

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut



seit 1558

Renormierungsflüsse von Higgsmassenschranken in einfachen Yukawa-Systemen

Masterarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Master of Science

vorgelegt von René Sondenheimer,
geboren am 19.08.1988 in Weimar

Jena, 15. September 2012

1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Holger Gies
2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Jens Braun

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theoretische Grundlagen	6
2.1	QFT, erzeugende Funktionale, effektive Wirkung	6
2.2	Elemente der funktionalen Renormierungsgruppe	9
2.2.1	Wilsonscher Zugang	9
2.2.2	Wetterich-Gleichung	10
2.3	Higgs-Mechanismus	15
2.4	Higgs-Yukawa-Modell	16
3	Meanfield-Approximation	19
3.1	Flussgleichung des skalaren Potentials	19
3.2	Fermionisch induziertes skalares Potential	22
3.3	Berücksichtigung fermionischer und bosonischer Fluktuationen	27
3.4	Erweiterungen des UV-Potentials	33
3.4.1	Fermionische Fluktuationen	34
3.4.2	Fermionische und bosonische Fluktuationen	35
4	RG-Flussgleichungen des Higgs-Yukawa-Modells	39
4.1	Fluss des skalaren Potentials	40
4.2	Fluss der Yukawa-Kopplung	41
4.3	Anomale Dimensionen	43
4.3.1	Anomale Dimension des Skalarfeldes	44
4.3.2	Anomale Dimension der Fermionfelder	46
4.4	Dimensionslose Flussgleichungen	46
5	Schranken der Higgsmasse	48
5.1	Vernachlässigung der anomalen Dimensionen	49
5.2	Berücksichtigung der anomalen Dimensionen	58
5.3	Vergleich der Higgsmassenschranken mit bisherigen Resultaten	60
5.3.1	Vergleich zwischen Meanfield-Approximation und dem „vollen“ Fluss der Kopplungen	61
5.3.2	Vergleich mit perturbativen Methoden	61
5.3.3	Vergleich mit Gittermethoden	64
6	Zusammenfassung und Ausblick	65

1 Einleitung

Der Higgs-Mechanismus ist ein zentraler Bestandteil des Standardmodells der Teilchenphysik, welches eine ungemein erfolgreiche Theorie darstellt, um die Physik auf kleinen Maßstäben zu beschreiben. Dieses enthält alle bis jetzt¹ beobachteten Materieteilchen und beschreibt deren Interaktionen durch drei der vier bekannten fundamentalen Wechselwirkungen² äußerst akkurat und wurde in einer Vielzahl von Experimenten getestet. Die mathematische Beschreibung der Wechselwirkungen erfolgt über lokale Eichtheorien. Um in diesen massive Teilchen konsistent beschreiben zu können, schlugen 1964 Higgs, Kibble, Guralnik, Hagen, Englert und Brout einen Mechanismus vor, der unter dem Begriff Higgs-Mechanismus bekannt wurde [1, 2, 3, 4]. Durch diesen erhalten sowohl die schwachen Eichbosonen als auch die Fermionen ihre Masse, in dem diese an das Kondensat eines neu eingeführten skalaren Feldes koppeln. Das damit ebenfalls postulierte skalare Boson galt nach Entdeckung des τ -Neutrinos im Jahre 2000 als letzter nicht beobachteter Baustein des Standardmodells. Die Suche nach diesem wurde in den letzten Jahren intensiv durchgeführt. Daraus resultierte ein neu entdecktes Teilchen [5, 6], welches die Eigenschaften des vorhergesagten Higgs-Bosons zu besitzen scheint.

Vor diesen experimentellen Tests wurde eine Vielzahl theoretischer Vorüberlegungen durchgeführt, ob eventuelle Massengrenzen für das Standardmodell-Higgs existieren. Von zentraler Bedeutung ist dabei die Erkenntnis, dass das Standardmodell keine fundamentale Theorie sein kann, da beispielsweise gravitative Effekte nicht berücksichtigt werden. Spätestens ab der Planck-Skala sind diese in der gleichen Größenordnung wie die anderen Wechselwirkungen und können nicht mehr vernachlässigt werden, so dass sich das Standardmodell vielmehr als eine effektive Theorie verstehen lässt, die nur bis zu einer gewissen oberen Energieskala gültig ist. Diese ist bestenfalls die Planck-Skala, jedoch kann genauso gut ein geringerer cutoff vorliegen, der auf ein früheres Einsetzen von neuer Physik jenseits des Standardmodells hinweist. Für einen gegebenen cutoff ist es nun möglich, die Eigenschaften des skalaren Potentials in Abhängigkeit der Parameter der Theorie zu untersuchen und damit eventuell eine obere und eine untere Grenze der Higgsmasse zu finden.

Erste Massenschranken wurden in perturbativen Rechnungen konstruiert. In diesen wurde jedoch von der Annahme ausgegangen, dass die Beiträge der Top-Quark-Fluktuationen das elektroschwache Minimum des skalaren effektiven Potentials destabilisieren können und leiteten aus einer Stabilitätsforderung (oder Metastabilitätsforderung) an die IR-Physik eine untere Higgsmassenschranke ab, vgl. beispielsweise [7, 8, 9, 10, 11]. Diese Instabilitäten lassen sich jedoch infrage stellen, da das effektive Potential eigentlich konvex sein sollte. In Gittersimulationen tauchten diese Instabilitäten nicht auf (vgl. [12]) und in [13] konnte gezeigt werden, dass diese erst entstehen, wenn die störungstheoretischen Ergebnisse auf einen Bereich ausgedehnt werden, in denen diese Näherung keine verlässlichen Ergebnisse mehr liefert.

Unter Verwendung von Methoden der funktionalen Renormierungsgruppe wurden erst-

¹August 2012

²Diese sind die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung. Lediglich die Gravitation konnte noch nicht konsistent quantisiert werden.

mals in [14] Überlegungen zu den Higgsmassenschranken in einem einfachen Higgs-Yukawa-Modell getroffen. Diese scheinen sich direkt aus dem Renormierungsgruppenfluss zu ergeben, ohne dass Annahmen über Instabilitätsszenarien getroffen werden müssen. Motiviert durch diese Ergebnisse sollen diese Untersuchungen ausgebaut und genauer analysiert werden. Mit diesem nichtperturbativen Zugang zur effektiven Wirkung liegt das Hauptaugenmerk dieser Arbeit vor allem auf der Untersuchung, ob Abweichungen des quartischen Potentials, welches standardmäßig in der Störungstheorie verwendet wird, die Higgsmassenschranken beeinflussen können.

Um das verwendete Modell von Grund auf zu verstehen, werden erste Analysen der Higgsmassenschranken in einer Meanfield-Näherung durchgeführt. Dabei wird zunächst nur das fermionisch induzierte effektive Potential untersucht. Nachdem in diesem eine untere Schranke in der ϕ^4 -Theorie gefunden wurde, erweitern wir das Modell um die bosonischen Fluktuationen und führen analoge Betrachtungen durch. Modifikationen des UV-Potentials führen dazu, dass deutliche Abweichungen von der bestimmten unteren Massenschranke gefunden werden können. Ob dieses Phänomen auch im Falle der vollen Flussgleichung auftritt, wird anschließend studiert. Dafür werden in Kap. 4 die benötigten Flussgleichungen hergeleitet, um diese in Kap. 5 approximativ zu lösen. Unter dem Ansatz eines quartischen UV-Potentials konnten Higgsmassenschranken gefunden werden, die qualitativ das gleiche Verhalten wie jene in [14] aufweisen. Allerdings wurde dabei ein neuer Ansatz für die Konstruktionsvorschrift der oberen Schranke gewählt. Weiter wird vorgestellt, wie die untere Higgsmassenschranke durch einfache UV-Potentialänderungen unterschritten werden kann. Wie sich die Effekte dieser Modifikation auf den Fluss des effektiven Mittelwertpotentials auswirken, wird ebenso diskutiert wie der Vergleich der gewonnenen Higgsmassenschranken mit denen, die mittels anderer Methoden berechnet wurden. Physikalische Instabilitäten sind in keinem der betrachteten Fälle gefunden worden. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse schließt die vorliegende Arbeit ab.

Die durchgeführten numerischen Rechnungen erfolgten mittels „Wolfram Mathematica“.

2 Theoretische Grundlagen

Im Folgenden werden die physikalischen Konzepte und mathematischen Formalismen vorgestellt, welche für die weiteren Abschnitte dieser Arbeit benötigt werden. Zunächst wird ein kurzer Überblick über die Grundlagen der Quantenfeldtheorien gegeben. Für die Quantisierung wird der Funktionalintegralformalismus verwendet, so dass die Beschreibung einer QFT mittels erzeugender Funktionale durchgeführt werden kann. Im Anschluss erfolgt die Darstellung des Wilsonschen Zugangs zur Renormierungsgruppe sowie die Herleitung und Motivation der Wetterich-Gleichung, die verwendet wird, um Quantenfluktuationen auszuintegrieren. Wesentlich für diese Arbeit ist der Higgs-Mechanismus. Dieser wird kurz anhand eines Higgs-Yukawa-Modells vorgestellt und qualitativ für das Standardmodell diskutiert. Eine Motivation des in dieser Arbeit untersuchten Modells schließt die Grundlagen ab.

Die in diesem Kapitel folgenden Informationen können Standardlehrbüchern wie [15] und [16] entnommen werden, beziehungsweise sind vermittelter Lehrstoff in Vorlesungen wie [17], [18] und [19]. Didaktische Review-Artikel zum Thema der funktionalen Renormierungsgruppe sind [20] und [21]. Sofern nicht weiter angegeben sind alle quantitativ angegebenen physikalischen Größen und Parameter des Standardmodells wie Teilchenmassen oder Kopplungskonstanten [22] entnommen.

