

PHYSIKALISCH-
ASTRONOMISCHE-
FAKULTÄT



**FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA**

- Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science im Fach Physik -

**NICHTLINEARE QUANTENVAKUUMEFFEKTE IN STARKEN
LASERFELDERN**

ERSTELLT VON
SÖREN LERNER

BETREUT DURCH:
PROF. DR. HOLGER GIES

ZWEITGUTACHTER:
M.SC. LEONHARD KLAR

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	1
2.1	Klassische Elektrodynamik	1
2.2	Dirac-Theorie	2
2.3	Vakuum und Diracsee	3
2.4	Konsequenzen aus Heisenberg und Eulers Arbeit	4
3	Aufbau eines theoretischen Experiments	5
3.1	Starkfeldlaser	5
3.2	Ausbreitung der Laserfelder und Kollision	6
3.3	Polarisationen	6
3.3.1	Treibende Laser	8
3.3.2	Polarisation der Signalphotonen	9
3.4	Lage der Photonendichtemaxima	11
4	Kollision zweier gegenläufiger Starkfeldlaser	12
4.1	Dichte der Signalphotonen auf der Einheitssphäre	13
4.2	Zusammenhang zwischen Eingangspolarisation und Photonendichte	14
4.3	Einfluss des Winkels β auf die Photonendichte ρ	16
4.4	Approximation des Maximums	17
4.5	Fehlerskalierung	20
5	Kollision zweier Starkfeldlaser unter einem Winkel $\alpha \neq 0$	22
5.1	Einfluss des Kollisionswinkels auf die Photonendichte	22
5.2	Zusammenhang zwischen Kollisionswinkel, Eingangspolarisation und Photonendichte	24
5.3	Analyse der Polarisation	24
5.4	Fehlerskalierung	27
6	Resümee und Ausblick	30
7	Literaturverzeichnis	31

1 Einleitung

Das klassische Vakuum ist in unserer Vorstellung definiert durch die Abwesenheit sämtlicher Materie. In der Quanten-Elektrodynamik wird diese Vorstellung auf den Kopf gestellt. Das Vakuum in der QED ist Fluktuationen unterworfen und kann als eine Art Medium aufgefasst werden. Durch die Entstehung von geladenen Teilchen-Antiteilchen-Paaren kann das Vakuum mit elektromagnetischen Felder wechselwirken. Diese komplexere Vorstellung des Vakuums verlangt eine kompliziertere Form der klassischen Maxwell-Gleichungen. Es treten Nichtlinearitäten auf, welche neue Effekte mit sich bringen. Diese sollen in dieser Arbeit anhand der Polarisation untersucht werden. Es wird dazu ein theoretisches Experiment beruhend auf der Kollision zweier Starkfeldlaser vorgestellt. Es werden alle durch nichtlineare Wechselwirkungen entstandenen Signalphotonen durch eine numerische Simulation in Mathematica berechnet. Welche nichtlinearen Effekte bei der Entstehung der Signalphotonen zum Tragen kommt muss aus den physikalischen Eigenschaften der Photonen abgeleitet werden. Eine dieser Eigenschaften ist die Polarisation der Signalphotonen die in dieser Arbeit ausführlich untersucht wird. Durch die Vorstellung des Vakuums als eine Art Medium kann es polarisierend auf die ursprünglich linear polarisierten Laserfelder wirken. Ziel dieser Arbeit ist es die Signaturen der Quantenvakuumfluktuationen in einer Abweichung von der linearen Polarisation zu finden und zu beschreiben.

2 Theoretische Grundlagen

Um die klassische Elektrodynamik und die Dirac-Theorie zu beschreiben eignet sich die Nutzung des Heaviside-Lorentz-Einheitensystem. Es wird daher in der gesamten Arbeit verwendet, des Weiteren wird $c = \hbar = 1$ gesetzt. Mit c wird die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet und mit \hbar das (reduzierte) Plank'sche Wirkungsquantum. Als Metrik wird

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

genutzt. In diesem Kapitel werden zu Beginn die wichtigsten Erkenntnisse aus der klassischen Elektrodynamik zusammengefasst. Anschließend wird zur relativistischen Beschreibung eine quantenmechanischen Teilchens übergegangen. Dazu werden die Ergebnisse von Dirac zur Lösung der Bewegungsgleichung, sowie seine Interpretation, diskutiert. Insbesondere wird hier auf die neuartige Anschauung des Vakuums eingegangen.

2.1 Klassische Elektrodynamik

In der relativistischen Formulierung der Maxwell-Gleichungen ist die Definition des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$, sowie die des dualen Feldstärketensors $\tilde{F}^{\mu\nu}$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.1a)$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1b)$$

hilfreich. Hierbei werden mit E_i die Komponenten des elektrischen Feldes \mathbf{E} bezeichnet, analog mit B_i die Komponenten des magnetischen Feldes \mathbf{B} . Weiterhin wird mit A^μ die μ -te Komponente des Viererpotentials bezeichnet. Die Maxwell Gleichungen lassen sich im Vakuum somit als

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\text{und} \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \quad (2.2b)$$

schreiben.

Der Feldstärketensor besitzt zwei lorentz-invariante Skalare

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \quad (2.3a)$$

$$\text{und} \quad \mathcal{G} = \frac{1}{4} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}). \quad (2.3b)$$

Eine ausführliche Herleitung findet sich in [1].

Der Lagrange-Formalismus, wie er in der theoretischen Mechanik zur Anwendung kommt, kann auch in der Elektrodynamik angewendet werden. Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (2.4)$$

wobei mit q_i und \dot{q}_i die generalisierten Koordinaten, beziehungsweise ihre Zeitableitungen bezeichnet werden. Diese entsprechen jetzt den Feldamplituden und ihren Ableitungen. Die Lagrangefunktion L geht durch diesen Schritt über in eine Lagrangedichte \mathcal{L} . Diese hängen über die Beziehung

$$L(x^0) = \int d^3x \mathcal{L} \quad (2.5)$$

zusammenhängen.

Die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder ergibt sich mit dem Viererpotential A^ν zu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\nu)}. \quad (2.6)$$

Mit Hilfe dieser Lagrangedichte kann die Wirkung

$$S = \int \mathcal{L} d^4x \quad (2.7)$$

bestimmt werden [2]. Die Euler-Lagrange-Gleichung kann aus der Variation der Wirkung hergeleitet werden. Diese ist besonders wichtig, da sie es ermöglicht, eine Bewegungsgleichung für elektromagnetische Felder aufzustellen.

2.2 Dirac-Theorie

Die Quantenmechanik beruht auf 5 Axiomen: (a) Der Zustandsvektor $|\Psi\rangle$ beschreibt den Zustand eines Systems, (b) Die physikalischen Messgrößen, die Observablen können durch hermitesche Operatoren dargestellt werden, (c) Der Mittelwert dieser Operatoren ist durch

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle \quad (2.8)$$

berechenbar, (d) Die zeitliche Entwicklung eines Zustandsvektors wird durch die Schrödinger-Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle \quad (2.9)$$

beschrieben, wobei H den Hamiltonoperator

$$H\Psi = -\frac{1}{2m} \Delta\Psi \quad (2.10)$$

bezeichnet und (e) Durch die Messung einer Observablen geht das System in den Zustand $|m\rangle$ über, wenn a_m gemessen wurde [3].

Eine relativistische Formulierung der Quantenmechanik muss die Gleichbehandlung von Raum und Zeit beinhalten. Die Schrödingergleichung (2.9) genügt dieser Anforderung aufgrund der unterschiedlichen Ordnungen der Ableitungen offensichtlich nicht. Der erste Versuch eine relativistische Wellengleichung aufzustellen wurde von Klein und Gordon in Form der freien Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + m^2 \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.11)$$

getätigt. Diese lässt sich in kovarianter Form zu

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.12)$$

umformulieren. Die Klein-Gordon-Gleichung beschreibt nur spinlose Teilchen mit der Masse m und einer skalaren Wellenfunktion Ψ . Mit \vec{r} wird der dreidimensionale Ortsvektor bezeichnet. Die Lösungen dieser Wellengleichung lauten:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{iEt - i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad (2.13)$$

wobei E die Werte

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (2.14)$$

annehmen kann. Mit \vec{p} wird der dreidimensionale Impulsvektor und mit E die Energie gekennzeichnet. Die Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung stellen ein Problem dar: Negative Energien sind unphysikalisch, so wäre es beispielsweise einem Teilchen mit $E > 0$ möglich negative Energiezustände zu besetzen und unendlich viel Energie abzustrahlen.

Dirac versuchte daraufhin eine Gleichung für Fermionen aufzustellen, welche erster Ordnung in der Zeit,- und Ortsableitung ist [2]. Die Bewegungsgleichung soll die Form

$$i\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial t} = \left(-i\alpha^k\partial_k + \beta m\right)\tilde{\Psi} = H\tilde{\Psi} \quad (2.15)$$

besitzen. Mit $\tilde{\Psi}$ wird ein sogenannter Dirac-Spinor bezeichnet, es gilt $\tilde{\Psi} = (\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2, \tilde{\Psi}_3, \tilde{\Psi}_4)^T$. Die Gleichung (2.15) soll die folgenden Kriterien erfüllen: (a) Die Komponenten von $\tilde{\Psi}$ sollen die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, (b) Es soll einen Viererstrom geben, welcher erhalten ist und dessen nullte Komponente größer als Null ist und (c) Die Gleichung soll Lorentz-kovariant sein [2]. Dieser Ansatz führte auf die freie Dirac-Gleichung

$$(i\partial_t + i\vec{\alpha}\vec{\nabla} - m\beta)\tilde{\Psi} = 0. \quad (2.16)$$

In dieser Gleichung werden mit $\vec{\alpha}$ und β matrixwertige Koeffizienten bezeichnet. Sie lassen sich zu

$$\beta = \begin{pmatrix} \vec{1} & 0 \\ 0 & \vec{1} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

berechnen. Mit σ^i werden die Pauli-Matrizen bezeichnet, diese sind durch

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben [4, 5].

In kovarianter Schreibweise nimmt die Dirac-Gleichung die folgende Gestalt

$$\left(-i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\Psi = 0 \quad (2.19)$$

an, wobei $\gamma^0 = \beta$ und $\gamma^i = \beta\vec{\alpha}^i$ bezeichnet.

Die Dirac-Gleichung löst das Problem der Klein-Gordon-Gleichung nicht, es existieren auch hier Lösungen mit negativen Energiezuständen [2].

2.3 Vakuum und Diracsee

Die Dirac-Gleichung für Fermionen löst das Problem der negativen Energiezustände nicht, jedoch die Interpretation von Dirac. Das Vakuum in der Dirac'schen Theorie besteht aus unendlich vielen positiven und negativen Energiezuständen, wobei die negativen alle besetzt sind. Diese werden unter dem Begriff des Dirac-Sees zusammengefasst. Im Vakuum sind alle positiven Energiezustände unbesetzt. Aufgrund des Pauli-Prinzips ist es einem Teilchen, welches mit $E > 0$ in das Vakuum gebracht wird, nicht mehr möglich seine Energie unbegrenzt abzugeben, da die negativen Energiezustände bereits besetzt sind. Diese komplexere Vorstellung des Vakuums hat wiederum neue Begleiterscheinungen. Es ist möglich, durch das Einbringen von Energie in das Vakuum, ein Teilchen aus einem negativen Zustand in einen positiven Zustand anzuregen. Es wird einerseits ein Teilchen mit $E > 0$ erzeugt, andererseits verbleibt ein Loch im Dirac-See, welches als Antiteilchen bezeichnet wird. Dieses hat als Fehlen von negativer Energie, selbst wieder eine positive Energie. Dieser Prozess kann auch umgekehrt ablaufen, dass heißt ein Paar von Teilchen und Antiteilchen kann wieder zerfallen in Energie in Form von Strahlung und Vakuum [5].

2.4 Konsequenzen aus Heisenberg und Eulers Arbeit

Die Resultate aus dem Dirac-Modell wurden von W.Heisenberg und H.Euler 1935 noch weiter spezifiziert. Das Dirac-Modell impliziert schon für das Vakuum, dass die Maxwellgleichungen abgeändert werden müssen. Die Lagrange-Funktion wurde zu

$$\mathcal{L} = \underbrace{\mathcal{L}_{\text{klassisch}}}_{=-\mathcal{F}} + \mathcal{L}_{\text{nichtlinear}} \quad (2.20)$$

korrigiert. Heisenberg und Euler bestimmten \mathcal{L} zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) + \frac{e^2}{hc} \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \left(i\eta^2 (\mathbf{E}\mathbf{B}) \frac{\cos(\frac{\eta}{|E_{cr}|} \sqrt{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i\mathbf{E}\mathbf{B}} + \text{konj})}{\cos(\frac{\eta}{|E_{cr}|} \sqrt{\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i\mathbf{E}\mathbf{B}} - \text{konj})} + |E_{cr}|^2 + \frac{\eta^2}{3}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \right), \quad (2.21)$$

wobei mit $|E_{cr}|$ die kritische Feldstärke bezeichnet wird. Sie kann im SI-Einheitensystem mit der Formel $E_{cr} = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar}$ zu $E_{cr} = 1.32 \cdot 10^{18} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ berechnet werden. Hierbei wird mit e die Elementarladung und mit m_e die Elektronenmasse bezeichnet. Das kritische Magnetfeld ergibt sich mit $B_{cr} = \frac{E_{cr}}{c}$ zu 4414 MT [6]. Durch Anwendung der one-loop Approximation wird die effektive Lagrangedichte \mathcal{L}_{eff} als

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{2}{45} \frac{\alpha^2}{m_e^2} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2) + m_e^4 \mathcal{O}\left(\left(\frac{\alpha F^2}{m_e^4}\right)^3\right) \quad (2.22)$$

geschrieben. Hierbei steht $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ für die Feinstrukturkonstante. Durch diese effektive Lagrangedichte treten nichtlineare Effekte wie Photon-Photon-Streuung [7, 8], Doppelbrechung im Vakuum [9, 10, 11, 12], Photon Merging [13, 14], Photon Splitting [15, 16] oder Quantenreflektion [17, 18] auf. Im Folgendem werden ausschließlich Photonen betrachtet, die durch nichtlineare Wechselwirkung entstanden sind. Diese werden in dieser Arbeit als Signalphotonen bezeichnet.

Die Amplitude $S_p(\vec{k})$ dieser Signalphotonen ist gegeben durch:

$$S_p(\vec{k}) = \langle \gamma_p(\vec{k}) | \Gamma_{\text{int}}[A(x)] | 0 \rangle \quad (2.23)$$

Der Index p beschreibt die Polarisierung, der Vektor \vec{k} den Wellenvektor $(k_x, k_y, k_z)^T$, $|\gamma_p(\vec{k})\rangle$ den Zustand eines einzelnen Photons und $\Gamma_{\text{int}}[A(x)]$ die effektive Wirkung des elektromagnetischen Feldes, ausgedrückt durch das Vektorpotential $A(x)$ der treibenden Laser. Durch die Annahme eines lokal konstanten Feldes kann Gleichung (2.23) zu

$$S_p(\vec{k}) \approx i \frac{\epsilon_p^{*\mu}(k)}{(2|\vec{k}|)} \int d^4x e^{ik_\alpha x^\alpha} \left(k^\nu F_{\nu\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \mathcal{F}} + k^\nu \tilde{F}_{\nu\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \mathcal{G}} \right) \quad (2.24)$$

genähert werden. Hierbei wird mit $\epsilon^{*\mu}(k)$ die Polarisierung der Signalphotonen bezeichnet. Diese Approximation ist angemessen, da die Compton-Wellenlänge eines Elektrons sehr viel kleiner ist als die räumliche Variation der Laserfelder. Um Gleichung (2.24) auszuwerten werden die partiellen Ableitungen der Lagrangedichte nach \mathcal{F} und \mathcal{G} benötigt. Diese ergeben sich zu:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \mathcal{F}} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{45} \frac{e^2}{m_e^4} 4\mathcal{F}(x) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{eF}{m_e^2}\right)^4\right) \quad (2.25a)$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{eff}}}{\partial \mathcal{G}} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{45} \frac{e^2}{m_e^4} 7\mathcal{G}(x) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{eF}{m_e^2}\right)^4\right). \quad (2.25b)$$

Die Herleitungen entstammen [19].

Die differentielle Anzahl an Signalphotonen ist in Kugelkoordinaten durch

$$d^3 N_p(\vec{k}) = dk d\varphi d\vartheta \cos\vartheta \frac{1}{(2\pi)^3} |k S_p(\vec{k})|^2 \quad (2.26)$$

berechenbar. Die Photonendichte, die in einem von φ und ϑ aufgespannten Winkelbereich detektiert wird kann durch

$$\rho_p(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk |k S_p(\vec{k})|^2 \quad (2.27)$$

definiert werden. Aus dieser Dichte kann die Anzahl der Photonen mit Polarisation p über

$$N_p = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos(\vartheta) \rho_p(\varphi, \vartheta) \quad (2.28)$$

bestimmt werden [20].

3 Aufbau eines theoretischen Experiments

Um die in Kapitel 2.4 beschriebenen Signalphotonen durch nichtlineare Effekte zu messen benötigt es hohe elektromagnetische Feldstärken. In diesem Kapitel wird ein theoretisches Experiment vorgestellt, in dem diese hohen Feldstärken durch zwei Hochintensitätslaser geliefert werden. Dabei wird insbesondere auf den Aufbau und die Geometrie der Anordnung, sowie die Eigenschaften der Laser eingegangen. Des Weiteren wird der Begriff der Polarisation am Beispiel einer ebenen Welle eingeführt, anschließend werden die Polarisationen der beiden Laser definiert.

3.1 Starkfeldlaser

Es werden zwei im Koordinatenursprung aufeinander treffende Hochintensitätslaser untersucht. Die Laser sind beide auf den Koordinatenursprung $(0, 0, 0)^T$ fokussiert. Beide Laser sind gepulst mit einer Pulsdauer von $\tau = 25$ fs, einer Energie von je $W=25$ J und einer Wellenlänge von $\lambda = 800$ nm. Die Energie pro Photon beträgt für beide Laser $\omega_0 = 1.55$ eV. Beide Laser sind auf den Koordinatenursprung mit einer Fokusbreite $w_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4.05$ eV $^{-1}$ fokussiert. Von den Eigenschaften her sind beide Laser identisch, unterscheiden sich aber in ihrer Ausbreitungsrichtung \vec{e}_k , sowie der Lage ihrer Feldvektoren \vec{e}_E und \vec{e}_B . Die Polarisationen der Laser werden in Kapitel 3.2 genauer charakterisiert.

Beide Laser besitzen ein gaußförmiges Profil, das elektrische Feld ist in paraxialer Näherung durch

$$E(r, z, t) \approx E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} e^{-i\frac{k \cdot r^2}{2R(z)}} e^{-i(kz - \zeta(z))} \quad (3.1)$$

gegeben. Hierbei wird mit

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (3.2)$$

der Strahlradius, mit

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right) \quad (3.3)$$

der Krümmungsradius, mit

$$z_R = \frac{w_0 \pi}{\lambda} \quad (3.4)$$

die Rayleighlänge des Laserstrahls und mit

$$\zeta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (3.5)$$

die Gouy-Phase bezeichnet.

