie werden mit

$$\left\langle \phi^{j_1}(x^{(1)}) \ldots \phi^{j_N}(x^{(N)}) \right\rangle_{vac} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \; \phi^{j_1}(x^{(1)}) \ldots \phi^{j_N}(x^{(N)})\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}S[\phi]} \tag{5.1}$$

definiert. Wir gehen davon aus, dass auch auf einem gekrümmten, aber nicht fluktuierenden Hintergund die N-Punkt-Funktionen die QFT vollständig beschreiben. Dabei stehen die $\phi^{j_i}(x^{(i)})$ $(i \in \{1,\ldots,N\}$, $j_i \in \{1,\ldots,N_\phi\})$ für N_ϕ verschiedene Felder als Funktionen der $x^{(i)}$, diese stehen für die N betrachteten Raumzeitpunkte mit den kontravarianten Komponenten $x^{(i)\,\mu}$ $(\mu \in \{0,\ldots,d-1\})$. Die auftretenden Felder dürfen sowohl bosonisch als auch fermionisch sein. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf reelle Skalarfelder im bosonischen Sektor und auf Dirac-Spinoren im fermionischen. Der Vektor ϕ hat dann N_φ bosonische Komponenten $\phi^i = \varphi^{(i)}$, $i \in \{1,\ldots,N_\varphi\}$ und $2N_\psi$ fermionische, dabei sind die ersten N_ψ die auftretenden Spinoren $\phi^{N_\varphi+i} = \psi^{(i)}$, $i \in \{1,\ldots,N_\psi\}$

und die zweiten N_ψ sind die zugehörigen Dirac-konjugierten Spinoren in transponierter Darstellung $\phi^{N_\varphi+N_\psi+i} = (\bar{\psi}_{(i)})^{\mathrm{T}} = (\bar{\psi}^{\mathrm{T}})^{(i)}$, $i \in \{1,\ldots,N_\psi\}$, also

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \bar{\psi}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Die Klammern $\langle\cdot\rangle_{vac}$ bilden den Erwartungswert bezüglich des Vakuumzustandes. Das $\mathcal{N}$ steht für die Normierung und wird durch die Forderung $\langle 1\rangle_{vac} = 1$ eindeutig festgelegt. $S[\phi]$ ist die klassische Wirkung und

$$S[\phi] \equiv S\big[\phi^{(j)}\big] = \int_x \mathcal{L}\left(\phi^{(j)}(x), \partial_\mu\phi^{(j)}(x)\right) \tag{5.2}$$

ein Integral über die Lagrangedichte $\mathcal{L}$. Im Allgemeinen können auch Ableitungen höherer Ordnung in $\mathcal{L}$ auftreten, dies hat jedoch keinen Einfluss auf die Herleitung der Flussgleichung.

Somit ist $S[\phi]$ ein Funktional der Felder, über diese Felder wird mit Hilfe eines Funktionalintegrals mit dem formalen Maß $\mathcal{D}\phi$ integriert. Wir nehmen an, dass das Maß wohldefiniert ist, beispielsweise durch

$$\int\!\mathcal{D}\phi\ \cdot = \lim_{\Lambda_0\to\infty}\int_{\Lambda_0}\mathcal{D}\phi\ \cdot = \lim_{\Lambda_0\to\infty}\prod_{j=1}^{N_\phi}\prod_{\vec{\imath}\in\mathbb{Z}^d}\int\!\mathrm{d}\phi_{\vec{\imath}}^{(j)}\ \ \cdot\,,$$

eine Raumzeit-Gitter-Diskretisierung. Hierbei seien die Koordinaten so gewählt, dass deren Definitionsbereiche gleich $(-\infty,\infty)$ sind, dann werden die $\phi_{\vec{\imath}}^{(j)}$ durch den Wert des Feldes $\phi^{(j)}$ am Ort $x^{\vec{\imath}}$, also durch

$$\phi_{\vec{\imath}}^{(j)} = \phi^{(j)}(x^{\vec{\imath}}),\ x^{\vec{\imath}} = \left(\frac{i_0}{\Lambda_0},\ldots,\frac{i_D}{\Lambda_0}\right)$$

gebildet. Das Funktionalintegral entspricht somit einer Integration über alle möglichen Feldkonfigurationen ($\int\mathrm{d}\phi_{\vec{\imath}}^{(j)}$) aller Felder ($\prod_{j=1}^{N_\phi}$) an jedem Gitterpunkt ($\prod_{\vec{\imath}\in\mathbb{Z}^d}$). Durch den Grenzprozess ($\Lambda_0\to\infty$) wird der Übergang vom Gitter zum Kontinuum erreicht und somit über alle möglichen Funktionen integriert.

Das Maß sollte auftretende Symmetrien erhalten, damit auch das Funktionalintegral diesen Symmetrien unterliegt. Eine Symmetrietransformation $\mathcal{U}$ transformiert die Felder $\phi^{(j)} \to \phi^{(j)\mathcal{U}}$ und lässt die klassische Wirkung $S[\phi] \to S[\phi^{\mathcal{U}}] = S[\phi]$ invariant, sodass auch die N-Punkt-Funktion einer einfachen Transformationsregel

$$\begin{aligned}\left\langle\phi^{(j_1)}(x^{(1)})\ldots\phi^{(j_N)}(x^{(N)})\right\rangle_{vac} &\to \mathcal{N}\int\!\mathcal{D}\phi^{\mathcal{U}}\ \phi^{(j_1)\mathcal{U}}(x^{(1)})\ldots\phi^{(j_N)\mathcal{U}}(x^{(N)})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi\mathcal{U}]}\\ &= \mathcal{N}\int\!\mathcal{D}\phi\ \phi^{(j_1)\mathcal{U}}(x^{(1)})\ldots\phi^{(j_N)\mathcal{U}}(x^{(N)})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S[\phi]}\\ &= \left\langle\phi^{(j_1)\mathcal{U}}(x^{(1)})\ldots\phi^{(j_N)\mathcal{U}}(x^{(N)})\right\rangle_{vac}\end{aligned}$$

folgt. Um die verschiedenen N-Punkt-Funktionen möglichst einfach berechnen zu können, führt man üblicherweise das erzeugende Funktional $Z[\chi]$ mit

$$Z[\chi] = \int \mathcal{D}\phi \; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(S[\phi] - \int \bar{\chi}\phi)} \tag{5.3}$$

ein. Dabei ist χ die Quelle mit den Komponenten

$$\chi = \begin{pmatrix} J \\ \eta \\ \bar{\eta}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Der formale Term $\int \bar{\chi}\phi$ wird Quellterm genannt, er steht für

$$\int \bar{\chi}\phi = \int_x \bar{\chi}(x)\phi(x) = \int_x \bar{\chi}_i(x)\phi^i(x).$$

Wir verwenden hier die Summenkonvention

$$\bar{\chi}_i\phi^i = \sum_{i=1}^{N_\varphi + 2N_\psi} \bar{\chi}_i\phi^i.$$

Der Vektor $\bar{\chi}$ ist die *Dirac-Konjugation* des Vektors χ, dabei werden die bosonischen Felder komplex konjugiert und die Spinoren Dirac-konjugiert. Da wir im bosonischen Sektor nur reelle Felder betrachten, ändern diese nur ihre Indexposition $(J^{(i)})^* = J_{(i)}$, sodass

$$\bar{\chi} = \left(J\,,\, \bar{\eta}\,,\, \eta^{\mathrm{T}}\right)$$

gilt. Wir finden die nützliche Identität

$$\bar{\chi}\phi = \bar{\phi}\mathbb{1}_{(--)}\chi, \quad \mathbb{1}_{(\pm\pm)} = \begin{pmatrix} 1_{N_\varphi \times N_\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\mathrm{I}_{N_\psi \times N_\psi} & 0 \\ 0 & 0 & \pm\mathrm{I}_{N_\psi \times N_\psi} \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Man sieht leicht, dass $Z[0]$ die Normierung für die N-Punkt-Funktionen darstellt und $Z[\chi]$ die korrekte Normierung bei Anwesenheit einer Quelle χ ist. Wir definieren den Erwartungswert unter Anwesenheit der Quelle χ als

$$\langle \cdot \rangle_\chi = \frac{1}{Z[\chi]} \int \mathcal{D}\phi \, \cdot \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(S[\phi] - \int \bar{\chi}\phi)}.$$

Wird $Z[\chi]$ von links funktional nach der Quelle $\bar{\chi}(x)$ variiert und auf $-\mathrm{i}Z[\chi]$ normiert

$$\frac{\mathrm{i}}{Z[\chi]} \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\chi}(x)} Z[\chi] \right) = \frac{1}{Z[\chi]} \int \mathcal{D}\phi \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\chi}(x)} \int \bar{\chi}\phi \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(S[\phi] - \int\bar{\chi}\phi)} = \langle \phi(x) \rangle_\chi \,,$$

so erhält man den Erwartungswert von $\phi(x)$ unter Anwesenheit der Quelle χ. Durch geeignete Differentiation nach den Quelltermen können so alle N-Punkt-Funktionen erzeugt werden.

Wenn wir $Z[\chi]$ berechnet haben, dann ist die zugehörige QFT im Prinzip gelöst. Im Allgemeinen ist es aber nicht möglich, $Z[\chi]$ für ein beliebiges S anzugeben. Um eine QFT vollständig zu beschreiben, genügt es jedoch, die zusammenhängenden N-Punkt-Funktionen zu bestimmen. Deren generierendes Funktional ist das Schwinger-Funktional $W[\chi]$ mit

$$W[\chi] = \mathrm{i} \ln Z[\chi]. \tag{5.5}$$

Es ist sofort ersichtlich, dass

$$W[\chi]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\chi(x)} = \left\langle \bar{\phi}(x)\mathbb{1}_{(--)} \right\rangle_{\chi} .$$

Die effektive Wirkung Γ definieren wir nun als die Legendre-Transformation

$$\Gamma[\hat{\phi}] = \sup_{\chi}\left(\int \bar{\chi}\hat{\phi} - W[J]\right) \tag{5.6}$$

des Funktionals W. Das Supremum sei an $\chi = \chi_{sup}$ angenommen. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass χ_{sup} von der Funktion $\hat{\phi}$ abhängt. Der Zusammenhang ergibt sich aus der Legendre-Transformation zu

$$\hat{\phi}(x) = \langle \phi(x) \rangle_{\chi_{sup}} .$$

Da Γ die Legendre-Transformierte von W ist, enthält auch die effektive Wirkung alle Informationen der betrachteten QFT.

Um nun eine Bestimmungsgleichung für Γ abzuleiten, betrachten wir die funktionale Ableitung

$$\begin{aligned}
\Gamma[\hat{\phi}]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\hat{\phi}(x)} &= \left(\int \bar{\chi}_{sup}\hat{\phi} - W[\chi_{sup}]\right)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\hat{\phi}(x)} \\
&= \bar{\chi}_{sup}(x) + \int_z \bar{\hat{\phi}}(z)\mathbb{1}_{(--)}\left(\frac{\chi_{sup}(z)\overleftarrow{\delta}}{\delta\hat{\phi}(x)}\right) - \int_z\left[\frac{W[\chi]\overleftarrow{\delta}}{\delta\chi(z)}\right]_{\chi=\chi_{sup}}\left(\frac{\chi_{sup}(z)\overleftarrow{\delta}}{\delta\hat{\phi}(x)}\right) \\
&= \bar{\chi}_{sup}(x)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

und erhalten die Quelle $\bar{\chi}_{sup}$. Damit ergibt sich die Bestimmungsgleichung zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Gamma[\hat{\phi}]} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}W[\chi_{sup}]}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\bar{\chi}_{sup}\hat{\phi}} = \int\mathcal{D}\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(S[\phi]-\int\bar{\chi}_{sup}\phi)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int\bar{\chi}_{sup}\hat{\phi}} = \int\mathcal{D}\phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(S[\phi+\hat{\phi}]-\int\bar{\chi}_{sup}\varphi)} \\
&= \int\mathcal{D}\phi\,\exp\left[\mathrm{i}\left(S[\phi+\hat{\phi}] - \int_x\left(\frac{\Gamma[\hat{\phi}]\overleftarrow{\delta}}{\delta\hat{\phi}(x)}\right)\phi(x)\right)\right],
\end{aligned}$$

einer Mischung aus funktionaler Integral- und Differentialgleichung. Auf Grund ihrer Komplexität konnte diese Gleichung analytisch exakt bisher nur für sehr wenige Fälle gelöst werden. Ein möglicher Lösungsansatz ist die Vertexentwicklung, ein Analogon zum Potenzreihenansatz für gewöhnliche Differentialgleichungen. Wir gehen hier einer anderen Möglichkeit zur Berechnung der effektiven Wirkung nach, sie fußt auf den Konzepten der Renormierungsgruppentheorie.

5.2 Herleitung der Flussgleichung

Die Idee bei dieser Herangehensweise ist es, nicht alle Fluktuationen auf einmal auszuintegrieren, sondern einen Skalenparameter k einzuführen, der angibt, bis zu welcher Skala Fluktuationen in der nun skalenabhängigen effektiven Wirkung Γ_k berücksichtigt werden sollen. Dabei sei $1/k$ die ungefähre Reichweite auftretender Wechselwirkungen. Damit sollen für $k \to \Lambda_0$ (für große Λ_0) nur die kurzreichweitigen Fluktuationen beitragen, sodass die skalenabhängige effektive Wirkung $\Gamma_{k\to\Lambda_0} \to S$ sich auf die klassische mikroskopische Wirkung reduziert. Um nun die volle effektive Wirkung zu bekommen, müssen alle langreichweitigen Wechselwirkungen ($k \to 0$) mit einbezogen werden, also $\Gamma_{k\to 0} \to \Gamma$.

Zur Konstruktion eines solchen Funktionals führen wir einen Infrarot (IR)-Regulator R_k ein, der das generierende Funktional Z zu einem skalenabhängigen IR-regularisierten Funktional

$$Z_k[\chi] = \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,W_k[\chi]} = \int_{\Lambda_0} \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(S[\phi]+\Delta S_k[\phi]-\int\bar{\chi}\phi)} = \int_{\Lambda_0} \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}S_k[\phi,\chi]} \tag{5.8}$$

erhebt. Dabei ist $S_k[\phi,\chi] = S[\phi] + \Delta S_k[\phi] - \int\bar{\chi}\phi$ und

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2}\int_x\int_y \bar{\phi}(x) R_k(x,y)\phi(y). \tag{5.9}$$

Die Matrix R_k mischt die bosonischen und fermionischen Felder nicht. Ihre grundsätzliche Struktur legen wir mit

$$R_k(x,y) = \begin{pmatrix} R_k^{\varphi}(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & R_k^{\psi}(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & -R_k^{\psi}(y,x)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad R_k^{\varphi}(x,y) = R_k^{\varphi}(y,x) \tag{5.10}$$

fest, sodass

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2}\int_x\int_y \varphi(x)R_k^{\varphi}(x,y)\varphi(y) + \int_x\int_y \bar{\psi}(x)R_k^{\psi}(x,y)\psi(y).$$

Auch hier folgt

$$W_k[\chi]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\chi(x)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}W_k[\chi]} \int \mathcal{D}\phi\ \bar{\phi}(x)\mathbb{1}_{(--)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_k[\phi,\chi]}$$

direkt. So definieren wir analog zu Γ die skalenabhängige effektive Wirkung Γ_k als Legendre-Transformierte von W_k, fügen aber zusätzlich den Regulatorterm an

$$\Gamma_k[\hat{\phi}] = \sup_{\chi} \left(\int \bar{\chi}\hat{\phi} - W_k[\chi] \right) - \Delta S_k[\hat{\phi}]. \tag{5.11}$$

Das Supremum sei wieder für $\chi = \chi_{sup}$ angenommen. Nun hängt χ_{sup} aber nicht nur von $\hat{\phi}$, sondern auch von der Skala k ab. Wieder können wir durch Differenzieren nach χ und Auswertung an $\chi = \chi_{sup}$

$$\hat{\phi}(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}W_k[\chi_{sup}]} \int \mathcal{D}\phi \; \phi(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}S_k[\phi,\chi_{sup}]} = \langle \phi(x) \rangle_{k,\chi_{sup}} \tag{5.12}$$

den Zusammenhang zwischen χ_{sup} und $\hat{\phi}$ als den Erwartungswert herleiten. Dabei ist $\langle \cdot \rangle_{k,\chi}$ der skalenabhängige Erwartungswert bei Anwesenheit der Quelle χ.

Wir suchen eine Bestimmungsgleichung für Γ_k über die Renormierungsskala Skala k. Dazu differenzieren wir zunächst nach k

$$\begin{aligned}
\partial_k \Gamma_k[\hat{\phi}] &= \int_z \big(\partial_k \bar{\chi}_{sup}(z)\big)\hat{\phi}(z) - \partial_k W_k[\chi_{sup}] - \partial_k \Delta S_k[\hat{\phi}] \\
&= \int_z \big(\partial_k \bar{\chi}_{sup}(z)\big) \left(\hat{\phi}(z) - \left[\frac{\overrightarrow{\delta}\, W_k[\chi]}{\delta \bar{\chi}(z)} \right]_{\chi=\chi_{sup}} \right) - \left[\partial_k \Big(W_k[\chi] + \Delta S_k[\hat{\phi}] \Big) \right]_{\chi=\chi_{sup}} \\
&= - \left[\partial_k \Big(W_k[\chi] + \Delta S_k[\hat{\phi}] \Big) \right]_{\chi=\chi_{sup}} .
\end{aligned}$$

Zur Auswertung der verbleibenden Ableitung führen wir noch die Superspur Str ein. Sie berücksichtigt die Graßmann-Wertigkeit der fermionischen Felder. Wir definieren sie durch

$$\mathrm{Str} \begin{pmatrix} J\varphi & J\bar{\psi} & J\psi^{\mathrm{T}} \\ \eta\varphi & \eta\bar{\psi} & \eta\psi^{\mathrm{T}} \\ \bar{\eta}^{\mathrm{T}}\varphi & \bar{\eta}^{\mathrm{T}}\bar{\psi} & \bar{\eta}^{\mathrm{T}}\psi^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \mathrm{Str}(\chi\bar{\phi}) = \mathrm{tr}\left(\chi\bar{\phi}\mathbb{1}_{(--)}\right) = \bar{\phi}\chi = \varphi J + \bar{\psi}\eta + \psi^{\mathrm{T}}\bar{\eta}^{\mathrm{T}}. \tag{5.13}$$

Zusätzlich führen wir noch STr ein, um auch die *Spur* über die kontinuierlichen Indizes zu bilden, also

$$\mathrm{STr}(\chi\bar{\phi}) = \int_x \mathrm{Str}\left(\chi(x)\bar{\phi}(x)\right) = \int_x \bar{\phi}(x)\chi(x). \tag{5.14}$$

Per Konvention legen wir fest, dass bei Multiplikation von Matrizen dieser Art auch über die kontinuierlichen *Indizes* gemäß

$$\big(M_1 M_2\big)(x,y) = \int_z M_1(x,z) M_2(z,y)$$

summiert wird. Mit der Konvention, diese Matrizen in ihrer Standardform als $\phi\bar{\chi}$ aufzufassen, brechen wir die übliche Konvention $\phi\chi^{\mathrm{T}}$ aus [6]. Der Grund liegt darin, dass die

Delta-Strukturen $\delta(x-y)$, $\delta(x,y)$, $\delta(y,x)$, $\delta(x,y)^{\mathrm{T}}$ und $\delta(y,x)^{\mathrm{T}}$ alle unterschiedlich sind und diese nicht beliebig gemischt werden können. Würden wir die übliche Konvention verwenden, wäre es schwierig, eine *Eins*, $\mathbb{1}(x,y)$, sinnvoll zu definieren. So könnten wir $\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\phi^{\mathrm{T}}(x)}\phi^{\mathrm{T}}(y)$ heranziehen, aber genauso sollte auch $\phi(x)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi(y)}$ die gleiche Eins liefern, dies ist aber nicht der Fall. In unserer Konvention erhalten wir hingegen

$$\mathbb{1}(x,y) = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\phi}(x)}\bar{\phi}(y) = \phi(x)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi(y)} = \frac{1}{\mathcal{M}}\begin{pmatrix}\delta(x-y) & 0 & 0\\ 0 & \delta(x,y) & 0\\ 0 & 0 & \delta(y,x)^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

$$\tag{5.16}$$

eine eindeutige Eins. Die *Deltas* sind immer für alle N_φ bzw. N_ψ Felder zu verstehen, sodass $\int_y \mathbb{1}(x,y)\phi(y) = \phi(x)$ gilt.