2.1 QFT, erzeugende Funktionale, effektive Wirkung

Alle physikalisch relevanten Informationen, die aus einer Quantenfeldtheorie gewonnen werden können (wie Wirkungsquerschnitte, Zerfallsraten, Teilchenspektren, ...), sind in den n -Punkt Korrelationsfunktionen kodiert. Diese werden formal eingeführt durch den Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produktes von n Feldoperatoren im Heisenbergbild $\hat{\varphi}(x_i)$. Eine für die folgenden Rechnungen äußerst praktische Darstellung der zu bestimmenden Erwartungswerte liefert der Funktionalintegralformalismus. In diesem erhält man die Korrelationsfunktionen per Definition aus dem Produkt der n Feldoperatoren an verschiedenen Punkten der Raumzeit gemittelt über alle möglichen Feldkonfigurationen (Quantenfluktuationen). Die Mitteilung wird dabei mit einem Phasenfaktor der Wirkung gewichtet. Bei dem Übergang zu einer euklidischen Feldtheorie übersetzt sich dieser Phasenfaktor in ein Exponential der negativen Wirkung. Dieser Übergang wird durchgeführt, da durch die Indefinitheit der Minkowski-Metrik die Situation auftreten kann, dass die Skalarprodukte zwischen ko- und kontravarianten Vektoren sehr klein werden oder sogar verschwinden können. Dies kann umgangen werden, indem eine Wick-Rotation durchgeführt wird: $x_M^0 \rightarrow -ix^0$, $\vec{x}_M \rightarrow \vec{x}$. Dadurch wird die Minkowski-Metrik in eine euklidische überführt (abgesehen von einem globalen Minus), $p_M^\mu p_{M\mu} \rightarrow -p^\mu p_\mu = -\delta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu$. Ist das Skalarprodukt $p^\mu p_\mu \equiv p^2$ nun kleiner als eine gewisse obere Schranke Λ^2 , ist sichergestellt, dass jede einzelne Komponente des euklidischen Impulses kleiner als Λ ist, wodurch im späteren Verlauf der cutoff als eine maximale Energieskala in sinnvoller Weise eingeführt werden kann. Aus diesem Grund werden alle nachfolgenden Rechnungen in euklidischer

Raumzeit durchgeführt. Damit ergibt sich nun folgende Darstellung der Korrelatoren:

$$\langle \Omega | \mathcal{T}[\hat{\varphi}(x_1) \cdots \hat{\varphi}(x_n)] | \Omega \rangle := \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) e^{-S[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}} \equiv \langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle.$$

Der Nenner in dieser Definition dient lediglich zu Normierungszwecken, damit $\langle \mathbb{1} \rangle = 1$ gilt.

Die Korrelationsfunktionen können in einem erzeugenden Funktional $Z[J]$ zusammengefasst werden, indem die Wirkung um einen Quellterm $\int J\varphi \equiv \int d^d x J(x)\varphi(x)$ verschoben wird.

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int J\varphi} \equiv e^{W[J]}.$$

Die entsprechenden n -Punkt Korrelatoren erhält man nun durch n -fache funktionale Differentiation bezüglich der äußeren Quelle und Auswertung des entstehenden Ausdrucks an der Stelle $J = 0$:

$$\langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0}.$$

Darüber hinaus lässt sich mit dem Schwingerfunktional $W[J] = \ln Z[J]$ ein erzeugendes Funktional der zusammenhängenden Korrelatoren einführen. Dieses hat den Vorteil, dass es im Gegensatz zu $Z[J]$ keine faktorisierten Anteile der Erwartungswerte (wie beispielsweise $\langle \varphi(x_1) \rangle \cdots \langle \varphi(x_n) \rangle$) mehr enthält, welche keine neuen physikalischen Informationen liefern. Dass das Schwingerfunktional tatsächlich nur zusammenhängende Korrelationsfunktionen erzeugt, soll hier nur kurz anhand der 2-Punktfunktion verdeutlicht werden:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} &= \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left[\frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_2) e^{-S[\varphi] + \int J\varphi} \right]_{J=0} \\ &= \left[\frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \varphi(x_2) e^{-S[\varphi] + \int J\varphi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{Z[J]^2} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_2) e^{-S[\varphi] + \int J\varphi} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) e^{-S[\varphi] + \int J\varphi} \right]_{J=0} \\ &= \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle - \langle \varphi(x_1) \rangle \langle \varphi(x_2) \rangle \\ &=: \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_{\text{con}}. \end{aligned}$$

Analog lässt sich diese Rechnung für höhere n -Punkt Funktionen ($n \geq 3$) durchführen, wobei die zusätzlich entstehenden Terme die nicht zusammenhängenden Anteile des Korrelators $\langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle$ eliminieren. Damit gilt:

$$\langle \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \rangle_{\text{con}} = \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0}.$$

Da das Schwingerfunktional $W[J]$ nur zusammenhängende Korrelatoren erzeugt, wird die physikalische Information der Theorie in gewissem Sinne effizienter kodiert als im erzeugenden Funktional $Z[J]$. Gelingt es für eine bestimmte Theorie die Funktionale $Z[J]$ oder $W[J]$ zu berechnen, kann die Theorie als gelöst betrachtet werden, da dann alle Korrelatoren formal bekannt sind.

Eine weitere sehr elegante Art physikalisch relevante Informationen zu beschreiben, stellt die effektive Wirkung Γ dar. Hierfür wird zunächst ein klassisches Feld $\phi(x)$ eingeführt,

$$\phi(x) := \langle \varphi(x) \rangle_J = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)},$$

welches der Vakuumerwartungswert des Feldoperators $\hat{\varphi}(x)$ unter Anwesenheit einer äußeren Quelle ist. Das klassische Feld ergibt sich damit als erste funktionale Ableitung des Schwingerfunktional nach der äußeren Quelle $J(x)$. Analog zu dem Übergang zwischen Lagrange- und Hamiltonmechanik oder zwischen den einzelnen thermodynamischen Potentialen untereinander lässt sich nun mittels einer Legendre-Transformation die effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$ aus dem Schwingerfunktional konstruieren.

$$\Gamma[\phi] = -W[J] + \int J\phi,$$

wobei die äußere Quelle ein Funktional des klassischen Feldes $J = J[\phi]$ ist. Die Konstruktion der effektiven Wirkung als Legendre-Transformation garantiert dabei, dass das effektive Potential, welches später noch untersucht wird, konvex ist.

Die physikalische Bedeutung der effektiven Wirkung wird deutlich, wenn man deren erste Funktionalableitung untersucht.

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = - \int \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J}}_{\phi} \frac{\delta J}{\delta \phi(x)} + \int \frac{\delta J}{\delta \phi(x)} \phi + J(x) = J(x). \quad (2.1)$$

Gl.(2.1) kann nun als Quantenbewegungsgleichung des Felderwartungswertes in Anwesenheit einer äußeren Quelle verstanden werden, die alle Quantenfluktuationen berücksichtigt. Für verschwindendes $J(x)$ erhält man so die Dynamik des Vakuumerwartungswertes nachdem alle Quantenfluktuationen ausintegriert wurden.¹

Eine Bestimmungsgleichung der effektiven Wirkung kann aus dem erzeugenden Funktional $Z[J]$ konstruiert werden.

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int J\varphi} = e^{W[J]} = e^{-\Gamma[\phi] + \int J\phi} \Rightarrow e^{-\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int J(\varphi - \phi)}.$$

Nach einer konstanten Verschiebung um das klassische Feld $\varphi \rightarrow \varphi + \phi$, welche das Maß $\mathcal{D}\varphi$ invariant lässt, und dem Einsetzen der Quantenbewegungsgleichung (2.1) für $J(x)$, erhält man eine funktionale Integro-Differentialgleichung für die effektive Wirkung $\Gamma[\phi]$.

$$e^{-\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi + \phi] + \int J\varphi} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi + \phi] + \int \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} \varphi}.$$

Eine störungstheoretische Bestimmungsgleichung der effektiven Wirkung erhält man, indem eine Entwicklung der Wirkung um verschwindende mikroskopische Felder vorgenommen wird. Beschränkt man sich auf eine 1-loop Entwicklung, kann der Term $\int (\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} - \frac{\delta S}{\delta \varphi}[\phi])\varphi$ vernachlässigt werden, da dieser von höherer Ordnung ist.² Das zu lösende Integral

$$e^{-\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\phi] - \int \varphi \frac{\delta S}{\delta \phi} \varphi - \dots}$$

¹Analog zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen, wenn man die klassische Wirkung nach den Feldern variiert, $\frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi} = 0$

²Auf tree-level verschwindet $\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} - \frac{\delta S}{\delta \varphi}[\phi]$, so dass $(\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} - \frac{\delta S}{\delta \varphi}[\phi])\varphi$ erst zu höheren Schleifenentwicklungen beiträgt.

ist nun vom Gaußschen Typ, so dass für die störungstheoretische Berechnung der effektiven Wirkung auf 1-loop Niveau die folgende Gleichung angegeben werden kann:

$$\Gamma^{1l}[\phi] = S[\phi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln S^{(2)}[\phi]. \quad (2.2)$$

2.2 Elemente der funktionalen Renormierungsgruppe

2.2.1 Wilsonscher Zugang

Beginnt man für eine gegebene Theorie die Korrelationsfunktionen zu berechnen, wird man im Allgemeinen feststellen, dass diese divergieren, sobald Quantenkorrekturen berücksichtigt werden. Dies liegt daran, dass die mikroskopischen Fluktuationen, welche die klassische Wirkung $S[\varphi]$ generiert, auf beliebig hohen Impulsskalen stattfinden können. Um dieses Problem zu umgehen, bedient man sich der Regularisierung und Renormierung der Theorie. Durch die Regularisierung werden künstlich weitere Parameter so in die Theorie eingebaut, dass die Impulsintegrale endlich bleiben. Die ursprüngliche Divergenz des Integrals tritt wieder auf, wenn entsprechende Grenzwerte der neu eingeführten Parameter betrachtet werden. Eine in der Regel unerwünschte Konsequenz der Regularisierung ist, dass nun alle berechneten Größen von diesen unphysikalischen Parametern abhängen, wodurch die Renormierung zum Einsatz kommt. Diese liefert eine Vorschrift, die ursprüngliche Theorie zu redefinieren, um die Abhängigkeit von den Zusatzparametern durch beispielsweise entsprechende Anfangs- oder Randbedingungen der Theorie zu eliminieren, ohne die ursprünglichen Divergenzen zurückzuerhalten.