In dem hier beschriebenen Experiment wird die Näherung der unendlichen Rayleighlänge $z_R \rightarrow \infty$ benutzt. Diese ist zulässig, da die Wechselwirkung der beiden Laser miteinander auf den Fokus beschränkt ist, d.h. die räumliche Ausbreitung der Laser spielt keine Rolle. Die Informationen ab Formel (3.1) entstammen Quelle [21]. Im Rayleigh-Limes ist das elektrische Feld durch

$$E(r, z, t) \approx E_0 e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} e^{-i(kz)} \quad (3.6)$$

gegeben.

Die Ausbreitung eines gaußförmigen Strahls ist in Abbildung 1 gezeigt.

Ein Laser mit den geforderten Eigenschaften wird beispielsweise von der University of California San Diego in [23] präsentiert.

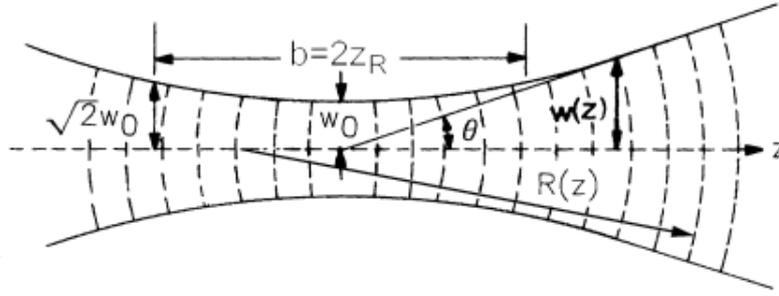


Abbildung 1: Schematische Darstellung der Ausbreitung eines Gauß'schen Laserstrahls. Der Wert $w(0) = w_0$ entspricht dem Minimum der Größe $w(z)$ und stellt die Breite der Strahlmitte dar. Bei $z = z_R$ nimmt die Strahlbreite: $w(z = z_R) = \sqrt{2}w_0$. [22]

3.2 Ausbreitung der Laserfelder und Kollision

Die beiden in Kapitel 3.1 beschriebenen Laser treffen unter einem Kollisionswinkel α aufeinander. Dieser ist in der vorliegenden Arbeit durch

$$\vec{e}_{k_2} \cdot \vec{e}_z = \cos(\alpha) \quad (3.7)$$

definiert und liegt somit zwischen dem Wellenvektor des Kollisionslaser \vec{e}_{k_2} und \vec{e}_z . An dieser Stelle noch eine Anmerkung zum Kollisionswinkel α : In anderen Arbeiten zu dieser Thematik unterscheidet sich die Definition. Dort wird der Winkel α als Winkel zwischen den beiden Wellenvektoren definiert.

Die beiden Einheitswellenvektoren liegen in der x - z -Ebene. Der Test-Laser, im Folgendem mit dem Index 1 versehen, breitet sich in Richtung $\vec{e}_{k_1} = (0, 0, -1)^T$ aus. Der Kollisionslaser, im Folgendem mit Index 2 versehen, trifft dann mit $\vec{e}_{k_2} = (-\sin(\alpha), 0, \cos(\alpha))^T$ im Koordinatenursprung $(0, 0, 0)^T$ auf den Test-Laser. Die Namen der beiden sind willkürlich gewählt und dienen nur der Unterscheidung. Der Aufbau des Experiments ist in Abbildung 2 zu sehen.

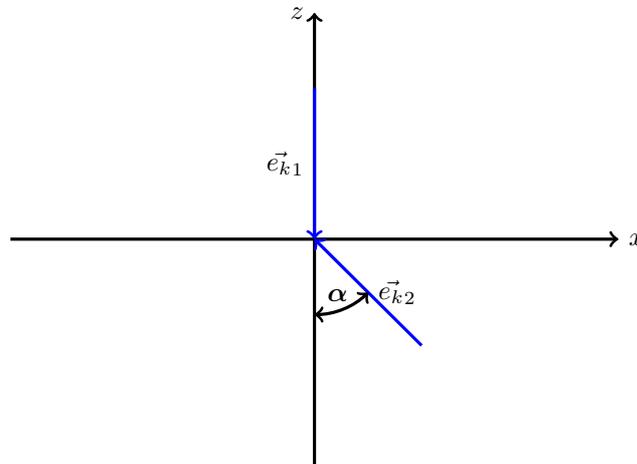


Abbildung 2: Schematische Darstellung der Zwei-Laserkonfiguration in der x - z -Ebene: In blau sind die beiden Ausbreitungsvektoren der Hochintensitätslaser eingezeichnet. Der Kollisionswinkel α ist der Winkel zwischen \vec{e}_{k_2} und \vec{e}_z und es gilt damit $\vec{e}_{k_2} \cdot \vec{e}_z = \cos(\alpha)$.

3.3 Polarisierungen

Die Polarisation ist eine physikalische Größe die der Beschreibung der Richtung einer elektromagnetischen Schwingung dient. Um die Polarisation anschaulich zu beschreiben, ist das Beispiel einer ebenen Welle

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.8)$$

die sich in \vec{e}_z -Richtung ausbreitet hilfreich. Hierbei beschreibt \vec{E}_0 die Amplitude der Welle, \vec{r} den dreidimensionalen Ortsvektor und t die Zeit. Der Wellenvektor \vec{k} ist in diesem Fall $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und die Amplitude ist gegeben

durch $\vec{E}_0 = (E_x e^{i\xi_x}, E_y e^{i\xi_y}, 0)^T$. Mit den Abkürzungen $\Theta = \omega t - kz - \xi_x$ und $\delta = \xi_y - \xi_x$ kann Gleichung (3.8) zu

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = \begin{pmatrix} E_x \cos(\Theta) \\ E_y \cos(\Theta - \delta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

vereinfacht werden. Die Polarisation dieser Welle kann durch den sogenannten Jones-Vektor

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

beschrieben werden. Da für die Diskussion der Polarisationsarten nur die Richtung des Jones-Vektor relevant ist, wird in dieser Arbeit auf die Normierung des verzichtet. Es werden die folgenden Arten von Polarisierungen unterschieden: elliptische Polarisation, zirkulare Polarisation und lineare Polarisation. Trifft keine dieser Fälle zu, so spricht man von einer unpolarisierten Welle.

Für linear polarisiertes Licht, welches in diesem Experiment durch zwei Laser geliefert wird, gilt $\delta = 0$ oder $\delta = \pi$. Der Jones-Vektor wird in diesem Fall zu

$$\vec{j}_{\text{lin}} = \begin{pmatrix} E_x \\ \pm E_y \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Von zirkular polarisiertem Licht spricht man, wenn $E_x = E_y$ und $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ erfüllt ist. Der Jones-Vektor ist in diesem Fall durch

$$\vec{j}_{\text{zirk}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

gegeben. Für alle anderen Fälle mit $0 < \delta < \pi$ oder $-\pi < \delta < 0$ handelt es sich um elliptische Polarisation. Das Vorzeichen gibt hierbei die Umlaufrichtung an. Besonders anschaulich werden die drei Fälle in Abbildung 3 dargestellt.

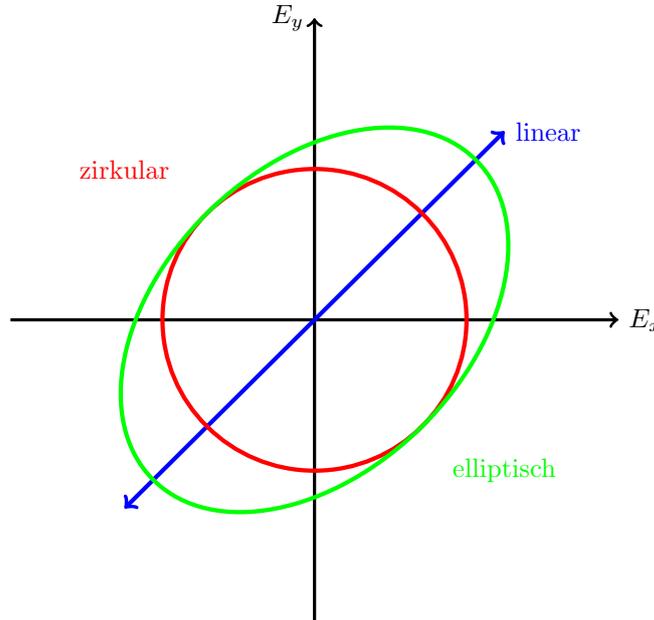


Abbildung 3: Beispielhafte Darstellung der Polarisationsarten in der von E_x und E_y aufgespannten Ebene: In blau die lineare, in rot die zirkulare und in grün die elliptische Polarisation. Die zirkulare und lineare Polarisierungen sind Grenzfälle der elliptischen Polarisation.

An dieser Stelle noch eine kurze Anmerkung: Die hier gegebene Einführung der Polarisation, beziehungsweise Polarisationsarten ist anhand ebener Wellen durchgeführt worden. Die im Experiment verwendeten Starkfeldlaser sind linear polarisiert, senden allerdings keine ebenen Wellen aus. Die Informationen aus diesem Kapitel entstammen [24].

3.3.1 Treibende Laser

Die Eingangspolarisation Φ_0 des Testlaser beschreibt die Polarisation, also die Ausrichtung des elektrischen Feldes in der Normalebene zu \vec{e}_{k_1} . Die Lage von Φ_0 und \vec{e}_E ist in Abbildung 4 zu sehen. Da $\vec{e}_k \perp \vec{e}_E$ und $\vec{e}_k \perp \vec{e}_B$ stets erfüllt sein muss, liegt der Vektor \vec{e}_E immer in der x - y -Ebene.

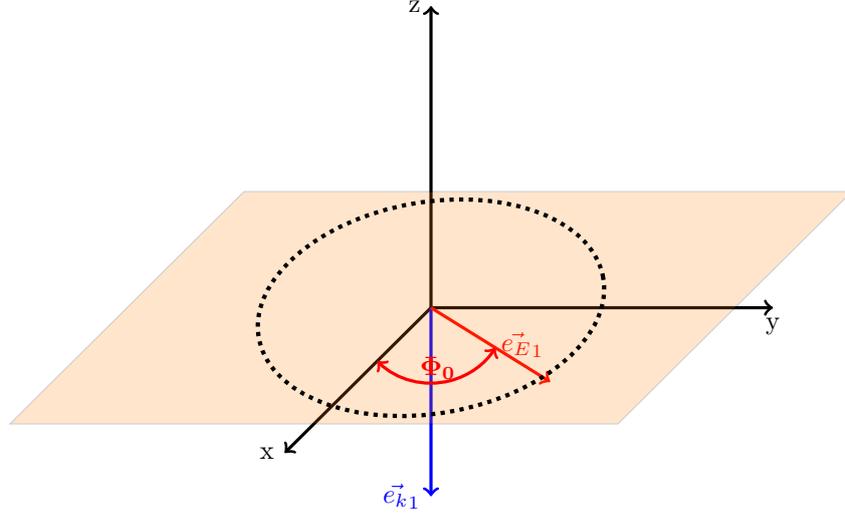


Abbildung 4: Skizze der Polarisation Φ_0 des Testlaser. Die Ausbreitung wird durch den blauen Vektor \vec{e}_{k_1} dargestellt, der Einheitsvektor des elektrischen Feldes liegt orthogonal dazu in der x - y -Ebene.

Der Vektor \vec{e}_{E_1} wird durch die Wahl von $\vec{e}_{k_1} = -\vec{e}_z$ zu

$$\vec{e}_{E_1} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi_0) \\ \sin(\Phi_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

festgelegt.

Die Polarisation des Kollisionslasers ist im Folgendem so gewählt, dass sein elektrisches Feld in Richtung \vec{e}_x positiv maximal ist. Des Weiteren soll er keine y -Komponente besitzen, d.h. $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_{E_2} = 0$ gilt unabhängig von der Wahl des Kollisionswinkels α . Eine Illustration für verschiedene Ausgangssituationen ist in Abbildung 5 zu sehen. Sämtliche Einheitsvektoren lassen sich aus den obigen Bedingungen berechnen. Für den Fall $\alpha = 0^\circ$ und $\Phi_0 = 0^\circ$ hier eine kurze Beispielrechnung:

$$\vec{e}_{k_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{E_1} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi_0) \\ \sin(\Phi_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{B_1} = \vec{e}_{k_1} \times \vec{e}_{E_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14a)$$

$$\vec{e}_{k_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{E_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{B_2} = \vec{e}_{k_2} \times \vec{e}_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.14b)$$

Der Fall $\alpha = 0^\circ$ ist ein Spezialfall, der in Abbildung 5 dargestellt ist. Die Resultate dieser Konstellation werden in Kapitel 4 im Detail diskutiert.

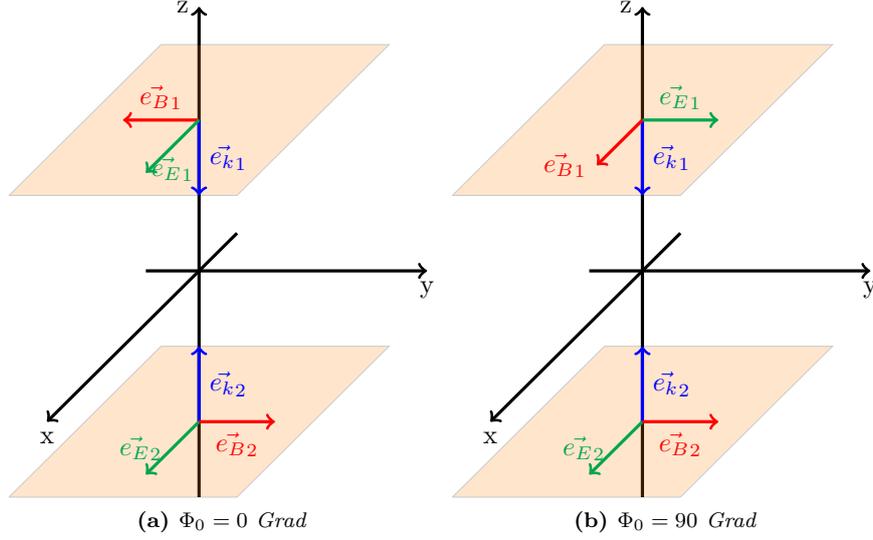


Abbildung 5: Eine Skizze der Lage der Einheitsvektoren \vec{e}_k, \vec{e}_E und \vec{e}_B für den Spezialfall kontrapropagierender Laser, d.h. der Kollisionswinkel α beträgt 0° für zwei verschiedene Eingangspolarisationen Φ_0 . Alle hier eingezeichneten Vektoren gehen vom Ursprung aus und wurden der besseren Übersichtlichkeit wegen entlang der z -Achse verschoben. In orange wurde die, um z verschobene, x - y -Ebene eingezeichnet, in dieser befinden sich die Feldvektoren \vec{e}_E und \vec{e}_B .

Die Polarisationen, bzw. die Lage der Feldvektoren, der beiden treibenden Laser für den allgemeineren Fall $\alpha \neq 0^\circ$ werden als Abschluss dieses Kapitels berechnet und skizziert. Wird der Kollisionsstrahl um den Winkel α gedreht, entspricht dies im 3-dimensionalen einer Rotation um die y -Achse. Die Vektoren des Kollisionslaser, wie sie in Abbildung 5 dargestellt werden, müssen daher mit einer Drehmatrix \mathcal{R}_y multipliziert werden. Der Testlaser bleibt von der Drehung unbeeinflusst. Es ergibt sich beispielhaft für den Fall $\Phi_0 = 0$:

$$\vec{e}_{k2} = \mathcal{R}_y \vec{e}_{k2,\text{kontra}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (3.15a)$$

$$\vec{e}_{E2} = \mathcal{R}_y \vec{e}_{E2,\text{kontra}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (3.15b)$$

$$\vec{e}_{B2} = \vec{e}_{k2} \times \vec{e}_{E2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15c)$$

Der magnetische Einheitsvektor \vec{e}_{B2} des Kollisionslaser zeigt unabhängig von α in Richtung von \vec{e}_y . Der elektrische Einheitsvektor, sowie der Wellenvektor des Kollisionsstrahls, kann dementsprechend nur in der x - z -Ebene liegen.

3.3.2 Polarisation der Signalphotonen

Die Photonen können durch nichtlineare Effekte prinzipiell in den gesamten \mathbb{R}^3 gestreut werden. Die Menge aller Wellenvektoren der Signalphotonen \vec{k} mit $|\vec{k}| = k$ definiert die Oberfläche einer Kugel im \mathbb{R}^3 . Die elektrischen und magnetischen Feldvektoren können dann ausschließlich in einer Tangentialebene zu dieser Kugel liegen. Es wird ein Winkel β eingeführt, der in dieser Ebene liegt und der Identifikation der Polarisation der Signalphotonen dient. Der Einheitsvektor \vec{e}_β ist über

$$\vec{e}_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \cos(\beta) - \sin(\varphi) \sin(\beta) \\ \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \cos(\beta) + \cos(\varphi) \sin(\beta) \\ -\sin(\vartheta) \cos(\beta) \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

definiert [20].

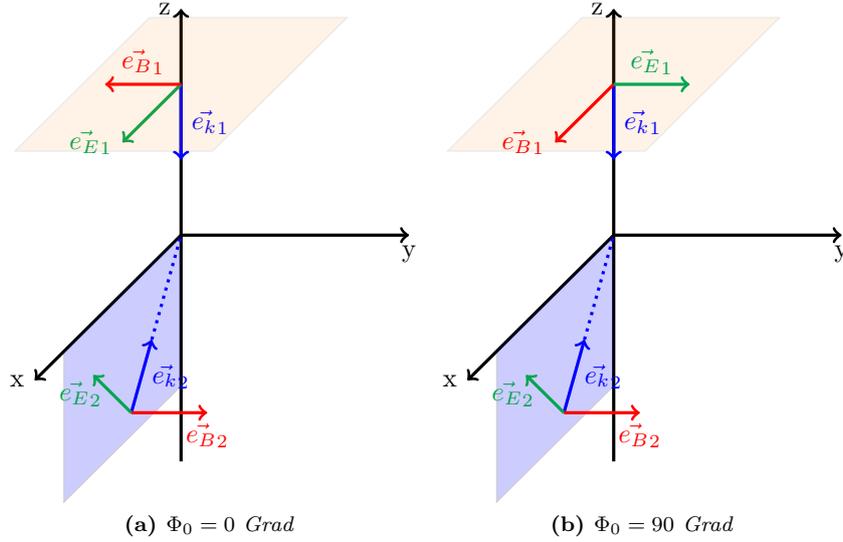


Abbildung 6: Skizze der Lage der Vektoren \vec{e}_{k_i} , \vec{e}_{E_i} und \vec{e}_{B_i} , mit $i \in \{1, 2\}$, für einen Kollisionswinkel $\alpha = 45^\circ$ für zwei verschiedene Eingangspolarisationen Φ_0 . Der magnetische Einheitsvektor des Kollisionslaser \vec{e}_{B_2} liegt immer in Richtung \vec{e}_y . Die Vektoren \vec{e}_{E_2} und \vec{e}_{k_2} liegen ausschließlich in der x - z -Ebene. Die Vektoren mit Index $i = 1$ des Testlaser sind unabhängig von α . Schattiert in orange ist die x - y -Ebene eingezeichnet, schattiert in blau die x - z -Ebene.