Mit diesen Überlegungen können wir

$$\begin{aligned}
\partial_k\Gamma_k[\hat{\phi}] =& -\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}W_k[\chi]}\Big[\partial_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}W_k[\chi]}\Big]_{\chi=\chi_{sup}} - \frac{1}{2}\int_x\int_y \hat{\bar{\phi}}(x)\big(\partial_k R_k(x,y)\big)\hat{\phi}(y)\\
=& \frac{1}{2}\int_x\int_y \Big(\big\langle\bar{\phi}(x)\big(\partial_k R_k(x,y)\big)\phi(y)\big\rangle_{k,\chi_{sup}} - \hat{\bar{\phi}}(x)\big(\partial_k R_k(x,y)\big)\hat{\phi}(y)\Big)\\
=& \frac{1}{2}\int_x\int_y \mathrm{Str}\Big[\Big(\big\langle\phi(y)\bar{\phi}(x)\big\rangle_{k,\chi_{sup}} - \hat{\phi}(y)\hat{\bar{\phi}}(x)\Big)\big(\partial_k R_k(x,y)\big)\Big]\\
=& \frac{1}{2}\mathrm{STr}\Big[\Big(\big\langle\phi\bar{\phi}\big\rangle_{k,\chi_{sup}} - \hat{\phi}\hat{\bar{\phi}}\Big)\big(\partial_k R_k\big)\Big]
\end{aligned}$$

herleiten. Die linke Matrix entspricht der verbundenen Zwei-Punkt-Funktion und kann durch funktionale Variation des Funktionals W

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}W_k^{(2)}(x,y)\mathbb{1}_{(--)} =& \ \mathrm{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\chi}(x)}W_k[\chi]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\chi(y)}\bigg|_{\chi=\chi_{sup}}\mathbb{1}_{(--)} = \mathrm{i}\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\chi}(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}W_k[\chi]}\int\mathcal{D}\phi\ \bar{\phi}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_k[\phi,\chi]}\bigg|_{\chi=\chi_{sup}}\\
=& \ \big\langle\phi(x)\bar{\phi}(y)\big\rangle_{k,\chi_{sup}} - \hat{\phi}(x)\hat{\bar{\phi}}(y)
\end{aligned}$$

berechnet werden.

Jetzt benötigen wir noch einen Zusammenhang zwischen $W_k^{(2)}$ und Γ_k. Dazu variieren wir die effektive Wirkung und finden

$$\begin{aligned}
\Gamma_k[\hat{\phi}]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\hat{\phi}(y)} =& \ \bar{\chi}_{sup}(y) + \int_z\left(\hat{\bar{\phi}}(z)\mathbb{1}_{(--)} - \frac{W_k[\chi]\overleftarrow{\delta}}{\delta\chi(z)}\bigg|_{\chi=\chi_{sup}}\right)\left(\frac{\chi_{sup}(z)\overleftarrow{\delta}}{\delta\hat{\phi}(y)}\right) - \Delta S_k[\hat{\phi}]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\hat{\phi}(y)}\\
=& \ \bar{\chi}_{sup}(y) - \int_z\hat{\bar{\phi}}(z)R_k(z,y).
\end{aligned}$$

Daraus ersehen wir nun

$$\begin{aligned}\mathbb{1}(x,y) &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\chi}_{sup}(x)}\bar{\chi}_{sup}(y) = \int_z \left(\frac{\overrightarrow{\delta}\,\hat{\bar{\phi}}(z)}{\delta\bar{\chi}_{sup}(x)}\right)\left(\frac{\overrightarrow{\delta}\,\bar{\chi}_{sup}(y)}{\delta\hat{\bar{\phi}}(z)}\right) \\ &= \int_z W_k^{(2)}(x,z)\mathbb{1}_{(--)}\left(\Gamma_k^{(2)}(z,y) + R_k(z,y)\right), \quad \Gamma_k^{(2)}(x,y) = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\hat{\bar{\phi}}(x)}\Gamma_k[\hat{\phi}]\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\hat{\phi}(y)},\end{aligned}$$

den gesuchten Zusammenhang. So ergibt sich die Flussgleichung endgültig zu

$$\partial_k\Gamma_k[\hat{\phi}] = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{STr}\left(\left(\Gamma_k^{(2)} + R_k\right)^{-1}(\partial_k R_k)\right). \tag{5.17}$$

Im Prinzip haben wir damit eine analytische Gleichung, die es uns ermöglicht, den Fluss der Kopplungen der effektiven Wirkung exakt zu verfolgen. Da diese Gleichung aber üblicherweise nicht exakt lösbar ist, arbeitet man in speziellen *Trunkierungen* und vernachlässigt gewisse Terme im Sinne eine Potenzreihenentwicklung der Felder. Um die Ordnung nach den Potenzen zu vereinfachen, können wir noch einige Umformungen vornehmen. Dazu ist es wichtig zu wissen, dass für Matrizen ε, die in einem gewissen Sinne *klein* sind,

$$(\mathbb{1} - \varepsilon)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n$$

gilt. Diese Identität ist formal zu verstehen und ist nur dann korrekt, wenn die Summe auch konvergiert.

Wenn wir nun $\Gamma_k^{(2)} + R_k$ in einen feldfreien Anteil $\mathcal{P}_k$ und einen feldabhängigen $\mathcal{F}_k$

$$\Gamma_k^{(2)} + R_k = \mathcal{P}_k + \mathcal{F}_k \tag{5.18}$$

zerlegen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_k\Gamma_k[\hat{\phi}] &= \frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{STr}\left[(\mathcal{P}_k + \mathcal{F}_k)^{-1}\,\partial_k R_k\right] = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\mathrm{STr}\left[\left(\mathbb{1} + \mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k\right)^{-1}\mathcal{P}_k^{-1}\partial_k R_k\right] \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\mathrm{STr}\left[\mathcal{P}_k^{-1}\partial_k R_k\left(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k\right)^n\right],\end{aligned} \tag{5.19}$$

die gesuchte Darstellung der Flussgleichung.

6 Flussgleichung im Gross-Neveu-Modell

In diesem Kapitel werden wir den Fluss der Kopplung $\tilde{g}_k$ im Gross-Neveu-Modell auf einem konstant gekrümmten Hintergrund in drei Dimensionen berechnen. Dabei werden wir uns auf den Fall großer Fermionenzahlen einschränken. Die Wirkung S ist in diesem Modell durch

$$S[\psi,\bar{\psi}] = \int_x \left(\bar{\psi}(x) \nabla\!\!\!/ \psi(x) + \frac{\tilde{g}}{2N_\psi} \big(\bar{\psi}(x)\psi(x)\big)^2 \right) \tag{6.1}$$

gegeben, dabei ist $\tilde{g}$ die Kopplungskonstante. Zur Verkürzung schreiben wir nur ψ und meinen damit aber alle Fermionen $\psi^{(i)}$. So steht $\bar{\psi}\psi$ für $\sum\limits_{i=1}^{N_\psi} \bar{\psi}_{(i)}\psi^{(i)}$ und analog für $\bar{\psi}\nabla\!\!\!/\psi$.

Wir arbeiten mit der Trunkierung

$$\Gamma_k[\psi,\bar{\psi}] = \int_x \left(Z_\psi \bar{\psi}(x) \nabla\!\!\!/ \psi(x) + \frac{\tilde{g}_k}{2N_\psi} \big(\bar{\psi}(x)\psi(x)\big)^2 \right). \tag{6.2}$$

Hier ist Z_ψ die Wellenfunktionsrenormierung für die Spinoren ψ und $\tilde{g}_k$ die renormierte Kopplungskonstante.

Bei unseren Rechnungen sind diese leicht überprüfbaren Integralidentitäten für hinreichend schnell abfallende Spinoren

(i) $\displaystyle \int_x \bar{\psi}(x)\nabla\!\!\!/\psi(x) = -\int_x \big(\nabla_\mu \bar{\psi}(x)\big)\gamma^\mu(x)\psi(x)$

(ii) $\displaystyle \nabla\!\!\!/_{(x)} \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} = -\left(\nabla_\mu^{(y)} \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}}\right)\gamma^\mu(y)$

(iii) $\displaystyle \big(\nabla\!\!\!/^{\mathrm{T}}_{(x)}\big)^n \frac{\delta(y,x)^{\mathrm{T}}}{\mathcal{M}} = \left[(-1)^n \nabla\!\!\!/^n_{(y)} \frac{\delta(y,x)}{\mathcal{M}}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \nabla\!\!\!/^{\mathrm{T}} = \gamma^{\mu\,\mathrm{T}}\nabla_\mu^{\mathrm{T}}, \quad \nabla_\mu^{\mathrm{T}}\bar{\psi}^{\mathrm{T}} = \partial_\mu \bar{\psi}^{\mathrm{T}} - \Gamma_\mu^{\mathrm{T}}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}$

sehr nützlich.

Den Regulator wählen wir als

$$R_k(x,y) = R_k^\psi(x,y) = Z_\psi \begin{pmatrix} \nabla\!\!\!/ r(\tau) & 0 \\ 0 & \nabla\!\!\!/^{\mathrm{T}} r\left(\tau^{\mathrm{T}}\right) \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y), \quad \tau = \frac{\nabla\!\!\!/^2}{k^2}, \tag{6.3}$$

sodass

$$\begin{aligned} \Delta S_k[\psi,\bar{\psi}] &= \frac{1}{2}\int_x\int_y \big(\bar{\psi}(x), \psi^{\mathrm{T}}(x)\big) R_k(x,y) \begin{pmatrix} \psi(y) \\ \bar{\psi}^{\mathrm{T}}(y) \end{pmatrix} \\ &= Z_\psi \int_x \bar{\psi}(x)\nabla\!\!\!/ r(\tau)\psi(x) = Z_\psi \int_x \psi^{\mathrm{T}}(x)\nabla\!\!\!/^{\mathrm{T}} r(\tau^{\mathrm{T}})\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x) \end{aligned}$$

gilt.

Als Erstes berechnen wir $\Gamma_k^{(2)}$ und finden

$$
\begin{aligned}
\Gamma_k^{(2)}(x,y) = {} & Z_\psi \begin{pmatrix} \not{\nabla} & 0 \\ 0 & \not{\nabla}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y) \\
& - \frac{\tilde{g}_k}{N_\psi} \begin{pmatrix} -\left[\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\mathrm{I} + \psi(x)\bar{\psi}(x)\right] & \psi(x)\psi^{\mathrm{T}}(x) \\ \bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\bar{\psi}(x) & \left[\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\mathrm{I} + \psi(x)\bar{\psi}(x)\right]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y).
\end{aligned}
$$

Die Zerlegung nach dem feldabhängigen $\mathcal{F}_k$ und feldunabhängigen Anteil $\mathcal{P}_k$, nach (5.18), liefert

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_k(x,y) = {} & - \frac{\tilde{g}_k}{N_\psi} \begin{pmatrix} -\left[\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\mathrm{I} + \psi(x)\bar{\psi}(x)\right] & \psi(x)\psi^{\mathrm{T}}(x) \\ \bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\bar{\psi}(x) & \left[\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\mathrm{I} + \psi(x)\bar{\psi}(x)\right]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y) \\
\mathcal{P}_k(x,y) = {} & Z_\psi \begin{pmatrix} \not{\nabla}\left(\mathrm{I} + r(\tau)\right) & 0 \\ 0 & \not{\nabla}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{I} + r(\tau^{\mathrm{T}})\right) \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y) \\
= {} & Z_\psi k \begin{pmatrix} \sqrt{\tau}\left(\mathrm{I} + r(\tau)\right) & 0 \\ 0 & \sqrt{\tau^{\mathrm{T}}}\left(\mathrm{I} + r(\tau^{\mathrm{T}})\right) \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y).
\end{aligned}
$$

Formal lautet das Inverse von $\mathcal{P}_k$ dann

$$
\mathcal{P}_k^{-1}(x,y) = \frac{1}{Z_\psi k} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\tau}\left(\mathrm{I}+r(\tau)\right)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\tau^{\mathrm{T}}}\left(\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})\right)} \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y).
$$

Wir benötigen zusätzlich die Ableitung des Regulators

$$
\begin{aligned}
\partial_k R_k(x,y) = {} & \frac{\partial_k Z_\psi}{Z_\psi} R_k(x,y) + Z_\psi \partial_k \begin{pmatrix} \not{\nabla} r(\tau) & 0 \\ 0 & \not{\nabla}^{\mathrm{T}} r(\tau^{\mathrm{T}}) \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y) \\
= {} & - \begin{pmatrix} \eta_\psi \sqrt{\tau} r(\tau) + 2 Z_\psi \sqrt{\tau}\, \tau\, r'(\tau) & 0 \\ 0 & \eta_\psi \sqrt{\tau^{\mathrm{T}}} r(\tau^{\mathrm{T}}) + 2 Z_\psi \sqrt{\tau^{\mathrm{T}}}\, \tau^{\mathrm{T}}\, r(\tau^{\mathrm{T}}) \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y)
\end{aligned}
$$

mit $r'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} r(x)$ und $\eta_\psi = -k\partial_k \ln Z_\psi$.

Zur Berechnung des Flusses der Kopplung $\tilde{g}_k$ betrachten wir erneut die linke Seite und erkennen, dass mit unserer Trunkierung in (5.19) lediglich der Term zu $n = 2$ einen Beitrag liefern kann. Daher sind für die Flussgleichung nur die Terme

$$
\left(\mathcal{P}_k^{-1} \partial_k R_k\right)(x,y) = -\frac{1}{Z_\psi k} \begin{pmatrix} \eta_\psi \frac{r(\tau)}{\mathrm{I}+r(\tau)} + 2 Z_\psi \frac{\tau\, r'(\tau)}{\mathrm{I}+r(\tau)} & 0 \\ 0 & \eta_\psi \frac{r(\tau^{\mathrm{T}})}{\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})} + 2 Z_\psi \frac{\tau^{\mathrm{T}}\, r'(\tau^{\mathrm{T}})}{\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})} \end{pmatrix} \mathbb{1}(x,y)
$$

und $\left(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k\right)^2(x,y) = \mathfrak{D}(x,y)$ wichtig. Es ist zu beachten, dass wegen der Superspur nur die Diagonalterme von $\mathfrak{D}$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{11}(x,y) = \left(\frac{\tilde{g}_k}{N_\psi k}\right)^2 \Bigg(& \frac{1}{\sqrt{\tau}\big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)} \left[\bar{\psi}(x)\psi(x)\mathrm{I} + \psi(x)\bar{\psi}(x)\right] \times \\
& \times \frac{1}{\sqrt{\tau}\big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)} \left[\bar{\psi}(x)\psi(x)\mathrm{I} + \psi(x)\bar{\psi}(x)\right] \\
& + \frac{1}{\sqrt{\tau}\big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)} \psi(x)\psi^{\mathrm{T}}(x) \frac{1}{\sqrt{\tau^{\mathrm{T}}}\big(\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})\big)} \bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\bar{\psi}(x) \Bigg) \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} \\
\mathfrak{D}_{22}(x,y) = \left(\frac{\tilde{g}_k}{N_\psi k}\right)^2 \Bigg(& \frac{1}{\sqrt{\tau^{\mathrm{T}}}\big(\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})\big)} \left[\bar{\psi}(x)\psi(x)\mathrm{I} - \bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\psi^{\mathrm{T}}(x)\right] \times \\
& \times \frac{1}{\sqrt{\tau^{\mathrm{T}}}\big(\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})\big)} \left[\bar{\psi}(x)\psi(x)\mathrm{I} - \bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\psi^{\mathrm{T}}(x)\right] \\
& + \frac{1}{\sqrt{\tau^{\mathrm{T}}}\big(\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})\big)} \bar{\psi}^{\mathrm{T}}(x)\bar{\psi}(x) \frac{1}{\sqrt{\tau}\big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)} \psi(x)\psi^{\mathrm{T}}(x) \Bigg) \frac{\delta(y,x)^{\mathrm{T}}}{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

relevant sind.

Wenn wir uns nun auf den Fall $N_\psi \to \infty$ einschränken, dann verbleiben in $\mathfrak{D}$ nur

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{11}(x,y) \to & \left(\frac{\tilde{g}_k}{N_\psi k}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\tau}\big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)} \big(\bar{\psi}(x)\psi(x)\big)\mathrm{I} \frac{1}{\sqrt{\tau}\big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)} \big(\bar{\psi}(x)\psi(x)\big) \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} \\
\mathfrak{D}_{22}(x,y) \to & \left(\frac{\tilde{g}_k}{N_\psi k}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\tau^{\mathrm{T}}}\big(\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})\big)} \big(\bar{\psi}(x)\psi(x)\big)\mathrm{I} \frac{1}{\sqrt{\tau^{\mathrm{T}}}\big(\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})\big)} \big(\bar{\psi}(x)\psi(x)\big) \frac{\delta(y,x)^{\mathrm{T}}}{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

die Anteile zur I. Damit können wir den gesuchten Teil der Flussgleichung explizit zu

$$\partial_k \int_x \frac{\tilde{g}_k}{2N_\psi} \big(\bar{\psi}(x)\psi(x)\big) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int_x \int_z \operatorname{Str}\left[\left(\mathcal{P}_k^{-1}\partial_k R_k\right)(x,z)\mathfrak{D}(z,y)\right]_{y=x}$$

ausschreiben. Das Ergebnis von $\partial_k \tilde{g}_k$ ist unabhängig von der Wahl der Felder $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$. Daher nutzen wir konstante Spinoren $\psi(x) \equiv \Psi$ und $\bar{\psi}(x) \equiv \bar{\Psi}$, um die Rechnung analytisch durchführen zu können. Die wichtigste Eigenschaft dieser so gewählten Spinoren ist $\nabla_\mu(\bar{\Psi}\Psi) = 0$. Somit vertauschen τ und $\bar{\Psi}\Psi$ miteinander, sodass wir

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{11}(x,y) &= \left(\frac{\tilde{g}_k}{N_\psi k}\right)^2 \big(\bar{\Psi}\Psi\big)^2 \tau^{-1} \big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)^{-2} \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} \\
\mathfrak{D}_{22}(x,y) &= \left(\frac{\tilde{g}_k}{N_\psi k}\right)^2 \big(\bar{\Psi}\Psi\big)^2 \big(\tau^{\mathrm{T}}\big)^{-1} \big(\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})\big)^{-2} \frac{\delta(y,x)^{\mathrm{T}}}{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

erhalten.

Bis hierhin haben wir nur durch die Trunkierung und $N_\psi \to \infty$ an Allgemeinheit verloren. Jedoch haben wir keine Einschränkungen an die Dimension oder die Art des gekrümmten Raums getroffen. Die folgenden Berechnungen werden wir auf $d = 3$ und $R < 0$

einschränken, da wir den Propagator in 4.2 nur für diesen Fall berechnet haben. Die Lösung existiert aber auch für beliebige maximal symmetrische Räume, vgl. [15]. Daher könnte das Ergebnis noch verallgemeinert werden, indem die folgenden Schritte völlig analog mit der allgemeineren Lösung des Propagators durchgeführt werden. In dieser Arbeit beschränken wir uns jedoch nur auf diesen Spezialfall, da dieser besonders interessant für Graphen ist.

Die gewählte Trunkierung können wir als Entwicklung nach Ableitungen von Z_ψ betrachten, vgl. [7] und [4]. Zu führender Ordnung ist daher $\eta_\psi = 0$ und wir setzen $Z_\psi = 1$.