Eine intuitive Variante die Impulsintegrale zu regularisieren, stellt die Einführung eines endlichen cutoff Λ als obere Grenze der Impulsraumintegrale dar. Kann durch die Renormierungsprozedur formal der Grenzwert $\Lambda \rightarrow \infty$ gebildet werden, so dass die Korrelatoren endlich bleiben, liegt eine fundamentale Quantenfeldtheorie vor. Alternativ kann der Ansatz verfolgt werden, bereits zu Beginn lediglich eine effektive Theorie zu konstruieren, welche nur bis zu einer bestimmten Energieskala Λ gültig ist. Für Energien die größer als der cutoff sind, versagt das Modell, so dass diese Fluktuationen bei der Konstruktion der effektiven Wirkung nicht mehr berücksichtigt werden. Ein prominentes Beispiel für eine effektive Theorie ist das Standardmodell. Spätestens ab der Planck-Skala (10^{19} GeV) treten gravitative Effekte auf, die im Standardmodell nicht berücksichtigt werden, so dass es als effektive Niederenergie Theorie verstanden werden kann.

Theorien mit einem natürlichen (oder künstlichen) cutoff Λ können durch ein UV-regularisiertes erzeugendes Funktional beschrieben werden.

$$Z[J] = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int J\varphi}.$$

Das Funktionalintegral berücksichtigt hierbei nur Impulse bis zu einer oberen Impulsskala Λ ,

$$\int_{\Lambda} \mathcal{D}\varphi = \int \prod_{|k| < \Lambda} d\varphi(k).$$

Wilsons Grundgedanke war es nun, nicht alle Fluktuationen auf einmal auszuintegrieren, wie dies bei der Berechnung der effektiven Wirkung geschieht, sondern dies schrittweise durchzuführen. Zunächst wird über eine Impulsschale der Impulsraumkugel der Dicke $\delta\Lambda$

von Λ nach $\Lambda - \delta\Lambda$ integriert, wobei ein modifiziertes Funktionalintegralmaß entsteht, welches nur Impulse bis zur Skala $\Lambda - \delta\Lambda$ berücksichtigt. Da das erzeugende Funktional $Z[J]$ unter so einer Transformation invariant bleiben sollte (es findet keine Änderung der Physik statt), muss die Ausintegration der Impulsschale durch eine Änderung der Wirkung kompensiert werden. Formal stellt sich die Situation wie folgt dar:

$$Z[J] = \int_{\Lambda - \delta\Lambda} \mathcal{D}\bar{\varphi} \int_{\Lambda - \delta\Lambda < p < \Lambda} \mathcal{D}\tilde{\varphi} e^{-S[\bar{\varphi}, \tilde{\varphi}] + \int J(\bar{\varphi} + \tilde{\varphi})} =: \int_{\Lambda - \delta\Lambda} \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{-S_{\text{eff}}[\bar{\varphi}] + \int J_{\text{eff}}\bar{\varphi}}.$$

Die Wirkung S_{eff} der effektiven Theorie, die auf der Skala $\Lambda - \delta\Lambda$ gültig ist, enthält die Quantenfluktuationen der UV-Moden $\tilde{\varphi}$ und bestimmt die Dynamik der übrigen Moden $\bar{\varphi}$, welche nicht in der ausintegrierten Impulsschale sitzen ($p < \Lambda - \delta\Lambda$). Durch die Renormierungsgruppentransformation werden neben der Änderung der ursprünglichen Parameter der Theorie zusätzlich beliebige höhere Operatoren in der gemittelten effektiven Wirkung S_{eff} generiert.

Durch eine Iteration dieser Integrationen über infinitesimale Impulsschalen entsteht ein glatter Fluss der Wirkung im Theorieraum von der mikroskopischen Wirkung $S[\varphi]$ bei der Skala $k = \Lambda$ hin zu der effektiven Wirkung $\Gamma[\phi]$ bei $k = 0$. Eine wichtige Konsequenz der schalenweisen Integration ist, dass Fluktuationen auf verschiedenen Skalen unterschiedlich behandelt werden, da die korrespondierenden Wirkungen, welche den Einfluss der Fluktuationen auf die Physik beschreiben, im Allgemeinen unterschiedlich auf diesen Skalen sind. Dies hat zur Folge, dass vorhergehende Fluktuationen auf großen Impulsskalen die nachfolgenden auf einer geringeren Impulsskala beeinflussen. Dadurch stellt dieser Zugang eine bedeutende Verbesserung zu der perturbativen Variante dar, die effektive Wirkung und damit die IR-Physik zu bestimmen, da in der störungstheoretischen Behandlung die Fluktuationen auf allen Skalen gleich behandelt werden, in dem sie nur durch die mikroskopische Wirkung beschrieben werden. Eine mathematisch exakte Behandlung der schalenweisen Ausintegration der Fluktuationen beziehungsweise des Flusses der Wirkung im Theorieraum wird durch die Wetterich-Gleichung beschrieben.

2.2.2 Wetterich-Gleichung

In vielen Übersichtsarbeiten zur funktionalen Renormierungsgruppe lassen sich ausführliche Herleitungen zur Wetterich-Gleichung als Flussgleichung einer interpolierenden effektiven Wirkung für den Fall skalarer Theorien finden. Als Beispiele seien hier [21] und [20] genannt. Entsprechende Verallgemeinerungen auf Theorien mit Fermionen oder Eichfeldern sind durch angepasste Formalismen möglich. Da im Folgenden ein Higgs-Yukawa-Modell untersucht werden soll, wird die hier vorgestellte Herleitung dem Feldinhalt der Theorie angepasst, welcher aus einem reellen Skalarfeld sowie einem Dirac-Fermion besteht. Dafür wird zunächst ein Vektor der zu berücksichtigenden Felder sowie eine entsprechende äußere Quelle eingeführt:

$$\Psi(p) = \begin{pmatrix} \varphi(p) \\ \zeta(p) \\ \bar{\zeta}^T(-p) \end{pmatrix}, \quad \Psi^T(-p) = (\varphi(-p), \zeta^T(-p), \bar{\zeta}(p)), \quad J(p) = \begin{pmatrix} j(p) \\ \bar{\eta}^T(-p) \\ \eta(p) \end{pmatrix}.$$

Weiter wird als abkürzende Schreibweise $\mathcal{D}\Psi \equiv \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\bar{\zeta} \mathcal{D}\zeta$ genutzt.

Im Wesentlichen gilt es nun eine effektive Mittelwertwirkung Γ_k zu konstruieren, wobei der Parameter k die jeweilige Impulsschale indiziert bis zu der die Fluktuationen ausintegriert werden. Γ_k stellt damit die Wirkung einer effektiven Theorie dar, die auf einer

Energieskala k gültig ist. Diese soll als interpolierende Wirkung in dem Sinne dienen, dass man im Grenzfall $k \rightarrow 0$ die effektive Wirkung erhält, während für $k \rightarrow \Lambda$ die mikroskopische Wirkung reproduziert werden soll.

$$\lim_{k \rightarrow \Lambda} \Gamma_k = S, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k = \Gamma.$$

Um dies zu realisieren wird zunächst ein IR-regularisiertes erzeugendes Funktional,

$$e^{W_k[J]} \equiv Z_k[J] = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\Psi e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J^T \Psi},$$

mit einem Regulatorterm $\Delta S_k[\varphi]$ eingeführt. Dieser ist quadratisch in den Feldern und kann als impulsabhängiger Massenterm betrachtet werden.

$$\begin{aligned} \Delta S_k[\varphi, \zeta, \bar{\zeta}] &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \varphi(-q) R_{B,k}(q) \varphi(q) + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \bar{\zeta}(q) R_{F,k}(q) \zeta(q) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \Psi^T(-q) R_k(q) \Psi(q), \end{aligned}$$

mit einer matrixwertigen Regulatorfunktion

$$R_k(q) = \begin{pmatrix} R_{B,k}(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{F,k}^T(-q) \\ 0 & R_{F,k}(q) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Die Einführung des Regulatorterms ist der wesentliche Bestandteil zur Konstruktion einer effektiven Mittelwertwirkung, welche alle Fluktuationen mit $p \geq k$ enthält, während diejenigen Impulse, die kleiner als die Skala k sind, unterdrückt werden. An die Regulatorfunktion werden hierbei die folgenden Bedingungen gestellt:

$$\lim_{q^2/k^2 \rightarrow 0} R_k(q) > 0, \quad (2.4)$$

$$\lim_{k^2/q^2 \rightarrow 0} R_k(q) = 0, \quad (2.5)$$

$$\lim_{k^2 \rightarrow \Lambda^2 \rightarrow \infty} R_k(q) \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Gl.(2.4) implementiert die IR-Regularisierung. Da der Regulatorterm ΔS_k quadratisch in den Feldern ist, erhalten alle Fouriermoden der Felder φ , $\bar{\zeta}$ und ζ mit Impulsen die kleiner als die Skala k sind eine effektive Masse ($\sim k$). Dieser zusätzliche Massenterm wirkt nun effektiv als IR-cut-off für kleine Impulsmoden. Bedingung (2.5) sorgt für das Verschwinden des zusätzlichen Regulatorterms im Infraroten, wenn alle Fluktuationen ausintegriert sind. Eine direkte Konsequenz hieraus ist, dass man in diesem Grenzwert das gewöhnliche erzeugende Funktional zurückerhält, $Z_{k \rightarrow 0} = Z$, und damit auch die effektive Wirkung, $\Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma$. Die letzte der drei Bedingungen (Gl.(2.6)) sichert das Zurückerhalten der mikroskopischen Wirkung im Ultraviolett. Dies ist durch eine Sattelpunktsapproximation möglich, die in diesem Limes durchführbar ist [20].