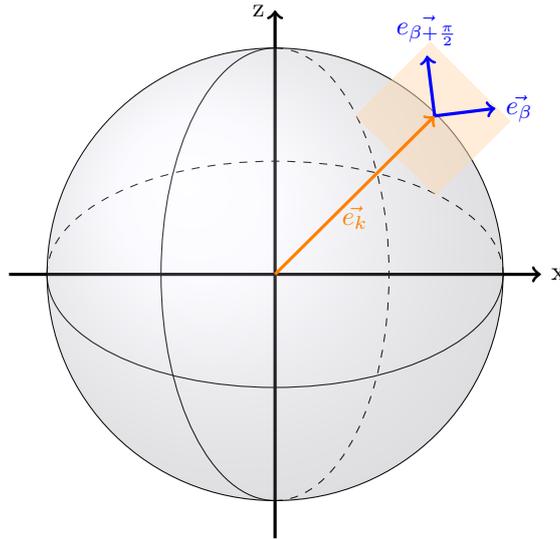


Abbildung 7: Die beiden Laser treffen im Koordinatenursprung aufeinander. Die Photonen können dann in Richtung des Einheitsvektors \vec{e}_k in den Raum gestreut werden. Die blau schattierte Kugel stellt die durch \vec{e}_k aufgespannte Einheitskugel dar. Auf deren Oberfläche wird die Polarisation der gestreuten Photonen untersucht. Die elektrischen und magnetischen Felder können nur in der orange schattierten Tangentialebene liegen. Der Winkel β , bzw. der dazugehörige Einheitsvektor \vec{e}_β dient der Identifikation.

Im Rahmen der Definition von β können auch die beiden Polarisationsrichtungen p_1 und p_2 eingeführt werden. Es werden diejenigen Signalphotonen als p_1 gezählt, für die \vec{e}_E in die Richtung von \vec{e}_β zeigt. Analog werden diejenigen Photonen als p_2 gewertet, deren \vec{e}_E in Richtung von $\vec{e}_{\beta+\frac{\pi}{2}}$ zeigt. Die Anzahl der in der gesamten Kugeloberfläche eintreffenden, durch nichtlineare Effekte erzeugten, Photonen mit p_1 als N_{p_1} angegeben, die Anzahl der Photonen mit p_2 als N_{p_2} . Die Gesamtanzahl aller dieser Signalphotonen $N_{\text{tot}} = N_{p_1} + N_{p_2}$ ist unabhängig von der Wahl des Winkels β , da dieser lediglich angibt, wie die Signalphotonen gezählt werden, allerdings keinen Einfluss auf die Physik hat. Um die Einführung des Winkels β zu veranschaulichen ist der Vergleich mit einem klassischem Polarisationsfilter, siehe Abbildung 8, hilfreich.

Ein Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Polarisation der Signalphotonen. Da die beiden treibenden

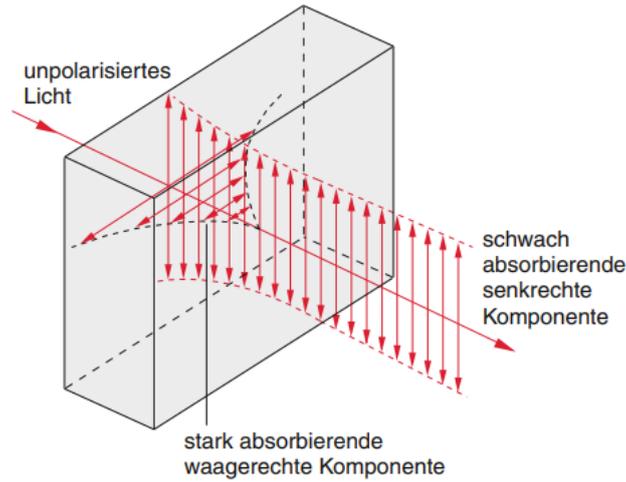


Abbildung 8: Prinzipieller Aufbau eines auf Dichroismus beruhendem Polarisationsfilters. Ein solcher Polarisationsfilter besitzt richtungsabhängige Rückstellkräfte, welche in einer richtungsabhängigen Absorption resultieren. Trifft unpolarisiertes Licht auf den Filter, so werden die waagerechte, bzw. senkrechte Komponente, hier dargestellt durch die Pfeile, unterschiedlich stark absorbiert. In diesem Fall wird die waagrecht schwingende Komponente des eintreffenden Lichts stärker absorbiert als die senkrechte Komponente [25].

Laser beide linear polarisiert sind, ist es naheliegend anzunehmen, die Signalphotonen wären dies ebenfalls. Um diese These experimentell zu prüfen muss der Polarisationsfilter gedreht werden bis die Intensität, im Falle linearer Polarisation, auf 0 absinkt. Wird der Polarisationsfilter dann um 90° weiter gedreht, so muss ein Intensitätsmaximum gefunden werden. Der Winkel β erfüllt in dieser Arbeit denselben Zweck.

3.4 Lage der Photonendichtemaxima

Durch den Aufbau mit zwei Lasern können auch zwei, im Allgemeinen nicht gegenüber liegende, Maxima der Signalphotonendichte identifiziert werden. In diesem Kapitel soll die Lage der Maxima $(\varphi_{s_i}, \vartheta_{s_i})$, mit $i \in \{1, 2\}$ bestimmt werden. Das Auftragen der Photonendichte ρ_{tot} über den Koordinaten (φ, ϑ) lässt vermuten, dass die Maxima bei den gleichen Koordinaten zu finden sind, bei welchen auch die Maxima der treibenden Laser liegen. Die Bestimmung dieser Maxima erfolgt mit Hilfe von geometrischen Überlegungen, dargestellt in Abbildung 9. Da die Ausrichtung des Testlasers nie verändert wird, liegt das erste Maximum $(\varphi_{s_1}, \vartheta_{s_1})$ immer bei $(\varphi_{s_1} = \text{beliebig}, \vartheta_{s_1} = \pi)$. Das zweite Maximum $(\varphi_{s_2}, \vartheta_{s_2})$ kann in Kugelkoordinaten in Abhängigkeit des Streuwinkels α angegeben werden. Mit dem Ausbreitungsvektor des Kollisionslasers, siehe Kapitel 3.2,

$$\vec{e}_{k_2} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

kann das Gleichungssystem

$$\vec{e}_{k_2} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{s_2}) \sin(\vartheta_{s_2}) \\ \sin(\varphi_{s_2}) \sin(\vartheta_{s_2}) \\ \cos(\vartheta_{s_2}) \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

zur Bestimmung der Koordinaten φ_{s_2} und ϑ_{s_2} aufgestellt werden. Die Lage des zweiten Maximums, bei $\alpha \neq 0$, kann sofort zu $\vartheta_{s_2} = \alpha$ und $\varphi_{s_2} = \pi$ abgelesen werden. Im Spezialfall kontra-propagierender Laser, d.h. $\alpha = 0$ folgt aus der ersten Zeile des Gleichungssystems, dass φ_{s_2} jeden beliebigen Wert im Intervall $[0, 2\pi)$ annehmen kann.

Zum Abschluss dieses Unterkapitels sollen die analytisch berechneten Maxima der Signalphotonendichte ρ_{tot} mit den numerischen Ergebnissen verglichen werden. Da das Problem numerisch sehr komplex ist, wurden einige Maximalstellen explizit ausgerechnet und mit den erwarteten Maximas verglichen. Die Resultate sind in Tabelle 1 zu sehen.

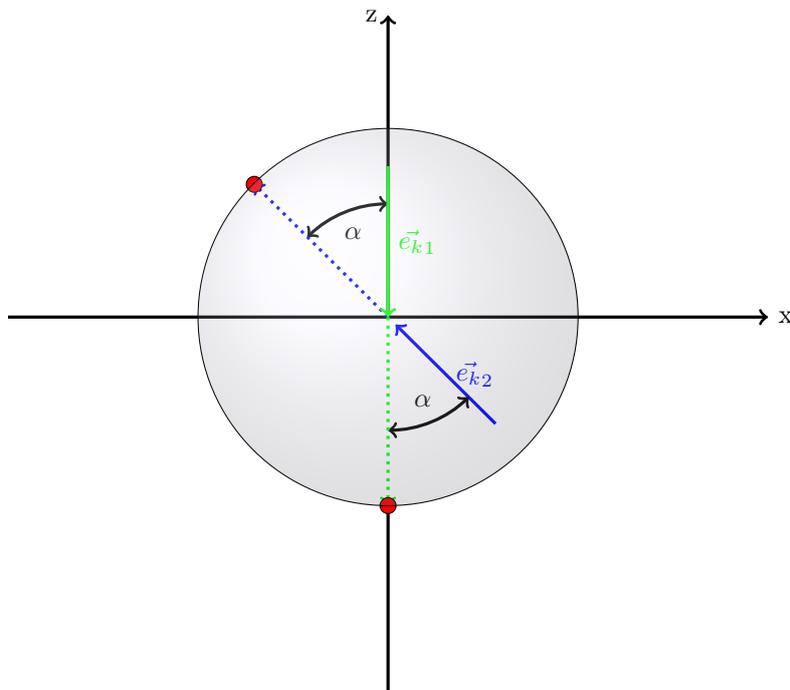


Abbildung 9: Die Ausgangssituation dargestellt in der x - z -Ebene: Die zwei Laser treffen unter einem Winkel α im Koordinatenursprung aufeinander. Zu erwarten sind die Maxima der Photonendichten, bedingt durch die treibenden Laser, an dem Ort, auf den der jeweilige Ausbreitungsvektor \vec{e}_{k_i} , mit $i \in \{1, 2\}$, der Laser gerichtet ist. Hier werden auch die Maxima der Signalphotonendichte erwartet. Die Lage des Maximums auf der Einheitskugel, hier als schwarzer Kreis angedeutet, ist für beide Laser als roter Punkt eingezeichnet. Das Maximum des Testlasers liegt immer bei $(0, 0, -1)^T$.

Kollisionswinkel [°]	$\vartheta_{\text{analytisch}}$	$\vartheta_{\text{numerisch}}$	Absolute Abweichung	Relative Abweichung
0	0	0	0	0%
15	15	15.18	0.18	1.2%
30	30	29.83	0.17	0.57%
45	45	44.31	0.69	1.5%
60	60	58.75	1.25	2.08%
75	75	73.16	1.84	2.45%
90	90	87.50	2.50	2.78%

Tabelle 1: Vergleich der analytisch bestimmten Maxima mit den numerisch bestimmten Maxima. Die theoretischen Werte für das Maximum liegen bei $\vartheta = \alpha$. Es wurden die numerischen Werte für ϑ für verschiedene Kollisionswinkel per Simulation berechnet. Die dazugehörigen absoluten und relativen Abweichungen sind in den letzten beiden Spalten zu sehen.

Die Annahme, dass die Maxima der Signalphotonendichte auch bei den Maxima der treibenden Laser zu finden sind, konnte damit bestätigt werden. Der dadurch entstehende Fehler wächst mit steigendem Kollisionswinkel. In dieser Arbeit werden Kollisionswinkel über 90° nicht betrachtet, das heißt die maximale Abweichung vom analytisch bestimmten Maximum liegt bei 2.78%.

4 Kollision zweier gegenläufiger Starkfeldlaser

Die Polarisationsuntersuchung mit Hilfe des in Kapitel 3 wird mit dem Spezialfall gegenläufiger Laser begonnen. Den Anfang macht eine Analyse der Photonendichte, wobei die Eingangspolarisation Φ_0 und der Polarisationswinkel β auf 0 gesetzt wurden. Anschließend werden die Parameter einzeln und gemeinsam variiert und deren Einfluss auf die Dichte der Signalphotonen numerisch berechnet und graphisch dargestellt. Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine Betrachtung der Fehlerskalierung. Es werden dafür zwei möglich Integrationsbereiche auf der Kugeloberfläche definiert, für welche der Polarisationswinkel β konstant gewählt wird.

4.1 Dichte der Signalphotonen auf der Einheitskugel

Im Falle gegenläufiger Strahlen, d.h. $\alpha = 0^\circ$, werden gemäß Abbildung 9 in Kapitel 3.4 zwei gegenüberliegende Maxima bei $\vartheta_{s_2} = 0$ und $\vartheta_{s_1} = \pi$ erhalten. Die Wahl von φ_s spielt für beide Maxima keine Rolle.

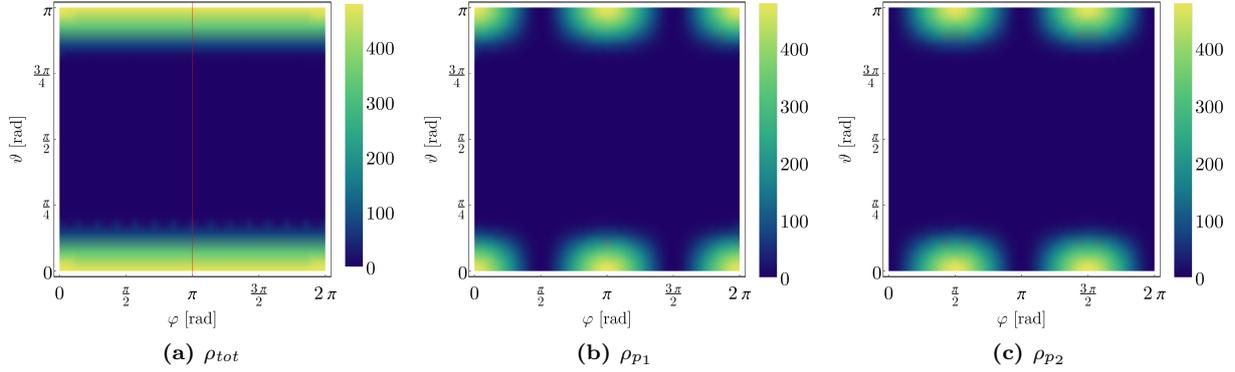


Abbildung 10: Darstellung der Photonendichte in Form eines zwei-dimensionalen Dichteplots. Zu sehen sind die Gesamtphotonendichte, sowie die Photonendichten ρ_{p_1} und ρ_{p_2} . Die Parameter Φ_0 und β wurden für diese Graphiken auf 0 gesetzt. In Plot (a) ist in rot bereits ein Schnitt durch das Maximum eingezeichnet, welcher später in diesem Kapitel analysiert wird. Die hier dargestellten zwei-dimensionalen Dichteplots sind zwar sehr anschaulich, jedoch als Projektion einer Kugeloberfläche in die Ebene fehlerbehaftet. Beispielsweise beschreibt $\vartheta = 0$, bzw. $\vartheta = \pi$ unabhängig von der Wahl von φ den gleichen Punkt auf der Kugeloberfläche. Die hier dargestellten zwei-dimensionalen Dichteplots sind zwar sehr anschaulich, jedoch als Projektion einer Kugeloberfläche in die Ebene fehlerbehaftet. Beispielsweise beschreibt $\vartheta = 0$, bzw. $\vartheta = \pi$ unabhängig von der Wahl von φ den gleichen Punkt auf der Kugeloberfläche.

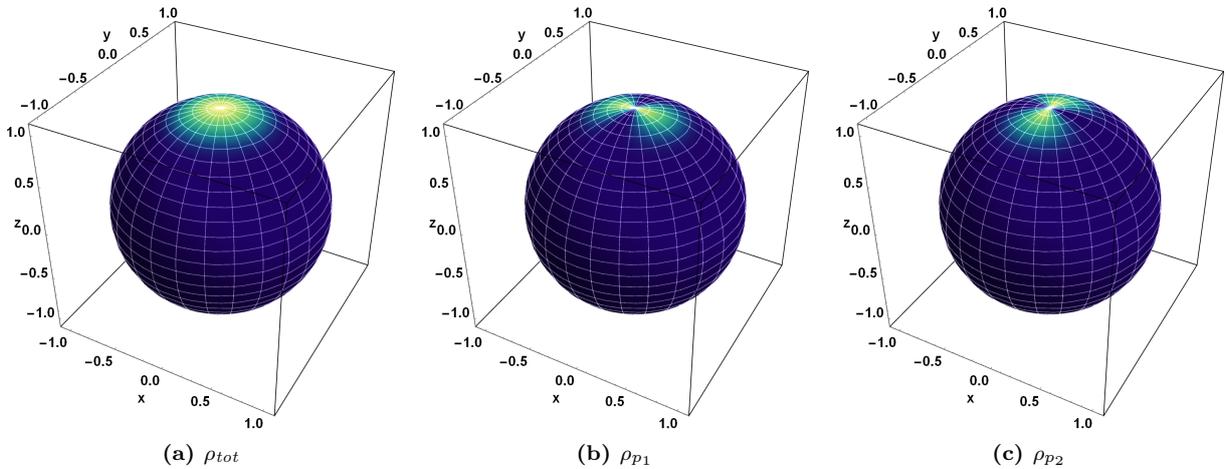


Abbildung 11: Die Photonendichten ρ_{tot} , ρ_{p_1} und ρ_{p_2} aus Abbildung 10, aufgetragen über der Einheitskugel. Die Parameter Φ_0 und β sind dementsprechend ebenfalls 0. Die weißen Linien beschreiben die Längen-, - und Breitengrade der Sphäre. Es werden die Texturen aus Abbildung 10 über die Einheitskugel gelegt, die Farbskala ist die gleiche wie in Abbildung 10. In dieser Graphik wird das Maximum ($\varphi_{s_2}, \vartheta_{s_2}$) bei $\vartheta_{s_2} = 0$ gezeigt.

Im Folgenden sollen die Abbildungen 10 und 11 genauer analysiert werden. Es ist in beiden Abbildungen gut erkennbar, dass sich die Gesamtphotonendichte ρ_{tot} aus der Summe der beiden Photonendichten ρ_{p_1} und ρ_{p_2} ergibt, d.h. es gilt $\rho_{tot}(\vartheta, \varphi) = \rho_{p_1}(\vartheta, \varphi) + \rho_{p_2}(\vartheta, \varphi)$. Interessant sind hier insbesondere die Stellen, an denen die Maximas liegen, d.h. $\vartheta_{s_2} = 0$ und $\vartheta_{s_1} = \pi$.

Beginnend mit dem Fall $\alpha = 0$, $\Phi_0 = 0$ und $\beta = 0$ wird eine Gerade bei $\varphi = \pi$ aus den Texturplots in Abbildung 10 herausgeschnitten. In Abbildung 10 (a) wurde zur Veranschaulichung der Schnitt rot in den Plot eingezeichnet. Als Resultat wird Abbildung 12 erhalten. Die Photonendichten ρ_{tot} und ρ_{p_1} sind hier identisch und die Photonendichte ρ_{p_2} ist konstant 0.

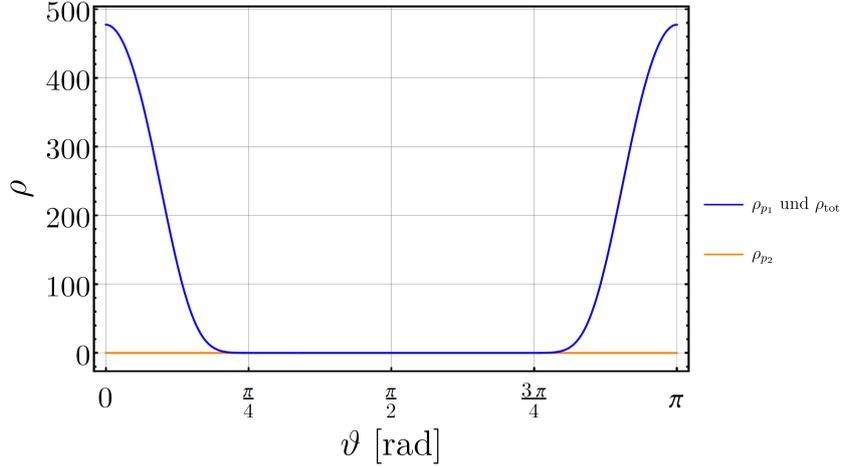


Abbildung 12: In dieser Abbildung wird die explizite ϑ -Abhängigkeit der Photonendichte bei $\varphi = \pi$ gezeigt. Zum Erstellen dieser Graphik wurde die Eingangspolarisation Φ_0 , sowie der Polarisationswinkel β auf 0 gesetzt. Zu sehen sind die Photonendichtemaxima bei $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$. Die Verläufe der Photonendichte ρ_{tot} und ρ_{p1} sind in diesem Fall identisch, während die Photonendichte ρ_{p2} über dem gesamten Definitionsbereich $\vartheta \in [0, \pi)$ konstant 0 ist

4.2 Zusammenhang zwischen Eingangspolarisation und Photonendichte

Im folgendem Abschnitt soll der Einfluss der Eingangspolarisation Φ_0 auf die Photonendichte und somit auch auf die Photonenzahl diskutiert werden. Die Simulation kann mit einem unbestimmten Φ_0 gestartet werden. Die ermittelte Abhängigkeit der Signalphotonenzahl von der Eingangspolarisation ist in Abbildung 13 gezeigt.