Die linke Seite der Flussgleichung lautet in unserem Fall

$$\partial_k \int_x \frac{\tilde{g}_k}{2N_\psi}\big(\bar{\psi}(x)\psi(x)\big)^2 = \frac{\partial_k \tilde{g}_k}{2N_\psi}\big(\bar{\Psi}\Psi\big)^2 V_x, \quad V_x = \int_x 1,$$

dabei ist V_x das raumzeitliche Volumen. Die rechte Seite können wir zu

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}}{2}\int_x\int_z \operatorname{Str}\left[\left(\mathcal{P}_k^{-1}\partial_k R_k\right)(x,z)\mathfrak{D}(z,y)\right]_{y=x} \\
&\quad = -\frac{\mathrm{i}}{k}\left(\frac{\tilde{g}_k}{N_\psi k}\right)^2\big(\bar{\Psi}\Psi\big)^2\int_x \Bigg(\operatorname{Str}\left[r'(\tau)\big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)^{-3}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}}\right]_{y=x} \\
&\quad\quad + \operatorname{Str}\left[r'(\tau^{\mathrm{T}})\big(\mathrm{I}+r(\tau^{\mathrm{T}})\big)^{-3}\frac{\delta(y,x)^{\mathrm{T}}}{\mathcal{M}}\right]_{y=x}\Bigg) \\
&\quad = -2\frac{\mathrm{i}}{k}\left(\frac{\tilde{g}_k}{N_\psi k}\right)^2\big(\bar{\Psi}\Psi\big)^2\int_x \operatorname{Str}\left[r'(\tau)\big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)^{-3}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}}\right]_{y=x}
\end{aligned}$$

vereinfachen. Für die konkrete Rechnung wählen wir den Callan-Symanzik-Regulator

$$r(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x}} - 1 \quad \text{und} \quad r'(x) = \frac{1}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x-1}}. \tag{6.4}$$

Damit können wir den Term

$$\begin{aligned}
r'(\tau)\big(\mathrm{I}+r(\tau)\big)^{-3}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}-\tau\right)^{-2}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}s\, s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\tau}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} \\
&= -\frac{k^4}{2}\int_0^\infty \mathrm{d}s\, s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sk^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\nabla\!\!\!/^2}\frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}}
\end{aligned}$$

durch seine Laplace-Transformierte ausdrücken. Wenn wir nun die Differentialgleichung des Propagators K zu $\nabla\!\!\!/^2$ aus Kapitel 4.2

$$\partial_s K = \mathrm{i}\nabla\!\!\!/^2 K \quad \text{und} \quad \lim_{s\searrow 0} K = \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}}$$

betrachten, dann können wir die Lösung sofort als

$$K = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\nabla^2} \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} \tag{6.5}$$

angeben. Andererseits kennen wir die Lösung von K auch schon explizit, sodass wir

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\nabla^2} \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} = K = \frac{\kappa}{2\cos\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{d_G}{\sin\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} - \mathrm{i} \frac{\kappa}{\cos\left(\frac{\kappa d_G}{2}\right)} \right) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{s}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{d_G^2}{4s}} U(x,y)$$

ableiten können. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\partial_k \tilde{g}_k = & -\mathrm{i}\frac{4\tilde{g}_k^2}{V_x N_\psi k^3} \int_x \mathrm{Str}\left[r'(\tau)\big(\mathrm{I} + r(\tau)\big)^{-3} \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} \right]_{y=x} \\
= & \,\mathrm{i}\frac{2\tilde{g}_k^2 k}{V_x N_\psi} \int_0^\infty \mathrm{d}s \int_x s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sk^2}\, \mathrm{Str}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\nabla^2} \frac{\delta(x,y)}{\mathcal{M}} \right]_{y=x} \\
= & \,\mathrm{i}\frac{2\tilde{g}_k^2 k}{V_x N_\psi} \int_0^\infty \mathrm{d}s \int_x s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sk^2}\, \mathrm{Str}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{1}{s} - \mathrm{i}\frac{\kappa^2}{2} \right) \mathrm{I}_{N_\psi \times N_\psi} \right] \\
= & -\mathrm{i}\frac{4\tilde{g}_k^2 k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \sqrt{s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sk^2} \left(\frac{1}{s} - \mathrm{i}\frac{\kappa^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

für den Fluss der Kopplungskonstanten. Das ausstehende Integral können wir mit der Substitution $t = \sqrt{s}k$ zu

$$\text{(i)} \quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sk^2} = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{k} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{(ii)} \quad -\mathrm{i}\frac{\kappa^2}{2} \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \sqrt{s}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sk^2} = -\mathrm{i}\frac{\kappa^2}{2} \left(\left[\mathrm{i}\frac{\sqrt{s}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sk^2}}{k^2} \right]_{s=0}^\infty - \mathrm{i}\frac{1}{2k^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}sk^2} \right) = -\frac{\kappa^2}{4k^3} \sqrt{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

berechnen. Damit finden wir nun endgültig für den Fluss von $\tilde{g}_k$

$$\partial_k \tilde{g}_k = -\frac{\tilde{g}_k^2}{2\pi} \left(1 - \frac{\kappa^2}{4k^2} \right) = -\frac{\tilde{g}_k^2}{2\pi} \left(1 + \lambda^2 \frac{\Lambda_0^2}{k^2} \right), \tag{6.6}$$

wobei wir $\lambda^2 = -\frac{\kappa^2}{4\Lambda_0^2} \geq 0$ definiert haben. Dabei ist $\kappa^2 = \frac{R}{6} \leq 0$ zu beachten. Dieses Ergebnis ist konsistent zum bereits bekannten Ergebnis im flachen Raum, vgl. [7] und [4].

Diese Gleichung können wir direkt integrieren und erhalten für die dimensionslose Kopplung $\bar{g}_k = k\tilde{g}_k$ und ihre Beta-Funktion $\beta_{\bar{g}}$

$$\beta_{\bar{g}} = k\partial_k \bar{g}_k = \bar{g}_k - \frac{\bar{g}_k^2}{2\pi}\left(1 + \lambda^2 \frac{\Lambda_0^2}{k^2}\right) \tag{6.7}$$

$$\bar{g}_k^{-1} = \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{\Lambda_0}{k}\right) - \frac{\lambda^2\Lambda_0^2}{2\pi k^2}\left(1 - \frac{k}{\Lambda_0}\right) + \bar{g}_{\Lambda_0}^{-1}\frac{\Lambda_0}{k}, \tag{6.8}$$

dabei ist $\bar{g}_{\Lambda_0}^{-1} = \bar{g}_{k=\Lambda_0}^{-1}$.

Mit diesem Ergebnis können wir nun einige interessante Aussagen über das System gewinnen. Zunächst können wir die Beta-Funktion $\beta_{\bar{g}}$ der dimensionslosen Kopplung $\bar{g}_k$ für verschiedene Werte von $\lambda^2 \frac{\Lambda_0^2}{k^2}$ als Funktion von $\bar{g}_k$ grafisch darstellen.

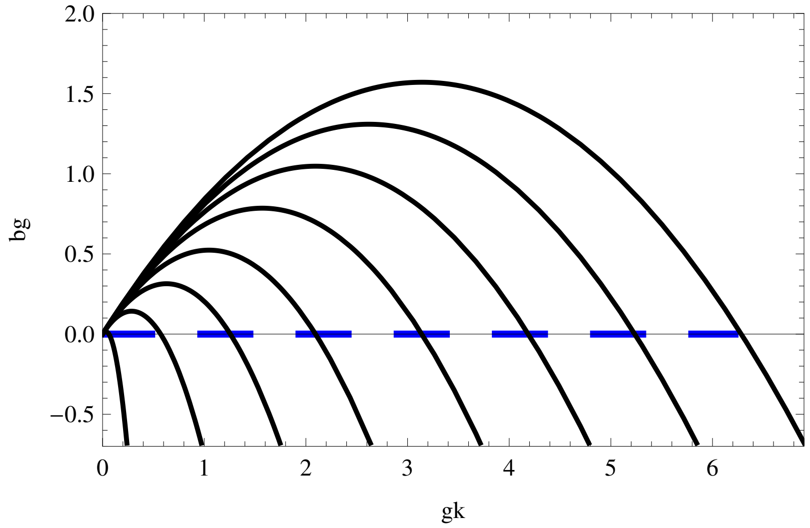

Abb. 1: Grafische Darstellung des Flusses $\beta_{\bar{g}}$ als Funktion von $\bar{g}_k$ für verschiedene Werte der *Krümmung* $\lambda^2 \frac{\Lambda_0^2}{k^2}$ (von rechts nach links: 0; 0,2; 0,5; 1; 2; 4; 10). Neben dem gaußschen Fixpunkt existiert ein nicht gaußscher, der mit wachsender *Krümmung* gegen den gaußschen Fixpunkt läuft. Im Falle verschwindender *Krümmung* wird im blau markierten Bereich keine Masse erzeugt, wie im Text ausgeführt.

Bei der Analyse der Beta-Funktion müssen wir berücksichtigen, dass wir bei einer UV-Skala $k = \Lambda_0$ beginnen und den Fluss der Kopplung bis hin zu $k = 0$ verfolgen. Das bedeutet, dass eine negative Beta-Funktion für ein Wachstum der Kopplung bei einem Schritt dk steht. So erkennen wir, dass im Flachen im Bereich zwischen den beiden Fixpunkten, gegeben durch $\beta_{\bar{g}} = 0$ (in Abb. 1: blau gestrichelte Linie), die Kopplung gegen Null laufen und im Bereich rechts des zweiten Fixpunktes $\bar{g}_* = 2\pi$ beliebig groß wird. Sobald wir aber eine Krümmung zulassen, müssen wir bei einem Renormierungsschritt dk auch die Zunahme des Terms $\lambda^2 \frac{\Lambda_0^2}{k^2}$ mit einbeziehen, sodass in jedem Fall die Kopplung auf einer endlichen Skala k_c divergiert. Es ist bekannt, dass das Divergieren der Kopplung mit einem Bruch der diskreten chiralen Symmetrie einhergeht.

Durch die chirale Symmetriebrechung wird dynamisch eine Masse für die Fermionen erzeugt. In [10] wurde gezeigt, dass in Mean-Field-Näherung die erzeugte Masse gleich der endlichen Renormierungsskala k_c ist, bei der die zugehörige Kopplung divergiert, $\bar{g}_k \to \infty$, $k \searrow k_c$. Diese Skala können wir völlig analytisch in Einheiten der Gitterdiskretisierung $\bar{k}_c = \frac{k_c}{\Lambda_0}$ bestimmen. Wir finden

$$\begin{aligned} 0 = 2\pi \bar{k}_c^2 \bar{g}_{k_c}^{-1} &= \bar{k}_c^2 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \pi \bar{g}_{\Lambda_0}^{-1}\right)\bar{k}_c - \lambda^2 \\ \Rightarrow \bar{k}_c &= \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \pi \bar{g}_{\Lambda_0}^{-1} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{2} - \pi \bar{g}_{\Lambda_0}^{-1}\right)^2 + \lambda^2}, \end{aligned} \tag{6.9}$$

wobei wir nur das positive Vorzeichen der Wurzel berücksichtigen müssen, da die Renormierungsskala nicht negativ ist. Wir sehen sofort, dass für $\lambda^2 \neq 0$ die kritische Skala immer größer als Null ist und daher für beliebige Startwerte $\bar{g}_{\Lambda_0}$ der Kopplung eine Masse erzeugt wird. Im Gegensatz dazu wird im Flachen, also für $\lambda^2 = 0$, nur eine Masse erzeugt, falls $\bar{g}_{\Lambda_0}$ größer als der Wert des nicht gaußschen Fixpunktes $\bar{g}_* = 2\pi$ ist.

In Abb. 2 unterscheiden wir die drei wesentlichen Bereiche, in die sich die Funktion $\bar{k}_c$ von λ^2 entsprechend ihrer Abhängigkeit von $\bar{g}_{\Lambda_0}$ einordnen lässt.

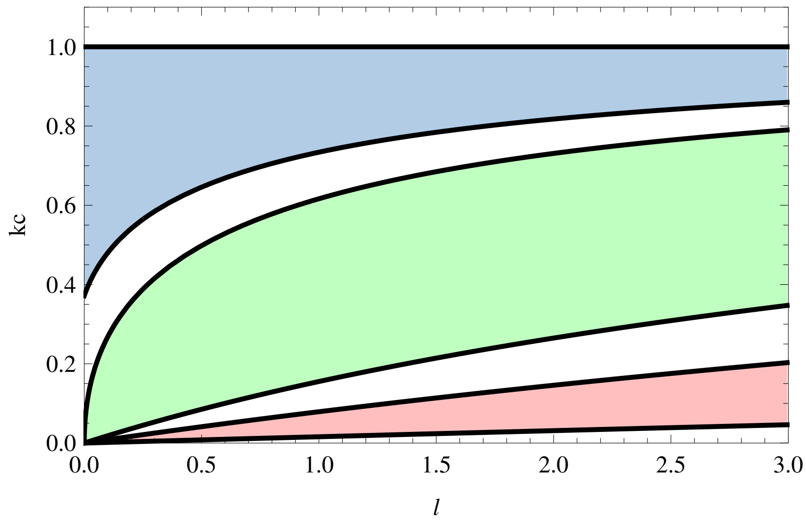

Abb. 2: Grafische Darstellung der kritischen Skala $\bar{k}_c$ als Funktion der Krümmung λ^2 in Abhängigkeit des Startwertes der Kopplung $\bar{g}_{\Lambda_0}^{-1}$ (von oben nach unten: 0; 0,1; 0,16; 1; 2; 10). Es bilden sich drei Regime $\bar{g}_{\Lambda_0} > \bar{g}_*$ (blau), $\bar{g}_{\Lambda_0} \lesssim \bar{g}_*$ (grün) und $\bar{g}_{\Lambda_0} \ll \bar{g}_*$ (rot) aus.

So verschiebt sich für $\bar{g}_{\Lambda_0} > \bar{g}_*$ (in Abb. 2: blau markiert) der bei $\lambda^2 = 0$ angenommene Wert von $\bar{k}_c$ um $2\pi(\bar{g}_*^{-1} - \bar{g}_{\Lambda_0}^{-1})$. Bei dieser Wahl der Parameter wird die Massenerzeugung, die auch schon im Flachen auftritt, durch die Krümmung verstärkt. Für $\bar{g}_{\Lambda_0} \lesssim \bar{g}_*$ (in Abb. 2: grün markiert) finden wir nichtlineare, vollständig durch die Krümmung generierte Massenerzeugung. Ebenfalls wird für $\bar{g}_{\Lambda_0} \ll \bar{g}_*$ (in Abb. 2: rot markiert) ausschließlich durch die Krümmung eine Masse erzeugt, jedoch näherungsweise linear, beachte $\lambda^2 \sim |R|$. Diese Bereiche sind natürlich nicht streng getrennt, sondern gehen fließend ineinander über. In der Grafik dient die strenge Trennung lediglich zur Illustration der drei Regime.

Die Rechnung bestätigt die physikalische Erwartung, denn die Erzeugung der Masse wird durch die Infrarot-Moden der Fermionen bestimmt. Da im negativ gekrümmten Raum mehr *Platz* ist, dominieren diese Moden mit zunehmender Krümmung.

7 Fazit

In der vorliegenden Arbeit ist es uns gelungen, die Idee von A. Weldon, die Fermionen ohne VF in gekrümmten Räumen zu beschreiben, näher zu beleuchten und weiter auszuarbeiten. Während Weldon sich in [5] auf vier Dimensionen beschränkt, konnten wir den Formalismus auf zwei und drei Dimensionen erweitern.

Dazu postulierten wir im Sinne der ART aus der speziell relativistischen Formulierung der Dirac- und Klein-Gordon-Gleichung einen kovarianten allgemein relativistischen Ansatz. Dieser führte uns mit Hilfe des Weldon-Theorems und eines weiteren, im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Theorems auf das Verschwinden der kovarianten Ableitung der Gamma-Matrizen, sodass wir daraus den Spin-Zusammenhang und anschließend auch die Spin-Metrik konstruieren konnten. Damit haben wir alle zur Beschreibung fermionischer Systeme auf gekrümmten Hintergründen notwendigen Größen, abgesehen von externen Feldern, nur durch die Vorgabe der Gamma-Matrizen in einer beliebigen Darstellung angegeben und es ist somit nicht mehr notwendig, ein spezielles Koordinatensystem auszuwählen.

Ebenfalls zeigte sich im Rahmen der Untersuchungen, dass sich die Gamma-Matrizen als fundamentaler Freiheitsgrad für die Gravitation eignen könnten. So waren wir in der Lage, aus einer Eichtheorie-Überlegung eine Wirkung linear in der Feldstärke zu konstruieren und es stellte sich heruas, dass sie identisch zur Einstein-Hilbert-Wirkung ist. Aus dieser Wirkung konnten wir die bekannten einsteinschen Feldgleichungen durch Variation nach den Gamma-Matrizen ableiten.

Weiterhin ermittelten wir den Propagator zum Dirac-Operator im dreidimensionalen, maximal symmetrischen, negativ gekrümmten Raum und bestimmten so das Inverse der über die Gamma-Matrizen kontrahierten kovarianten Ableitung. Damit gelang es uns, den Fluss der Kopplungskonstanten im Gross-Neveu-Modell auf einem entsprechend gekrümmten Hintergrund mit Hilfe der Flussgleichung zu berechnen. Wir konnten dadurch die Fixpunktstruktur der Kopplung analysieren und insbesondere die Erzeugung der Fermionenmasse durch den Bruch der diskreten chiralen Symmetrie quantitativ auswerten und grafisch darstellen. Es zeigte sich, dass für jeden Startwert der Kopplung eine Masse für die Fermionen erzeugt wird, sobald eine echt negative Krümmung auftritt. Möglicherweise kann diese Untersuchung bei der Erforschung der Natur von Graphen einen Beitrag leisten.

In künftigen Rechnungen könnte dieses Ergebnis mit Hilfe des allgemeineren Propagators aus [15] auf beliebige Dimensionen und positive Krümmungen verallgemeinert werden. Dabei ist zu erwarten, dass das Phänomen der Massenerzeugung in positiv gekrümmten, maximal symmetrischen Räumen nur für speziell gewählte Startwerte der Kopplung auftreten wird, da die dafür verantwortlichen Infrarot-Moden der Fermionen weniger *Platz* haben.

Noch unbeantwortet bleibt die Frage, ob die Gamma-Matrizen nun fundamental sind oder nicht und welche Ergebnisse sich damit erzielen lassen. So wäre es möglich, nicht lineare Feldstärken in die Lagrange-Funktion aufzunehmen. Ebenfalls wäre es denkbar, in der CA Krümmungsterme zuzulassen oder zu erlauben, dass die kovariante Ableitung der Gamma-Matrizen nicht verschwindet. Alternativ könnte auch nach einem Weg gesucht werden, wie man mit Hilfe des Energie-Impuls-Tensors die Energieerhaltung wieder einbindet, um die CA zu konstruieren, wie es ursprünglich mit der Klein-Gordon-Gleichung und der Dirac-Gleichung gedacht war.

A Mathematik der Gamma-Matrizen

A.1 Poincaré-Algebra

Wir werden hier die Algebra der Poincaré-Gruppe

$$\mathrm{i}L = \left\{(\Lambda, \mathrm{a}) : \mathrm{a} \in \mathbb{R}^d, \Lambda \in L(\mathbb{R}^d), \Lambda^a_{\cdot c}\Lambda^b_{\cdot d}\eta^{cd} = \eta^{ab}\right\}$$

ableiten. Dazu untersuchen wir die infinitesimalen Transformationen

$$\eta_{ac}\Lambda^c_{\cdot b} = (\eta\Lambda)_{ab} \simeq \eta_{ab} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{cd}(M_{cd})_{ab}$$

und erhalten aus (3.7) unter Vernachlässigung quadratischer Terme in ω

$$\begin{aligned}
&\eta_{ab} = \Lambda_{ac}\Lambda_{bd}\eta^{cd} = \left(\eta_{ac} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{ef}(M_{ef})_{ac}\right)\left(\eta_{bd} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{gh}(M_{gh})_{bd}\right)\eta^{cd} \\
\Rightarrow \quad & 0 = \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{ef}(M_{ef})_{ab} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{gh}(M_{gh})_{ba} \quad \forall\omega \\
\Rightarrow \quad & (M_{ab})_{cd} = -(M_{ab})_{dc},
\end{aligned}$$

die Antisymmetrie jeder Matrix M_{ab}. Damit können wir als Basis dieser Matrizen

$$(M_{ab})_{cd} = -\mathrm{i}(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})$$

wählen, sodass

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{cd}(M_{cd})^a_{\cdot b} = \frac{1}{2}\omega^{cd}\left(\delta^a_c\eta_{db} - \eta_{cb}\delta^a_d\right) = \omega^a_{\cdot b}$$

gilt und damit $\Lambda^a_{\cdot b} = (\mathrm{e}^\omega)^a_{\cdot b} = \exp\left[(\mathrm{i}/2)\omega^{cd}M_{cd}\right]^a_{\cdot b}$ erfüllt ist. Daraus finden wir nun mit

$$\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}]^e_{\cdot f} \\
&= (M_{ab})^e_{\cdot g}(M_{cd})^g_{\cdot f} - (M_{cd})^e_{\cdot g}(M_{ab})^g_{\cdot f} \\
&= \left(\delta^e_c\eta_{dg} - \eta_{cg}\delta^e_d\right)\left(\delta^g_a\eta_{bf} - \eta_{af}\delta^g_b\right) - \left(\delta^e_a\eta_{bg} - \eta_{ag}\delta^e_b\right)\left(\delta^g_c\eta_{df} - \eta_{cf}\delta^g_d\right) \\
&= \delta^e_c\eta_{da}\eta_{bf} - \delta^e_c\eta_{db}\eta_{af} - \eta_{ca}\delta^e_d\eta_{bf} + \eta_{cb}\delta^e_d\eta_{af} - \delta^e_a\eta_{bc}\eta_{df} + \delta^e_a\eta_{bd}\eta_{cf} + \eta_{ac}\delta^e_b\eta_{df} - \eta_{ad}\delta^e_b\eta_{cf} \\
&= \eta_{ac}\left(\delta^e_b\eta_{df} - \eta_{bf}\delta^e_d\right) + \eta_{bd}\left(\delta^e_a\eta_{cf} - \eta_{af}\delta^e_c\right) - \eta_{ad}\left(\delta^e_b\eta_{cf} - \eta_{bf}\delta^e_c\right) - \eta_{bc}\left(\delta^e_a\eta_{df} - \eta_{af}\delta^e_d\right) \\
&= \mathrm{i}\left(\eta_{ac}M_{bd} + \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{ad}M_{bc} - \eta_{bc}M_{ad}\right)^e_{\cdot f}
\end{aligned}$$

die Algebra

$$[M_{ab}, M_{cd}] = \mathrm{i}\left(\eta_{ac}M_{bd} + \eta_{bd}M_{ac} - \eta_{ad}M_{bc} - \eta_{bc}M_{ad}\right)$$

für die Lorentz-Transformationen. Um die Matrix $\mathcal{S}_{Lor}(\Lambda)$ zu konstruieren, genügt dieser Teil der Algebra, wir leiten aber auch noch die anderen beiden Kommutatoren und damit die gesamte Poincaré-Algebra ab.