Nachdem sichergestellt ist, dass die erfolgte Konstruktion der erzeugenden Funktionale die richtigen Limes widerspiegelt, sollen nun die Trajektorien zwischen S und Γ untersucht werden. Dafür wird zunächst die Skalenabhängigkeit des IR-regularisierten Schwingerfunktionals betrachtet, wobei die dimensionslose Skalenableitung ∂_t verwendet wird,

$$t = \ln \frac{k}{\Lambda}, \quad \partial_t = k \frac{d}{dk},$$

mit einer beliebigen Referenzskala $\tilde{\Lambda}$, für die im Folgenden der cutoff der Theorie gewählt wird, $\tilde{\Lambda} = \Lambda$. Die Ableitung des modifizierten Schwingerfunktionals ergibt damit:

$$\begin{aligned}
\partial_t W_k[J] &= \frac{1}{Z_k[J]} \partial_t Z_k[J] \\
&= -\frac{1}{Z_k[J]} \int_{\Lambda} \mathcal{D}\Psi (\partial_t \Delta S_k) e^{-S - \Delta S_k + \int J^T \Psi} + \int d^d x (\partial_t J^T(x)) \frac{\overrightarrow{\delta} W_k[J]}{\delta J^T(x)} \\
&= -\frac{1}{2} \int_p (\partial_t R_k(p))_{ab} \frac{1}{Z_k[J]} \int_{\Lambda} \mathcal{D}\Psi \Psi_a^T(-p) \Psi_b(p) e^{-S - \Delta S_k + \int J^T \Psi} \\
&\quad + \int d^d x (\partial_t J^T(x)) \langle \Psi(x) \rangle_J \\
&= -\frac{1}{2} \int_p (\partial_t R_k(p))_{ab} \underbrace{\langle \Psi_a^T(-p) \Psi_b(p) \rangle_J}_{\langle \Psi_a^T \Psi_b \rangle_{J_{\text{con}}} - \langle \Psi_a^T \rangle_J \langle \Psi_b \rangle_J} + \int d^d x (\partial_t J^T(x)) \langle \Psi(x) \rangle_J \\
&= -\frac{1}{2} \int_p (\partial_t R_k(p))_{ab} G_{kab}(p, p) + \Delta S_k[\langle \Psi(p) \rangle_J] + \int (\partial_t J^T) \langle \Psi \rangle_J, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

wobei a und b über alle inneren Indizes laufen und die Abkürzung $\int_p \equiv \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$ genutzt wurde.³ Darüber hinaus wurde mit $G_k(p, q)$ der volle, zusammenhängende 2-Punkt Korrelator zur Skala k eingeführt.

$$G_{kab}(p, q) = \langle \Psi_a^T(-p) \Psi_b(q) \rangle_{J_{\text{con}}} - \langle \Psi_a^T(-p) \rangle_J \langle \Psi_b(q) \rangle_J.$$

Dies motiviert die effektive Mittelwertwirkung als eine um den Regulatorterm modifizierte Legendre-Transformation des IR-regularisierten Schwingerfunktionals einzuführen.

$$\Gamma_k[\Phi] := \sup_J \left\{ -W_k[J] + \int J^T \Phi \right\} - \Delta S_k[\Phi].$$

Zu jedem beliebigen $\Phi(x)$ existiert nun ein $J = J_{\text{sup}}$, welches ein Funktional des Feldes Φ ist, so dass das Supremum angenommen wird. Da die Funktionale innerhalb des Supremums differenzierbar bezüglich J sind, lässt sich dieser Ausdruck leicht maximieren. An der Stelle $J = J_{\text{sup}}$ gilt hierbei:

$$\Phi(x) = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J^T(x)} = \langle \Psi(x) \rangle_J \equiv \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \\ \bar{\psi}^T(x) \end{pmatrix}.$$

Damit kann die zur äußeren Quelle $J(x)$ konjugierte Variable $\Phi(x)$ auch in diesem modifizierten Fall wieder als makroskopisches Feld interpretiert werden, welches der Erwartungswert des mikroskopischen Feldes unter Anwesenheit einer äußeren Quelle ist. Aus der durchgeführten Konstruktion der effektiven Mittelwertwirkung folgt notwendigerweise, dass der Quellterm, für den das Supremum angenommen wird, skalenabhängig ist, analog zu den bisherigen Betrachtungen. Für die folgenden Betrachtungen soll nun immer $J = J_{\text{sup}}$ gelten. Die effektive Mittelwertwirkung hat also die Gestalt

$$\Gamma_k[\Phi] = -W_k[J] + \int J^T \Phi - \Delta S_k[\Phi], \quad \text{mit } J = J_k[\Phi].$$

³Diese sollte nicht mit der Notation des Funktionalintegrals $\int_{\Lambda} \mathcal{D}\phi$ verwechselt werden.

Im Gegensatz zu dem sich nicht verändernden klassischen Feld Φ erhält die Quantenbewegungsgleichung eine Modifikation durch den Regulator.

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{\delta}\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi^T(x)} &= -\int \frac{\delta J^T}{\delta\Phi(x)} \underbrace{\frac{\delta W_k[J]}{\delta J^T}}_{\Phi} + \int \frac{\delta J^T}{\delta\Phi(x)} \Phi + (-1)^{2s} \int \left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\Phi^T(x)} \Phi^T \right) J - \frac{\overrightarrow{\delta}\Delta S_k[\Phi]}{\delta\Phi^T(x)} \\ &= (-1)^{2s} J(x) - (R_k\Phi)(x),\end{aligned}$$

beziehungsweise im Impulsraum:

$$\frac{\overrightarrow{\delta}\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi^T(-p)} = (-1)^s J(p) - R_k(p)\Phi(p).$$

Der Faktor $(-1)^s$ ergibt sich aus der Antivertauschbarkeit der großmannwertigen Felder. Dieser entsteht also nur im fermionischen Sektor ($s = 1$), während bei der Vertauschung von zwei bosonischen Feldern oder eines bosonischen Feldes mit einem fermionischen Feld kein negatives Vorzeichen auftritt ($s = 0$). Um die Flussgleichung nun endgültig abzuleiten, wird es notwendig sein, eine Relation zwischen dem vollen zusammenhängenden Propagator, der in der Skalenableitung des Schwingerfunctionals auftrat (Gl.(2.7)), und der effektiven Mittelwertwirkung zu finden. Dazu wird die zweite Ableitung der effektiven Mittelwertwirkung untersucht:

$$\Gamma_k^{(2)}(p, q) := \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\Phi^T(-p)} \Gamma[\Phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(q)} = (-1)^s \frac{J(p)}{\delta\Phi(q)} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(q)} - (2\pi)^d \delta(p - q) R_k(p). \quad (2.8)$$

Wobei die abkürzende Notation $\Gamma_k^{(2)}$ eingeführt wurde, die im Folgenden als Fluktuationmatrix bezeichnet wird. Mit Gl.(2.8) kann nun die folgende wichtige Identität gewonnen werden:

$$\delta_{p,q} = \frac{\delta J(p)}{\delta J(q)} = \int_{p'} \frac{J(p)}{\delta\Phi(p')} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta J(q)} \Phi(p') \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta J(q)} = (-1)^s \int_{p'} \left(\Gamma^{(2)}(p, p') + \delta_{p,p'} R_k(p) \right) G_k(p', q),$$

mit $\delta_{p,q} \equiv (2\pi)^d \delta(p - q)$. Der Operator $(-1)^s (\Gamma^{(2)} + R_k)(p, q)$ ergibt sich damit als Inverses des vollen Propagators $G_k(p, q)$, wobei der Regulator R_k in dieser Notation als diagonal in den „Impulsindizes“ zu verstehen ist, $R_k(p, q) = \delta_{p,q} R_k(p)$.

$$\mathbb{1} = (-1)^s (\Gamma_k^{(2)} + R_k) G_k. \quad (2.9)$$

Durch die Relationen (2.7) und (2.9) kann nun die Skalenableitung der effektiven Mittelwertwirkung durch den Regulator und die effektive Mittelwertwirkung selbst ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_k &= -\partial_t W_k[J] + \int (\partial_t J^T) \Phi - \partial_t \Delta S_k[\Phi] \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \frac{1}{2} \int_p \int_q \text{tr} \left[(\partial_t R_k(p)) \delta_{p,q} G_k(p, q) \right] \\ &\stackrel{(2.9)}{=} \frac{-1^s}{2} \int_p \text{tr} \left[\partial_t R_k(p) (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}(p, p) \right].\end{aligned}$$

Mit diesem Resultat lässt sich nun die Wetterich-Gleichung in kompakter Operatornotation angeben:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left[\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} \right]. \quad (2.10)$$

Die sogenannte Superspur wird hierbei über alle auftretenden Feld- und inneren Indizes gebildet. Weiter enthält sie einen Faktor von -1 im fermionischen Sektor, der sich durch die Antikommutatorrelation der Graßmannzahlen ergeben hat, sowie eine Integration über den freien Impulsparameter. Die Flussgleichung (2.10) stellt eine funktionale Differentialgleichung dar, um die effektive Mittelwertwirkung zu bestimmen, deren Eigenschaften im Folgenden kurz diskutiert werden.

Der Regulator garantiert in der Flussgleichung zwei wichtige Punkte. Zum einen sichert der R_k -Anteil des Nenners per Konstruktion die IR-Regularisierung. Die Skalenableitung des Regulators im Zähler hingegen sichert die UV-Regularisierung, da diese um eine Impulsschale mit $p^2 \approx k^2$ gepeakt ist und für $p^2 > k^2$ stark abfällt. Dies spiegelt die Wilsonsche Idee wider, Fluktuationen über einzelne Impulsschalen auszuintegrieren. Die Lösung der Flussgleichung stellt eine RG-Trajektorie im Raum aller möglichen Theorien dar. Dieser ist gegeben durch alle potentiellen Wirkungen, die aus allen erdenklichen invarianten Feldoperatoren erzeugt werden können. Dabei sind Anfangs- und Endpunkt der Trajektorie festgelegt. Als Startwirkung dient die mikroskopische Wirkung S , während der Endpunkt der Trajektorie durch die volle effektive Wirkung Γ gegeben ist. Die RG-Trajektorie zwischen diesen beiden Wirkungen ist jedoch nicht eindeutig festgelegt, da sie abhängig vom verwendeten Regulator ist, welcher abgesehen von den Bedingungen (2.4)-(2.6) beliebig gewählt werden kann. Des Weiteren besitzt die Flussgleichung eine 1-loop Struktur analog zur perturbativen Berechnung der effektiven Wirkung. Dennoch ist sie eine exakte Gleichung, da der volle Propagator innerhalb des 1-loop Terms auftritt im Gegensatz zu $S^{(2)}$ in der störungstheoretischen Beschreibung der effektiven Wirkung, Gl.(2.2).