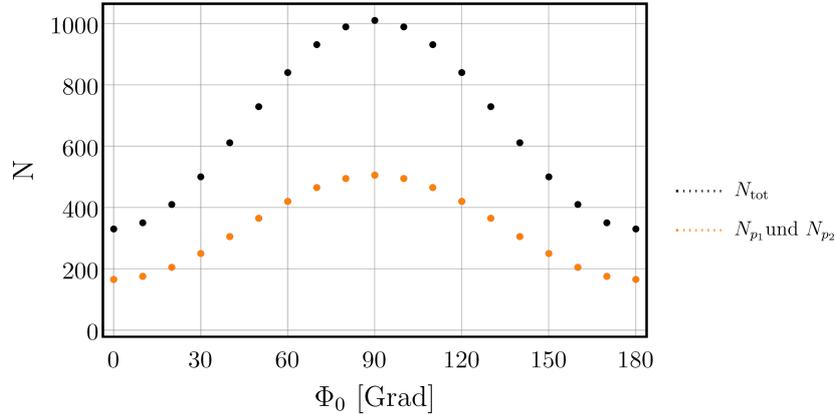


Abbildung 13: Die Signalphotonenzahl aufgetragen über der Eingangspolarisation Φ_0 im Falle von kontra-propagierenden Lasern. Der Winkel β ist auf 0 gesetzt. In schwarz punktiert ist die Gesamtsignalphotonenzahl N_{tot} zu sehen und in orange punktiert die Anzahl der Signalphotonen mit Polarität p_1 und p_2 , welche in diesem Fall identisch sind.

Die Photonenzahlen besitzen sowohl für die totale, als auch für die Anzahl der Photonen mit Polarisation in \vec{e}_β -Richtung, beziehungsweise in $\vec{e}_{\beta+\frac{\pi}{2}}$, bei Φ_0 ein Maximum bei 90° , sowie ein Minimum bei 0° . Der Verlauf lässt sich anhand der Lage der Feldvektoren erklären. Diese wurde für den Fall $\Phi_0 = 90^\circ$ und $\Phi_0 = 0^\circ$ in Kapitel 3.3.1 berechnet und skizziert.

Im Fall der maximalen Photonenzahl bei $\Phi_0=90^\circ$ steht der elektrische Feldvektor des Testlasers orthogonal zum elektrischen Feldvektor des Kollisionslasers, während er im Falle des Minimums bei $\Phi_0 = 0$ in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Analog gilt diese Aussage auch für den magnetischen Feldvektor.

Im nächsten Abschnitt dieses Kapitels soll der Einfluss der Eingangspolarisation Φ_0 auf die Photonendichten ρ_{p1} und ρ_{p2} untersucht werden. Dazu werden die beiden Maxima ($\varphi_{s1} = \pi, \vartheta_{s1} = \pi$) und ($\varphi_{s2} = \pi, \vartheta_{s2} = 0$) in Abhängigkeit von der Eingangspolarisation Φ_0 betrachtet. Als Resultat werden die folgenden Abhängigkeiten

gefunden:

$$\rho_{p_1}(\varphi = \pi, \vartheta = 0 | \Phi_0) = 67.13 \left(3.67 + \cos(\pi - 2\Phi_0) \right)^2 \quad (4.1)$$

und

$$\rho_{p_2}(\varphi = \pi, \vartheta = 0 | \Phi_0) = 67.13 \cos(4.71 - 2\Phi_0)^2. \quad (4.2)$$

Analog kann auch der Verlauf im ersten Maximum bei $\vartheta = \pi$ zu

$$\rho_{p_1}(\varphi = \pi, \vartheta = \pi | \Phi_0) = 477.34 \cos(\Phi_0)^2 \quad (4.3)$$

$$\rho_{p_2}(\varphi = \pi, \vartheta = \pi | \Phi_0) = 1461.85 \sin(\Phi_0)^2 \quad (4.4)$$

simuliert werden. Diese simulierten Ergebnisse werden in Abbildung 14 graphisch dargestellt. Die Photonendichten in den Maximas unterscheiden sich deutlich. Im ersten Maximum bei $\varphi_{s_1} = \pi$ tragen beide Polarisation p_1 und p_2 zur Gesamtphotonendichte bei, während im zweiten Maximum die Photonendichte ρ_{p_2} über den gesamten Φ_0 -Bereich kaum Beitrag zu ρ_{tot} leistet. Dies liegt an der festen Wahl von $\beta = 0$.

In Abbildung 15 wird die Photonendichte ρ_{p_1} als Dichteplot über ϑ und φ für verschiedene Eingangspolarisationen gezeigt. Zu sehen ist dort sowohl ein Intensitätsanstieg mit zunehmendem Φ_0 , als auch ein unterschiedlicher φ -shift in den beiden Maximas.

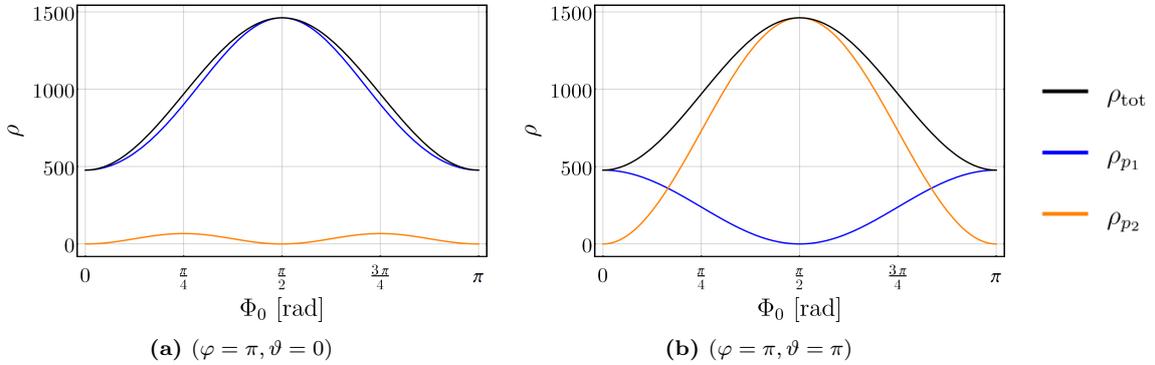


Abbildung 14: In dieser Abbildung wird die explizite Abhängigkeit der Photonendichten ρ_{p_1} , ρ_{p_2} und ρ_{tot} von der Eingangspolarisation Φ_0 gezeigt. In schwarz ist ρ_{tot} eingezeichnet, in blau ρ_{p_1} und in orange ρ_{p_2} . Im Maximum bei $(\pi, 0)$ (linkes Bild) besitzt ρ_{p_1} ein Maximum bei $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$, während ρ_{p_2} zwei Maxima bei $\Phi_0 = \frac{\pi}{4}$ und $\Phi_0 = \frac{3\pi}{4}$. Im Maximum (π, π) (rechtes Bild) besitzt ρ_{p_1} bei $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ein Minimum, während ρ_{p_2} in diesem Punkt maximal wird.

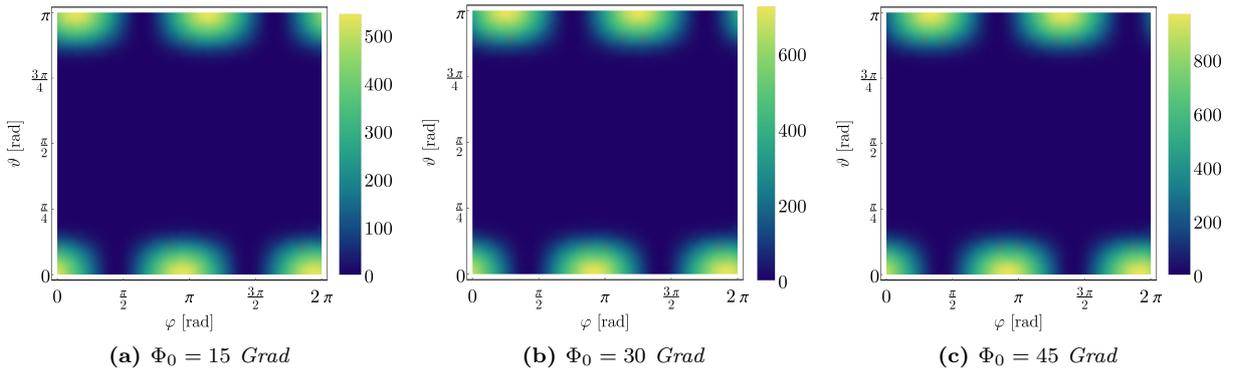


Abbildung 15: Die Photonendichte ρ_{p_1} dargestellt als zweidimensionaler Dichteplot. Die Eingangspolarisation bewirkt sowohl eine Verschiebung entlang φ , als auch eine Veränderung der Intensität. Letzteres ist anhand der Legende zu sehen. Die Verschiebungen bezüglich φ wirken auf beide Maxima unterschiedlich stark. Das Maximum $(\varphi, \vartheta \rightarrow 0)$ ändert sich mit steigendem Φ_0 kaum, während Φ_0 beim Maximum $(\varphi, \vartheta \rightarrow \pi)$ sehr deutlich Einfluss auf φ nimmt. Gut erkennbar ist dies am rechten oberen Punkt in (a), der für steigendes Φ_0 aus der Graphik verschwindet.

4.3 Einfluss des Winkels β auf die Photonendichte ρ

Einleitend soll in diesem Kapitel die Abhängigkeit der Gesamtanzahl N_{tot} der Photonen vom Winkel β betrachtet werden. Diese ist dargestellt in Abbildung 16. Es ist zu sehen, dass die totale Anzahl an Photonen stets konstant ist und nicht von β abhängt. Als weiteres Resultat wird erhalten, dass die gesamte Anzahl der Photonen mit Polarität 1 gleich groß ist, wie die Anzahl der Photonen mit Polarität 2.

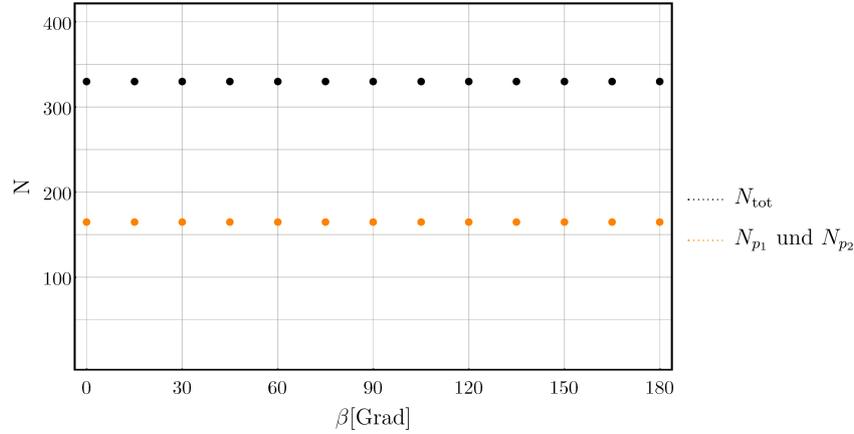


Abbildung 16: Verhalten der totalen Anzahl N von Photonen in Abhängigkeit des Winkels β in Grad. Die totale Anzahl, hier durch die schwarz punktierte Linie dargestellt, ist für alle $\beta \in [0, 2\pi)$ konstant. Die gesamte Anzahl an Signalphotonen mit Polarisation p_1 ist gleich der Anzahl an Signalphotonen mit p_2 . Diese werden in orange punktiert dargestellt.

Im folgendem Abschnitt dieses Kapitels steht die Untersuchung der Maximas der Photonendichte im Vordergrund. Die Eingangspolarisation soll an dieser Stelle vorerst vernachlässigt werden und wird auf 0 gesetzt. Die Photonendichten wurden im ersten Maximum bei $(\varphi_{s_1}, \vartheta_{s_1}) = (\pi, 0)$ zu

$$\rho_{p_1}(\varphi = 0, \vartheta = \pi|\beta) = 477.34 \cos^2(\beta) \quad (4.5a)$$

$$\rho_{p_2}(\varphi = 0, \vartheta = \pi|\beta) = 477.34 \sin^2(\beta) \quad (4.5b)$$

ermittelt. Diese werden in Abbildung 17 graphisch dargestellt. Die Polaritäten p_1 und p_2 sind gemäß ihrer Definition orthogonal zueinander. Die Dichte $\rho_{p_1}(\beta)$ besitzt die Nullstellen $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\beta_1 = \frac{3\pi}{2}$, sowie die Maximalstellen bei $\beta_2 = 0$ und $\beta_2 = \pi$. Die Dichte ρ_{p_2} besitzt die Nullstellen β_2 und die Maximalstellen β_1 . Es gilt die Beziehung $\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$. Die Signalphotonen sind somit linear polarisiert. Das gleiche Resultat wird auch für das andere Maximum erhalten.

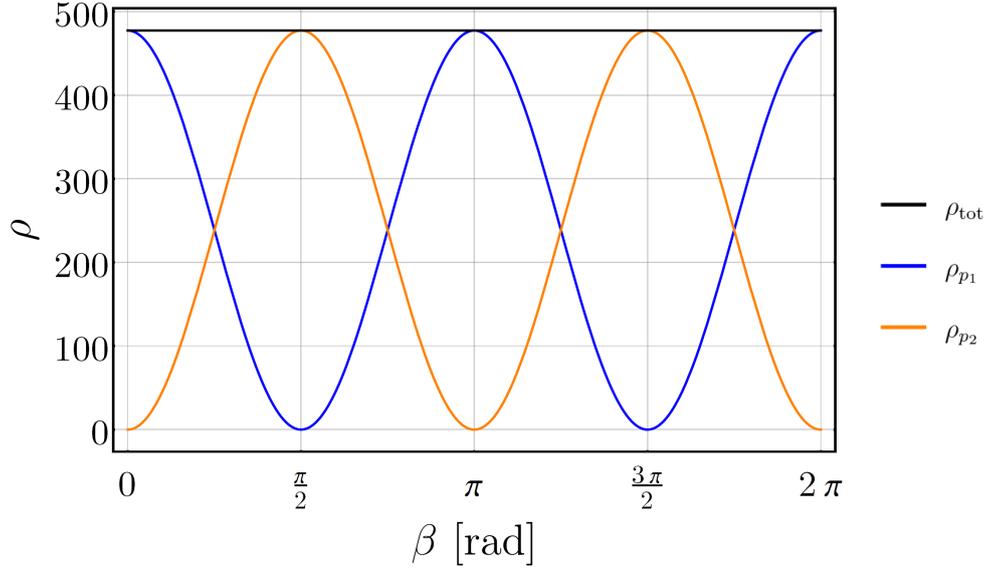


Abbildung 17: Die Photonendichten ρ_{p_1} , ρ_{p_2} und ρ_{tot} aufgetragen über dem Winkel β . Die Polarisationen p_1 und p_2 sind gemäß ihrer Definition orthogonal zueinander. Die Photonendichte ρ_{p_1} hat ihre Maximalstellen bei $\beta_2 = 0$ und $\beta_2 = \pi$. Die Photonendichte ρ_{p_2} fällt für $\beta_1 = \beta_2 + \frac{\pi}{2}$ auf 0 ab. Die Signalphotonen sind somit linear polarisiert.

Zum Schluss dieses Kapitels soll der Zusammenhang zwischen Eingangspolarisation Φ_0 und Polarisationswinkel β untersucht werden. In den beiden Maxima werden für die Dichten ρ_{p_1} und ρ_{p_2} die Beziehungen

$$\rho_{p_1}(\varphi = \pi, \vartheta = 0 | \beta, \Phi_0) = 7.45 \left(7.46 \cos(\beta) + 3 \cos(\pi + \beta - 2\Phi_0) \right)^2 \quad (4.6a)$$

$$\rho_{p_2}(\varphi = \pi, \vartheta = 0 | \beta, \Phi_0) = 7.45 \left(3 \cos\left(\frac{3}{2}\pi - 2\Phi_0 + \beta\right) - 11 \sin(\beta) \right)^2 \quad (4.6b)$$

und

$$\rho_{p_1}(\varphi = \pi, \vartheta = \pi | \beta, \Phi_0) = 477.34 \left(\cos(\beta) \cos(\Phi_0) - 1.75 \sin(\beta) \sin(\Phi_0) \right)^2 \quad (4.7a)$$

$$\rho_{p_2}(\varphi = \pi, \vartheta = \pi | \beta, \Phi_0) = 477.34 \left(\sin(\beta) \cos(\Phi_0) - 1.75 \cos(\beta) \sin(\Phi_0) \right)^2 \quad (4.7b)$$

bestimmt. Zur graphischen Darstellung eignet sich ein Dichteplot der Photonendichte im Φ_0 - β -Parameterraum. Dieser ist für das Maximum bei $(\varphi = \pi, \vartheta_{s_2} = 0)$ in Abbildung 18 zu sehen und zeigt eine periodische Verteilung der Maxima. Das Maximum der Photonendichte liegt bei $\beta = 0$ und $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$. Um die Minima der Photonendichte zu bestimmen eignet sich ein logarithmischer Plot, welcher ebenfalls in Abbildung 18 zu sehen ist. Dazu wurde ein Cut-Off bei 10^{-15} gesetzt. Im logarithmischen Plot ist zu sehen, dass unabhängig von der Wahl von Φ_0 ein β gefunden werden kann, für welches die Photonendichte effektiv zu 0 wird. Die Signalphotonen sind somit unabhängig von Φ_0 linear polarisiert.

Eine analoge Betrachtung soll ebenfalls für das andere Maximum bei $\vartheta_{s_1} = \pi$ durchgeführt werden. Auch hier wird ein logarithmischer Plot mit Hilfe eines Cut-Offs bei 10^{-15} erstellt. Die Dichteplots für dieses Maximum sind in Abbildung 19 abgebildet.

4.4 Approximation des Maximums

Im folgendem Unterkapitel soll das Profil des Maximums, bei $\vartheta = \pi$, mathematisch etwas näher charakterisiert werden, in dem geprüft wird, welche Approximation sich am besten zur Beschreibung eignet. Die Beschreibung des Maximums ist analytisch zu komplex, daher muss mit einer numerischen Approximation gerechnet werden. Es ist an dieser Stelle nicht nötig zwischen den Maxima zu unterscheiden, da beide Laser die gleichen physikalischen Eigenschaften besitzen, müssen die Maxima dieselbe Form haben. Der Einfachheit halber soll zu Beginn $\Phi_0 = 0$ gesetzt werden. Ein Textur-Plot der Ausgangssituation ist in Abbildung 10 (a) zu sehen. Zur Betrachtung wird das Maximum eingeschränkt auf $-1.5 \text{ rad} + \pi < \vartheta < \pi \text{ rad}$ und $\varphi = \pi$. Anschaulich wird aus der Textur entlang der ϑ -Achse bei $\varphi = \pi$ ein Stück herausgeschnitten, welches genügt um das Maximum zu beschreiben. Die zu approximierende Funktion $\rho_{tot}(\vartheta)$ bei $\varphi = \pi$ ist in schwarz in Abbildung 20 gezeigt.