Da die Reihenfolge von zwei Lorentz-Boosts

$$(\mathbb{1}, \mathrm{a}_{(2)})(\mathbb{1}, \mathrm{a}_{(1)}) = (\mathbb{1}, \mathrm{a}_{(2)} + \mathrm{a}_{(1)}) = (\mathbb{1}, \mathrm{a}_{(1)})(\mathbb{1}, \mathrm{a}_{(2)})$$

keinen Einfluss auf das Ergebnis hat, die Boosts also eine abelsche Untergruppe bilden, ist die Algebra für die Boost-Generatoren

$$[P_a, P_b] = 0$$

unkompliziert. Um nun noch den Kommutator der Boosts und Transformationen ermitteln zu können, bilden wir

$$(\Lambda, 0)(\mathbb{1}, \mathrm{a})(\Lambda, 0)^{-1} = (\mathbb{1}, \Lambda\mathrm{a}),$$

wobei wir $(\Lambda, 0)^{-1} = (\Lambda^{-1}, 0)$ benutzt haben. Für die Generatoren bedeutet das infinitesimal, wieder unter Vernachlässigung der Terme quadratisch in ω,

$$\begin{aligned}
\big((\Lambda,0)(\mathbb{1},\mathrm{a})(\Lambda,0)^{-1}\big)^{a}_{\cdot\, b} &\simeq \left(\delta^a_e + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{cd}(M_{cd})^{a}_{\cdot\, e}\right)\left(\delta^e_g + \mathrm{i}\mathrm{a}^f(P_f)^{e}_{\cdot\, g}\right)\left(\delta^g_b - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{hi}(M_{hi})^{g}_{\cdot\, b}\right) \\
&= \delta^a_b + \mathrm{i}\mathrm{a}^f(P_f)^{a}_{\cdot\, b} + \frac{1}{2}\omega^{hi}\mathrm{a}^f\left((P_f)^{a}_{\cdot\, g}(M_{hi})^{g}_{\cdot\, b} - (M_{hi})^{a}_{\cdot\, g}(P_f)^{g}_{\cdot\, b}\right) \\
(\mathbb{1},\Lambda\mathrm{a})^{a}_{\cdot\, b} &\simeq \delta^a_b + \mathrm{i}\left(\delta^c_f + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{hi}(M_{hi})^{c}_{\cdot\, f}\right)\mathrm{a}^f(P_c)^{a}_{\cdot\, b} \\
&= \delta^a_b + \mathrm{i}\mathrm{a}^f(P_f)^{a}_{\cdot\, b} + \frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{hi}\mathrm{a}^f\left(\eta_{if}\delta^c_h - \eta_{hf}\delta^c_i\right)(P_c)^{a}_{\cdot\, b}
\end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$[P_a, M_{bc}] = \mathrm{i}\left(\eta_{ac}P_b - \eta_{ab}P_c\right),$$

den letzten Teil der Poincaré-Algebra.

A.2 Beweis zur Lorentz-Transformation der Gamma-Matrizen

Wir geben hier zusätzlich zum gruppentheoretischen Beweis von Gleichung (3.10) eine explizite Herleitung. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}_a(s) &= \mathcal{S}_{Lor}(\Lambda, s)\gamma_a\mathcal{S}^{-1}_{Lor}(\Lambda, s) \text{ mit} \\
\mathcal{S}_{Lor}(\Lambda, s) &= \exp\left(s\frac{1}{8}\omega^{ab}[\gamma_a, \gamma_b]\right),
\end{aligned}$$

eine (Lorentz-)Transformation mit einem zusätzlichen Parameter s. Wir differenzieren nach s

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}_a(s)}{\mathrm{d}s} &= \frac{1}{8}\omega^{bc}\mathcal{S}_{Lor}(\Lambda, s)\big[[\gamma_b, \gamma_c], \gamma_a\big]\mathcal{S}^{-1}_{Lor}(\Lambda, s) \\
&= \frac{1}{2}\omega^{bc}\mathcal{S}_{Lor}(\Lambda, s)\big(\eta_{ac}\gamma_b - \eta_{ab}\gamma_c\big)\mathcal{S}^{-1}_{Lor}(\Lambda, s) \\
&= \omega^{b}_{\cdot\, a}\tilde{\gamma}_b(s)
\end{aligned}$$

und finden eine Differentialgleichung erster Ordnung mit der Anfangsbedingung

$$\tilde{\gamma}_a(0) = \gamma_a$$

für $\tilde{\gamma}_a(s)$. Die eindeutige Lösung dieser Gleichung ist

$$\tilde{\gamma}_a(s) = (\mathrm{e}^{s\omega})^b{}_{\cdot\, a}\gamma_b,$$

damit erkennen wir für $s = 1$

$$\mathcal{S}_{Lor}(\Lambda)\gamma_a\mathcal{S}_{Lor}^{-1}(\Lambda) = \Lambda^b{}_{\cdot\, a}\gamma_b,$$

die gesuchte Gleichung (3.10).

A.3 Eigenschaften der Gamma-Matrizen

Wir werden hier häufig verwendete und hilfreiche Identitäten der Gamma-Matrizen tabellarisch zusammentragen und beweisen. Zudem unterscheiden wir an manchen Stellen zwischen beliebigen Dimensionen und geraden Dimensionen, da in geraden Dimensionen immer eine zusätzliche Matrix γ_* mit

$$\gamma_* = \frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_d}$$

auftritt, um eine vollständige Basis der Matrizen im Spinorraum angeben zu können. Die hermitesch konjugierten Gamma-Matrizen $\gamma_\mu^\dagger$ werden durch

$$\gamma_\mu^\dagger = -h\gamma_\mu h^{-1}$$

gebildet, dabei wählen wir h so, dass $h^\dagger = -h$ gilt, vgl. Kapitel 3.2.2. Dann finden wir für $\gamma_*^\dagger$

$$\begin{aligned}
\gamma_*^\dagger &= -(-1)^{d/2}\,\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}\,(\gamma^{\mu_d})^\dagger\ldots(\gamma^{\mu_1})^\dagger \\
&= -(-1)^{d/2}\,\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}(-1)^d h\gamma^{\mu_d}\ldots\gamma^{\mu_1}h^{-1} \;\|\; d \text{ ist gerade} \\
&= -(-1)^{d/2}\,h\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_d}h^{-1}\cdot(-1)^{\sum_{j=0}^{d-1} j} \;\|\; \sum_{j=0}^{d-1} j = \frac{d(d-1)}{2} \\
&= -(-1)^{d^2/2}\,h\gamma_* h^{-1} \;\|\; d \text{ ist gerade, also auch } \frac{d^2}{2} \\
&= -\,h\gamma_* h^{-1}
\end{aligned}$$

das gleiche Verhalten wie bei den Gamma-Matrizen.

- Matrixidentitäten in beliebigen Dimensionen

(i) $\{\gamma_\mu\gamma_\nu, \gamma_\lambda\} = \gamma_\mu\{\gamma_\nu, \gamma_\lambda\} - [\gamma_\mu, \gamma_\lambda]\gamma_\nu$ ‖ gilt sogar für beliebige Operatoren

(ii) $[\gamma_\mu\gamma_\nu, \gamma_\lambda] = \gamma_\mu\{\gamma_\nu, \gamma_\lambda\} - \{\gamma_\mu, \gamma_\lambda\}\gamma_\nu$ ‖ gilt sogar für beliebige Operatoren

$= 2g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - 2g_{\mu\lambda}\gamma_\nu$ ‖ gilt nur für die Gamma-Matrizen

(iii) $\big\{[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_\lambda\big\} = 4g_{\mu\lambda}\gamma_\nu - 4g_{\nu\lambda}\gamma_\mu + 2[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\gamma_\lambda$

(iv) $\big[[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_\lambda\big] = 4g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - 4g_{\mu\lambda}\gamma_\nu$

(v) $\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu = 2\left(g_{\alpha\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\nu}\gamma_\alpha + g_{\alpha\mu}\gamma_\nu\right)$

(vi) $[\gamma^\mu, \gamma_\alpha][\gamma^\alpha, \gamma_\nu] = 4(d-1)\delta^\mu_\nu + 2(d-2)[\gamma^\mu, \gamma_\nu]$

(vii) $\big[[\gamma_\mu, \gamma_\nu], [\gamma_\kappa, \gamma_\sigma]\big] = -4\big(g_{\mu\kappa}\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\sigma - g_{\mu\sigma}\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\kappa - g_{\nu\kappa}\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\sigma + g_{\nu\sigma}\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\kappa\big)[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$

- Matrixidentitäten in geraden Dimensionen

(i) $\{\gamma_*, \gamma^\nu\} = 0$

(ii) $\gamma^\nu\gamma_*\gamma_\nu = -d\gamma_*$

(iii) $\gamma_*^2 = \mathrm{I}$

(iv) $[\gamma_*, \gamma_\mu] = 2\gamma_*\gamma_\mu$

(v) $[\gamma_*\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 2g_{\mu\nu}\gamma_*$

(vi) $\{\gamma_*\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_*[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$

- Eigenschaften der Spuren in beliebigen Dimensionen

(i) $\operatorname{tr}\gamma_\mu = 0$

(ii) $\operatorname{tr}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = 0$

(iii) $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma_\nu) = d_\gamma\delta^\mu_\nu$

(iv) $\operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu) = 0$ nicht für $d = 3$

(v) $\operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu) = d_\gamma\left(g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\right)$

(vi) $\operatorname{tr}([\gamma_\alpha, \gamma_\beta][\gamma_\mu, \gamma_\nu]) = 4d_\gamma\left(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\right)$

- Eigenschaften der Spuren in geraden Dimensionen

(i) $\operatorname{tr}\gamma_* = 0$

(ii) $\operatorname{tr}(\gamma^\nu\gamma_*) = 0$

(iii) $\operatorname{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*) = 0$ nur für $d \geq 4$

(iv) $\operatorname{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*) = -d_\gamma\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}$ in $d = 2$

- Beweise zu den Matrixidentitäten in beliebigen Dimensionen

(i) $\{\gamma_\mu\gamma_\nu,\gamma_\lambda\} = \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda + \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu - \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu + \gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu = \gamma_\mu\{\gamma_\nu,\gamma_\lambda\} - [\gamma_\mu,\gamma_\lambda]\gamma_\nu$

(ii) $[\gamma_\mu\gamma_\nu,\gamma_\lambda] = \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda + \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu - \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\nu - \gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu = \gamma_\mu\{\gamma_\nu,\gamma_\lambda\} - \{\gamma_\mu,\gamma_\lambda\}\gamma_\nu$
$= 2g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - 2g_{\mu\lambda}\gamma_\nu$

(iii) $\big\{[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\gamma_\lambda\big\} = [\gamma_\mu,\gamma_\nu]\gamma_\lambda + \gamma_\lambda[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$ ‖ γ_λ nach rechts tauschen
$= [\gamma_\mu,\gamma_\nu]\gamma_\lambda + 2g_{\mu\lambda}\gamma_\nu - 2g_{\nu\lambda}\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda - 2g_{\nu\lambda}\gamma_\mu + 2g_{\mu\lambda}\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_\lambda$
$= 4g_{\mu\lambda}\gamma_\nu - 4g_{\nu\lambda}\gamma_\mu + 2[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\gamma_\lambda$

(iv) $\big[[\gamma_\mu,\gamma_\nu],\gamma_\lambda\big] = \big[\gamma_\mu\gamma_\nu,\gamma_\lambda\big] - \big[\gamma_\nu\gamma_\mu,\gamma_\lambda\big] = 4g_{\nu\lambda}\gamma_\mu - 4g_{\mu\lambda}\gamma_\nu$

(v) $\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu = 2g_{\alpha\nu}\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha + \gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu = 2\left(g_{\alpha\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\nu}\gamma_\alpha + g_{\alpha\mu}\gamma_\nu\right)$

(vi) $[\gamma^\mu,\gamma_\alpha][\gamma^\alpha,\gamma_\nu] = \gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma^\alpha\gamma_\nu - \gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\nu - \gamma^\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma^\alpha + \gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma_\nu\gamma^\alpha$
$= 4d\gamma^\mu\gamma_\nu - 6\gamma^\mu\gamma_\nu + 2\gamma_\nu\gamma^\mu = 4(d-1)\delta^\mu_\nu + 2(d-2)[\gamma^\mu,\gamma_\nu]$

(vii) $\big[[\gamma_\mu,\gamma_\nu],[\gamma_\kappa,\gamma_\sigma]\big] = \gamma_\mu\big[\gamma_\nu,[\gamma_\kappa,\gamma_\sigma]\big] + \big[\gamma_\mu,[\gamma_\kappa,\gamma_\sigma]\big]\gamma_\nu - (\mu \leftrightarrow \nu)$
$= -4\big(g_{\mu\kappa}\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\sigma - g_{\mu\sigma}\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\kappa - g_{\nu\kappa}\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\sigma + g_{\nu\sigma}\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\kappa\big)[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$

- Beweise zu den Matrixidentitäten in geraden Dimensionen

(i) wir wählen lokal inertiale Koordinaten und bilden
$\gamma'^a(x) = e_\nu^{\cdot\,a}(x)\gamma^\nu(x)$,
damit erhalten wir für γ_*

$$\begin{aligned}
\gamma_*(x) &= \tfrac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_d} && \| \ \gamma_* \text{ ist Skalar unter Koordinaten-}\\
&= \tfrac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}'_{a_1\ldots a_d}\gamma'^{a_1}\ldots\gamma'^{a_d} && \| \ \text{transformationen}\\
&= \tfrac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\varepsilon_{a_1\ldots a_d}\gamma'^{a_1}\ldots\gamma'^{a_d}\\
&= \mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}\gamma'^0\ldots\gamma'^{d-1}
\end{aligned}$$

und so für den Antikommutator

$$\begin{aligned}
\{\gamma_*,\gamma^\nu\} &= \{\gamma_*,\gamma'^a\}e^\nu_{\cdot\,a} && \| \ \text{da } \gamma'^a \text{ mit } d-1 \text{ Gamma-Matrizen anti-}\\
&= 0 && \| \ \text{vertauscht und } d \text{ gerade ist}
\end{aligned}$$

(ii) $\gamma^\nu\gamma_*\gamma_\nu = -\gamma^\nu\gamma_\nu\gamma_* = -d\gamma_*$

(iii) wir benutzen die Darstellung von γ_* aus dem Beweis zu (i)

$$\begin{aligned}
\gamma_*^2 &= \mathrm{i}^2(-\mathrm{i})^d\gamma'^0\ldots\gamma'^{d-1}\gamma'^0\ldots\gamma'^{d-1} && \| \ d \text{ gerade und } (\gamma'^0)^2 = -\mathrm{I}\\
&= (-1)^{d/2}\gamma'^1\ldots\gamma'^{d-1}\gamma'^1\ldots\gamma'^{d-1}(-1)^{d-1} && \| \ d-2 \text{ weitere Vertauschungen}\\
&= (-1)^{d/2}\,\mathrm{I}\,(-1)^{\sum_{j=1}^{d-1} j} = (-1)^{d^2/2}\mathrm{I}\\
&= \mathrm{I}
\end{aligned}$$

(iv) $[\gamma_*,\gamma_\mu] = \gamma_*\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma_* = 2\gamma_*\gamma_\mu$

(v) $[\gamma_*\gamma_\mu,\gamma_\nu] = \gamma_*\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_*\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}\gamma_*$

(vi) $\{\gamma_*\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = \gamma_*\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_*\gamma_\mu = \gamma_*[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$

- Beweise zu den Spuren in beliebigen Dimensionen:

(i) mit $\nu' \neq \mu$ und $\{\gamma^{\nu'}, \gamma^{\nu'}\} = 2g^{\nu'\nu'}\mathrm{I}$, keine Summe über ν', folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\gamma_\mu &= \tfrac{1}{g^{\nu'\nu'}}\operatorname{tr}\left(\gamma^{\nu'}\gamma^{\nu'}\gamma_\mu\right) && \|\ \text{ausnutzen der CA} \\ &= -\tfrac{1}{g^{\nu'\nu'}}\operatorname{tr}\left(\gamma^{\nu'}\gamma_\mu\gamma^{\nu'}\right) && \|\ \text{Zyklizität der Spur} \\ &= -\tfrac{1}{g^{\nu'\nu'}}\operatorname{tr}\left(\gamma_\mu\gamma^{\nu'}\gamma^{\nu'}\right) \\ &= -\operatorname{tr}\gamma_\mu = 0 \end{aligned}$$

(ii) $\operatorname{tr}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \operatorname{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) - \operatorname{tr}(\gamma_\nu\gamma_\mu) = 0 \ \|$ Zyklizität der Spur

(iii) $\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma_\nu) = \dfrac{1}{2}\operatorname{tr}\{\gamma^\mu, \gamma_\nu\} = \delta^\mu_\nu \operatorname{tr}\mathrm{I} = d_\gamma\delta^\mu_\nu$

(iv) für $d \geq 4$ wählen wir ν', mit $\nu' \notin \{\alpha, \beta, \mu\}$

aus $\{\gamma^{\nu'}, \gamma^{\nu'}\} = 2g^{\nu'\nu'}\mathrm{I}$, keine Summe über ν', folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu) &= \tfrac{1}{g^{\nu'\nu'}}\operatorname{tr}\left(\gamma^{\nu'}\gamma^{\nu'}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\right) && \|\ \text{ausnutzen der CA} \\ &= -\tfrac{1}{g^{\nu'\nu'}}\operatorname{tr}\left(\gamma^{\nu'}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma^{\nu'}\right) \\ &= -\tfrac{1}{g^{\nu'\nu'}}\operatorname{tr}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma^{\nu'}\gamma^{\nu'}\right) \\ &= -\operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu) = 0 \end{aligned}$$

für $d = 2$ bilden wir

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu) &= \operatorname{tr}(\gamma_*\gamma_*\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu) = -\operatorname{tr}(\gamma_*\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_*) \\ &= -\operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu) = 0 \end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu) &= 2g_{\mu\nu}\operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta) - \operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\mu) \\ &= 2d_\gamma g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - 2d_\gamma g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + 2d_\gamma g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - \operatorname{tr}(\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu) \\ &= d_\gamma\left(g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}\right) \end{aligned}$$

(vi)
$$\begin{aligned} \operatorname{tr}([\gamma_\alpha, \gamma_\beta][\gamma_\mu, \gamma_\nu]) &= 4\left(\tfrac{1}{4}\operatorname{tr}([\gamma_\alpha, \gamma_\beta][\gamma_\mu, \gamma_\nu]) + d_\gamma g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}\right) - 4d_\gamma g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} \\ &= 4\operatorname{tr}\left[\left(\tfrac{1}{2}\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} + \tfrac{1}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\right)\left(\tfrac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} + \tfrac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\right)\right] \\ &\quad -4d_\gamma g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} \qquad \|\ \text{verwenden von (v)} \\ &= 4d_\gamma\left(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\right) \end{aligned}$$

- Beweise zu den Spuren in geraden Dimensionen

$$
\begin{aligned}
\text{(i)}\quad \operatorname{tr}\gamma_* &= \frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}\operatorname{tr}\left(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_d}\right) && \parallel \text{Zyklizität der Spur}\\
&= \frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}\operatorname{tr}\left(\gamma^{\mu_d}\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_{d-1}}\right) && \parallel d-1 \text{ Indexvertauschungen}\\
&= -\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_d\mu_1\ldots\mu_{d-1}}\operatorname{tr}\left(\gamma^{\mu_d}\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_{d-1}}\right)\\
&= -\operatorname{tr}\gamma_* = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)}\quad \operatorname{tr}\left(\gamma^\nu\gamma_*\right) &= -\operatorname{tr}\left(\gamma_*\gamma^\nu\right) \parallel \text{vgl. Matrixidentitäten in geraden Dimensionen (i)}\\
&= -\operatorname{tr}\left(\gamma^\nu\gamma_*\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(iii)}\quad \operatorname{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*\right) &= \frac{1}{d}\operatorname{tr}\left(\gamma_\lambda\gamma^\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*\right)\\
&= \frac{1}{d}\left[2\operatorname{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*\right) - \operatorname{tr}\left(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma_*\right)\right]\\
&= \frac{1}{d}\left[2\operatorname{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*\right) - 2\operatorname{tr}\left(\gamma_\nu\gamma_\mu\gamma_*\right) + \operatorname{tr}\left(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\lambda\gamma_*\right)\right]\\
&= \frac{1}{d}\left[4\operatorname{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*\right) - \operatorname{tr}\left(\gamma_\lambda\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*\gamma^\lambda\right)\right]\\
&= \frac{4-d}{d}\operatorname{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*\right) = 0 \parallel \text{für } d \geq 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(iv)}\quad \operatorname{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_*\right) &= \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}\operatorname{tr}\left(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\right) = \frac{d_\gamma}{2}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}\left(g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - \delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\beta\delta_\nu^\alpha\right)\\
&= -d_\gamma\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

- Produkte der Basiselemente in $d = 4$

Wir geben tabellarisch die Produkte zwischen den Basiselementen an. Das Element links oben in der Tabelle wird mit dem Element der linken Spalte der jeweiligen Zeile von rechts multipliziert. Das Ergebnis drücken wir dann durch die Elemente der obersten Zeile aus. Dabei muss ggf. noch in der letzten Spalte und der letzten Zeile der antisymmetrische Teil bezüglich α und β sowie bezüglich κ und σ des Vorfaktors herausgezogen werden.