Um die Flussgleichung zu lösen, können verschiedene Ansätze für die effektive Mittelwertwirkung vorgenommen werden, vgl. [20]. Im Folgenden werden hier Ableitungsentwicklungen genutzt, die beispielsweise für skalare Theorien von der Form

$$\Gamma_k = \int d^d x \left(U_k(\phi) + \frac{Z_k(\phi)}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \mathcal{O}(\partial^4) \right)$$

sind. In praktischen Rechnungen wird es kaum möglich sein, unendlich viele Operatoren zu berücksichtigen. Daher werden Trunkierungen dieser Entwicklungen nötig sein, in dem nur ein endlicher Satz von Operatoren betrachtet wird. Es gelingt damit lediglich die eigentliche Lösung zu approximieren, so dass diese nicht mehr als exakt angesehen werden kann. Ein Problem, welches in diesem Zusammenhang auftritt, wird dadurch bedingt, dass unterschiedliche Regulatoren zu unterschiedlichen RG-Trajektorien führen. Durch die Trunkierungsfehler wird nun für den Grenzfall $k \rightarrow 0$ nicht mehr die effektive Wirkung erreicht, sondern ein Punkt im Theorieraum dessen Abstand von der vollen effektiven Wirkung neben den Trunkierungsfehlern auch von dem verwendeten Regulator abhängt. Die IR-Physik wird somit von dem Regulatorterm abhängig. Um die exakte Lösung möglichst gut zu approximieren, ist es für das jeweilige Modell entscheidend, die für die Problemstellung wichtigen Operatoren in der Trunkierung zu berücksichtigen. Die Güte der Trunkierung kann getestet werden, indem zusätzliche Operatoren in dieser berücksichtigt werden.

2.3 Higgs-Mechanismus

Dem Higgs-Mechanismus liegt das Konzept der spontanen Symmetriebrechung zu Grunde. Ein simples Beispiel um den Effekt zu verstehen, bietet der Lagrangian eines reellen Skalarfeldes mit einem \mathbb{Z}_2 -symmetrischen ϕ^4 -Potential:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{24}\phi^4 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + U(\phi).$$

Die Form des quartischen Potentials ist abhängig von den Parametern m^2 und λ . Damit ein stabiles Vakuum existiert, sollte das Potential $U(\phi)$ von unten gebunden sein. Dies impliziert, dass $\lambda > 0$ gelten muss. Ob der Vakuumzustand der Theorie die zugrunde liegende Symmetrie der Lagrangedichte widerspiegelt, hängt von dem Parameter m^2 ab. Für $m^2 > 0$ besitzt das Potential lediglich ein Minimum bei $v = 0$ (mit $U'(v) = 0$), wodurch der Vakuumzustand ebenfalls die Symmetrie der Wirkung aufweist. Im Falle $m^2 < 0$ existieren allerdings zwei gleichberechtigte reelle Minima des Potentials bei

$$\phi_{\min} = \pm v = \pm\sqrt{-\frac{6m^2}{\lambda}}, \quad m^2 < 0.$$

Je nach Feldkonfiguration wird das System eines der beiden Minima als Grundzustand auswählen, beziehungsweise, falls sich das System in dem instabilen Maximum bei $\phi = 0$ befinden sollte, spontan in eines der beiden Minima übergehen. Dadurch liegt allerdings die ursprüngliche \mathbb{Z}_2 -Symmetrie nicht mehr vor, die aus dem Lagrangian resultiert. Man spricht daher von einer spontan gebrochenen Symmetrie. Anschaulich ist die Situation in Abb.[2.1] dargestellt. Ob eine Theorie spontan gebrochen ist oder nicht, lässt sich damit in unserem Fall auf die Untersuchung des Vakuumerwartungswertes v zurückführen. Verschwindet dieser nicht, liegt ein spontaner Symmetriebruch vor.

In einem nächsten Schritt werden nun zusätzlich Fermionen in die Theorie eingebaut, die mit dem Skalarfeld über eine Yukawa-Wechselwirkung mit Kopplungskonstante h interagieren. Nutzt man nun aus, dass sich das Higgsfeld in einen fluktuierenden Anteil und den Vakuumerwartungswert aufspalten lässt,⁴ $\phi(x) = v + \chi(x)$ mit $\langle\chi(x)\rangle = 0$, ergibt sich:

$$h\phi\bar{\psi}\psi = \underbrace{hv}_{m}\bar{\psi}\psi + h\chi\bar{\psi}\psi.$$

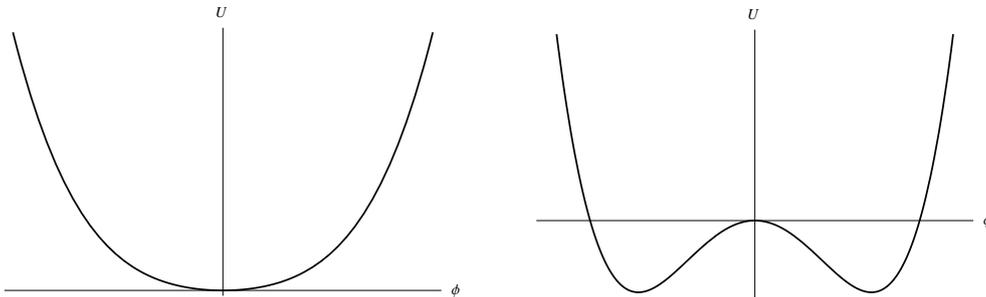


Abbildung 2.1: Links ist der qualitative Verlauf eines Potentials $U(\phi)$ im Falle der symmetrischen Phase dargestellt, während rechts eine spontane Symmetriebrechung vorliegt.

⁴Es wird o.B.d.A. der positive Wert als Grundzustand gewählt.

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung kann hierbei als Massenterm für das Fermion interpretiert werden. Dieser Massenterm setzt sich aus dem Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes und der für das Fermion spezifischen Yukawa-Kopplung zusammen, $m = hv$. Die Fermionen in der Theorie erhalten also dann eine Masse, wenn sich das skalare Feld in der spontan gebrochenen Phase befindet und damit der Vakuumerwartungswert nicht verschwindet.

Der Higgs-Mechanismus des Standardmodells ist wesentlich komplizierter und eigentlich aus einem anderen Grund eingeführt worden. Im Standardmodell werden die Wechselwirkungen durch Eichtheorien beschrieben. In diesen dürfen keine Massenterme auftreten, da diese die Eichinvarianz der Theorie verletzen würden. Dadurch lassen sich mit diesem Modell nur die QED und die QCD mit ihren masselosen Austauschpartikeln dem Photon und den Gluonen sinnvoll beschreiben. Problematisch wird dieses Konstrukt in der schwachen Wechselwirkung. Die drei Eichbosonen dieser Theorie besitzen eine Masse, die mit $m_{W^\pm} = 80 \text{ GeV}$ und $m_Z = 91 \text{ GeV}$ auf der Skala der Elementarteilchen zudem recht groß sind. Den Ausweg aus diesem Problem bot der Higgs-Mechanismus, [1]-[4]. Das Higgsfeld wird im Standardmodell auf Grund der $SU(2)$ Eichgruppe der schwachen Wechselwirkung als ein 2-komponentiges komplexes Dublett (4 physikalische Freiheitsgrade) eingeführt, welches unter kontinuierlichen Symmetrietransformationen invariant bleibt. Eine spontane Symmetriebrechung führt im Falle einer kontinuierlichen globalen Symmetrie in der Theorie nach dem Goldstone Theorem zu masselosen Goldstone-Bosonen. Im Falle eines komplexen Higgs-Dubletts entstehen dabei ein massives Higgs-Boson sowie drei masselose Goldstone-Bosonen. Auf Grund der schwachen Wechselwirkung liegt jedoch eine kontinuierliche lokale Eichsymmetrie vor, wodurch das Goldstone Theorem keine Anwendung findet. Durch den Higgs-Mechanismus werden in diesem Fall die sonst als Goldstone-Bosonen auftretenden drei Freiheitsgrade der Theorie zu jeweils einem longitudinalen Freiheitsgrad der drei Eichfelder und diese dadurch massiv. Auf der Ebene des Lagrangians entstehen Terme der Form $g'^2 v^2 B_{a\mu} B_a^\mu$, welche die Struktur eines Massenterms für die Eichbosonen B_a^μ aufweisen⁵. Die Massen der drei Eichbosonen sind in diesem Fall gleich. Führt man die Rechnung für die eigentliche Gruppenstruktur der elektroschwachen Wechselwirkung durch, welche eine $SU(2) \times U(1)$ ist, erhält man nach geeigneter Rotation der Felder schließlich ein masseloses Photon sowie 3 massive Eichbosonen, von denen eines schwerer als die beiden anderen ist.

Eine weitere praktische Eigenschaft des skalaren Dubletts ist, dass es über Yukawa-Kopplungen ebenfalls mit den Fermionen des Standardmodells wechselwirken kann, wodurch diese ebenfalls im spontan gebrochenen Regime eine Masse erhalten. Dies ist von Vorteil, da nur die linkshändigen Fermionen unter der schwachen Wechselwirkung geladen sind und mit Hilfe der Yukawa-Kopplung eichinvariante Terme konstruiert werden können. Im derzeitigen Standardmodell werden damit alle auftretenden Massen durch das Higgsfeld erzeugt.