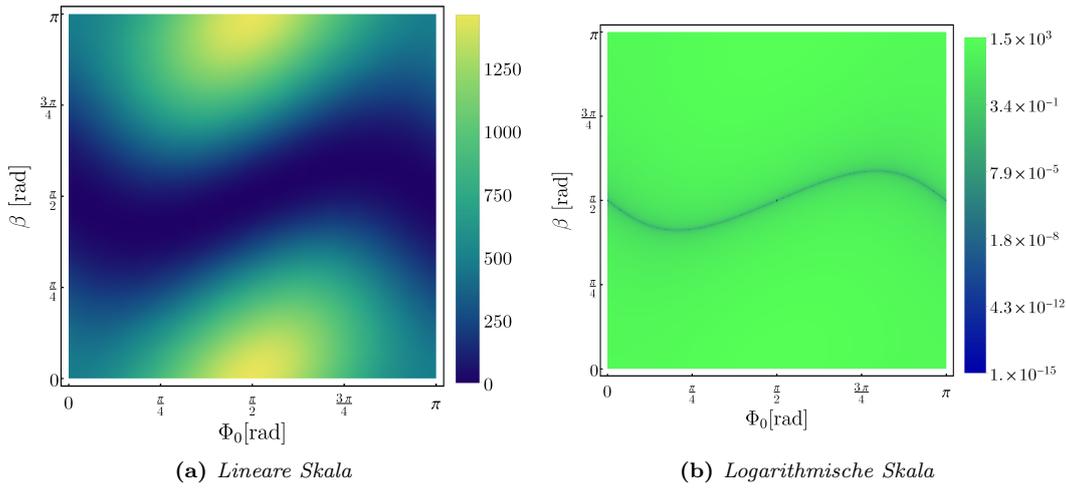


Abbildung 18: Die Photonendichte ρ_{p_1} im Maximum ($\varphi = \pi, \vartheta = 0$) dargestellt als Dichteplot im Φ_0 - β -Parameterraum. Die Maxima von ρ_{p_1} sind π -periodisch bezüglich β und Φ_0 . Die Minima sind um $\beta = \frac{\pi}{2}$ verschoben, da diese in der linearen Skalierung nicht direkt erkennbar ist, wurde in (b) ein Plot mit logarithmischer Skalierung erstellt. Für den logarithmischen Plot wurde ein Cut-Off bei 10^{-15} gesetzt, d.h. alle hier blau dargestellten Werte sind kleiner als diese 10^{-15} und somit in guter Näherung 0. Die Signalphotonen sind somit unabhängig von Φ_0 linear polarisiert.

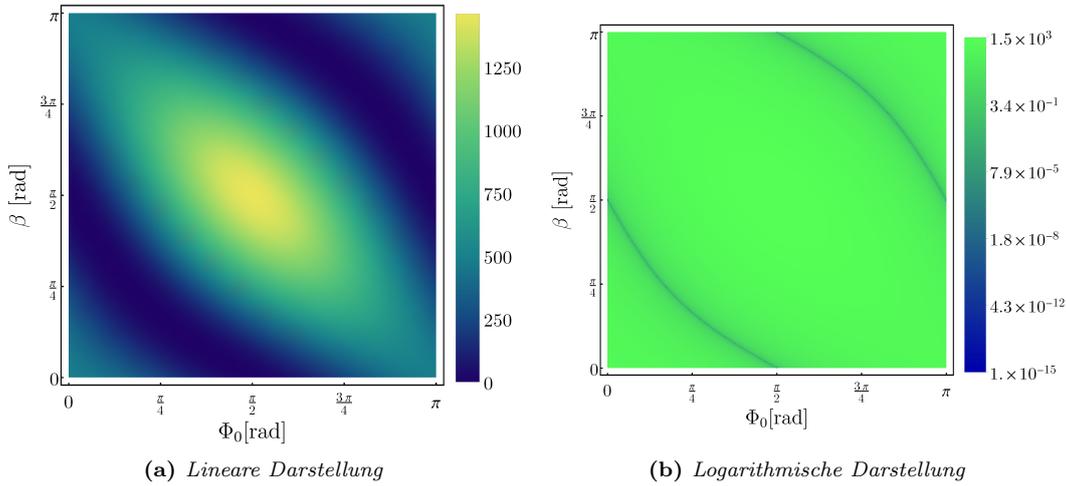


Abbildung 19: Die Photonendichte ρ_{p_1} dargestellt als Dichteplot im Φ_0 - β -Parameterraum für das Maximum ($\varphi = \pi, \vartheta = \pi$). Das Maximum der Photonendichte liegt hier bei $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$. Es liegt wieder eine π -Periodizität bezüglich Φ_0 und β vor. Die Maxima der Photonendichte sind im Vergleich zu denen im anderem Maximum deutlich verschmierter, bzw. in die Länge gezogen. Auch in diesem Maximum wird unabhängig von Φ_0 ein β gefunden, für welches die Photonendichte effektiv 0 wird.

Die erste Möglichkeit diese Kurve zu approximieren ist die Gaußverteilung

$$\rho_{\text{Gauß}}(\vartheta) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\vartheta-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.8)$$

wobei A , σ und μ mit Hilfe der in Mathematica eingebauten Funktion `NonlinearModelFit` ermittelt werden. A ist hierbei die Höhe der Gaußverteilung, σ die Breite und μ eine Verschiebung entlang der ϑ -Achse. Die erhaltenen Resultate sind in Tabelle 2 aufgeführt.

	Errechneter Wert	Standardfehler	Relativer Fehler
A	298.58	1.057	0.35%
σ	-0.241	0.0009	0.37 %
μ	3.142	0.0009	0.028%

Tabelle 2: Errechnete Werte für die Gauß-Approximation des Photonendichtemaximums, sowie ihre Standardfehler, welche mittels der in Mathematica eingebauten Funktion `NonlinearModelFit` bestimmt wurden.

Die nächste Alternative ist die Approximation mittels einer Lorentzkurve

$$\rho_{\text{Lorentz}}(\vartheta) = \frac{A}{(\vartheta^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega_0^2}. \quad (4.9)$$

Die Höhe der Verteilung wird durch A beschrieben, die Breite durch γ und die Verschiebung durch ω_0 . Die Parameter werden mit Hilfe von Mathematica bestimmt zu:

	Errechneter Wert	Standardfehler	Relativer Fehler
A	1064	42.197	3.97 %
ω_0	3.153	0.004	0.127%
γ	0.449	0.011	2.449%

Tabelle 3: Errechnete Werte für die Lorentz-Approximation, sowie ihre Standardfehler

Die mit diesen Werten errechneten Näherungen sind gemeinsam in Abbildung 20 zu sehen.

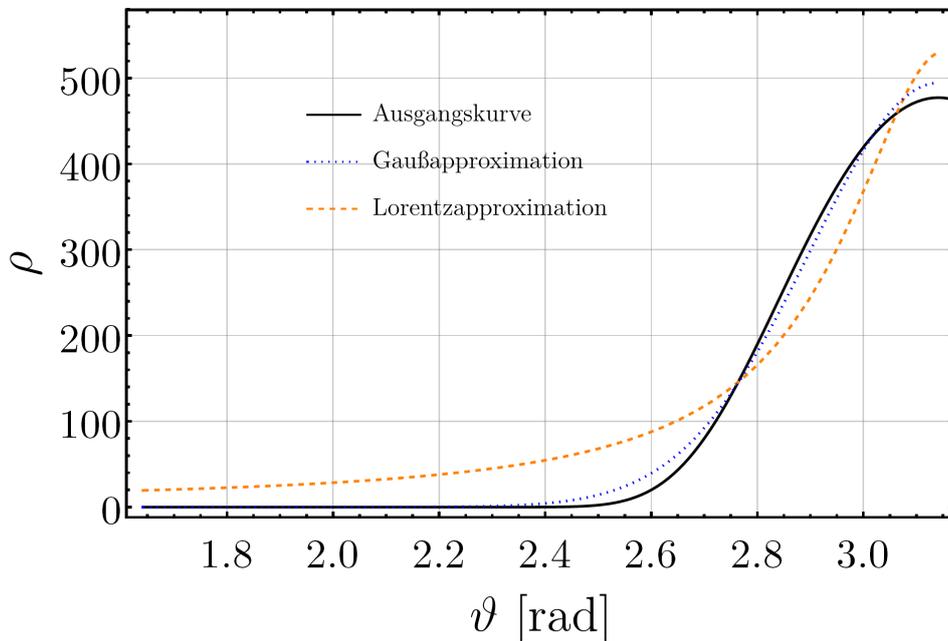


Abbildung 20: Der Verlauf der Photonendichte ρ_{tot} im Maximum (schwarz), sowie die dazu gehörigen Lorentz,- und Gauß-Approximationen. Die Gaußverteilung eignet sich nach Tabelle 2 besser für die Beschreibung des Maximums. Die Lorentzkurve nimmt bei $\vartheta = \pi$ einen zu großen Wert an, auch ist sie zu breit.

Es geht schon aus den Tabellen 2 und 3 hervor, dass sich die Approximation mit der Gaußverteilung besser eignet, als die Lorentz-Näherung. Dies wird insbesondere an der Breite und der Höhe im Maximum sichtbar.

4.5 Fehlerskalierung

Für jeden Punkt auf der Kugeloberfläche kann ein Winkel β gefunden werden, so dass $\rho_{p_1} = \rho_{\text{tot}}$ und $\rho_{p_2} = 0$ gilt. Werden allerdings die Anzahlen der Photonen mit den beiden Polaritäten untersucht, so muss die Photonendichte über einen gewissen φ - ϑ -Bereich integriert werden. Dadurch gilt immer $N_{p_1} \neq N_{\text{tot}}$, bzw. $N_{p_2} \neq 0$. In diesem Kapitel soll analysiert werden, wie sich der Anteil an Photonen mit Polarisation p_2 verhält, wenn β für bestimmte Ausschnitte der Kugeloberfläche fest gewählt wird. Es wird das Maximum der Photonendichte bei $(\varphi = \pi, \vartheta = 0)$ untersucht. Der Winkel β wird auf 0 gesetzt, d.h die Photonenzahl N_{p_1} wird maximal, während die Photonenzahl N_{p_2} im Maximum auf 0 abfällt. Interessant ist die Betrachtung des relativen Anteils

$$V = \frac{N_{p_2}}{N_{p_1} + N_{p_2}} \quad (4.10)$$

der Teilchen mit Polarität p_2 an der Gesamtanzahl über einem beliebig gewählten Integrationsbereich. Im Folgendem werden zwei Methoden zur Einschränkung des Integrationsbereichs vorgestellt. Begonnen wird ohne Einschränkung von $\varphi \in [0, 2\pi)$ und einer Einschränkung von ϑ auf $\vartheta \in [0, \Delta\vartheta)$. Das Vorgehen ist in Abbildung 21(a) grafisch dargestellt. Die Resultate sind in Abbildung 21(b) zu sehen. Das Verhältnis V ist für den gewählten Integrationsbereich unabhängig von $\Delta\vartheta$ immer konstant 0.5. Dieses Verhalten kann anhand Abbildung 10 erklärt werden, dort wurden die Photonendichten ρ_{p_1} und ρ_{p_2} als Dichteplot im φ - ϑ -Parameter Raum dargestellt. Durch Wahl des φ -Integrationsbereichs von 0 bis 2π gilt unabhängig von $\Delta\vartheta$ immer $N_{p_1} = N_{p_2}$, wodurch das Verhältnis V zu 0.5 wird.

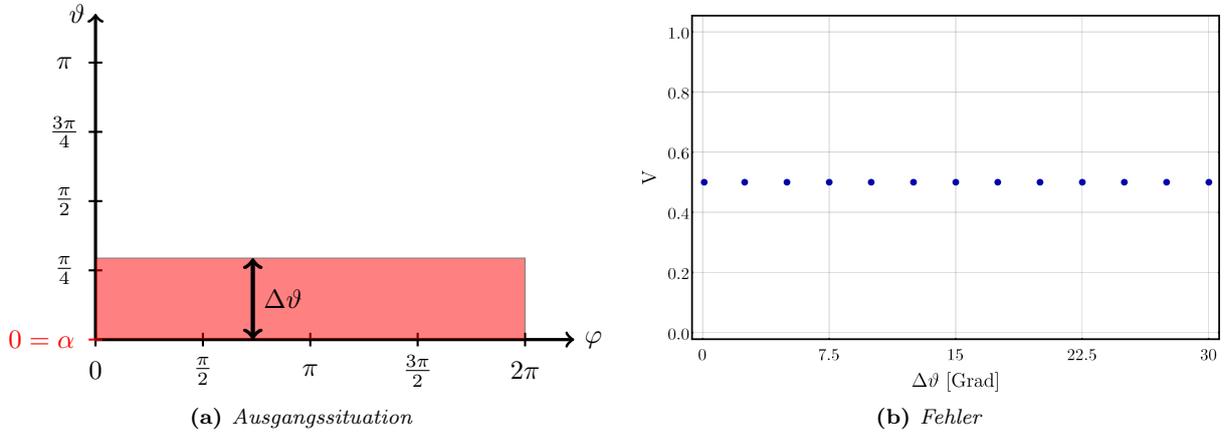


Abbildung 21: In der linken Abbildung ist der gewählte Integrationsbereich zu sehen, φ umfasst den gesamten Definitionsbereich, ϑ hingegen wird auf $[0, \Delta\vartheta)$ eingeschränkt. Der relative Anteil an N_{p_2} aufgetragen über $\Delta\vartheta$ ist in der rechten Abbildung zu sehen.

Um eine qualitative Aussage über die Fehlerskalierung treffen zu können benötigt es demnach eine zusätzliche Einschränkung von φ . Im Folgendem werden die Parameter auf $\vartheta \in [0, \Delta\vartheta)$ und $\varphi \in (\pi - \Delta\vartheta, \pi + \Delta\vartheta)$ eingeschränkt. Da sich die Definitionsbereiche von φ und ϑ um einen Faktor Zwei unterscheiden, wird das φ -Intervall hier doppelt so groß gewählt wie das ϑ -Intervall. Der Integrationsbereich ist rot in Abbildung 22(a) eingezeichnet, das Ergebnis ist in (b) zu sehen.

Der Anteil von Photonen mit Polarisation p_2 aufgetragen über der Fläche zeigt den erwarteten Verlauf, d.h für $\vartheta \rightarrow 0$ geht auch der Anteil der Photonen mit Polarität p_2 gegen 0. Mit steigendem $\Delta\vartheta$ wird das Verhältnis V größer. Besonders hervorzuheben ist hier der Punkt bei $\vartheta = 90^\circ$. V wird hier ebenfalls zu $\frac{1}{2}$. Dies lässt sich graphisch anhand Abbildung 10 in Kapitel 4 erklären. Betrachtet wird der in Bogenmaß umgerechnete Bereich $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ und $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Diese Integrationsgrenzen liegen für diese Wahl von ϑ genau so, dass bei der Photonendichte ρ_{p_1} das zentrale Maximum komplett erfasst wird, während die beiden Maxima von ρ_{p_2} exakt zur Hälfte erfasst werden. Dadurch wird V zu $\frac{1}{2}$.

Der zu sehende Verlauf lässt sich am besten mit der Verteilungsfunktion der Gaußverteilung

$$V(\Delta\vartheta) = A \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\Delta\vartheta - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right) \quad (4.11)$$

beschreiben. Mit erf wird hier die Fehlerfunktion bezeichnet [26].

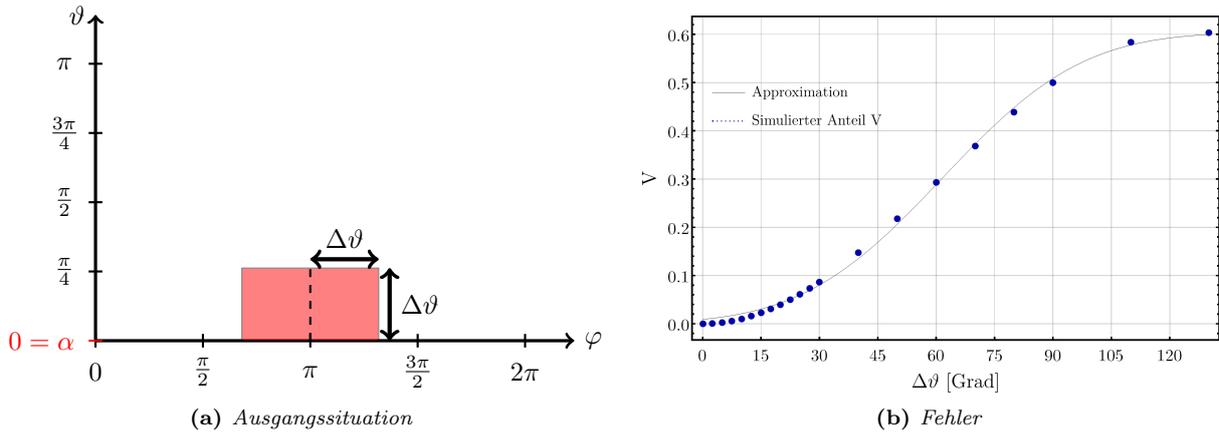


Abbildung 22: In der linken Abbildung ist der gewählte Integrationsbereich zu sehen, φ wird in diesem Fall auf $[\pi - \Delta\vartheta, \pi + \Delta\vartheta]$ eingeschränkt, ϑ auf $[0, \Delta\vartheta)$. Der Anteil an N_{p_2} aufgetragen über $\Delta\vartheta$ ist in blau punktiert in der rechten Abbildung zu sehen. Die schwarze durchgezogene Linie beschreibt die Approximation mit der Verteilungsfunktion der Normalverteilung.

Die Parameter A , μ und σ sind in Tabelle 4 zu sehen.

	Errechneter Wert	Standardfehler	Relativer Fehler
A	0.302	0.0038	1.26 %
μ	61.609	0.765	1.24%
σ	28.393	0.705	2.48%

Tabelle 4: Um den Anteil an Photonen mit Polarität p_2 in Abhängigkeit von $\Delta\vartheta$ zu beschreiben eignet sich die Verteilungsfunktion der Normalverteilung. Die unbekannt Parameter wurden mit Hilfe der Funktion `NonlinearModelFit` in Mathematica bestimmt und sind mitsamt der berechneten Fehler in dieser Tabelle zu sehen.

Statt in Abhängigkeit von $\Delta\vartheta$ lässt sich V auch in Abhängigkeit der Oberfläche

$$A = \int_{\varphi=\pi-\Delta\vartheta}^{\varphi=\pi+\Delta\vartheta} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\Delta\vartheta} d\vartheta d\varphi \sin(\vartheta) \quad (4.12)$$

auftragen. Diese kann mit der Funktion `NonlinearModelFit` in Mathematica mit einem Potenzgesetz

$$V = C_1 \cdot A^{C_2} \quad (4.13)$$

approximiert werden. Die numerische berechneten Werte für das Verhältnis $V(A)$, sowie die Approximation sind in Abbildung 23 zu sehen.