I	I	γ_*	γ_α	$\gamma_*\gamma_\alpha$	$[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$
I	1	0	0	0	0
γ_*	0	1	0	0	0
γ_κ	0	0	δ_κ^α	0	0
$\gamma_*\gamma_\kappa$	0	0	0	δ_κ^α	0
$[\gamma_\kappa,\gamma_\sigma]$	0	0	0	0	$\delta_\kappa^\alpha\delta_\sigma^\beta$

γ_*	I	γ_*	γ_α	$\gamma_*\gamma_\alpha$	$[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$
I	0	1	0	0	0
γ_*	1	0	0	0	0
γ_κ	0	0	0	δ_κ^α	0
$\gamma_*\gamma_\kappa$	0	0	δ_κ^α	0	0
$[\gamma_\kappa,\gamma_\sigma]$	0	0	0	0	$\frac{\mathrm{i}}{2}\tilde{\varepsilon}_{\kappa\sigma}{}^{\alpha\beta}$

γ_ρ	I	γ_*	γ_α	$\gamma_*\gamma_\alpha$	$[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$
I	0	0	δ_ρ^α	0	0
γ_*	0	0	0	$-\delta_\rho^\alpha$	0
γ_κ	$g_{\rho\kappa}$	0	0	0	$\frac{1}{2}\delta_\rho^\alpha\delta_\kappa^\beta$
$\gamma_*\gamma_\kappa$	0	$-g_{\rho\kappa}$	0	0	$-\frac{\mathrm{i}}{4}\tilde{\varepsilon}_{\rho\kappa}{}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}$
$[\gamma_\kappa,\gamma_\sigma]$	0	0	$2(g_{\rho\kappa}\delta_\sigma^\alpha - g_{\rho\sigma}\delta_\kappa^\alpha)$	$\mathrm{i}2\tilde{\varepsilon}_{\rho\kappa\sigma}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}$	0

$\gamma_*\gamma_\rho$	I	γ_*	γ_α	$\gamma_*\gamma_\alpha$	$[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$
I	0	0	0	δ_ρ^α	0
γ_*	0	0	$-\delta_\rho^\alpha$	0	0
γ_κ	0	$g_{\rho\kappa}$	0	0	$\frac{\mathrm{i}}{4}\tilde{\varepsilon}_{\rho\kappa}{}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}$
$\gamma_*\gamma_\kappa$	$-g_{\rho\kappa}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}\delta_\rho^\alpha\delta_\kappa^\beta$
$[\gamma_\kappa,\gamma_\sigma]$	0	0	$\mathrm{i}2\tilde{\varepsilon}_{\rho\kappa\sigma}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}$	$2(g_{\rho\kappa}\delta_\sigma^\alpha - g_{\rho\sigma}\delta_\kappa^\alpha)$	0

$[\gamma_\rho,\gamma_\lambda]$	I	γ_*	γ_α	$\gamma_*\gamma_\alpha$	$[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$
I	0	0	0	0	$\delta_\rho^\alpha\delta_\lambda^\beta$
γ_*	0	0	0	0	$\frac{\mathrm{i}}{2}\tilde{\varepsilon}_{\rho\lambda}{}^{\cdot\,\cdot\,\alpha\beta}$
γ_κ	0	0	$2\big(\delta_\rho^\alpha g_{\lambda\kappa} - \delta_\lambda^\alpha g_{\rho\kappa}\big)$	$\mathrm{i}2\tilde{\varepsilon}_{\rho\lambda\kappa}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}$	0
$\gamma_*\gamma_\kappa$	0	0	$\mathrm{i}2\tilde{\varepsilon}_{\rho\lambda\kappa}{}^{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\alpha}$	$2\big(\delta_\rho^\alpha g_{\lambda\kappa} - \delta_\lambda^\alpha g_{\rho\kappa}\big)$	0
$[\gamma_\kappa,\gamma_\sigma]$	$4(g_{\rho\sigma}g_{\lambda\kappa} - g_{\rho\kappa}g_{\lambda\sigma})$	$\mathrm{i}4\tilde{\varepsilon}_{\rho\lambda\kappa\sigma}$	0	0	$2\big(g_{\rho\kappa}g_{\lambda\alpha}g_{\sigma\beta} - g_{\rho\sigma}g_{\lambda\alpha}g_{\kappa\beta} - g_{\lambda\kappa}g_{\rho\alpha}g_{\sigma\beta} + g_{\lambda\sigma}g_{\rho\alpha}g_{\kappa\beta}\big)$

B Beweise der Theoreme

B.1 Beweis des Weldon-Theorems

Wir suchen eine Aussage zur Veränderung der Gamma-Matrizen unter einer infinitesimalen Variation der Metrik $\Delta g^{\mu\nu}$. Dabei werden wir das Weldon-Theorem beweisen. Wir beschränken diese Aussage auf zwei, drei und vier Dimensionen, das Ziel folgender Arbeiten kann es sein, dieses Theorem auf beliebige Dimensionen zu erweitern. Bei dem Beweis in vier Dimensionen halten wir uns an das Paper [5] von A. Weldon selbst, den Beweis in zwei und drei Dimensionen führen wir analog dazu. Zum Beweis des Theorems variieren wir die CA

$$\{\Delta\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \{\gamma^\mu, \Delta\gamma^\nu\} = 2\Delta g^{\mu\nu}\mathrm{I}$$

und müssen diese Gleichung effektiv nach den $\Delta\gamma^\mu$ auflösen. Wir benötigen eine geeignete Basis für die möglichen CA-Elemente, um die $\Delta\gamma^\mu$ zu parametrisieren.

Im flachen Raum ist es wohlbekannt, dass in der irreduziblen Darstellung die Gamma-Matrizen selbst, alle möglichen Kommutatoren der Gamma-Matrizen und das Einselement I eine vollständige Basis bilden. Dies gilt auch im gekrümmten Raum, da wir die Gamma-Matrizen des gekrümmten Raumes an jedem Punkt x durch

$$\gamma^\mu(x) = e^{\mu}_{\cdot a}(x)\gamma'^{a}(x),$$

eine Linearkombination von Gamma-Matrizen aus dem flachen Raum, darstellen können.

Daher parametrisieren wir je nach Dimension

$$\Delta\gamma^\mu = \begin{cases} 2A^\mu\gamma_* + 8\,T^{\mu\alpha}\gamma_\alpha & , d=2 \\ 8\,T^{\mu\alpha}\gamma_\alpha & , d=3 \\ 2A^\mu\gamma_* + 8\,T^{\mu\alpha}\gamma_\alpha + B^{\mu\alpha}\gamma_*\gamma_\alpha + C^{\mu\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] & , d=4 \end{cases}$$

die Variation der Gamma-Matrizen. Wir haben von vornherein Anteile zur I weggelassen, da $\gamma^\mu + \Delta\gamma^\mu$ wieder ein Element der CA sein soll und damit $0 = \mathrm{tr}(\gamma^\mu + \Delta\gamma^\mu) = \mathrm{tr}\,\Delta\gamma^\mu$ gelten muss. Wir führen den Beweis für jede Dimension gesondert.

Für $d = 2$ erhalten wir durch Spurbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left((\Delta\gamma^\mu)\gamma^\nu\right) &= 2A^\mu\,\mathrm{tr}(\gamma_*\gamma^\nu) + 8\,T^{\mu\alpha}\,\mathrm{tr}(\gamma_\alpha\gamma^\nu) = 8d_\gamma T^{\mu\nu} \\ \Rightarrow T^{\{\mu\nu\}} &= \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) = \frac{1}{16d_\gamma}\,\mathrm{tr}\left((\Delta\gamma^\mu)\gamma^\nu + (\Delta\gamma^\nu)\gamma^\mu\right) \\ &= \frac{1}{32d_\gamma}\,\mathrm{tr}\left(\{\Delta\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \{\Delta\gamma^\nu, \gamma^\mu\}\right) = \frac{1}{16d_\gamma}\Delta g^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}\,\mathrm{I} \\ &= \frac{1}{16}\Delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Das setzen wir in $\Delta\gamma^\mu$ ein und gelangen mit $T^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu})$

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma^\mu &= 2A^\mu\gamma_* + 8\,T^{\mu\alpha}\gamma_\alpha = A^\alpha 2\delta^\mu_\alpha\gamma_* + 8\,(T^{\{\mu\alpha\}} + T^{[\mu\alpha]})\gamma_\alpha \\
&= \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})\gamma_\nu + A^\alpha\{\gamma_\alpha,\gamma^\mu\}\gamma_* + T^{[\alpha\beta]}4(\delta^\mu_\alpha\gamma_\beta - \delta^\mu_\beta\gamma_\alpha) \\
&= \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})\gamma_\nu - A^\alpha[\gamma_\alpha\gamma_*,\gamma^\mu] - T^{[\alpha\beta]}\big[[\gamma_\alpha,\gamma_\beta],\gamma^\mu\big] \\
&= \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})\gamma_\nu - [M,\gamma^\mu],\ \ M = A^\alpha\gamma_\alpha\gamma_* + T^{[\alpha\beta]}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]
\end{aligned}$$

zu dem gesuchten Theorem.

In drei Dimensionen gehen wir ähnlich vor, zunächst bilden wir wieder die Spur

$$\operatorname{tr}\big((\Delta\gamma^\mu)\gamma^\nu\big) = 8\,T^{\mu\alpha}\operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma^\nu) = 8d_\gamma T^{\mu\nu} \Rightarrow T^{\{\mu\nu\}} = \frac{1}{16}\Delta g^{\mu\nu}$$

und finden damit auf die gleiche Weise

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma^\mu &= 8(T^{\{\mu\alpha\}} + T^{[\mu\alpha]})\gamma_\alpha = \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})\gamma_\nu - T^{[\alpha\beta]}\big[[\gamma_\alpha,\gamma_\beta],\gamma^\mu\big] \\
&= \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})\gamma_\nu - [M,\gamma^\mu],\ \ M = T^{[\alpha\beta]}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]
\end{aligned}$$

das gesuchte Theorem.

Der Beweis in vier Dimensionen wird etwas aufwendiger als in zwei oder drei. Der erste Teil ist identisch, wir bilden wieder die Spur unter Verwendung $d_\gamma = 4$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}\big((\Delta\gamma^\mu)\gamma^\nu\big) &= 2A^\mu\operatorname{tr}(\gamma_*\gamma^\nu) + 8\,T^{\mu\alpha}\operatorname{tr}(\gamma_\alpha\gamma^\nu) + B^{\mu\alpha}\operatorname{tr}(\gamma_*\gamma_\alpha\gamma^\nu) + C^{\mu\alpha\beta}\operatorname{tr}([\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\gamma^\nu) \\
&= 32\,T^{\mu\nu} \Rightarrow T^{\{\mu\nu\}} = \frac{1}{16}\Delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

und sehen wieder, dass der symmetrische Teil von $T^{\mu\nu}$ durch die Variation der Metrik bestimmt ist und somit noch der antisymmetrische Teil mit sechs freien Parametern $T^{[\mu\nu]}$ bleibt.

Für den Beweis benötigen wir aber noch Aussagen über die Parameter $B^{\mu\alpha}$ und $C^{\mu\alpha\beta}$. Aus der Antisymmetrie von $[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$ in den Indizes können wir $C^{\mu\alpha\beta} = C^{\mu[\alpha\beta]}$ fordern. Setzen wir unsere Parametrisierung für $\Delta\gamma^\mu$ in die variierte CA ein

$$\begin{aligned}
2(\Delta g^{\mu\nu})\mathrm{I} &= \{\Delta\gamma^\mu,\gamma^\nu\} + \{\gamma^\mu,\Delta\gamma^\nu\} \\
&= 2A^\mu\{\gamma_*,\gamma^\nu\} + 8\,T^{\mu\alpha}\{\gamma_\alpha,\gamma^\nu\} + B^{\mu\alpha}\{\gamma_*\gamma_\alpha,\gamma^\nu\} + C^{\mu\alpha\beta}\big\{[\gamma_\alpha,\gamma_\beta],\gamma^\nu\big\} \\
&\quad + 2A^\nu\{\gamma_*,\gamma^\mu\} + 8\,T^{\nu\alpha}\{\gamma_\alpha,\gamma^\mu\} + B^{\nu\alpha}\{\gamma_*\gamma_\alpha,\gamma^\mu\} + C^{\nu\alpha\beta}\big\{[\gamma_\alpha,\gamma_\beta],\gamma^\mu\big\} \\
&= 32\,T^{\{\mu\nu\}}\mathrm{I} + \gamma_* X^{\mu\nu} + Y^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

und definieren die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
X^{\mu\nu} &= B^{\mu\alpha}[\gamma_\alpha,\gamma^\nu] + B^{\nu\alpha}[\gamma_\alpha,\gamma^\mu] \\
Y^{\mu\nu} &= C^{\mu\alpha\beta}\big\{[\gamma_\alpha,\gamma_\beta],\gamma^\nu\big\} + C^{\nu\alpha\beta}\big\{[\gamma_\alpha,\gamma_\beta],\gamma^\mu\big\},
\end{aligned}$$

dann erhalten wir

$$0 = \gamma_* X^{\mu\nu} + Y^{\mu\nu}.$$

Da $\gamma_* X^{\mu\nu} = X^{\mu\nu}\gamma_*$ und $\gamma_* Y^{\mu\nu} = -Y^{\mu\nu}\gamma_*$ gilt, folgt auch

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_*(\gamma_* X^{\mu\nu} + Y^{\mu\nu})\gamma_* = X^{\mu\nu}\gamma_* + \gamma_* Y^{\mu\nu}\gamma_* \\ &= \gamma_* X^{\mu\nu} - Y^{\mu\nu} \end{aligned}$$

und damit müssen sowohl die $X^{\mu\nu}$ als auch die $Y^{\mu\nu}$ einzeln verschwinden.

Zur Einschränkung des Parameters $B^{\mu\alpha}$ bilden wir

$$\begin{aligned} 0 &= [X^{\mu\nu}, \gamma_\nu] = B^{\mu\alpha}\big[[\gamma_\alpha, \gamma^\nu], \gamma_\nu\big] + B^{\nu\alpha}\big[[\gamma_\alpha, \gamma^\mu], \gamma_\nu\big] \\ &= 4B^{\mu\alpha}(\delta^\nu_\nu \gamma_\alpha - g_{\alpha\nu}\gamma^\nu) + 4B^{\nu\alpha}(\delta^\mu_\nu \gamma_\alpha - g_{\alpha\nu}\gamma^\mu) = 16B^{\mu\alpha}\gamma_\alpha - 4(g_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta})\gamma^\mu \\ \Rightarrow B^{\mu\nu} &= \frac{1}{16}\operatorname{tr}(4B^{\mu\alpha}\gamma_\alpha\gamma^\nu) = \frac{g_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta}}{16}\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = -2Pg^{\mu\nu},\ P = -\frac{1}{8}g_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

und erkennen, dass $B^{\mu\nu}$ nur einen freien Parameter P besitzt.

Um nun noch $C^{\mu[\alpha\beta]}$ soweit wie nötig einzuschränken, definieren wir Z^ν als

$$Z^\nu = \frac{1}{4}\{Y^{\mu\nu}, \gamma_\mu\} = \frac{1}{4}C^{\mu\alpha\beta}\Big\{\big\{[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\nu\big\}, \gamma_\mu\Big\} + \frac{1}{4}C^{\nu\alpha\beta}\Big\{\big\{[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\mu\big\}, \gamma_\mu\Big\}$$

und finden mit den Identitäten der Gamma-Matrizen von oben

$$\begin{aligned} Z^\nu &= \frac{1}{2}C^{\mu\alpha\beta}\Big(2\delta^\nu_\alpha\{\gamma_\beta, \gamma_\mu\} - 2\delta^\nu_\beta\{\gamma_\alpha, \gamma_\mu\} + \big\{[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\gamma^\nu, \gamma_\mu\big\}\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}C^{\nu\alpha\beta}\Big(2\delta^\mu_\alpha\{\gamma_\beta, \gamma_\mu\} - 2\delta^\mu_\beta\{\gamma_\alpha, \gamma_\mu\} + \big\{[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\gamma^\mu, \gamma_\mu\big\}\Big) \\ &= \frac{1}{2}C^{\mu\alpha\beta}\Big(4(\delta^\nu_\alpha g_{\mu\beta} - \delta^\nu_\beta g_{\mu\alpha})\mathrm{I} + [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\{\gamma^\nu, \gamma_\mu\} - \big[[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma_\mu\big]\gamma^\nu\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}C^{\nu\alpha\beta}\Big([\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\{\gamma^\mu, \gamma_\mu\} - \big[[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma_\mu\big]\gamma^\mu\Big) \\ &= 3C^{\nu\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] + 2C^{\mu\alpha\beta}\big((\delta^\nu_\alpha g_{\mu\beta} - \delta^\nu_\beta g_{\mu\alpha})\mathrm{I} - g_{\mu\beta}\gamma_\alpha\gamma^\nu + g_{\mu\alpha}\gamma_\beta\gamma^\nu\big) \\ &= 3C^{\nu\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] + C^{\mu\alpha\beta}\big(g_{\mu\beta}[\gamma^\nu, \gamma_\alpha] - g_{\mu\alpha}[\gamma^\nu, \gamma_\beta]\big) \end{aligned}$$

einen Ausdruck, mit dem wir den Parameter $C^{\mu\alpha\beta}$ über $Z^\nu = 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{16}\operatorname{tr}\big(Z^\nu[\gamma^\kappa, \gamma^\rho]\big) \\ &= 3C^{\nu\alpha\beta}\big(\delta^\rho_\alpha\delta^\kappa_\beta - \delta^\kappa_\alpha\delta^\rho_\beta\big) + C^{\mu\alpha\beta}g_{\mu\beta}\big(g^{\nu\rho}\delta^\kappa_\alpha - g^{\nu\kappa}\delta^\rho_\alpha\big) - C^{\mu\alpha\beta}g_{\mu\alpha}\big(g^{\nu\rho}\delta^\kappa_\beta - g^{\nu\kappa}\delta^\rho_\beta\big) \\ &= 6C^{\nu[\rho\kappa]} + 2\Big(g_{\mu\alpha}C^{\mu[\kappa\alpha]}\Big)g^{\nu\rho} + 2\Big(g_{\mu\alpha}C^{\mu[\alpha\rho]}\Big)g^{\nu\kappa} \end{aligned}$$

auf vier Parameter V^κ einschränken können,

$$C^{\nu[\rho\kappa]} = \frac{1}{2}\big(g^{\nu\rho}V^\kappa - g^{\nu\kappa}V^\rho\big),\ \ V^\kappa = \frac{2}{3}g_{\mu\alpha}C^{\mu[\alpha\kappa]}.$$

Damit haben wir jetzt insgesamt nur noch 15 freie Parameter, die wir in der Matrix M mit

$$M = P\gamma_* + V^\alpha\gamma_\alpha + A^\alpha\gamma_\alpha\gamma_* + T^{[\alpha\beta]}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$$

zusammenfassen können. Wenn wir nun alle ermittelten Einschränkungen an die Parameter in die Matrix $\Delta\gamma^\mu$ einsetzen, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma^\mu &= 2A^\mu\gamma_* + 8(T^{\{\mu\alpha\}} + T^{[\mu\alpha]})\gamma_\alpha + B^{\mu\alpha}\gamma_*\gamma_\alpha + C^{\mu[\alpha\beta]}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \\
&= \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})\gamma_\nu + T^{[\alpha\beta]}4(\delta^\mu_\alpha\gamma_\beta - \delta^\mu_\beta\gamma_\alpha) + A^\alpha 2\delta^\mu_\alpha\gamma_* - 2P\gamma_*\gamma^\mu + \frac{1}{2}\big(g^{\mu\alpha}V^\beta - g^{\mu\beta}V^\alpha\big)[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \\
&= \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})\gamma_\nu - T^{[\alpha\beta]}\big[[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\mu\big] - A^\alpha[\gamma_\alpha\gamma_*, \gamma^\mu] - P[\gamma_*, \gamma^\mu] - V^\alpha[\gamma_\alpha, \gamma^\mu] \\
&= \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})\gamma_\nu - [M, \gamma^\mu]
\end{aligned}$$

das gesuchte Theorem.