2.4 Higgs-Yukawa-Modell

In diesem Abschnitt soll das bereits erwähnte Higgs-Yukawa-Modell eingeführt und motiviert werden, welches genutzt wird, um den Higgssektor des Standardmodells zu imitieren. Das Standardmodell ist mit seinem Feldinhalt und den vorhandenen Wechselwirkungen äußerst vielschichtig. Das komplexe Higgsdublett koppelt neben Selbstwechselwirkungstermen sowohl an die elektroschwachen Eichbosonen mit Eichkopplungen g ($U(1)$) und g'

⁵ g' ist hier die Eichkopplung.

($SU(2)$), als auch an die Fermionen der Theorie über Yukawa-Kopplungen h_f . Das wesentliche Interesse dieser Arbeit liegt hierbei in den Eigenschaften des effektiven skalaren Potentials beziehungsweise der daraus resultierenden Higgsmasse. Das zu betrachtende Higgs-Yukawa-Modell besteht im Gegensatz zum Standardmodell lediglich aus einem ein-komponentigen reellen Skalarfeld (dem Higgsboson) sowie einem Dirac-Fermion. Beide Felder sind analog zum Standardmodell über eine Yukawa-Wechselwirkung gekoppelt, deren Wert dem des Top-Quark entspricht, da dieses am stärksten von allen Fermionen an das Higgsboson koppelt. Darüber hinaus wird eine beliebige Selbstwechselwirkung des skalaren Potentials berücksichtigt. Damit das Higgs-Yukawa-Modell eine für die folgenden Zwecke sinnvolle Vereinfachung des Standardmodell-Higgssektors liefert, sollten zwei Bedingungen erfüllt sein. Zum einen sollten die Einflüsse der anderen Sektoren auf den skalaren Sektor durch das Top-Quark dominiert werden und zum anderen sollte es möglich sein, den skalaren Sektor auf ein einkomponentiges reelles Feld mit diskreter \mathbb{Z}_2 Symmetrie zu reduzieren. Dabei folgt die nun angeführte Argumentationsstruktur [14].

Die störungstheoretische Bestimmung des effektiven Higgs-Potentials wurde bereits intensiv untersucht [8]-[10]. Das 1-loop RG-verbesserte Potential hat in der 't Hooft-Landau Eichung und dem $\overline{\text{MS}}$ -Schema die Struktur:

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}} = U_0 + \frac{1}{64\pi^2} & \left((U_0'')^2 \left[\ln \frac{(U_0'')^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right] + 3 \left(\frac{\lambda}{2} \phi^2 - m^2 \right)^2 \left[\ln \frac{\frac{\lambda}{2} \phi^2 - m^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right] \right. \\
& + \frac{3g^4 \phi^4}{8} \left[\ln \frac{g^2 \phi^2}{4\mu^2} - \frac{5}{6} \right] + \frac{3(g^2 + g'^2)^2 \phi^4}{16} \left[\ln \frac{(g^2 + g'^2) \phi^2}{4\mu^2} - \frac{5}{6} \right] \\
& \left. - 3h_t^4 \phi^4 \left[\ln \frac{h_t^2 \phi^2}{2\mu^2} - \frac{3}{2} \right] \right) + \Omega, \quad \text{mit} \quad U_0 = -\frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{24} \phi^4.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Die Konstanten m^2 und λ sind der Massenparameter sowie die quartische Selbstwechselwirkungskopplung des Higgsfeldes, während Ω die kosmologische Konstante darstellt, welche in den folgenden Betrachtungen keine Rolle spielt. Die t -Abhängigkeit aller vorhandenen Größen wurde in Gl.(2.11) aus Gründen der Übersichtlichkeit unterdrückt ($\phi = \phi(t)$, $\mu = \mu(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, ...), vgl. [9].

In Gl.(2.11) wurden bereits bis auf das Top-Quark alle anderen Fermionen vernachlässigt, da diese den skalaren Sektor kaum beeinflussen. Dies liegt daran, dass die Yukawa-Kopplungen direkt proportional zur Masse des jeweiligen Fermions sind. Da das Top-Quark mit $m_t = 173$ GeV bereits 40-mal schwerer als das zweitschwerste Fermion, das Bottom-Quark mit $m_b = 4.2$ GeV, ist, werden diese Beiträge vernachlässigt. Ebenso sind die Eichkopplungen g und g' im Infraroten gut bekannt und im Vergleich zu h_t klein, so dass auch die Beiträge der elektroschwachen Eichgruppe in Gl.(2.11) vernachlässigt werden können. Damit hängt das effektive Potential lediglich noch von den skalaren Parametern sowie der Kopplung an das Top-Quark ab. Um zu rechtfertigen, dass einzig das Top-Quark den skalaren Sektor beeinflusst, betrachten wir noch die perturbative 1-loop β -Funktion von h_t [8]:

$$\beta_{h_t} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{9}{2} h_t^3 - 8g_3^2 - \frac{9}{4} g^2 h_t - \frac{17}{12} g'^2 h_t \right).$$

Wieder können im Infraroten die Beiträge des elektroschwachen Sektors ignoriert werden, da diese im Vergleich zu h_t und der QCD-Eichkopplung g_3 vernachlässigbar sind. Erst im Bereich der GUT-Skala liegen die drei Eichkopplungen in der selben Größenordnung, so dass die g - und g' -Terme einen mit der QCD-Kopplung vergleichbaren Beitrag liefern. Im

Infraroten ergibt sich, dass g_3 den wesentlichen Beitrag zum Fluss der Yukawa-Kopplung liefert, wenn man die beiden verbleibenden Terme quantitativ vergleicht: $\frac{9}{2}h_t^3 = 1.57$, während $8g_3^2h_t = 8.34$.

Obwohl das Higgs-Dublett nicht explizit an den QCD-Sektor koppelt, hat dieser implizit über die Yukawa-Kopplung einen Einfluss auf das skalare effektive Potential. Dennoch sollte das Higgs-Yukawa-Modell in der Lage sein, die wesentlichen Eigenschaften des effektiven skalaren Potentials widerzuspiegeln, auch wenn der Einfluss des QCD-Sektors auf den Fluss der Yukawa-Kopplung ignoriert wird. Für eine ausführliche Untersuchung des Standardmodell-Higgssektors sollte dieser Effekt jedoch zwingend berücksichtigt werden.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass diese Argumentationsstruktur nur durchführbar ist, solange der elektroschwache Sektor des Standardmodells auf allen Skalen perturbativ beschreibbar ist, da diese Überlegungen von dem 1-loop Potential des skalaren Feldes ausgehen. Sollte der skalare Sektor des Standardmodells auf bestimmten Energieskalen die Voraussetzungen der Störungstheorie verletzen, kann nicht mehr sichergestellt werden, dass dieses Modell das Standardmodell akkurat wiedergibt. Dennoch lässt sich natürlich dieser Fall innerhalb des Higgs-Yukawa-Modells, welches als „Spielzeugtheorie“ fungiert, untersuchen.

Nachdem das Standardmodell somit auf den skalaren Sektor und das Top-Quark heruntergebrochen wurde, kann nun der skalare Sektor selbst vereinfacht werden. Da die elektroschwache Wechselwirkung vernachlässigt worden ist, existiert die lokale Eichinvarianz des skalaren Sektors nicht mehr. Dieser ist damit nur noch unter einer globalen Symmetrietransformation invariant, die im Falle spontaner Symmetriebrechung zu masselosen Goldstone-Bosonen führt. Diese gehören allerdings nicht zum Spektrum des Standardmodells, so dass eine Theorie gesucht ist, die diese Goldstone-Moden nicht enthält. Inspiriert durch das Standardmodell, in dem das skalare Potential unter Ausnutzung der Eichinvarianz durch eine einzelne Feldvariable beschrieben werden kann, wird der skalare Sektor durch ein reelles Skalarfeld modelliert. Dieses besitzt keine kontinuierliche Symmetrie, so dass das Problem der Goldstone-Bosonen nicht mehr auftritt. Die ursprüngliche $SU(2)$ Symmetrie wird durch eine diskrete \mathbb{Z}_2 -Symmetrie ersetzt. Dies sichert, dass nur solche Operatoren erlaubt sind, die auch im Standardmodell vorhanden sind.

Damit sind wir nun in der Lage, den skalaren Sektor des Standardmodells durch ein Higgs-Yukawa-Modell zu approximieren, welches durch die folgende mikroskopische Wirkung gegeben ist:

$$S = \int d^d x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + U(\phi^2) + i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + h\phi\bar{\psi}\psi \right).$$

Dabei hängt das Potential nur von Operatoren der Form ϕ^{2n} ($n \in \mathbb{N}$) ab, um die gewünschte \mathbb{Z}_2 -Symmetrie zu sichern.

Im Folgenden soll nun eine Analyse dieses Modells mit Hilfe der funktionalen Renormierungsgruppe erfolgen. Dabei konzentrieren wir uns vor allem auf die Form des Potentials des skalaren Feldes sowie dessen Masse.

3 Meanfield-Approximation

Beginnen wir die Untersuchungen des Higgs-Yukawa-Modells in einer Meanfield-Approximation. Der Fluss des skalaren Potentials U_k , der nur durch rein fermionische Fluktuationen in einer solchen Näherung erzeugt wird, wurde bereits in [14] betrachtet. Im Folgenden wird nun die Flussgleichung um die bosonischen Fluktuationen erweitert und das IR-Potential untersucht. In unserem Kontext soll Meanfield bedeuten, dass der Propagator, der genutzt wird um Fluktuationen auszuintegrieren, nicht skalenabhängig ist. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die effektive Wirkung unabhängig von der Skala ist, auf der man sich befindet, sondern lediglich, dass auf allen Skalen die Fluktuationen in der gleichen Art und Weise behandelt werden.