Die unbekannt Parameter C_1 und C_2 wurden ermittelt, die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zu sehen

	Errechneter Wert	Standardfehler	Relativer Fehler
C_1	0.273	0.003	1.1 %
C_2	0.559	0.011	1.97%

Tabelle 5: Zur Beschreibung der Abhängigkeit $V(A)$ eignet sich ein Potenzgesetz. Die von Mathematica berechneten Parameter, sowie ihre Standardfehler sind in dieser Tabelle aufgeführt.

Wird die Integrationsfläche wie oben beschrieben vergrößert, so steigt der relative Anteil an Photonen mit Polarisation $p_2 \propto A^{0.559}$ an.

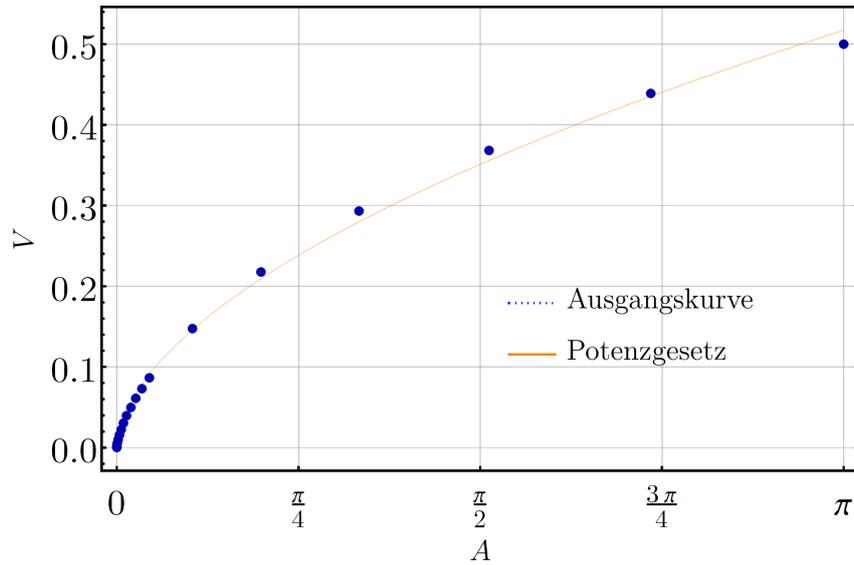


Abbildung 23: Der Verlauf des Verhältnisses V aufgetragen über der Fläche A . Es eignet sich eine Approximation mit einem Potenzgesetz, diese ist in durchgezogen in orange zu sehen.

5 Kollision zweier Starkfeldlaser unter einem Winkel $\alpha \neq 0$

In Kapitel 4 konnte keine Polarisationsabhängigkeit ermittelt werden, die Signalphotonen waren für alle betrachteten Fälle linear polarisiert. Eine analoge Diskussion wird auch in diesem Kapitel durchgeführt, mit dem Unterschied, dass jetzt die Betrachtung der Auswirkungen des Kollisionswinkels auf die Polarisation der Signalphotonen im Vordergrund steht. Ähnlich wie in den vorherigen Betrachtungen werden zu Beginn alle relevanten Parameter auf 0 gesetzt und nur die Photonendichte in Abhängigkeit des Kollisionslasers betrachtet. Anschließend werden die Parameter variiert, die Zusammenhänge mit der Photonendichte numerisch berechnet und graphisch dargestellt.

5.1 Einfluss des Kollisionswinkels auf die Photonendichte

In den bisherigen Betrachtungen wurde nur der Spezialfall von kontra-propagierenden Strahlen näher diskutiert. Wird $\alpha > 0$ gewählt, so liegen die Maxima der Photonendichten nicht mehr bei $\vartheta_{s_2} = 0$, bzw. $\vartheta_{s_1} = \pi$, sondern liegen nach Gleichung (3.18) bei $\vartheta_{s_2} = \alpha$ und $\vartheta_{s_1} = \pi$. Die Gesamtphotonendichten ρ_{tot} sind exemplarisch für einige Winkel α graphisch in Abbildung 24 dargestellt.

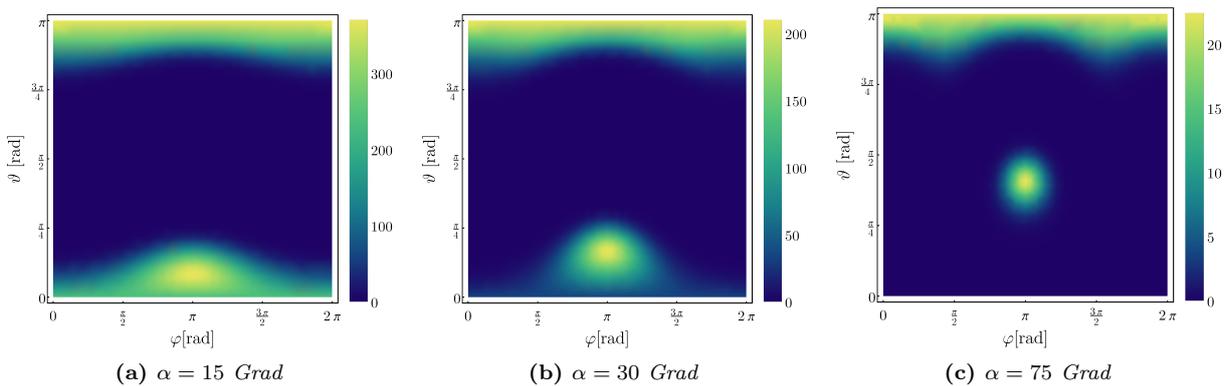


Abbildung 24: Textur-Plots der Gesamtphotonendichte ρ_{tot} für verschiedene Kollisionswinkel α . Zu sehen ist, wie sich das Maximum ($\varphi_{s_2}, \vartheta_{s_2}$) mit zunehmendem Kollisionswinkel α entlang der ϑ -Achse bewegt. Die Photonendichte ρ_{tot} nimmt für zunehmende Kollisionswinkel stark ab.

In den folgenden Abbildungen 25 und 26 wird gezeigt, wie sich die obigen Texturplots für ρ_{tot} aus den Photonendichten ρ_{p_1} und ρ_{p_2} zusammensetzen.

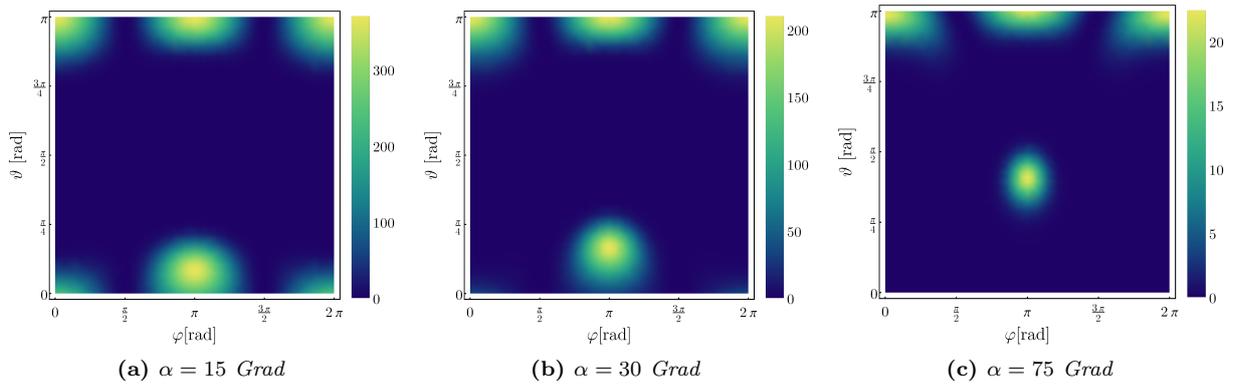


Abbildung 25: Textur-Plots der Photonendichte ρ_{p_1} für verschiedene Winkel α . Zu sehen ist, wie sich das Maximum ($\varphi_{s_2}, \vartheta_{s_2}$) mit zunehmendem Kollisionswinkel α entlang der ϑ -Achse bewegt. Die Photonendichte ρ_{p_1} nimmt für zunehmende Kollisionswinkel stark ab.

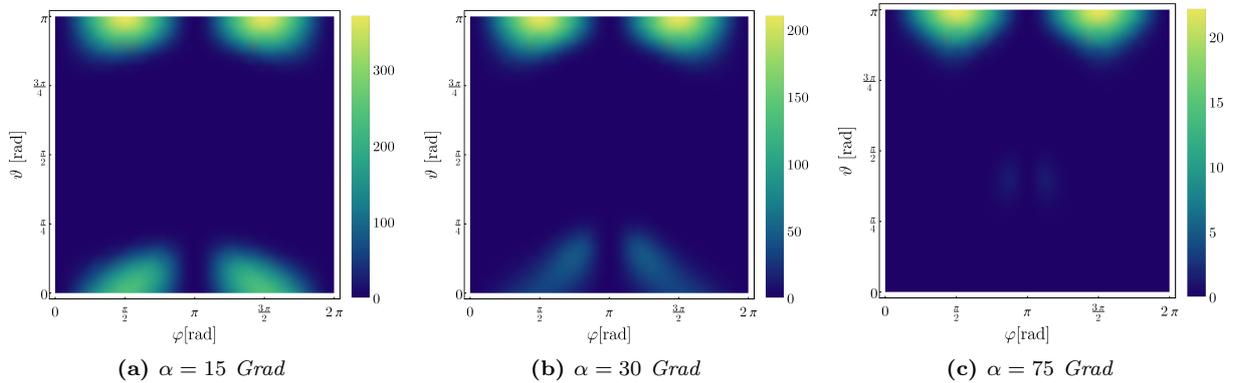


Abbildung 26: Textur-Plots der Photonendichte ρ_{p_2} für verschiedene Winkel α . Zu sehen ist, wie sich das Maximum ($\varphi_{s_2}, \vartheta_{s_2}$) mit zunehmendem Kollisionswinkel α entlang der ϑ -Achse bewegt. Die Photonendichte ρ_{p_2} nimmt für zunehmende Kollisionswinkel stark ab.

Aus den Abbildungen 24 bis 26 geht hervor, dass eine Veränderung des Streuwinkels α sich insbesondere auf die Amplitude des Messsignals auswirkt. Daher wird jetzt die Abhängigkeit der Signalphotonenanzahl vom Kollisionswinkel untersucht. Die Resultate sind graphisch in Abbildung 27 dargestellt.

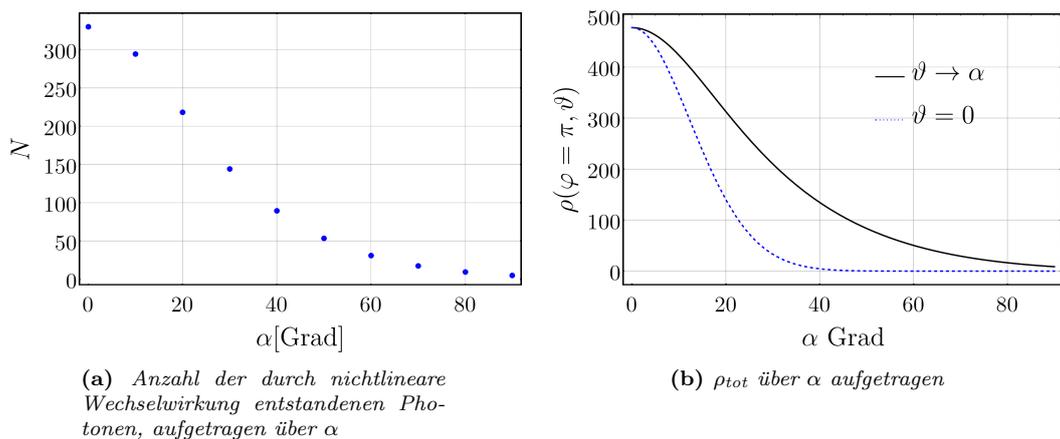


Abbildung 27: In Abbildung (a) wird gezeigt, wie die Anzahl der durch nichtlineare Wechselwirkung entstandenen Photonen mit dem Kollisionswinkel stark abnimmt. Diese ist gestrichelt in blau eingezeichnet. In (b) wurde in schwarz die Photonendichte $\rho_{tot}(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha)$ über α aufgetragen. Der ϑ -Wert wird dabei für jeden einzelnen Punkt an den Kollisionswinkel angepasst, dass Maximum wird somit verfolgt. In blau gestrichelt wurde als Vergleich der ϑ -Wert konstant auf 0 gesetzt. Diese fällt somit deutlich früher auf 0 ab.

5.2 Zusammenhang zwischen Kollisionswinkel, Eingangspolarisation und Photonendichte

Begonnen werden soll dieses Kapitel mit einem Vergleich mit Kapitel 4.2, insbesondere mit Abbildung 13. Die gleichen Abbildungen wurden nun noch einmal erstellt, allerdings für unterschiedliche Streuwinkel α . Das Resultat wird in Abbildung 28 gezeigt. Die Signalphotonenanzahl N_{p_1} ist für $\alpha > 0$ verschieden von N_{p_2} . Dies liegt an der Definition des Winkels β , dieser wurde für diese Abbildung auf 0 gesetzt.

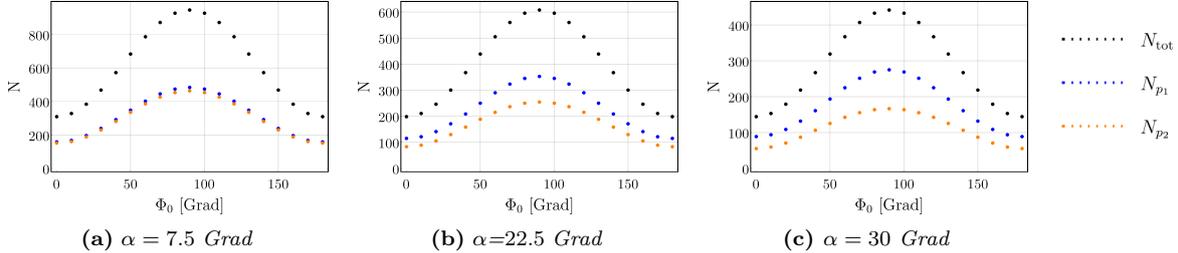


Abbildung 28: Anzahl der Photonen, geplottet über der Eingangspolarisation Φ_0 für verschiedene, jeweils konstante Streuwinkel. Der Winkel β wird in diesem Kapitel auf 0 gesetzt und nicht abhängig von α gewählt, daher werden die Signalphotonenanzahlen N_{p_1} und N_{p_2} in dieser Abbildung unterschiedlich groß, was durch das Festhalten von β bedingt ist.

Die Kurve hat denselben Verlauf, wie im Fall von kontra-propagierender Strahlen. Mit zunehmendem Streuwinkel sinkt die Gesamtanzahl gemessener Photonen. Die Lage der Feldvektoren für den Fall $\alpha \neq 0$ wurden bereits in Kapitel 3.3.1 skizziert. Eine maximale Anzahl an Signalphotonen wird bei $\Phi_0 = 90^\circ$ gefunden, eine minimale bei $\Phi_0 = 0^\circ$.

Die Photonendichten ρ_{p_1} und ρ_{p_2} lassen sich in Abhängigkeit von α in den beiden Maxima zu

$$\rho_{p_1}(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha|\Phi_0) = A(\alpha) \left(11 + 3 \cos(\pi - 2\Phi_0)\right)^2 \quad (5.1)$$

und

$$\rho_{p_2}(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha|\Phi_0) = B(\alpha) \cos\left(4.71 - 2\Phi_0\right)^2 \quad (5.2)$$

bestimmen, wobei A und B von α abhängige Vorfaktoren sind. Im anderen Maximum werden die folgenden Gleichungen erhalten:

$$\rho_{p_1}(\varphi = \pi, \vartheta = \pi|\Phi_0) = C(\alpha) \cos(\Phi_0)^2, \quad (5.3)$$

$$\rho_{p_2}(\varphi = \pi, \vartheta = \pi|\Phi_0) = D(\alpha) \sin(\Phi_0)^2. \quad (5.4)$$

Die Vorfaktoren und ihre explizite α Abhängigkeit sind analytisch zu komplex um sie explizit anzugeben. Die Verläufe der Photonendichten in den beiden Maxima sind in Abbildung 29 für den Fall $\alpha = 30^\circ$ beispielhaft gezeigt. An dieser Stelle ist ein Vergleich mit Abbildung 14 aus Kapitel 4.2 zielführend, dort wurden die Resultate für $\alpha = 0^\circ$ präsentiert. Wird nun $\alpha \neq 0^\circ$ gewählt, so ändert sich ausschließlich der Betrag von $\rho(\Phi_0)$.

5.3 Analyse der Polarisation

Begonnen werden soll dieses Kapitel mit der Analyse der β -Abhängigkeit der Photonendichte ρ_{p_1} und ρ_{p_2} für Kollisionswinkel $\alpha \neq 0$.

Die Photendichte ρ_{p_1} als Funktion von β hat im α -abhängigen Maximum die Form

$$\rho_{p_1}(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha|\alpha, \beta) = A(\alpha) \cos^2(\beta) \quad (5.5)$$

und besitzt somit für alle möglichen Streuwinkel eine Nullstelle bei $\beta_{\min} = \frac{\pi}{2}$ und ein Maximum bei $\beta_{\max} = 0$. Der Winkel des Kollisionslasers bewirkt lediglich eine Veränderung der Amplitude. Diese ist analytisch zu komplex um sie hier explizit anzugeben. Die Photonendichte ρ_{p_1} wird für einige α exemplarisch in Abbildung 30 gezeigt. Die Photonendichte ρ_{p_2} wurde zu

$$\rho_{p_2}(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha|\alpha, \beta) = A(\alpha) \sin^2(\beta). \quad (5.6)$$

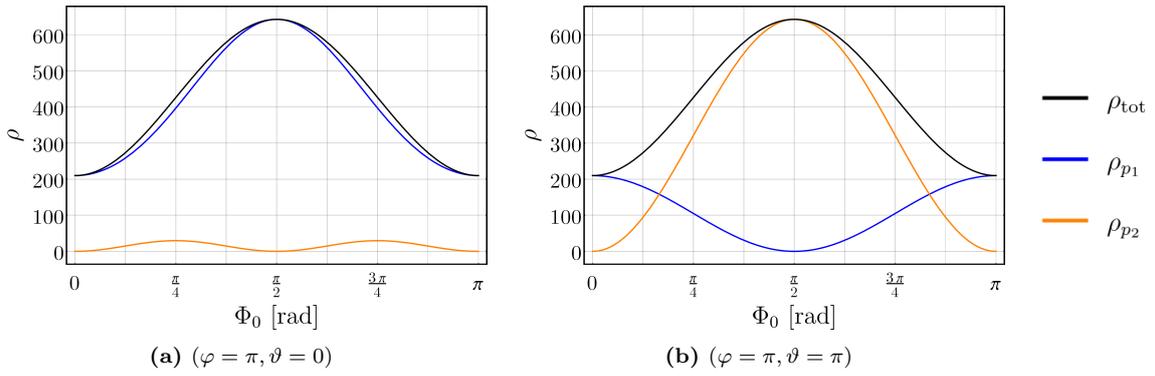


Abbildung 29: Die Photonendichten ρ_{p_1} (blau), ρ_{p_2} (orange) und ρ_{tot} (schwarz) aufgetragen über der Eingangspolarisation Φ_0 . Die Resultate sind nahezu identisch mit denen aus Kapitel 4.2. Das Maximum wird bei $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$ angenommen, das Minimum bei $\Phi_0 = 0$.