Damit haben wir das Theorem, wie es im Paper [5] von A. Weldon steht, bewiesen. Genau genommen haben wir aber nur gezeigt, dass es notwendig ist, eine solche Darstellung der $\Delta\gamma^\mu$ zu fordern. Zusätzlich zeigen wir jetzt noch, dass ein bijektiver Zusammenhang zwischen M mit $\operatorname{tr} M = 0$ und den Variationen $\Delta\gamma^\mu$ existiert, wenn wir uns die Variation $\Delta g^{\mu\nu}$ vorgeben. Dazu lösen wir das Theorem nach M auf, indem wir wieder eine volle Basis für M

$$M = \begin{cases} P\gamma_* + V^\alpha\gamma_\alpha & , d = 2 \\ V^\alpha\gamma_\alpha & , d = 3 \\ P\gamma_* + V^\alpha\gamma_\alpha + A^\alpha\gamma_*\gamma_\alpha + T^{\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] & , d = 4 \end{cases}$$

analog zu $\Delta\gamma^\mu$ ansetzen. Nun untersuchen wir die Transformation $M \to \big[[M, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big]$ und erkennen

$$\begin{aligned}
d = 2\text{:}\quad \big[[M, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] &= P\big[[\gamma_*, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] + V^\alpha\big[[\gamma_\alpha, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] = 8P\gamma_* + 4\,V^\alpha\gamma_\alpha \\
d = 3\text{:}\quad \big[[M, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] &= V^\alpha\big[[\gamma_\alpha, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] = 8\,V^\alpha\gamma_\alpha \\
d = 4\text{:}\quad \big[[M, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] &= P\big[[\gamma_*, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] + V^\alpha\big[[\gamma_\alpha, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] \\
&\quad + A^\alpha\big[[\gamma_*\gamma_\alpha, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] + T^{\alpha\beta}\Big[\big[[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\mu\big], \gamma_\mu\Big] \\
&= 16P\gamma_* + 12\,V^\alpha\gamma_\alpha + 4A^\alpha\gamma_*\gamma_\alpha + 8T^{\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta],
\end{aligned}$$

dass diese Transformation die Basis-Elemente untereinander nicht mischt. Somit ist aus

$$\big[[M, \gamma^\mu], \gamma_\mu\big] = \frac{1}{2}(\Delta g^{\mu\nu})[\gamma_\nu, \gamma_\mu] - [\Delta\gamma^\mu, \gamma_\mu] = -[\Delta\gamma^\mu, \gamma_\mu]$$

die Matrix M rekonstruierbar.

B.2 Beweis des zweiten Theorems

Der Beweis des zweiten Theorems läuft sehr ähnlich ab wie der des Weldon-Theorems. Wir zeigen, dass

$$\gamma^\mu[\Delta\Gamma_\mu, \gamma^\nu] = 0$$

die Gültigkeit von $\Delta\Gamma_\mu = s_\mu \mathrm{I}$ impliziert, wobei s_μ eine beliebige nicht spinorwertige Funktion sein darf. Dazu parametrisieren wir

$$\Delta\Gamma_\mu = \begin{cases} s_\mu \mathrm{I} + P_\mu\gamma_* + V_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma_\alpha & , d = 2 \\ s_\mu \mathrm{I} + V_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma_\alpha & , d = 3 \\ s_\mu \mathrm{I} + P_\mu\gamma_* + V_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma_\alpha + A_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma_*\gamma_\alpha + T_\mu^{\cdot\,\alpha\beta}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta] & , d = 4 \end{cases}$$

ganz analog zum Vorhergehenden. Den Beweis führen wir für die einzelnen Dimensionen getrennt.

In zwei Dimensionen finden wir durch Einsetzen

$$0 = \gamma^\mu[M_\mu, \gamma^\nu] = P_\mu\gamma^\mu[\gamma_*, \gamma^\nu] + V_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma^\mu[\gamma_\alpha, \gamma^\nu] = -2P_\mu\gamma_*\gamma^\mu\gamma^\nu + V_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma^\mu[\gamma_\alpha, \gamma^\nu]$$

und anschließende Spurbildung

$$0 = \mathrm{tr}\left(\gamma^\mu[M_\mu, \gamma^\nu]\right) = -2P_\mu\,\mathrm{tr}(\gamma_*\gamma^\mu\gamma^\nu) + V_\mu^{\cdot\,\alpha}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^\mu[\gamma_\alpha, \gamma^\nu]\right) = 4d_\gamma P_\mu \tilde{\varepsilon}^{\mu\nu}$$

unter Verwendung von $\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$, dass $P_\mu = 0$ gilt.

Weiterhin erhalten wir aus

$$0 = \mathrm{tr}\left(\gamma^\lambda\gamma^\mu[M_\mu, \gamma^\nu]\right)g_{\nu\kappa} = V_\mu^{\cdot\,\alpha}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^\lambda\gamma^\mu[\gamma_\alpha, \gamma_\kappa]\right) = 2d_\gamma V_\mu^{\cdot\,\alpha}(\delta^\lambda_\kappa\delta^\mu_\alpha - \delta^\lambda_\alpha\delta^\mu_\kappa),$$

dass für die $V_\mu^{\cdot\,\alpha}$

$$V_\mu^{\cdot\,\mu}\delta^\lambda_\kappa = V_\kappa^{\cdot\,\lambda}$$

gelten muss. Daran erkennen wir sofort, dass $V_\mu^{\cdot\,\alpha}$ keine Nebendiagonalelemente haben darf. Wenn wir nun noch zusätzlich $\lambda = \kappa$ wählen, aber nicht summieren, dann folgt

$$\begin{aligned} V_{\kappa'}^{\cdot\,\kappa'} = V_\mu^{\cdot\,\mu} &= \sum_{\mu=0}^{1} V_{\mu'}^{\cdot\,\mu'} \quad \forall\kappa \\ &= 2V_{\kappa'}^{\cdot\,\kappa'} = 0 \end{aligned}$$

insbesondere $V_\mu^{\cdot\,\alpha} = 0$. Damit haben wir gezeigt, dass die Aussage in zwei Dimensionen gilt.

Den Beweis in drei Dimensionen erhalten wir aus den Aussagen für zwei Dimensionen, wir bilden direkt

$$0 = \mathrm{tr}\left(\gamma^\lambda\gamma^\mu[M_\mu, \gamma^\nu]\right)g_{\nu\kappa} = V_\mu^{\cdot\,\alpha}\,\mathrm{tr}\left(\gamma^\lambda\gamma^\mu[\gamma_\alpha, \gamma_\kappa]\right) = 2d_\gamma V_\mu^{\cdot\,\alpha}(\delta^\lambda_\kappa\delta^\mu_\alpha - \delta^\lambda_\alpha\delta^\mu_\kappa),$$

sodass wir erneut

$$V_\mu^{\cdot\,\mu}\delta_\kappa^\lambda = V_\kappa^{\cdot\,\lambda}$$

gewinnen und damit völlig analog

$$\begin{aligned} V_{\kappa'}^{\cdot\,\kappa'} = V_\mu^{\cdot\,\mu} &= \sum_{\mu=0}^{2} V_{\mu'}^{\cdot\,\mu'} \quad \forall\kappa \\ &= 3V_{\kappa'}^{\cdot\,\kappa'} = 0 \end{aligned}$$

folgern können. Somit folgt auch $V_\mu^{\cdot\,\alpha} = 0$ und so das Gesuchte.

Der Beweis für $d = 4$ ist ein wenig aufwendiger, wir setzen zunächst die Parametrisierung ein

$$\begin{aligned} \gamma^\mu[M_\mu, \gamma^\nu] &= P_\mu\gamma^\mu[\gamma_*, \gamma^\nu] + V_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma^\mu[\gamma_\alpha, \gamma^\nu] + A_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma^\mu[\gamma_*\gamma_\alpha, \gamma^\nu] + T_\mu^{\cdot\,\alpha\beta}\gamma^\mu\big[[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\nu\big] \\ &= -2P_\mu\gamma_*\gamma^\mu\gamma^\nu + V_\mu^{\cdot\,\alpha}\gamma^\mu[\gamma_\alpha, \gamma^\nu] + 2A_\mu^{\cdot\,\nu}\gamma^\mu\gamma_* + 8\,T_\mu^{\cdot\,\alpha\nu}\gamma^\mu\gamma_\alpha \end{aligned}$$

und haben dabei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T_\mu^{\cdot\,\alpha\beta} = T_\mu^{\cdot\,[\alpha\beta]}$ gewählt, da der symmetrische Teil nichts beitragen kann. Wenn wir nun

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{tr}\big(\gamma^\lambda\gamma^\mu[M_\mu, \gamma^\nu]\big)g_{\nu\kappa} \\ &= -2P_\mu \operatorname{tr}(\gamma^\lambda\gamma_*\gamma^\mu\gamma_\kappa) + V_\mu^{\cdot\,\alpha}\operatorname{tr}\big(\gamma^\lambda\gamma^\mu[\gamma_\alpha, \gamma_\kappa]\big) + 2A_{\mu\kappa}\operatorname{tr}(\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma_*) + 8\,T_{\mu\cdot\kappa}^{\cdot\,\alpha}\operatorname{tr}(\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma_\alpha) \\ &= 2d_\gamma V_\mu^{\cdot\,\alpha}(\delta_\kappa^\lambda\delta_\alpha^\mu - \delta_\alpha^\lambda\delta_\kappa^\mu) = 2d_\gamma(V_\mu^{\cdot\,\mu}\delta_\kappa^\lambda - V_\kappa^{\cdot\,\lambda}) \end{aligned}$$

bilden, dann können wir erneut

$$\begin{aligned} V_{\kappa'}^{\cdot\,\kappa'} = V_\mu^{\cdot\,\mu} &= \sum_{\mu=0}^{3} V_{\mu'}^{\cdot\,\mu'} \quad \forall\kappa \\ &= 4V_{\kappa'}^{\cdot\,\kappa'} = 0 \end{aligned}$$

folgern, sodass $V_\mu^{\cdot\,\alpha} = 0$ gilt. Aus der Spurbildung mit γ_* folgt

$$0 = \operatorname{tr}\big(\gamma_*\gamma^\mu[M_\mu, \gamma^\nu]\big) = -2P_\mu\operatorname{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) + 2A_\mu^{\cdot\,\nu}\operatorname{tr}(\gamma_*\gamma^\mu\gamma_*) + 8\,T_\mu^{\cdot\,\alpha\nu}\operatorname{tr}(\gamma_*\gamma^\mu\gamma_\alpha) = -2d_\gamma P_\nu,$$

das Verschwinden der P_μ. Mit Hilfe der Spurbildung über $\gamma_*\gamma_\alpha$

$$0 = \operatorname{tr}\big(\gamma_*\gamma_\alpha\gamma^\mu[M_\mu, \gamma^\nu]\big) = 2A_\mu^{\cdot\,\nu}\operatorname{tr}(\gamma_*\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma_*) + 8\,T_\mu^{\cdot\,\beta\nu}\operatorname{tr}(\gamma_*\gamma_\alpha\gamma^\mu\gamma_\beta) = 2d_\gamma A_\alpha^{\cdot\,\nu}$$

zeigen wir, dass $A_\mu^{\cdot\,\alpha} = 0$. Als Letztes berechnen wir

$$\begin{aligned} 0 = \operatorname{tr}\big([\gamma^\lambda, \gamma^\rho]\gamma^\mu[M_\mu, \gamma^\nu]\big) &= 8\,T_\mu^{\cdot\,\alpha\nu}\operatorname{tr}\big([\gamma^\lambda, \gamma^\rho]\gamma^\mu\gamma_\alpha\big) = 16d_\gamma T_\mu^{\cdot\,\alpha\nu}(\delta_\alpha^\lambda g^{\rho\mu} - g^{\lambda\mu}\delta_\alpha^\rho) \\ &\Rightarrow T^{\rho\lambda\nu} = T^{\lambda\rho\nu} \end{aligned}$$

und erkennen, dass $T^{\mu\alpha\beta} = T^{\{\mu\alpha\}\beta}$ gilt. Zusammen mit $T^{\mu\alpha\beta} = T^{\mu[\alpha\beta]}$ erhalten wir

$$T^{\mu\alpha\beta} = -T^{\mu\beta\alpha} = -T^{\beta\mu\alpha} = T^{\beta\alpha\mu} = T^{\alpha\beta\mu} = -T^{\alpha\mu\beta} = -T^{\mu\alpha\beta} = 0,$$

dass auch die $T_\mu^{\cdot\,\alpha\beta}$ identisch Null sein müssen. Damit haben wir das Theorem auch in vier Dimensionen gezeigt.

C Spin-Metrik und Spin-Krümmung

C.1 Hermitesche Konjugation der Spin-Metrik

Wir zeigen hier, dass aus der Forderung

$$\gamma_\mu^\dagger = h^\dagger \gamma_\mu h^{-1}$$

folgt, wie die hermitesche Konjugation h gebildet wird. Dazu definieren wir die Matrix $M = h^{-1}h^\dagger$ und konjugieren die CA hermitesch

$$\begin{aligned} 2g_{\mu\nu}\mathrm{I} = (2g_{\mu\nu}\mathrm{I})^\dagger = \{\gamma_\mu^\dagger, \gamma_\nu^\dagger\} = h^\dagger \left(\gamma_\mu h^{-1} h^\dagger \gamma_\nu + \gamma_\nu h^{-1} h^\dagger \gamma_\mu\right) h^{-1} \\ \Rightarrow 2g_{\mu\nu} M^{-1} = 2g_{\mu\nu}(h^{-1})^\dagger h = \gamma_\mu M \gamma_\nu + \gamma_\nu M \gamma_\mu. \end{aligned}$$

Nach dem gleichen Schema wie bei den anderen Beweisen, für die einzelnen Dimensionen getrennt, folgern wir daraus das Gesuchte, indem wir zunächst mit der üblichen vollständigen Basis der Gamma-Matrizen M durch

$$M = \begin{cases} s\mathrm{I} + p\gamma_* + v^\alpha \gamma_\alpha & , d = 2 \\ s\mathrm{I} + v^\alpha \gamma_\alpha & , d = 3 \end{cases}$$

parametrisieren.

In zwei Dimensionen multiplizieren wir diese Gleichung einmal von links und einmal von rechts mit M und addieren die Ergebnisse auf, sodass wir

$$2g_{\mu\nu}\mathrm{I} = \frac{1}{2}\{\gamma_\mu M \gamma_\nu, M\} + \frac{1}{2}\{\gamma_\nu M \gamma_\mu, M\}$$

ersehen. Setzen wir die Parametrisierung ein, finden wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\{\gamma_\mu M \gamma_\nu, M\} &= \frac{1}{2}\big\{\gamma_\mu \left(s\mathrm{I} + p\gamma_* + v^\alpha \gamma_\alpha\right) \gamma_\nu, s\mathrm{I} + p\gamma_* + v^\beta \gamma_\beta\big\} \\ &= \frac{1}{2}s^2\big\{\gamma_\mu\gamma_\nu, \mathrm{I}\big\} + \frac{1}{2}sp\big\{\gamma_\mu\gamma_\nu, \gamma_*\big\} + \frac{1}{2}sv^\alpha\big\{\gamma_\mu\gamma_\nu, \gamma_\alpha\big\} \\ &\quad + \frac{1}{2}ps\big\{\gamma_\mu\gamma_*\gamma_\nu, \mathrm{I}\big\} + \frac{1}{2}p^2\big\{\gamma_\mu\gamma_*\gamma_\nu, \gamma_*\big\} + \frac{1}{2}pv^\alpha\big\{\gamma_\mu\gamma_*\gamma_\nu, \gamma_\alpha\big\} \\ &\quad + \frac{1}{2}v^\alpha s\big\{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu, \mathrm{I}\big\} + \frac{1}{2}v^\alpha p\big\{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu, \gamma_*\big\} + \frac{1}{2}v^\alpha v^\beta\big\{\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu, \gamma_\beta\big\}. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Symmetrie der Indizes μ und ν und zusätzlich

$$\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu = 2\left(g_{\alpha\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\nu}\gamma_\alpha + g_{\alpha\mu}\gamma_\nu\right),$$

um die Gleichung

$$
\begin{aligned}
2g_{\mu\nu}\mathrm{I} = {}& 2s^2 g_{\mu\nu}\mathrm{I} + 2spg_{\mu\nu}\gamma_* + 2sg_{\mu\nu}v^\alpha\gamma_\alpha - 2psg_{\mu\nu}\gamma_* - 2p^2 g_{\mu\nu}\mathrm{I} - 2pv^\alpha g_{\mu\nu}\gamma_*\gamma_\alpha \\
&+ 2v^\alpha s\left(g_{\alpha\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\nu}\gamma_\alpha + g_{\alpha\mu}\gamma_\nu\right) - 2v^\alpha p\gamma_*\left(g_{\alpha\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\nu}\gamma_\alpha + g_{\alpha\mu}\gamma_\nu\right) \\
&- 2g_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta)\mathrm{I} + 4v_\mu v_\nu \mathrm{I} \\
={}& 2g_{\mu\nu}\left(s^2 - p^2 - v_\alpha v^\alpha\right)\mathrm{I} + 4v_\mu v_\nu\mathrm{I} + 2sv_\nu\gamma_\mu + 2sv_\mu\gamma_\nu - 2pv_\nu\gamma_*\gamma_\mu - 2pv_\mu\gamma_*\gamma_\nu \\
={}& 2g_{\mu\nu}\left(s^2 - p^2 - v_\alpha v^\alpha\right)\mathrm{I} + 4v_\mu v_\nu\mathrm{I} + 2(s\mathrm{I} - p\gamma_*)(v_\nu\gamma_\mu + v_\mu\gamma_\nu)
\end{aligned}
$$

zu erhalten. Da

$$
\mathrm{tr}\left[(s\mathrm{I} - p\gamma_*)(v_\nu\gamma_\mu + v_\mu\gamma_\nu)\right] = 0,
$$

müssen

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad 2g_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}\left(s^2 - p^2 - v_\alpha v^\alpha\right) + 4v_\mu v_\nu \\
&\text{(ii)} \quad (s\mathrm{I} - p\gamma_*)(v_\nu\gamma_\mu + v_\mu\gamma_\nu) = 0
\end{aligned}
$$

gelten. Die Gleichung (ii) kann erfüllt werden, indem $s = 0 = p$ gilt, dann folgt aber aus (i), dass es keine Lösung für v_μ gibt. Sie ist daher nicht akzeptabel.