3.1 Flussgleichung des skalaren Potentials

Um die Flussgleichung des skalaren Potentials zu bestimmen, wird der klassische Propagator $\Gamma_\Lambda^{(2)}$ der Standard-Störungstheorie genutzt. Dies bedeutet in der Sprache der funktionalen Renormierungsgruppe, dass die folgende Trunkierung gewählt wird:

$$\Gamma_k = \Gamma_\Lambda = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + U_\Lambda(\phi^2) + \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + i h \phi \bar{\psi} \psi \right],$$

wobei die Yukawa-Kopplung sowie die Parameter des skalaren Potentials konstant gesetzt wurden und ihre cutoff Werte annehmen, $h_k = h_\Lambda \equiv h$ und $U_k = U_\Lambda$. Darüber hinaus sind die anomalen Dimensionen der Felder vernachlässigt worden.

Für den Übergang in den Impulsraum werden die folgenden Konventionen gewählt:

$$\phi(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi(p) e^{ipx}, \quad \psi(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \psi(p) e^{ipx}, \quad \bar{\psi}(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \bar{\psi}(p) e^{-ipx}.$$

Im Impulsraum ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \Gamma_\Lambda &= \int d^d x U_\Lambda(\phi^2(x)) + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[\frac{1}{2} \phi(q) q^2 \phi(-q) - \bar{\psi}(q) \not{q} \psi(q) \right] \\ &\quad + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} i h \phi(p - q) \bar{\psi}(p) \psi(q). \end{aligned}$$

Der Fluss des bosonischen Potentials folgt aus der Projektion verschwindender fermionischer Felder und eines konstanten skalaren Feldes $\phi = \phi_0$.

$$\delta_0 \partial_t U_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left(\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} \right) \Bigg|_{\substack{\phi=\phi_0 \\ \psi=\bar{\psi}=0}} = \frac{1}{2} \text{STr} \left(\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_k} \right) \Bigg|_{\substack{\phi=\phi_0 \\ \psi=\bar{\psi}=0}}.$$

Der Faktor δ_0 resultiert hierbei aus dem Volumenintegral der effektiven Wirkung, $\int d^d x = \int d^d x e^{ipx} |_{p=0} = \delta_0$. Da der Propagator in der gewählten Trunkierung nicht von der Skala

k abhängt, kann die Flussgleichung wie folgt vereinfacht werden:

$$\delta_0 \partial_t U_k = \frac{1}{2} \partial_t \text{STr} \ln \left(\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_k \right) \Big|_{\substack{\phi=\phi_0 \\ \psi=\bar{\psi}=0}}.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich direkt integrieren, womit für das Potential

$$U_k - U_\Lambda = \frac{1}{2\delta_0} \text{STr} \left(\ln \frac{\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_k}{\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda} \right) \Big|_{\substack{\phi=\phi_0 \\ \psi=\bar{\psi}=0}}$$

folgt. Für die weiteren Berechnungen gilt es nun unter der gegebenen Trunkierung den Propagator zu bestimmen und eine Regulatorwahl zu treffen. Der Regulator $R_k(p, q)$ wirkt als IR cutoff für die Fluktuationen und wurde als zusätzlicher skalenabhängiger Massenterm in die Theorie eingebaut. Dies führte auf die folgende Feldstruktur des Regulators gemäß Gl.(2.3):

$$R_k(p, q) = \begin{pmatrix} R_{B,k}(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{F,k}^T(-q) \\ 0 & R_{F,k}(q) & 0 \end{pmatrix} \delta_{p,q}.$$

Die zweifache Ableitung der effektiven Mittelwertwirkung nach den Feldern ergibt für den Propagator:

$$\Gamma_\Lambda^{(2)}(p, q) = \begin{pmatrix} p^2 \delta_{p,q} + \int d^d x U_\Lambda''(\phi) e^{i(q-p)x} & ih\bar{\psi}(q-p) & -ih\psi^T(p-q) \\ -ih\bar{\psi}^T(q-p) & 0 & -\not{p}^T \delta_{q,p} - ih\phi(p-q) \\ ih\psi(p-q) & -\not{p} \delta_{p,q} + ih\phi(p-q) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser muss nun für ein konstantes skalares Feld, $\phi(x) = \phi_0 = \text{const}$, und verschwindende fermionische Felder ausgewertet werden.

$$R_k + \Gamma_\Lambda^{(2)} \Big|_{\substack{\phi=\phi_0 \\ \psi=\bar{\psi}=0}} = \begin{pmatrix} p^2 + U_\Lambda''(\phi_0) + R_{B,k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\not{p}^T - ih\phi_0 - R_{F,k}^T \\ 0 & -\not{p} + ih\phi_0 + R_{F,k} & 0 \end{pmatrix} \delta_{p,q},$$

Führt man die Matrixmultiplikation von $R_k + \Gamma_\Lambda^{(2)}$ mit dem Inversen von $R_\Lambda + \Gamma_\Lambda^{(2)}$ aus, nachdem die Projektion erfolgt ist, ergibt sich in der Impulsstruktur die Situation $\int_q A(p) \delta_{p,q} A^{-1}(p) \delta_{q,p} = \delta_0 A(p) A^{-1}(p)$. Damit folgt schließlich

$$\frac{R_k + \Gamma_\Lambda^{(2)}}{R_\Lambda + \Gamma_\Lambda^{(2)}} \Big|_{\substack{\phi=\phi_0 \\ \psi=\bar{\psi}=0}} = \delta_0 \begin{pmatrix} \frac{p^2 + U_\Lambda'' + R_{B,k}}{p^2 + U_\Lambda'' + R_{B,\Lambda}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\not{p}^T - ih\phi_0 - R_{F,k}^T}{-\not{p}^T - ih\phi_0 - R_{F,\Lambda}^T} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\not{p} + ih\phi_0 + R_{F,k}}{-\not{p} + ih\phi_0 + R_{F,\Lambda}} \end{pmatrix}.$$

Die Einträge in den Feldindizes sind diagonal, so dass die Spur des Logarithmus dieser Matrix ohne Probleme gebildet werden kann. Zu beachten ist, dass die fermionischen Anteile ein negatives Vorzeichen erhalten und immer noch die Spur über die inneren Diracindizes gebildet werden muss. Zudem erfolgt noch die Integration über den verbleibenden Impuls.

$$U_k - U_\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[\ln \frac{p^2 + U_\Lambda'' + R_{B,k}}{p^2 + U_\Lambda'' + R_{B,\Lambda}} - \text{tr} \ln \frac{-\not{p} + ih\phi_0 + R_{F,k}}{-\not{p} + ih\phi_0 + R_{F,\Lambda}} - \text{tr} \ln \frac{\not{p}^T + ih\phi_0 + R_{F,k}^T}{\not{p}^T + ih\phi_0 + R_{F,\Lambda}^T} \right].$$

Für die Regulatorfunktionen wird der folgende Ansatz gewählt, der in gewissem Sinne optimiert ist (vgl. [23]).

$$R_{B,k}(p) = p^2 r_{B,k}(p) = (k^2 - p^2)\Theta(k^2 - p^2), \quad R_{F,k}(p) = -\not{p} r_{F,k}(p)$$

mit $(1 + r_{B,k}(p)) = (1 + r_{F,k}(p))^2$.

Diese Wahl hat darüber hinaus den Vorteil, dass analytische Lösungen der Integrale gefunden werden können. Der Anteil des bosonischen Sektors zum effektiven Mittelwertpotential lässt sich nun direkt bestimmen.

$$\begin{aligned} U_k^B &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \frac{p^2 + U''_\Lambda + R_{B,k}}{p^2 + U''_\Lambda + R_{B,\Lambda}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \frac{p^2 + (k^2 - p^2)\Theta(k^2 - p^2) + U''_\Lambda}{p^2 + (\Lambda^2 - p^2)\Theta(\Lambda^2 - p^2) + U''_\Lambda} \\ &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4 \Gamma(2)} \left[\int_0^k dp p^3 \ln(k^2 + U''_\Lambda) - \int_0^\Lambda dp p^3 \ln(\Lambda^2 + U''_\Lambda) + \int_k^\Lambda dp p^3 \ln(p^2 + U''_\Lambda) \right] \\ &= \frac{1}{64\pi^2} \left[(\Lambda^2 - k^2)U''_\Lambda - (U''_\Lambda)^2 \ln \frac{\Lambda^2 + U''_\Lambda}{k^2 + U''_\Lambda} \right] - \frac{\Lambda^4 - k^4}{128\pi^2}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die sphärische Symmetrie des Integranden sowie die Eigenschaften der Heaviside-Funktion Θ ausgenutzt. Die Regulatorwahl und Methode der Meanfield-Näherung beschränken automatisch die Integrationsgrenzen der Integrale auf den cutoff.¹

Die fermionischen Beiträge U_k^F zum Potential U_k besitzen eine komplexere algebraische Struktur. Daher werden zunächst einige Umformungen des Integranden vorgenommen, bevor die Spur und das Integral ausgeführt werden können.

$$\begin{aligned} U_k^F &= \frac{1}{2} \int_p \left[\text{tr} \ln \frac{(-\not{p}(1 + r_{F,k}) + ih\phi_0)(\not{p}(1 + r_{F,\Lambda}) + ih\phi_0)}{(-\not{p}(1 + r_{F,\Lambda}) + ih\phi_0)(\not{p}(1 + r_{F,\Lambda}) + ih\phi_0)} \right. \\ &\quad \left. + \text{tr} \ln \frac{(\not{p}^T(1 + r_{F,k}) + ih\phi_0)(\not{p}^T(1 + r_{F,\Lambda}) - ih\phi_0)}{(\not{p}^T(1 + r_{F,\Lambda}) + ih\phi_0)(\not{p}^T(1 + r_{F,\Lambda}) - ih\phi_0)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_p \text{tr} \ln \frac{p^2(1 + r_{F,k})^2 + h^2\phi_0^2}{p^2(1 + r_{F,\Lambda})^2 + h^2\phi_0^2} + \frac{1}{2} \int_p \text{tr} \ln \underbrace{\frac{p^2(1 + r_{F,k})(1 + r_{F,\Lambda}) + h^2\phi_0^2 + ih\phi_0\not{p}(r_{F,k} - r_{F,\Lambda})}{p^2(1 + r_{F,k})(1 + r_{F,\Lambda}) + h^2\phi_0^2 + ih\phi_0\not{p}^T(r_{F,k} - r_{F,\Lambda})}}_{=: \frac{A}{A^T}}. \end{aligned}$$