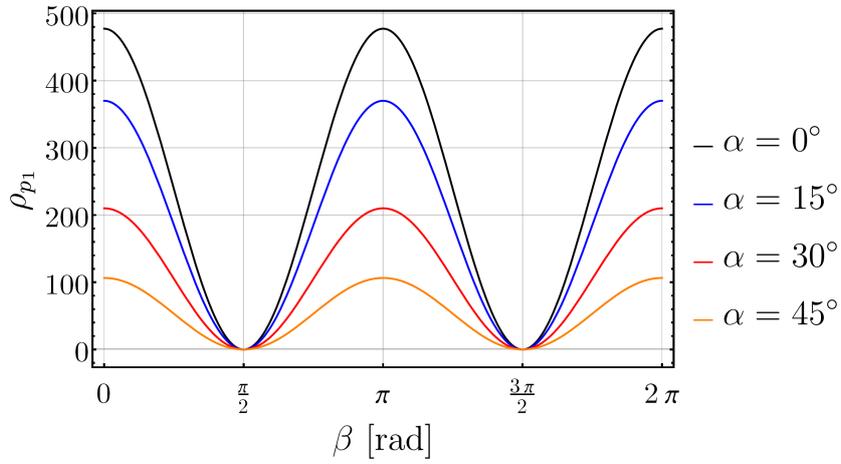


Abbildung 30: Die Photonendichte ρ_{p_1} aufgetragen über dem Polarisationswinkel β für verschiedene Kollisionswinkel α . Die Nullstelle liegt gemäß Gleichung (5.5) bei $\beta_{min} = \frac{\pi}{2}$. Die Maximum liegt um $\beta = \frac{\pi}{2}$ verschoben bei $\beta_{max} = 0$. Das Signal ist somit linear polarisiert.

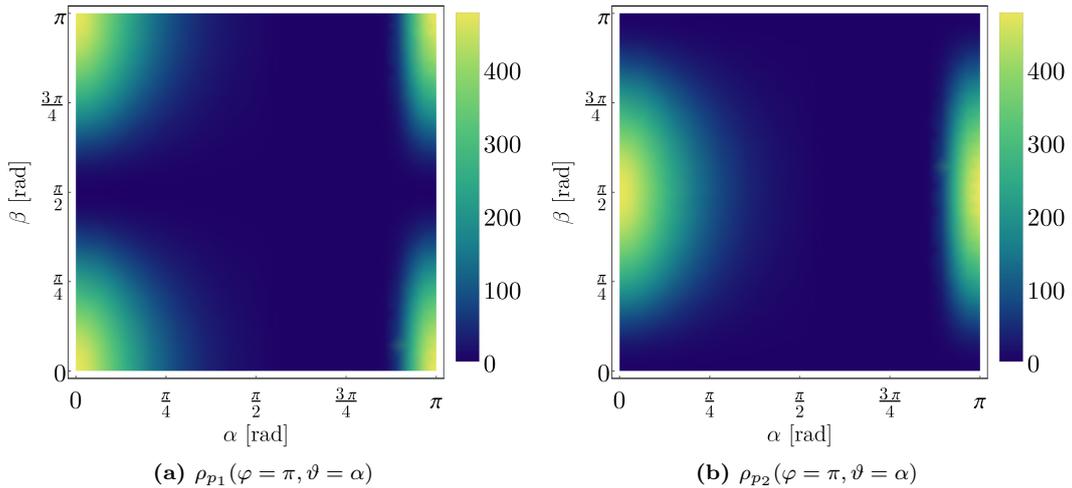


Abbildung 31: Die Photonendichten ρ_{p_1} (links) und ρ_{p_2} (rechts) dargestellt im α - β -Parameterraum. Die Dichte ρ_{p_1} besitzt unabhängig von α immer eine Nullstelle bei $\beta = \frac{\pi}{2}$ und ein Maximum bei $\beta = 0$ eine Nullstelle. Im rechten Plot der Dichte ρ_{p_2} sind diese um $\beta = \frac{\pi}{2}$ verschoben. Die Signalphotonen sind unabhängig von der Wahl des Kollisionswinkels α linear polarisiert.

bestimmt. Die Nullstelle und das Maximum von ρ_{p_2} sind um $\beta = \frac{\pi}{2}$ verschoben. Die Signalphotonen sind auch für den Fall $\alpha \neq 0$ vollständig linear polarisiert.

An dieser Stelle eignet sich ein zweidimensionaler Dichteplot im α - β -Parameterraum, welcher in Abbildung 31 zu sehen ist.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird eine Änderung von Φ_0 und β zugelassen. Die Photonendichten ρ_{p_1} ergeben sich in den Maxima zu:

$$\rho_{p_1}(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha | \alpha, \beta, \Phi_0) = A(\alpha) \left(11 \cos(\beta) + 3 \cos(\pi + \beta - 2\Phi_0) \right)^2, \quad (5.7a)$$

$$\rho_{p_2}(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha | \alpha, \beta, \Phi_0) = A(\alpha) \left(3 \cos(\pi - 2\Phi_0 + \beta + \frac{\pi}{2}) - 11 \sin(\beta) \right)^2 \quad (5.7b)$$

und

$$\rho_{p_1}(\varphi = \pi, \vartheta = \pi | \alpha, \beta, \Phi_0) = B(\alpha) \left(\cos(\beta) \cos(\Phi_0) - 1.75 \sin(\beta) \sin(\Phi_0) \right)^2, \quad (5.8a)$$

$$\rho_{p_2}(\varphi = \pi, \vartheta = \pi | \alpha, \beta, \Phi_0) = B(\alpha) \left(\sin(\beta) \cos(\Phi_0) - 1.75 \cos(\beta) \sin(\Phi_0) \right)^2. \quad (5.8b)$$

Die Photonendichte ρ_{p_1} ist für verschiedene Φ_0 in Abbildung 32 graphisch dargestellt.

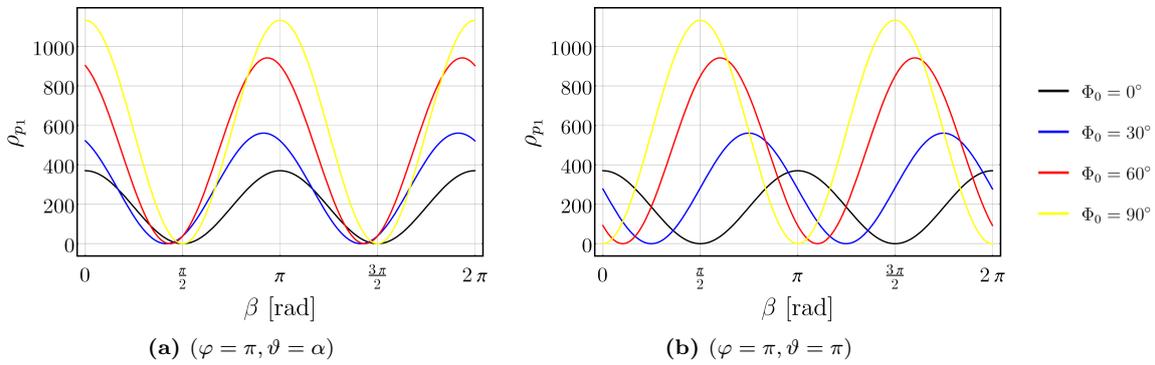


Abbildung 32: Die Photonendichte ρ_{p_1} aufgetragen über dem Winkel β für verschiedene Werte der Eingangspolarisation Φ_0 . Der Kollisionswinkel wurde für diese Graphik zu $\alpha = 15^\circ$ gewählt. Dies wirkt sich in einer Veränderung des maximalen ρ_{p_1} -Wertes aus, sowie in einer Phasenverschiebung.

Um zu prüfen, ob die Signalphotonen auch im Fall $\alpha \neq 0$ linear polarisiert sind, eignet sich wieder ein Dichteplot im β - Φ_0 -Parameterraum. Diese beiden Maxima sind beispielhaft für $\alpha = 15^\circ$ in den Abbildungen 33 und 34 zu sehen.

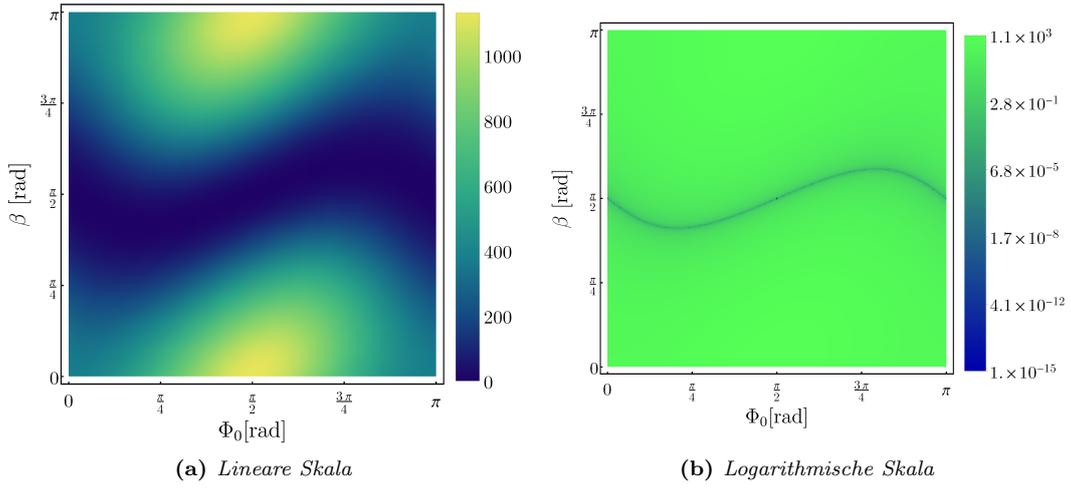


Abbildung 33: Die Photonendichte ρ_{p_1} dargestellt als Dichteplot im β - Φ_0 -Parameterraum. In dieser Abbildung wird das Maximum bei $(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha)$ gezeigt. Der Kollisionswinkel wurde exemplarisch auf $\alpha = 15^\circ$ gesetzt. Dieser hat ausschließlich Einfluss auf die Intensität, nicht aber auf die Polarisation. Es wird unabhängig von Φ_0 ein β gefunden, für welches die Photonendichte ρ_{p_1} effektiv auf 0 abfällt. Dies wird im rechten Bild mit Hilfe einer logarithmischen Skala verdeutlicht. In blau eingezeichnet sind Wertepaare (Φ_0, β) für die ρ_{p_1} kleiner als 10^{-15} wird.

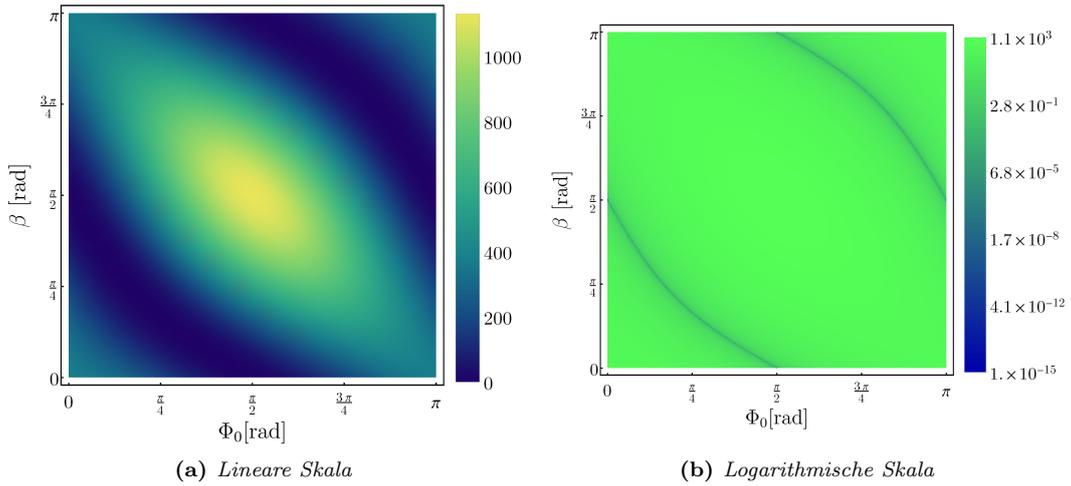


Abbildung 34: Die Photonendichte ρ_{p_1} dargestellt als Dichteplot im β - Φ_0 -Parameterraum. In dieser Abbildung wird das Maximum bei $(\varphi = \pi, \vartheta = \pi)$ gezeigt. Der Kollisionswinkel wurde exemplarisch auf $\alpha = 15^\circ$ gesetzt. Das Resultat, bis auf eine Kollisionswinkel bedingte Änderung der Intensität, identisch mit dem in Abbildung 19 in Kapitel 4.3 gezeigtem.

Für beide Abbildungen wurde der logarithmische Plot mit Hilfe eines Cut-Offs bei 10^{-15} erstellt. Die Resultate sind identisch mit denen aus Kapitel 4.3, bis auf eine unterschiedliche Intensität, bedingt durch einen α -abhängigen Vorfaktor. Die Signalphotonen sind linear polarisiert.

5.4 Fehlerskalierung

In diesem Kapitel soll analog zu Kapitel 4.5 untersucht werden, wie der Fehler skaliert, wenn der Winkel β für verschiedene Bereiche konstant gewählt wird. In diesem Kapitel wird exemplarisch das Beispiel $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 0$ und $\Phi_0 = 0$ diskutiert. Des Weiteren wird nur der Bereich um das Maximum bei $(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha)$ charakterisiert. Begonnen wird ohne Einschränkung des φ -Integrationsbereichs, ϑ wird auf $[30^\circ - \Delta\vartheta/2, 30^\circ + \Delta\vartheta/2]$ beschränkt. Der Integrationsbereich wird in Abbildung 35(a) im φ - ϑ -Parameterraum skizziert. Durch die Wahl von $\beta = 0$ gilt im Maximum der Photonendichte $\rho_{p_1} = \rho_{\text{tot}}$ und somit $\rho_{p_2} = 0$. Durch die Wahl eines definierten Integrationsbereich zur Bestimmung der Photonenzahlen wird ein Anteil an Photonen mit Polarität p_2 erhalten. Der Anteil V an Photonen mit Polarität p_2 dient der Beschreibung des Fehlers. Dieses wird in Abbildung 35(b) über $\Delta\vartheta$ aufgetragen. Zu sehen ist, dass selbst für $\vartheta \rightarrow 0$ ein Anteil von $\approx 24\%$ an Photonen mit Polarität p_2 erhalten wird. Da das Maximum in einem einzigen Punkt bei $(\varphi = 180^\circ, \vartheta = 30^\circ)$ liegt, aber alle Photonen auf

dem Breitengrad mit $\vartheta = 30^\circ$ gewertet werden, ist ein Anteil $V > 0$ auch im Grenzfalle $\Delta\vartheta \rightarrow 0$ zu erwarten. Graphisch lässt sich dies anhand von Abbildung 25(b) und 26 (b) veranschaulichen: Im Falle $\Delta\vartheta \approx 0$ ist der Integrationsbereich ein unendlich kleiner, horizontaler Streifen in diesen Texturplots, in dem sowohl sowohl Photonen mit p_1 , als auch mit p_2 liegen. Wird $\Delta\vartheta$ stückweise vergrößert, so werden mehr Photonen mit p_2 in diesem Streifen gefunden. Ab $\Delta\vartheta \approx 60^\circ$ wird der Anstieg der Kurve geringer und wird konstant. Auch dies ist anhand der Abbildungen 25(b) und 26 (b) gut ersichtlich. Der ϑ -Integrationsbereich liegt nun bei $0^\circ < \vartheta < 60^\circ$. In diesem Bereich wurde das gesamte Maximum erfasst, eine Vergrößerung des Bereiches bringt keine neuen Signalphotonen mehr mit sich, sodass somit auch der Anteil V an Signalphotonen mit Polarisation p_2 konstant wird.

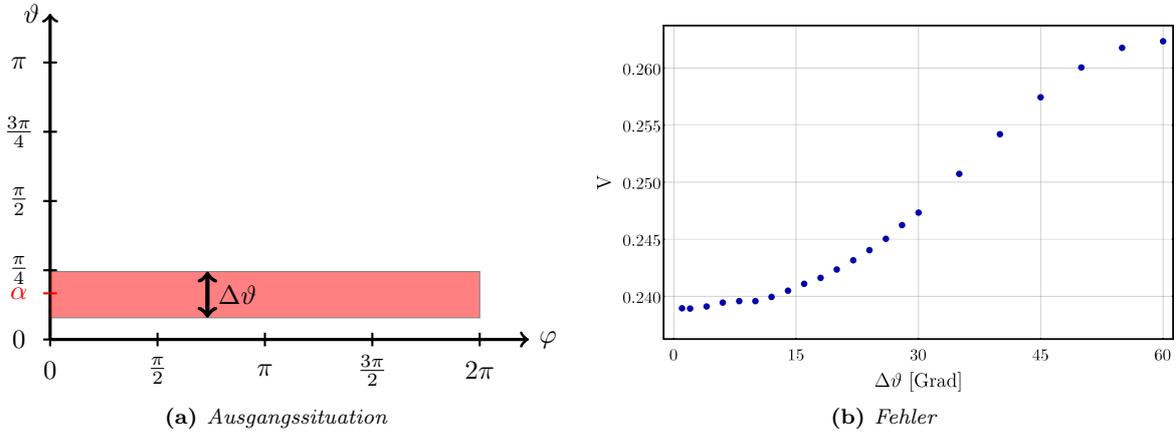


Abbildung 35: In der linken Abbildung ist schematisch die Vorgehensweise skizziert worden. Die Photonenzahl werden über $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\vartheta \in \left[30^\circ - \frac{\Delta\vartheta}{2}, 30^\circ + \frac{\Delta\vartheta}{2}\right)$. Der Winkelbereich $\Delta\vartheta$ wird anschließend variiert. In der rechten Abbildung ist das Verhältnis V über $\Delta\vartheta$ aufgetragen.

Ziel der Betrachtung ist es einen Messbereich um das Maximum zu finden, für den β konstant gewählt werden kann, ohne dabei einen großen Fehler zu erzeugen. Eine Einschränkung von φ ist damit notwendig. Analog zu Kapitel 4.4 kann die Photonendichte ρ_{p_1} mit einer Gaußverteilung approximiert werden. Diese besitzt eine Breite von $\sigma = 0.43 \pm 0.00031$. Die zweite Variante der Fehlerskalierungsbetrachtung ist die Einschränkung von φ auf $\varphi = \pi \pm 0.43$. Eine Skizze dazu befindet sich in Abbildung 36(a). Der Anteil V an Photonen mit Polarisation p_2 aufgetragen über den eingeschränkten Bereich ist in Abbildung 36(b) zu sehen.