Nun ist $s\mathrm{I} - p\gamma_*$ aber mit $\frac{1}{s^2-p^2}(s\mathrm{I} + p\gamma_*)$ invertierbar, solange wenigstens einer der Parameter s und p nicht verschwindet. Das bedeutet, dass

$$
0 = v_\nu\gamma_\mu + v_\mu\gamma_\nu = (v_\nu\delta_\mu^\alpha + v_\mu\delta_\nu^\alpha)\gamma_\alpha
$$

verschwinden muss. Daraus folgt aber auch das Verschwinden der v_μ. Damit reduziert sich die Matrix M auf

$$
M = s\mathrm{I} + p\gamma_*
$$

mit der Bedingung $s^2 - p^2 = 1$. Wir ändern nun die Variable von s zu α mit $s = \cosh\alpha$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$, da $s \in \mathbb{C}$. Damit folgt $p = \sinh\alpha$ und $M = \cosh\alpha\mathrm{I} + \sinh\alpha\gamma_* = \mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}$.

Jetzt untersuchen wir noch, wie sich γ_* unter hermitescher Konjugation verhält, diese Rechnung führen wir direkt in beliebiger geradzahliger Dimension durch. Wir finden

$$
\begin{aligned}
\gamma_*^\dagger ={}& -(-1)^{d/2}\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}(\gamma^{\mu_d})^\dagger\ldots(\gamma^{\mu_1})^\dagger \\
={}& -(-1)^{d/2}\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}(-1)^{\sum_{j=0}^{d-1} j}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}h^\dagger\gamma^{\mu_1}\mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}\gamma^{\mu_2}\ldots\mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}\gamma^{\mu_d}h^{-1} \\
={}& -\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}h^\dagger\gamma^{\mu_1}\mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_{d-1}}\mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}\gamma^{\mu_d}h^{-1} \parallel \gamma^\mu\mathrm{e}^{\alpha\gamma_*} = \mathrm{e}^{-\alpha\gamma_*}\gamma^\mu \\
={}& -h^\dagger\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}}{d!}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\ldots\mu_d}\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_d}\mathrm{e}^{-\alpha\gamma_*}h^{-1} = -h^\dagger\gamma_*(h^{-1}h^\dagger)^{-1}h^{-1} \\
={}& -h^\dagger\gamma_*(h^{-1})^\dagger = -h\gamma_*h^{-1}.
\end{aligned}
$$

Daraus können wir nun mit $h^{-1}h^\dagger = M = \mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}$, also $h^\dagger = h\mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}$, unter hermitescher Konjugation

$$h = \mathrm{e}^{\alpha^*\gamma_*^\dagger}h^\dagger = \mathrm{e}^{-\alpha^* h^\dagger\gamma_*(h^{-1})^\dagger}h^\dagger = h^\dagger\mathrm{e}^{-\alpha^*\gamma_*} \stackrel{!}{=} h^\dagger\mathrm{e}^{-\alpha\gamma_*}$$

ableiten. Das bedeutet aber, dass

$$\mathrm{I} = \mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}\mathrm{e}^{-\alpha^*\gamma_*} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\alpha\gamma_*} = \cosh(2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\alpha) + \sinh(2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\alpha)\gamma_*$$

der Term $\mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}$ im Wesentlichen nur vom Realteil von α abhängt und der Imaginärteil nur den Unterschied zwischen positivem und negativem Vorzeichen bewirken kann, wir ersetzen also $\alpha \to \mathrm{Re}\,\alpha$ und schreiben $M = \pm\mathrm{e}^{\alpha\gamma_*}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Für den Fall $d = 3$ erhalten wir analog zu $d = 2$

$$2g_{\mu\nu}\mathrm{I} = 2g_{\mu\nu}\left(s^2 - v_\alpha v^\alpha\right)\mathrm{I} + 4v_\mu v_\nu\mathrm{I} + 2s(v_\nu\gamma_\mu + v_\mu\gamma_\nu).$$

Hier können wir genauso schlussfolgern, dass $s \neq 0$ sein muss, denn sonst gäbe es gar keine Lösung. Somit folgt auch hier $v_\mu = 0$ und damit $s^2 = 1$ und $M = \pm\mathrm{I}$.

C.2 Rechnung zur Spin-Krümmung

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass

$$\frac{1}{32}R_{\mu\nu\alpha\beta}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = -\frac{R}{4}\mathrm{I}$$

gilt. Dazu verwenden wir die Symmetrien $R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{[\mu\nu]\alpha\beta} = R_{\mu\nu[\alpha\beta]} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$ und die erste Bianchi-Identität $R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0$. Damit folgt

$$\frac{1}{32}R_{\mu\nu\alpha\beta}[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\gamma^\alpha, \gamma^\beta] = \frac{1}{64}R_{\mu\nu\alpha\beta}\big\{[\gamma^\mu, \gamma^\nu], [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]\big\}.$$

Die Matrix werten wir mit den bekannten Eigenschaften der Gamma-Matrizen zu

$$
\begin{aligned}
\big\{[\gamma^\mu,\gamma^\nu],[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} &= \big\{\gamma^\mu\gamma^\nu,[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} - \big\{\gamma^\nu\gamma^\mu,[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} \\
&= \gamma^\mu\big\{\gamma^\nu,[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} - \big[\gamma^\mu,[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big]\gamma^\nu \\
&\quad - \gamma^\nu\big\{\gamma^\mu,[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} + \big[\gamma^\nu,[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big]\gamma^\mu \\
&= \gamma^\mu\big(4g^{\nu\alpha}\gamma^\beta - 4g^{\nu\beta}\gamma^\alpha + 2[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\gamma^\nu\big) + 4(g^{\mu\beta}\gamma^\alpha - g^{\mu\alpha}\gamma^\beta)\gamma^\nu \\
&\quad - \gamma^\nu\big(4g^{\mu\alpha}\gamma^\beta - 4g^{\mu\beta}\gamma^\alpha + 2[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\gamma^\mu\big) - 4(g^{\nu\beta}\gamma^\alpha - g^{\nu\alpha}\gamma^\beta)\gamma^\mu \\
&= 4g^{\nu\alpha}\{\gamma^\mu,\gamma^\beta\} - 4g^{\nu\beta}\{\gamma^\mu,\gamma^\alpha\} + 4g^{\mu\beta}\{\gamma^\nu,\gamma^\alpha\} - 4g^{\mu\alpha}\{\gamma^\nu,\gamma^\beta\} \\
&\quad + 2(\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\nu - \gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu + \gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\mu) \\
&= 16(g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})\mathrm{I} \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big[\big(\{\gamma^\mu,\gamma^\alpha\} + [\gamma^\mu,\gamma^\alpha]\big)\big(\{\gamma^\beta,\gamma^\nu\} + [\gamma^\beta,\gamma^\nu]\big) \\
&\qquad + \big(\{\gamma^\nu,\gamma^\beta\} + [\gamma^\nu,\gamma^\beta]\big)\big(\{\gamma^\alpha,\gamma^\mu\} + [\gamma^\alpha,\gamma^\mu]\big) \\
&\qquad - \big(\{\gamma^\mu,\gamma^\beta\} + [\gamma^\mu,\gamma^\beta]\big)\big(\{\gamma^\alpha,\gamma^\nu\} + [\gamma^\alpha,\gamma^\nu]\big) \\
&\qquad - \big(\{\gamma^\nu,\gamma^\alpha\} + [\gamma^\nu,\gamma^\alpha]\big)\big(\{\gamma^\beta,\gamma^\mu\} + [\gamma^\beta,\gamma^\mu]\big)\Big] \\
&= 12(g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})\mathrm{I} + \frac{1}{2}\left(\big\{[\gamma^\mu,\gamma^\alpha],[\gamma^\beta\gamma^\nu]\big\} + \big\{[\gamma^\mu,\gamma^\beta],[\gamma^\nu\gamma^\alpha]\big\}\right)
\end{aligned}
$$

aus. Wenn wir nun die erste Bianchi-Identität

$$
\begin{aligned}
0 &= (R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha})\big\{[\gamma^\mu,\gamma^\nu],[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} \\
\Rightarrow & R_{\mu\nu\alpha\beta}\big\{[\gamma^\mu,\gamma^\nu],[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} = -R_{\mu\nu\alpha\beta}\left(\big\{[\gamma^\mu,\gamma^\alpha],[\gamma^\beta\gamma^\nu]\big\} + \big\{[\gamma^\mu,\gamma^\beta],[\gamma^\nu\gamma^\alpha]\big\}\right)
\end{aligned}
$$

verwenden, dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
R_{\mu\nu\alpha\beta}\big\{[\gamma^\mu,\gamma^\nu],[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} &= 12R_{\mu\nu\alpha\beta}(g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})\mathrm{I} - \frac{1}{2}R_{\mu\nu\alpha\beta}\big\{[\gamma^\mu,\gamma^\nu],[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} \\
&= 8R_{\mu\nu\alpha\beta}(g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta})\mathrm{I} = -16R\mathrm{I}
\end{aligned}
$$

und damit insgesamt

$$
\frac{1}{32}R_{\mu\nu\alpha\beta}[\gamma^\mu,\gamma^\nu][\gamma^\alpha,\gamma^\beta] = \frac{1}{64}R_{\mu\nu\alpha\beta}\big\{[\gamma^\mu,\gamma^\nu],[\gamma^\alpha,\gamma^\beta]\big\} = -\frac{R}{4}\mathrm{I},
$$

das gesuchte Ergebnis.

D Delta-Distribution

Wir werden hier nun noch die in 4.2 verwendeten Darstellungen der Delta-Distribution herleiten, beziehungsweise ihre Eigenschaften überprüfen.

D.1 Delta-Distribution im flachen Raum

Um eine für unsere Zwecke passende Darstellung von δ zu finden, vergleichen wir mit einer speziellen Darstellung im flachen Minkowski-Raum. Dort finden wir für $\varepsilon \searrow 0$

$$\begin{aligned}\delta(x-y) &= \int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d} \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(x-y)-\mathrm{i}\varepsilon p^2} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(p^0)^2-\mathrm{i}p^0(x^0-y^0)} \prod_{i=1}^{d-1} \int \frac{\mathrm{d}p^i}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(p^i)^2+\mathrm{i}p^i(x^i-y^i)}\end{aligned}$$

die bekannten Fresnel-Integrale. Aus Gründen der Vollständigkeit zeigen wir, wie man sie löst. Wir verwenden den Residuensatz der Funktionentheorie. Da die Integranden keine Pole in der komplexen Ebene haben, verschwinden alle geschlossenen Wegintegrale. Wir müssen zwei Fälle

$$\begin{aligned}&\text{(i)} && \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t^2-\mathrm{i}t\delta} \\ &\text{(ii)} && \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon t^2+\mathrm{i}t\delta}\end{aligned}$$

unterscheiden, dabei gilt immer $\varepsilon > 0$. Wir finden mit der Substitution $s = \sqrt{\varepsilon}t - \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}$

$$\begin{aligned}&\text{(i)} && \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t^2-\mathrm{i}t\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sqrt{\varepsilon}t-\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}})^2-\mathrm{i}\frac{\delta^2}{4\varepsilon}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\delta^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi^2\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s^2} \\ &\text{(ii)} && \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon t^2+\mathrm{i}t\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\sqrt{\varepsilon}t-\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}})^2+\mathrm{i}\frac{\delta^2}{4\varepsilon}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi^2\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s^2}\end{aligned}$$

Integrale, die wir nun in der komplexen Ebene analytisch fortsetzen ($s \to z$) und schließen können. Zur Lösung von (i) wählen wir die Integrationswege

$$\begin{array}{llcrcccc} C_1: & z = s & , & -r & < & s & < & r \\ C_2: & z = r + \mathrm{i}s & , & 0 & < & s & < & r \\ C_3: & z = -s - \mathrm{i}s & , & -r & < & s & < & r \\ C_4: & z = -r + \mathrm{i}s & , & -r & < & s & < & 0 \end{array}$$

und führen im Anschluss den Grenzprozess $r \to \infty$ aus. Die einzelnen Integrale sind

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} &= \int_{-r}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s^2} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s^2} \\
\left|\int_{C_2} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\right| &= \left|\int_{0}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(r^2-s^2)}\mathrm{e}^{-2rs}\right| \le \int_{0}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-2rs} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2r^2}}{2r} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
\int_{C_3} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} &= -(1+\mathrm{i}) \int_{-r}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-2s^2} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} -(1+\mathrm{i}) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-2s^2} = -\sqrt{\pi}\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\
\left|\int_{C_4} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\right| &= \left|\int_{-r}^{0} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(r^2-s^2)}\mathrm{e}^{2rs}\right| \le \int_{-r}^{0} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{2rs} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2r^2}}{2r} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

also finden wir insgesamt aus $0 = \oint \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} = \sum_{i=1}^{4} \int_{C_i} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s^2} &= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}s^2} \\
&= -\lim_{r\to\infty} \left(\int_{C_2} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} + \int_{C_3} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} + \int_{C_4} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \right) \\
&= \sqrt{\pi}\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Zur Lösung von (ii) gehen wir sehr ähnlich vor. Wir wählen

$$\begin{array}{llcrcccl}
C_1: & z = s & , & -r & < & s & < & r \\
C_2: & z = r - \mathrm{i}s & , & 0 & < & s & < & r \\
C_3: & z = -s + \mathrm{i}s & , & -r & < & s & < & r \\
C_4: & z = -r - \mathrm{i}s & , & -r & < & s & < & 0
\end{array}$$

als Integrationswege. Hier ergeben sich die einzelnen Integrale zu

$$
\begin{aligned}
\int_{C_1} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z^2} &= \int_{-r}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s^2} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s^2} \\
\left|\int_{C_2} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z^2}\right| &= \left|\int_{0}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(r^2-s^2)} \mathrm{e}^{-2rs}\right| \leq \int_{0}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-2rs} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2r^2}}{2r} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
\int_{C_3} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z^2} &= (-1+\mathrm{i}) \int_{-r}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-2s^2} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} (-1+\mathrm{i}) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-2s^2} = -\sqrt{\pi}\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\
\left|\int_{C_4} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z^2}\right| &= \left|\int_{-r}^{0} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(r^2-s^2)} \mathrm{e}^{2rs}\right| \leq \int_{-r}^{0} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{2rs} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2r^2}}{2r} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

und wir finden analog

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s^2} &= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s^2} \\
&= -\lim_{r\to\infty} \left(\int_{C_2} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z^2} + \int_{C_3} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z^2} + \int_{C_4} \mathrm{d}z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z^2} \right) \\
&= \sqrt{\pi}\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}
$$

Also gelten

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon t^2 - \mathrm{i}t\delta} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\delta^2}{4\varepsilon}} \\
&\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon t^2 + \mathrm{i}t\delta} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta^2}{4\varepsilon}}.
\end{aligned}
$$

Damit können wir die Delta-Distribution des flachen Raums zu

$$
\begin{aligned}
\delta(x-y) &= \int \frac{\mathrm{d}p^0}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon(p^0)^2 - \mathrm{i}p^0(x^0-y^0)} \prod_{i=1}^{d-1} \int \frac{\mathrm{d}p^i}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon(p^i)^2 + \mathrm{i}p^i(x^i-y^i)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(x^0-y^0)^2}{4\varepsilon}} \prod_{i=1}^{d-1} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(x^i-y^i)^2}{4\varepsilon}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(d-2)\frac{\pi}{4}}}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon}} \\
&= \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}d\frac{\pi}{4}}}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

angeben.

D.2 Delta-Distribution im gekrümmten Raum

Mit dem gerade gefundenen Ergebnis können wir in maximal symmetrischen Räumen mit $R < 0$ vermuten, dass

$$\delta(x-y) = \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}d\frac{\pi}{4}}}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} e^{\mathrm{i}\frac{d_G^2(x,y)}{4\varepsilon}} \mathcal{M}(y)$$

eine Darstellung von δ ist. Die Einschränkung $R < 0$ ist wichtig, da der Raum für $R > 0$ in gewissem Sinne einer *Kugel* entspricht. Dann müsste aber berücksichtigt werden, dass der Raum in diesem Sinne *endlich* ist.

Für den Beweis der Darstellung der Delta-Distribution zeigen wir, dass

$$f(x) = \int \mathrm{d}^d y\, f(y)\delta(x-y)$$

für alle *glatten* Funktionen erfüllt ist. Dazu brauchen wir einerseits

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\varepsilon} d_G^2(x, x+\sqrt{4\varepsilon}z) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{4\varepsilon} g_{\mu\nu}(x)(x^\mu - x^\mu - \sqrt{4\varepsilon}z^\mu)(x^\nu - x^\nu - \sqrt{4\varepsilon}z^\nu) \\ &= z^\mu g_{\mu\nu}(x) z^\nu\end{aligned}$$

aus $(\mathrm{d}d_G)^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ und andererseits die Identität

$$\int \mathrm{d}^d y\, e^{\mathrm{i}y^\mu A_{\mu\nu} y^\nu} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \pi^{\frac{d}{2}} e^{\mathrm{i}d\frac{\pi}{4}}.$$

Diese Gleichung können wir leicht zeigen, wenn wir eine Drehung der Koordinaten

$$y \to \mathcal{O}y \text{ mit } \mathcal{O}^{\mathrm{T}} = \mathcal{O}^{-1},\ \det\mathcal{O} > 0$$

durchführen, sodass die Matrix $\tilde{A} = \mathcal{O}^{\mathrm{T}} A \mathcal{O}$ diagonal wird. Eine solche Transformation existiert immer, wenn A symmetrisch ist. Da $\mathcal{O}^{\mathrm{T}} = \mathcal{O}^{-1}$, folgt

$$\det\mathcal{O} = \det\mathcal{O}^{\mathrm{T}} = \det\mathcal{O}^{-1} = (\det\mathcal{O})^{-1}$$

also $\det\mathcal{O} = 1$. Dann gilt $\det\tilde{A} = \det(\mathcal{O}^{\mathrm{T}} A \mathcal{O}) = \det A$, $\mathrm{d}^d y \to \mathrm{d}^d(\mathcal{O}y) = \mathrm{d}^d y$ und

$$y^\mu A_{\mu\nu} y^\nu = y^{\mathrm{T}} A y \to y^{\mathrm{T}} \mathcal{O}^{\mathrm{T}} A \mathcal{O} y = y^{\mathrm{T}} \tilde{A} y = \sum_{\mu=0}^{d-1} y^{\mu'} \tilde{A}_{\mu'\mu'} y^{\mu'}.$$

So lässt sich mit den bisherigen Ergebnissen die gesuchte Formel

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^d y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} y^\mu A_{\mu\nu} y^\nu} &= \int \mathrm{d}^d y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} y^{\mathrm{T}} A y} = \int \mathrm{d}^d y \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} y^{\mathrm{T}} \tilde{A} y} \\
&= \int \mathrm{d}^d y \mathrm{e}^{\mathrm{i} \sum\limits_{\mu=0}^{d-1} y^{\mu'} \tilde{A}_{\mu'\mu'} y^{\mu'}} = \prod_{\mu=0}^{d-1} \int \mathrm{d} y^{\mu'} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} y^{\mu'} \tilde{A}_{\mu'\mu'} y^{\mu'}} \\
&= \prod_{\mu=0}^{d-1} \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{A}_{\mu'\mu'}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\det \tilde{A}}} \pi^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} d \frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \pi^{\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} d \frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}
$$

berechnen. Dabei ist

$$
\frac{1}{\sqrt{\tilde{A}_{\mu'\mu'}}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}_{\mu'\mu'}}} & , \tilde{A}_{\mu'\mu'} > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\tilde{A}_{\mu'\mu'}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} & , \tilde{A}_{\mu'\mu'} < 0 \end{cases}
$$

und analog für $\det A$. Jetzt zeigen wir, dass der obige Ausdruck eine Darstellung für δ ist und erhalten mit der Substitution $z = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}(y - x)$

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}^d y \, f(y) \delta(x - y) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i} d \frac{\pi}{4}}}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \int \mathrm{d}^d y \, f(y) \mathcal{M}(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i} \frac{d_G^2(x,y)}{4\varepsilon}} \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i} d \frac{\pi}{4}}}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int \mathrm{d}^d z \, f(x + \sqrt{4\varepsilon} z) \mathcal{M}(x + \sqrt{4\varepsilon} z) \mathrm{e}^{\mathrm{i} z^\mu g_{\mu\nu}(x) z^\nu} \\
&= f(x) \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i} d \frac{\pi}{4}}}{\pi^{\frac{d}{2}}} \mathcal{M}(x) \int \mathrm{d}^d z \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} z^\mu g_{\mu\nu}(x) z^\nu} \\
&= f(x) \frac{\mathrm{i} \mathcal{M}(x)}{\sqrt{-g(x)}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

die gewünschte Eigenschaft der Delta-Distribution. Daher ist nun auch klar, dass

$$
\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i} d \frac{\pi}{4}}}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} \frac{d_G^2(x,y)}{4\varepsilon}} \mathcal{M}(y) \text{ und } \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i} d \frac{\pi}{4}}}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{d}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i} \frac{d_G^2(x,y)}{4\varepsilon}} \mathcal{M}(x)
$$

zwei äquivalente Darstellungen sind.

Symbolverzeichnis

Im Symbolverzeichnis werden zuerst die lateinischen Buchstaben nach dem Alphabet aufgeführt, dann die griechischen nach dem griechischen Alphabet und im Anschluss die Sonderzeichen alphabetisch nach Ihrem LaTeX-Code.

- lateinische Buchstaben

Symbol	**Bedeutung**
a, b, c	Raumzeitindizes für die lokal inertialen Komponenten
a	Lorentz-Boosts der Poincaré-Transformationen
$a_{\mu}^{\cdot\,\alpha}(x)$	Tensorfeld zur Beschreibung des Spin-Zusammenhangs
	mit $a_{\mu}^{\cdot\,\alpha} = (1/8)\,\mathrm{tr}\,(\gamma_*\partial_\mu\gamma^\alpha)$ (nur $d = 4$)
$A(d_G)$	Abkürzung für $A(d_G) = \kappa\cot(\kappa d_G)$
$A_\mu(x)$	$U(1)$ Eichfeld
$B(d_G)$	Abkürzung für $B(d_G) = (\kappa/4)\tan(\kappa d_G/2)$
d	Dimension des betrachteten Raumes
$d_G(x, y)$	geodätischer Abstand
d_γ	Dimension der Gamma-Matrizen ($d_\gamma \times d_\gamma$ - Matrizen)
D_μ	kovariante Ableitung nur bezüglich der Raumzeitindizes
$\mathfrak{D}(x, y)$	Abkürzung für $\mathfrak{D}(x, y) = \left(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}\right)^2(x, y)$
$e_{\mu}^{\cdot\,\mathrm{a}}(x)$	Vierbein mit Inversem $e^{\mu}_{\cdot\,\mathrm{a}}$
$f(R_{\mu\nu\rho\lambda}, F_{\mu\nu})$	Abkürzung für $(1/4)[\gamma^\mu, \gamma^\nu][\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi = f(R_{\mu\nu\alpha\beta}, F_{\mu\nu})\psi$
$\mathrm{f}(d_G, s)$	Funktion zur Beschreibung des Heatkernels von $G(x, y; m)$
$F_{\mu\nu}(x)$	Feldstärketensor des Eichfeldes A_μ mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
$\mathcal{F}_k(x, y)$	feldabhängiger Anteil von $\Gamma_k^{(2)}(x, y) + R_k(x, y)$
$g(x)$	Determinante der Metrik mit $g(x) = \det^{(\mu\nu)}(g_{\mu\nu})$
$g_{\mu\nu}(x)$	Metrik des gekrümmten Raumes mit Inverser $g^{\mu\nu}$
$\mathrm{g}(d_G, s)$	Funktion zur Beschreibung von $\mathrm{f}(d_G, s)$
$\tilde{g}, \tilde{g}_k$	Kopplung im Gross-Neveu-Modell
$\bar{g}_k$	dimensionslose Kopplungskonstante mit $\bar{g}_k = k\tilde{g}_k$
$G(x, y; m)$	Greensche Funktion zum Operator $\nabla\!\!\!/^{\,2} - m^2\mathrm{I}$
$GL(n, \mathbb{K})$	allgemeine lineare Gruppe vom Grad n über dem Körper $\mathbb{K}$
$h(x)$	Spin-Metrik mit $h = \hat{s}\mathrm{e}^{\hat{M}}$ und $h^\dagger = -h$
i, j, k	Summen- und Zählindizes
$\mathrm{i}L$	Poincaré-Gruppe
	mit $\mathrm{i}L = \left\{(\Lambda, \mathrm{a}) : \mathrm{a} \in \mathbb{R}^d, \Lambda \in GL(\mathbb{R}^d), \Lambda^{a}_{\cdot\,c}\Lambda^{b}_{\cdot\,d}\eta^{cd} = \eta^{ab}\right\}$
I, J, K	Spinorindizes
I	Einselement im Spinorraum
$J(x)$	Quellen der bosonischen Felder von ϕ
k	Renormierungsskala
$k_c, \bar{k}_c$	kritische Renormierungsskala mit $\bar{g}_{k_c}^{-1} = 0$, $\bar{k}_c = k_c/\Lambda_0$
$K(x, y; s)$	Laplace-Rücktransformierte von $-G(x, y; m)$
$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$	Lagrange-Dichte

Symbol	**Bedeutung** (Fortsetzung der lateinischen Buchstaben)
m	„Masse" des Fermions
M_{ab}	Generator der Lorentz-Transformationen der Poincaré-Algebra
$\hat{M}(x)$	Abkürzung für $\gamma_\mu^\dagger = \mathrm{e}^{\hat{M}}\gamma_\mu \mathrm{e}^{-\hat{M}}$ mit $\operatorname{tr}\hat{M} = 0$ und $\hat{M}^\dagger = \hat{M}$
$\mathcal{M}(x)$	Volumenmaß im gekrümmten Raum mit $\mathcal{M}(x) = \sqrt{-g(x)}$
$n_\mu(x,y)$	Einheitsvektor entlang einer Geodäte mit $n_\mu = \partial_\mu d_G$
N_φ	Anzahl bosonischer Felder
N_ϕ	Anzahl bosonischer und fermionischer Felder mit $N_\phi = N_\varphi + 2N_\psi$
N_ψ	Anzahl fermionischer Felder
$p_\mu(x)$	Vektorfeld zur Beschreibung des Spin-Zusammenhangs
	mit $p_\mu = (1/2d_\gamma d)\operatorname{tr}(\gamma_* \gamma_\nu D_\mu \gamma^\nu)$
P_a	Generator der Lorentz-Boosts der Poincaré-Algebra
P	pfadgeordnetes Produkt
$\mathcal{P}_k(x,y)$	feldunabhängiger Anteil von $\Gamma_k^{(2)}(x,y) + R_k(x,y)$
q	Ladung des Spinors ψ im Eichfeld A_μ
$r(x)$	Funktion zur *Formung* des Regulators
$R(x)$	Krümmungsskalar mit $R = R_{\mu\nu}\ g^{\mu\nu}$
$R_{\mu\nu}(x)$	Ricci-Tensor mit $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu\beta}\ g^{\alpha\beta}$
$R_{\mu\nu\cdot\rho}^{\ \ \cdot\lambda}(x)$	Krümmungstensor mit $R_{\mu\nu\cdot\rho}^{\ \ \cdot\lambda} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\rho}$
$R_k(x,y)$	Regulatormatrix
$R_k^\varphi(x,y)$	bosonischer Regulator
$R_k^\psi(x,y)$	fermionischer Regulator
$s_\mu(x)$	Vektorfeld zur Beschreibung des Spin-Zusammenhangs
	mit $s_\mu = \operatorname{Im} s_\mu$
$s'_\mu(x)$	Realteil von s_μ mit $s'_\mu = \operatorname{Re} s_\mu = (1/2)\partial_\mu \varphi$
$s''_\mu(x)$	Imaginärteil von s_μ mit $s''_\mu = \operatorname{Im} s_\mu = qA_\mu$
$\hat{s}(x)$	Abkürzung für $\hat{s} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\Omega}$
$\mathcal{S}(x)$	Spinbasen-Transformation
$S[\phi]$	klassische mikroskopische Wirkung
$S_k[\phi,\chi]$	skalenabhängige regularisierte Wirkung
	mit $S_k[\phi,\chi] = S[\phi] + \Delta S_k[\phi] - \int \bar{\chi}\phi$
$\Delta S_k[\phi]$	Regulatorterm mit $\Delta S_k[\phi] = (1/2)\int_x\int_y \bar{\phi}(x) R_k(x,y)\phi(y)$
$\mathrm{Str}, \mathrm{STr}$	Symbol für die Superspur, entspricht tr, Tr für den bosonischen
	Sektor und $-\operatorname{tr}$, $-\operatorname{Tr}$ für den fermionischen Sektor
$SL(n,\mathbb{K})$	spezielle lineare Gruppe vom Grad n über dem Körper $\mathbb{K}$
$\mathcal{S}_{Lor}$	Darstellung eines Elements der Poincaré-Gruppe
	mit $\mathcal{S}_{Lor}(\Lambda) = \exp\big((1/8)\omega^{ab}[\gamma_a,\gamma_b]\big)$, wobei $(\Lambda)^a_{\cdot b} = \big(\mathrm{e}^\omega\big)^a_{\ \cdot b}$
$S_m(x,y)$	Greensche Funktion des Diracoperators
$t_\mu^{\cdot\alpha\beta}(x)$	Tensorfeld zur Beschreibung des Spin-Zusammenhangs
	mit $t_\mu^{\cdot\alpha\beta} = -(1/32)\operatorname{tr}\big(\gamma^\alpha D_\mu \gamma^\beta\big)$ (nur $d = 4$)
tr, Tr	Symbol für die Spur einer Matrix, tr bildet die Spur nur über
	diskrete Indizes, Tr auch über kontinuierliche
T	Symbol für die Transposition
T_μ	symbolischer Stellvertreter für ein Vektorfeld

Symbol	**Bedeutung** (Fortsetzung der lateinischen Buchstaben)
$U(1)$	unitäre Gruppe vom Grad 1
$U(x,y)$	Parallel-Propagator
$v_\mu^{\cdot\alpha}(x)$	Tensorfeld zur Beschreibung des Spin-Zusammenhangs mit $v_\mu^{\cdot\alpha} = \big(1/4d_\gamma(d-1)\big)\,\mathrm{tr}\,([\gamma^\alpha,\gamma_\nu]D_\mu\gamma^\nu)$
V_x	raumzeitliches Volumen mit $V_x = \int_x 1$
$w(x,y)$	Abkürzung für $w = \kappa d_G/2$
$W[\chi]$	Schwinger-Funktional
$W_k[\chi]$	skalenabhängiges Schwinger-Funktional
x, y, z	Raumzeitpunkte mit den Koordinaten x^μ, z. T. auch als Variable z. B. für Integrationen
$(x,y)_\eta$	Abkürzung für $(x,y)_\eta = x^\mu\eta_{\mu\nu}x^\nu$
$(x)_\eta$	Abkürzung für $(x)_\eta = (x,x)_\eta$
$Z[\chi]$	erzeugendes Funktional der N-Punkt-Funktionen
Z_ψ	Renormierung der Spinoren im Gross-Neveu-Modell

- griechische Buchstaben

Symbol	**Bedeutung**
$\beta_{\bar g}$	Beta-Funktion zur Kopplung $\bar g_k$
γ^{a}	Gamma-Matrizen des flachen Raumes
$\gamma^\mu(x)$	Gamma-Matrizen des gekrümmten Raumes
$\gamma_*(x)$	zusätzliche Gamma-Matrix der Clifford-Algebra für gerade d, mit $\gamma_* = \big(\mathrm{i}(-\mathrm{i})^{\frac{d}{2}}/d!\big)\tilde\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_d}$
$\Gamma_\mu(x)$	Spin-Zusammenhang ohne Vierbein mit $\Gamma_\mu = v_\mu^{\cdot\alpha}\gamma_\alpha + p_\mu\gamma_* + s_\mu\mathrm{I}$ in $d=2$; $\Gamma_\mu = v_\mu^{\cdot\alpha}\gamma_\alpha + s_\mu\mathrm{I}$ in $d=3$; $\Gamma_\mu = t_\mu^{\cdot\alpha\beta}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta] + v_\mu^{\cdot\alpha}\gamma_\alpha + a_\mu^{\cdot\alpha}\gamma_\alpha\gamma_* + p_\mu\gamma_* + s_\mu\mathrm{I}$ in $d=4$
$\Gamma^\nu_{\lambda\mu}(x)$	Raumzeit-Zusammenhang mit $\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\lambda g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\lambda} - \partial_\rho g_{\lambda\mu})$
$\Gamma[\widetilde\phi]$	effektive Wirkung
$\Gamma_k[\widetilde\phi]$	skalenabhängige effektive Wirkung
$\Gamma_k^{(2)}(x,y)$	zweite funktionale Ableitung der effektiven Wirkung
$\delta(x-y)$	Delta-Distribution mit $\delta(x-y) = 0, x \neq y$ und $\int_x\big(\delta(x-y)/\mathcal{M}\big) = 1$
$\delta(x,y)$	Delta-Distribution für Spinoren mit $\delta(x,y) = \delta(x-y)U(x,y)$
δ^μ_ν	Kronecker-Delta
$\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}$	Levi-Civita-Symbol mit $\varepsilon_{1\ldots d} = \varepsilon^{1\ldots d} = 1$
$\tilde\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}(x)$	$\tilde\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d} = \mathcal{M}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d}$ und $\tilde\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_d} = -(1/\mathcal{M})\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_d}$ bilden Tensorfelder
$\eta(x), \bar\eta(x)$	Quelle der fermionischen Felder von ϕ
η_{ab}	Minkowski-Metrik mit Signatur $(-1,1,\ldots,1)$
$\kappa(x)$	Abkürzung für $\kappa = \sqrt{R/d(d-1)}$
λ, μ, ν	Raumzeitindizes für den gekrümmten Raum
λ^2	Abkürzung für $\lambda^2 = -(\kappa^2/4\Lambda_0^2)$

Symbol	**Bedeutung** (Fortsetzung der griechischen Buchstaben)
Λ	Lorentz-Transformationen der Poincaré-Transformationen
(Λ, a)	Element der Poincaré-Gruppe
Λ_0	Maß für die Gitter-Diskretisierung
$\xi^{\mathrm{a}}[x](y)$	lokal inertiale Koordinaten an x in y
$\sigma(x,y)$	Abstandsmaß in maximal symmetrischen Räumen
	mit $\sigma(x,y) = (1/2)\eta_{ij}(x^i - y^i)(x^j - y^j)$
τ	Abkürzung für $\tau = \not{\nabla}^2/k^2$
$\varphi(x)$	alle bosonischen Felder von ϕ
$\varphi_S(x)$	symbolischer Stellvertreter für ein Skalarfeld
$\phi(x)$	Vektor aller auftretenden Felder einer betrachteten QFT
$\Phi_{\mu\nu}(x)$	Spin-Krümmung mit $\Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$
$\chi(x)$	Quelle des Vektors ϕ
$\psi(x), \bar{\psi}(x)$	Spinorfeld ψ und Dirac-konjugiertes Spinorfeld $\bar{\psi} = \psi^\dagger h$
$\Psi, \bar{\Psi}$	konstante Spinoren zur Auswertung der Flussgleichung
$\omega^{a}_{\cdot\, b}$	Parametrisierung einer Lorentz-Transformation Λ mit $\Lambda = \mathrm{e}^\omega$
$\Omega(x)$	Potential zur Beschreibung des Realteils von s_μ

- Sonderzeichen

Symbol	**Bedeutung**
$\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$	Antikommutator mit $\{A,B\} = AB + BA$
$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$	Kommutator mit $[A,B] = AB - BA$
$\dagger$	Symbol für die hermitesche Konjugation
$\int_x$	Integral über x inklusive dem Maßfaktor $\mathcal{M}$ mit $\int_x = \int \mathrm{d}x \mathcal{M}(x)$
$\langle\cdot\rangle_{vac}, \langle\cdot\rangle_\chi$	Erwartungswert bei Anwesenheit der Quelle χ mit $\langle\cdot\rangle_{\chi=0} = \langle\cdot\rangle_{vac}$
$\langle\cdot\rangle_{k,\chi}$	skalenabhängiger Erwartungswert bei Anwesenheit der Quelle χ
$\mathbb{1}$	Einselement für die zusammengefassten Vektoren aller Felder
$\mathbb{1}_{(\pm\pm)}$	spezielle *Eins* für die zusammengefassten Vektoren, siehe (5.4)
∇_μ	kovariante Ableitung, auch bezüglich der Spinorindizes,
	dabei ist $\nabla^2 = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$
$\nabla^{(y)}_\mu, \nabla^\mu_{(y)}$	kovariante Ableitung bezüglich der Variable y
$\not{\nabla}, \not{\nabla}^{\mathrm{T}}$	über die Gamma-Matrizen kontrahierte kovariante Ableitung
	mit $\not{\nabla} = \gamma^\mu \nabla_\mu$ und $\not{\nabla}^{\mathrm{T}} = \gamma^{\mu\mathrm{T}}\nabla^{\mathrm{T}}_\mu$
∂_μ	partielle Ableitung
$\partial^{(y)}_\mu, \partial^\mu_{(y)}$	Abkürzung für $\partial^{(y)}_\mu = \partial/\partial y^\mu$ bzw. $\partial^\mu_{(y)} = g^{\mu\nu}(y)\partial^{(y)}_\nu$

Literatur

[1] B. Allen and T. Jacobson. Vector two-point functions in maximally symmetric spaces. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 103(4):669–692, 1986.

[2] B. S. DeWitt. *Dynamical Theory of Groups and Fields.* Erschienen in „Relativity Groups and Topology“ (Les Houches Lectures). Gordon and Breach Science Publishers, New York, London und Paris, 1963.

[3] C. Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Physics Letters B*, vol. 301:90–94, 1993.

[4] D. D. Scherer and H. Gies. Renormalization group study of magnetic catalysis in the 3d gross-neveu model. arXiv:1201.3746v2 [cond-mat.str-el], 2010.

[5] H. A. Weldon. Fermions without vierbeins in curved space-time. *Phys. Rev. D*, Vol. 63(104010), 2001.

[6] H. Gies. Introduction to the functional rg and applications to gauge theories. arXiv:hep-ph/0611146v1, 2006.

[7] H. Gies. Asymptotic safety: a simple example. arXiv:1011.1456v1 [hep-th], 2010.

[8] H. Weyl. Elektron und gravitation. *Zeitschrift für Physik*, 56:330–352, 1929.

[9] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov and I. L. Shapiro. *Effective Action in Quantum Gravity.* IOP Publishing, Bristol und Philadelphia, 1992.

[10] J. Jaeckel and C. Wetterich. Flow equations without mean field ambiguity. arXiv:hep-ph/0207094v2, 2003.

[11] J. L. Synge. *Introduction to General Relativity.* Erschienen in „Relativity Groups and Topology“ (Les Houches Lectures). Gordon and Breach Science Publishers, New York, London und Paris, 1963.

[12] M. E. Peskin and D. V. Schröder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Westview Press, 1995.

[13] M. Spradlin, A. Strominger and A. Volovich. Les houches lectures on de sitter space. arXiv:hep-th/0110007v2, 2001.

[14] P. Candelas and D. J. Raine. General-relativistic quantum field theory: An exactly soluble model. *Phys. Rev. D*, Vol. 12(4):966–974, 1975.

[15] R. Camporesi. The spinor heat kernel in maximally symmetric spaces. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 148(2):283–308, 1992.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die Arbeit für die öffentliche Nutzung der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

....	....
Ort, Abgabedatum	Unterschrift des Verfassers

Danksagung

Allen, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit menschlich und fachlich unterstützt haben, möchte ich danken. Da es quasi unmöglich ist, eine Wichtung festzulegen, lasse ich den Zufall walten, um eine Reihenfolge zu finden. Besonderer Dank gilt Prof. Gies für die moralische Hilfe und die Unterstützung bei der Suche nach den Auswegen aus einer fast endlosen Zahl an mathematischen und physikalischen Labyrinthen. Ich danke meinem „Büro", das sind Dietrich Roscher, Tobias Hellwig und René Sondenheimer sowie meinem Freund und Studienkameraden Christoph Hahn für die unzähligen hilfreichen Diskussionen und Anregungen. Meiner Mutter Herma sowie auch meinen Geschwistern Nina, Karsten und Thomas danke ich für ihr stetes Verständnis und jeden Ansporn auf meinem Weg. Und zu guter Letzt möchte ich auch meiner Freundin Lisa dafür danken, dass sie mir jeden Tag auf emotionaler Ebene zur Seite steht und dafür sorgt, dass ich nicht nur am Schreibtisch sitze.