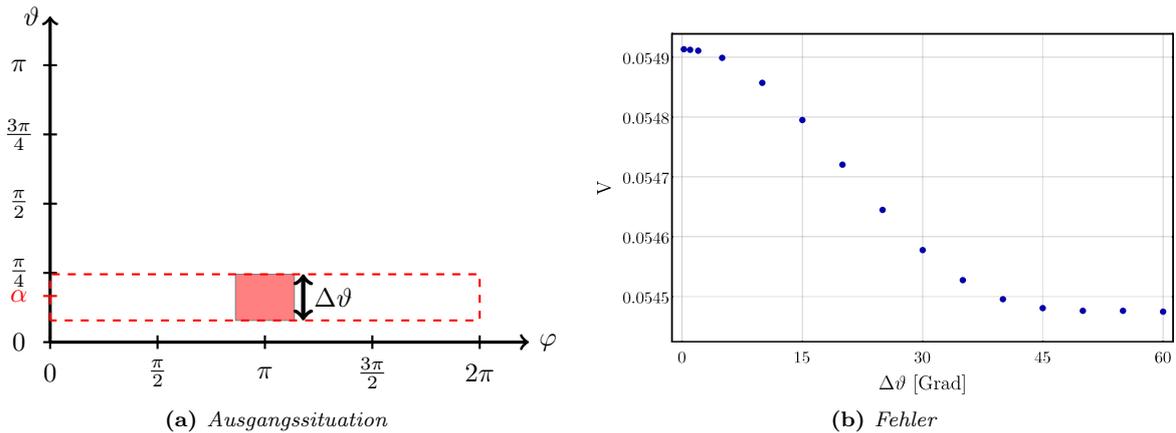


Abbildung 36: In der linken Abbildung ist eine Einschränkung des Integrationsbereichs zu sehen, die φ -Grenzen sind fest gesetzt, $\Delta\vartheta$ wird variiert. Das Anteil an Photonen mit Polarisation p_2 ist in der rechten Abbildung über $\Delta\vartheta$ aufgetragen.

Der Fehler durch diese Variante wird kleiner für größer werdende Integrationsbereiche. Dies spielt an dieser Stelle eine eher untergeordnete Rolle, da die Verkleinerung lediglich 0.4 % beträgt. Insgesamt liegt der durch diese φ und ϑ Einschränkung gemachte Fehler bei $\approx 5.5\%$. Um dieses Verhalten zu erklären eignen sich wieder in den Abbildungen 25(b) und 26(b). Das untere Maximum der Photonendichte ρ_{p_1} ist in den Plots näherungsweise kreisförmig, während das Maximum der Dichte ρ_{p_2} eher länglich und gedreht ist. Wird der Parameter $\Delta\vartheta \approx 0$

gewählt, so liegt die obere Spitze des Maximums von ρ_{p_2} im Integrationsbereich. Bei einer Vergrößerung von $\Delta\vartheta$ wird dies weiterhin mitgewertet, der untere Teil des Maximums befindet sich allerdings nicht mehr im Integrationsbereich. Die Anzahl an Photonen mit N_{p_2} ist dann konstant, bei einer zunehmenden Anzahl an Photonen mit Polarisation p_1 . Das Verhältnis V sinkt somit.

Die dritte untersuchte Variante ist sowohl ϑ , als auch φ zu variieren. Der Parameter $\Delta\varphi$ wird dabei, aufgrund des doppelt so großen Definitionsbereichs, doppelt so groß gewählt wie $\Delta\vartheta$, siehe Abbildung 37(a).

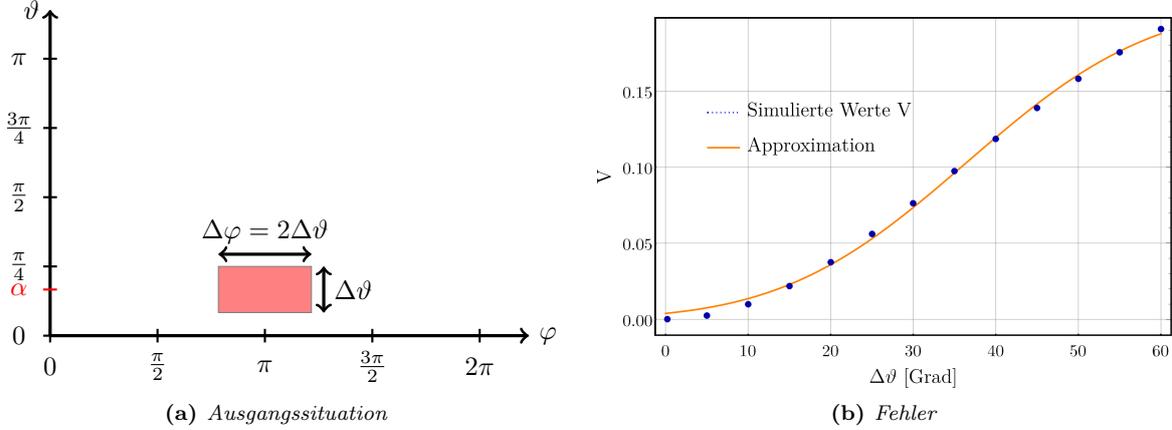


Abbildung 37: In der linken Abbildung ist der gewählte Integrationsbereich zu sehen. Die Parameter $\Delta\varphi = 2\Delta\vartheta$ und $\Delta\vartheta$ sind dabei symmetrisch um das Maximum bei $(\varphi = \pi, \vartheta = \alpha)$ gewählt. Das Anteil an Photonen mit p_2 ist in der rechten Abbildung über $\Delta\vartheta$ aufgetragen.

Die Resultate sind in Abbildung 37(b) zu sehen. Um den Vergleich mit Kapitel 4.5 herzustellen wird erneut mit der Verteilungsfunktion der Normalverteilung approximiert, siehe Gleichung (4.11). Die erhaltenen Parameter konnten mit Hilfe der Funktion `NonlinearModelFit` in Mathematica bestimmt werden und sind in Tabelle 6 zu sehen.

	Errechneter Wert	Standardfehler	Relativer Fehler
A	0.103	0.003	2.91%
μ	36.484	0.901	2.47%
σ	17.58	0.826	4.69%

Tabelle 6: Um den Anteil an Photonen mit Polarität p_2 in Abhängigkeit von $\Delta\vartheta$ zu beschreiben eignet sich die Verteilungsfunktion der Normalverteilung. Die unbekannt Parameter wurden mit Hilfe der Funktion `NonlinearModelFit` in Mathematica bestimmt und sind mitsamt der berechneten Fehler in dieser Tabelle zu sehen.

Auch in diesem Fall soll untersucht werden, wie der relative Anteil V mit der Fläche

$$A = \int_{\varphi=\pi-\Delta\vartheta}^{\varphi=\pi+\Delta\vartheta} \int_{\vartheta=\alpha-\Delta\vartheta/2}^{\vartheta=\alpha+\Delta\vartheta/2} d\vartheta d\varphi \sin(\vartheta) \quad (5.9)$$

skaliert. Der Verlauf des Verhältnisses $V(A)$ in Abbildung 38 legt ein Potenzgesetz, siehe Gleichung 4.13, als Approximation nahe. Diese ist in orange in Abbildung 38 mit eingezeichnet. Die unbekannt Parameter C_1 und C_2 wurden mit Mathematica ermittelt und sind in Tabelle 7 mitsamt ihrer Fehler angegeben.

	Errechneter Wert	Standardfehler	Relativer Fehler
C_1	0.192	0.003	1.56%
C_2	0.718	0.025	3.19%

Tabelle 7: Der Verlauf des relativen Anteils an Photonen mit Polarität p_2 legt die Approximation mit einem Potenzgesetz nahe, die ermittelten Werte, sowie ihrer Fehler wurden mit Hilfe der Funktion `NonlinearModelFit` in Mathematica berechnet.

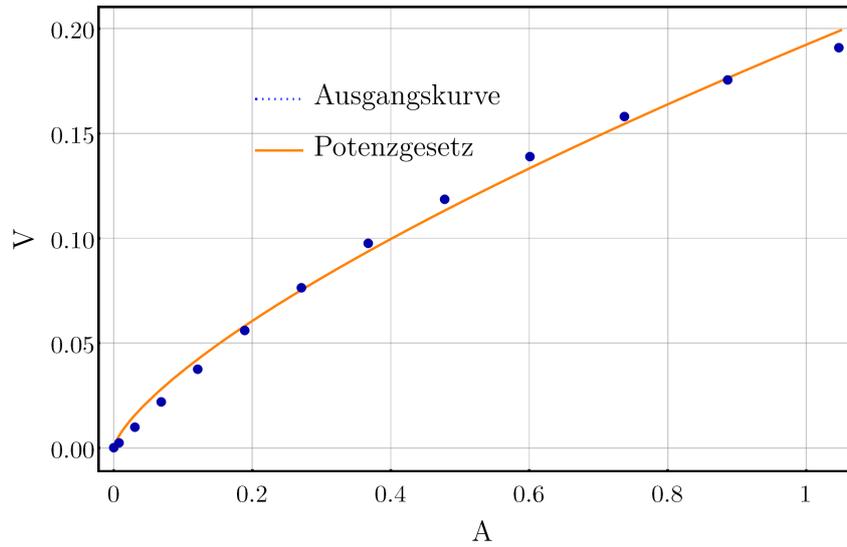


Abbildung 38: Der Verlauf des Verhältnisses V aufgetragen über der Fläche A . Es eignet sich eine Approximation mit einem Potenzgesetz, diese ist durchgezogen in orange zu sehen.

6 Resümee und Ausblick

Um diese Arbeit abzuschließen sollen noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst werden. Auf der Einheitskugel um den Koordinatenursprung wurden numerisch zwei Maxima der Signalphotonendichte gefunden. Eine geometrische Überlegung führte zum Ansatz, anzunehmen diese Maximalstellen lägen bei den Punkten, auf den die \vec{k} -Vektoren der beiden Laser zeigen. Diese Vermutung konnte numerisch hinreichend genau bestätigt werden. Der Fokus in dieser Arbeit lag auf der Analyse der Polarisationen der Signalphotonen in den Maxima. Dabei wurden die Zusammenhänge der Photonendichte ρ_{p_1} , ρ_{p_2} und ρ_{tot} vom Kollisionswinkel α , von der Eingangspolarisation Φ_0 und vom Polarisationswinkel β numerisch bestimmt, graphisch dargestellt und ausgewertet. Es zeigte sich, dass der Kollisionswinkel ausschließlich einen Vorfaktor erzeugt, der für größere α immer kleiner wird. Eine Abhängigkeit der Polarisation der Signalphotonen vom Kollisionswinkel konnte nicht gefunden werden. Die Eingangspolarisation spiegelte sich ausschließlich in einer Phasenverschiebung wieder, auch hier wurde keine Polarisationsabhängigkeit gefunden. Der Polarisationswinkel β diente analog zum klassischen Polarisationsfilter als Hilfsmittel zur Analyse der Signalphotonen. Durch Variation von β wurde festgestellt, dass die Signalphotonen für alle möglichen Konstellationen linear polarisiert waren. Dies bedeutet, dass keine Signaturen von nichtlinearen Effekten gefunden werden konnten. Die Vermutung liegt nahe, dass die durch die Starkfeldlaser bedingten Nichtlinearitäten, zu schwach waren um sie auf diese Weise zu detektieren. Eine Möglichkeit wäre es, Laser mit noch größeren Feldstärken zu nutzen. Das langfristige Ziel sollte allerdings der Nachweis der Effekte in einem tatsächlichem Experiment sein. Dementsprechend müssten diese Laser erst noch konstruiert werden. Des Weiteren ist die Messung der Signalphotonen ein Problem, da diese aus dem starken Hintergrundfeldern der Laser herausgefiltert werden müssen. Es benötigt daher sehr empfindlich Detektoren um dies zu gewährleisten, auch hier wäre eine Erhöhung der Feldstärken nicht zielführend. Eine vielversprechenderer Ansatz zum Nachweis der Doppelbrechung im Vakuum wird in [27] präsentiert, dabei wird statt zweier optischer Laser, ein optischer Laser und ein Röntgenlaser verwendet.

7 Literaturverzeichnis

- [1] BARTELMANN ; FEUERBACHER ; KRÜGER ; LÜST ; REBHAN ; WIPF: *Theoretische Physik 2 / Elektrodynamik*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2018. – Seite 238 ff
- [2] SCHWABL, Franz: *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*. Berlin ; Heidelberg [u.a.] : Springer, 2000, 2. Auflage. – S.115 ff.
- [3] SCHWABL, Franz: *Quantenmechanik*. Berlin ; Heidelberg [u.a.] : Springer, 2007, 7. Auflage. – S. 172
- [4] ALVAREZ-GAUME, Luis ; VAZQUEZ-MOZO, Miguel A.: *Introductory Lectures on Quantum Field Theory*. 2005
- [5] PHILIPSEN, Owe: *Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik : Eine Einführung*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2018. – Seite 33f.
- [6] HEISENBERG, W. ; EULER, H.: Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons. In: *Zeitschrift für Physik* 98 (1936), November, Nr. 11, 714–732. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01343663>. – DOI 10.1007/BF01343663. – ISSN 0044–3328
- [7] LUNDSTRÖM, E. ; BRODIN, G. ; LUNDIN, J. ; MARKLUND, M. ; BINGHAM, R. ; COLLIER, J. ; MENDONÇA, J. T. ; NORREYS, P.: Using High-Power Lasers for Detection of Elastic Photon-Photon Scattering. In: *Physical Review Letters* 96 (2006), Mar, Nr. 8. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.96.083602>. – DOI 10.1103/physrevlett.96.083602. – ISSN 1079–7114
- [8] LUNDIN, J. ; MARKLUND, M. ; LUNDSTRÖM, E. ; BRODIN, G. ; COLLIER, J. ; BINGHAM, R. ; MENDONÇA, J. T. ; NORREYS, P.: Analysis of four-wave mixing of high-power lasers for the detection of elastic photon-photon scattering. In: *Physical Review A* 74 (2006), Oct, Nr. 4. <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.74.043821>. – DOI 10.1103/physreva.74.043821. – ISSN 1094–1622
- [9] HEINZL, Thomas ; LIESFELD, Ben ; AMTHOR, Kay-Uwe ; SCHWOERER, Heinrich ; SAUERBREY, Roland ; WIPF, Andreas: On the observation of vacuum birefringence. In: *Optics Communications* 267 (2006), Nov, Nr. 2, 318–321. <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2006.06.053>. – DOI 10.1016/j.optcom.2006.06.053. – ISSN 0030–4018
- [10] DI PIAZZA, A. ; HATSAGORTSYAN, K. Z. ; KEITEL, C. H.: Light Diffraction by a Strong Standing Electromagnetic Wave. In: *Physical Review Letters* 97 (2006), Aug, Nr. 8. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.97.083603>. – DOI 10.1103/physrevlett.97.083603. – ISSN 1079–7114
- [11] KARBSTEIN, Felix ; GIES, Holger ; REUTER, Maria ; ZEPF, Matt: Vacuum birefringence in strong inhomogeneous electromagnetic fields. In: *Physical Review D* 92 (2015), Oct, Nr. 7. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.92.071301>. – DOI 10.1103/physrevd.92.071301. – ISSN 1550–2368
- [12] KARBSTEIN, Felix ; SUNDQVIST, Chantal: Probing vacuum birefringence using x-ray free electron and optical high-intensity lasers. In: *Physical Review D* 94 (2016), Jul, Nr. 1. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.94.013004>. – DOI 10.1103/physrevd.94.013004. – ISSN 2470–0029
- [13] GIES, Holger ; KARBSTEIN, Felix ; SHAISULTANOV, Rashid: Laser photon merging in an electromagnetic field inhomogeneity. In: *Physical Review D* 90 (2014), Aug, Nr. 3. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.90.033007>. – DOI 10.1103/physrevd.90.033007. – ISSN 1550–2368
- [14] GIES, Holger ; KARBSTEIN, Felix ; SEEGERT, Nico: Photon merging and splitting in electromagnetic field inhomogeneities. In: *Physical Review D* 93 (2016), Apr, Nr. 8. <http://dx.doi.org/10.1103/physrevd.93.085034>. – DOI 10.1103/physrevd.93.085034. – ISSN 2470–0029
- [15] ADLER, S. L. ; BAHCALL, J. N. ; CALLAN, C. G. ; ROSENBLUTH, M. N.: Photon Splitting in a Strong Magnetic Field. In: *Phys. Rev. Lett.* 25 (1970), Oct, 1061–1065. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.25.1061>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.25.1061
- [16] DI PIAZZA, A. ; MILSTEIN, A. I. ; KEITEL, C. H.: Photon splitting in a laser field. In: *Physical Review A* 76 (2007), Sep, Nr. 3. <http://dx.doi.org/10.1103/physreva.76.032103>. – DOI 10.1103/physreva.76.032103. – ISSN 1094–1622
- [17] GIES, Holger ; KARBSTEIN, Felix ; SEEGERT, Nico: Quantum reflection of photons off spatio-temporal electromagnetic field inhomogeneities. In: *New Journal of Physics* 17 (2015), Apr, Nr. 4, 043060. <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/17/4/043060>. – DOI 10.1088/1367-2630/17/4/043060. – ISSN 1367–2630

- [18] GIES, Holger ; KARBSTEIN, Felix ; SEEGERT, Nico: Quantum reflection as a new signature of quantum vacuum nonlinearity. In: *New Journal of Physics* 15 (2013), Aug, Nr. 8, 083002. <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/15/8/083002>. – DOI 10.1088/1367-2630/15/8/083002. – ISSN 1367-2630
- [19] KLAR, Leonhard: Detectable Optical Signatures of QED Vacuum Nonlinearities Using High-Intensity Laser Fields. In: *Particles* 3 (2020), Mar, Nr. 1, 223–233. <http://dx.doi.org/10.3390/particles3010018>. – DOI 10.3390/particles3010018. – ISSN 2571-712X
- [20] GIES, Holger ; KARBSTEIN, Felix ; KOHLFÜRST, Christian: All-optical signatures of strong-field QED in the vacuum emission picture. In: *Phys. Rev. D* 97 (2018), Feb, 036022. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.036022>. – DOI 10.1103/PhysRevD.97.036022
- [21] REIDER, Georg A.: *Photonics : An Introduction*. Cham : Springer, 2016, 1st ed. 2016
- [22] EICHLER, Jürgen: *Laser : Bauformen, Strahlführung, Anwendungen*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. – Seite 234 f.
- [23] WALKER, Barry C. ; TÓTH, Csaba ; FITTINGHOFF, David N. ; GUO, Ting ; KIM, Dong-Eon ; ROSE-PETRUCK, Christoph ; SQUIER, Jeff A. ; YAMAKAWA, Koichi ; WILSON, Kent R. ; BARTY, C.P.J.: A 50-EW/cm² Ti:sapphire laser system for studying relativistic light-matter interactions. In: *Opt. Express* 5 (1999), Nov, Nr. 10, 196–202. <http://dx.doi.org/10.1364/OE.5.000196>. – DOI 10.1364/OE.5.000196
- [24] PESCHEL, Ulf: Skript zur Vorlesung Optik und Wellen. (2019)
- [25] DEMTRÖDER, Wolfgang: *Experimentalphysik 2 : Elektrizität und Optik*. Berlin ; Heidelberg : Springer, 2013. – S. 249
- [26] WALDI, R.: *Statistische Datenanalyse : Grundlagen und Methoden für Physiker*. Berlin : Springer Spektrum, [2019], 2. Auflage
- [27] KARBSTEIN, Felix ; SUNDQVIST, Chantal: Probing vacuum birefringence using x-ray free electron and optical high-intensity lasers. In: *Phys. Rev. D* 94 (2016), Jul, 013004. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.94.013004>. – DOI 10.1103/PhysRevD.94.013004

Danksagung

Ich danke Prof. Holger Gies und Leonhard Klar für die Betreuung dieser Arbeit.

Selbstständigkeit und Veröffentlichung

Ich erkläre, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Vonseiten des Verfassers bestehen keinerlei Einwände, diese Arbeit der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur öffentlichen Nutzung zur Verfügung zu stellen.

Jena, den **XX.** Oktober 2020

Sören Lerner