Der Term unter der geschweiften Klammer hat nun die Form einer Matrix verknüpft mit der Inversen der transponierten Matrix. Dieser Ausdruck verschwindet nach der Bildung des Logarithmus und der Spur durch die folgenden Identitäten: $\text{tr} \ln[A(A^T)^{-1}] = \ln \det[A(A^{-1})^T] = \ln[(\det A)(\det A^{-1})] = \ln[(\det A)(\det A)^{-1}] = \ln 1 = 0$. Die Spur im verbleibenden Integral kann nun sofort angegeben werden, da lediglich die Identität bezüglich der Spinorindizes noch vorhanden ist. Die Auswertung in $d = 4$ mit der fermionischen Regulatorfunktion $p^2(1 + r_{F,k}(p))^2 = p^2 \left[1 + \left(\frac{k^2}{p^2} - 1 \right) \Theta \left(1 - \frac{p^2}{k^2} \right) \right]$ erfolgt nun analog zu der Berechnung im bosonischen Fall:

$$\begin{aligned} U_k^F &= \frac{1}{2} \int_p \text{tr} \ln \frac{p^2(1 + r_{F,k})^2 + h^2\phi_0^2}{p^2(1 + r_{F,\Lambda})^2 + h^2\phi_0^2} \mathbb{1} = \frac{1}{4\pi^2} \int dp p^3 \ln \frac{p^2(1 + r_{F,k})^2 + h^2\phi_0^2}{p^2(1 + r_{F,\Lambda})^2 + h^2\phi_0^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\int_0^\Lambda dp p^3 \ln(\Lambda^2 + h^2\phi_0^2) - \int_0^k dp p^3 \ln(k^2 + h^2\phi_0^2) - \int_k^\Lambda dp p^3 \ln(p^2 + h^2\phi_0^2) \right] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[h^2\phi_0^2(k^2 - \Lambda^2) + h^4\phi_0^4 \ln \frac{\Lambda^2 + h^2\phi_0^2}{k^2 + h^2\phi_0^2} \right] + \frac{k^4 - \Lambda^4}{32\pi^2}. \end{aligned}$$

¹Analog zu den Betrachtungen in [14] für den fermionischen Fall.

Damit ergibt sich nun endgültig für das effektive Mittelwertpotential:

$$U_k = U_\Lambda + \frac{1}{16\pi^2} \left[h^2 \phi^2 (k^2 - \Lambda^2) + h^4 \phi^4 \ln \frac{\Lambda^2 + h^2 \phi^2}{k^2 + h^2 \phi^2} \right] - \frac{1}{64\pi^2} \left[U_\Lambda'' (k^2 - \Lambda^2) + (U_\Lambda'')^2 \ln \frac{\Lambda^2 + U_\Lambda''}{k^2 + U_\Lambda''} \right], \quad (3.1)$$

wobei konstante Terme vernachlässigt worden, da diese nicht zu physikalischen Größen beitragen. Des Weiteren wurde zur Vereinfachung der Index an den konstanten Feldern ϕ_0 weggelassen. Die Feldvariable ϕ bedeutet im folgenden Abschnitt, dass eine homogene Feldkonfiguration $\phi_0 \equiv \phi = \text{const}$ vorliegt.

3.2 Fermionisch induziertes skalares Potential

Interessiert man sich für die IR-Physik des gegebenen Modells, gilt es den Grenzfall $k \rightarrow 0$ zu betrachten. Im Folgenden sollen zunächst nur die Effekte der Yukawa-Kopplung auf den Fluss des effektiven Potentials untersucht werden. Daher konzentrieren wir uns rein auf die fermionischen Fluktuationen und vernachlässigen die bosonischen Beiträge in den bisher durchgeführten Rechnungen. Dies wird formal erreicht durch die Annahme einer unendlich großen Skalarmasse. Wie bereits gezeigt, kann die Flussgleichung für das skalare Potential in Meanfield-Näherung analytisch gelöst werden. Im Unterschied zur Herleitung von Gl.(3.1) vernachlässigen wir jetzt jedoch die Anwesenheit eines skalaren Potentials sowie des kinetischen Terms des Skalarfeldes in der Trunkierung (vgl. [14]).

$$\Gamma_\Lambda = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left[-\bar{\psi}(p) \not{p} \psi(p) + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} i h \bar{\psi}(q) \phi(q-p) \psi(p) \right].$$

Da die effektive Wirkung, die aus der Flussgleichung gewonnen wird, bei einer Skala k grundsätzlich beliebig viele Operatoren besitzt, bedeutet die Abwesenheit eines skalaren Potentials in der Trunkierung daher nicht, dass auf dieser Skala kein skalares Potential existiert. Die Struktur der Trunkierung legt lediglich die Form des Propagators fest, der genutzt wird um Fluktuationen auszuintegrieren.

Für das effektive Potential des skalaren Feldes bedeutet dies, dass die bosonischen Anteile (U_Λ'') in Gl.(3.1) ignoriert werden können.

$$U_{k=0} \equiv U_0 = U_\Lambda + \frac{1}{16\pi^2} \left(-h^2 \Lambda^2 \phi^2 + h^4 \phi^4 \ln \frac{\Lambda^2 + h^2 \phi^2}{h^2 \phi^2} \right).$$

Massenterm

Das einfachst mögliche nichttriviale \mathbb{Z}_2 -symmetrische nackte Potential, welches gewählt werden kann, ist ein einfacher Massenterm $U_\Lambda = \frac{m_\Lambda^2}{2} \phi^2$. Damit ergibt sich für das effektive Potential:

$$U_0 = \frac{1}{2} \left(m_\Lambda^2 - \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2 \right) \phi^2 + \frac{h^4 \phi^4}{16\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 \phi^2} \right).$$

Um physikalisch messbare Parameter im Infraroten zu bestimmen, ist es notwendig, die Minima des effektiven Potentials zu kennen. Daher wird nun die erste und zweite Ableitung des Potentials nach dem skalaren Feld untersucht.

$$\frac{\partial U_0}{\partial \phi} = \left[m_\Lambda^2 - \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2 - \frac{h^4 \Lambda^2}{8\pi^2} \frac{\phi^2}{\Lambda^2 + h^2 \phi^2} + \frac{h^4 \phi^2}{4\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 \phi^2} \right) \right] \phi. \quad (3.2)$$

Die erste offensichtliche Nullstelle liegt bei $\phi = 0$ (wie bei jeder \mathbb{Z}_2 -symmetrischen Funktion). Ob dieses Extrema ein Minimum oder Maximum ist, hängt von den Parametern der Theorie ab.

$$\left. \frac{\partial^2 U_0}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=0} = m_\Lambda^2 - \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2$$

Für $m_\Lambda^2 > \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2$ hat das Potential ein Minimum bei $\phi = 0$. Darüber hinaus existieren keine weiteren Extrema, da der Ausdruck in den eckigen Klammern in Gl.(3.2) bei dieser Parameterkonstellation für alle $\phi \neq 0$ positiv ist. Die Theorie besitzt somit ein fundamentales skalares Boson mit der Masse $m^2 = m_\Lambda^2 - \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2$ und einen Vakuumerwartungswert von $\langle \phi \rangle = 0$. Da der Vakuumerwartungswert verschwindet, wird keine Masse der Fermionen erzeugt. Die Theorie beschreibt masselose Fermionen, die mit einem massiven fundamentalen Skalar über die Yukawa-Kopplung wechselwirken. Da kein Higgseffekt vorhanden ist, wird diese Parameterkonstellation im Folgenden nicht weiter beachtet.

Aus diesem Grund konzentrieren wir uns nun auf den Fall $m_\Lambda^2 < \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2$. Das Potential hat nun ein Maximum bei $\phi = 0$ ($U_0 = 0$). Da U_0 stetig ist und $\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} U_0 = \infty$, müssen mindestens zwei (\mathbb{Z}_2 -Symmetrie) weitere Extrema existieren, welche Minima sind und den Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes darstellen, also $\langle \phi \rangle = \pm v$ mit $U'_0(v) = 0$ und $U_0(v) = U_{0,min}$. Dieser ist im IR für das Standardmodell gut bekannt und experimentell über den β -Zerfall bestimmt zu $v = 246$ GeV [22]. (Bemerkung: Durch die Symmetrie des Potentials betrachten wir im weiteren Verlauf ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit nur den positiven Feldwert.)

Aus der Bedingung, dass die erste Ableitung an der Stelle v verschwinden soll, $U'(v) = 0$, lässt sich der UV-Massenparameter m_Λ als Funktion des cutoff bestimmen.

$$m_\Lambda^2(\Lambda) = \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2 - \frac{h^4 v^2}{8\pi^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 v^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + h^2 v^2} \right]. \quad (3.3)$$

Diese Funktion ist für alle cutoff Werte nicht negativ, so dass das UV-Potential stets von unten gebunden ist.

Wertet man nun die zweite Ableitung des Potentials am Minimum aus, erhält man die Masse der Bosonen in der Theorie. Diese hängt ab vom cutoff Λ der Theorie, der Yukawa-Kopplung h , dem Vakuumerwartungswert v sowie den nackten Parametern des UV-Potentials, in diesem Fall nur vom Massenterm m_Λ , welcher durch Gl.(3.3) bestimmt ist. Darüber hinaus wird ausgenutzt, dass die Masse des Top-Quark aus dem Experiment bekannt ist. Diese ergibt sich aus dem Produkt des Vakuumerwartungswertes des Higgsfeldes mit der Yukawa-Kopplung, $m_t = hv = 173$ GeV. Durch die experimentelle Kenntnis des Potentialminimums und der Top-Masse ist die Yukawa-Kopplung fixiert. Dadurch hängt die Masse des Higgsbosons nur noch von dem cutoff der Theorie ab.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U_0}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=v} &= m_\Lambda^2 - \frac{h^2 \Lambda^2}{8\pi^2} + \frac{h^4 v^2}{8\pi^2} \left[6 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 v^2} \right) - \Lambda^2 \frac{7\Lambda^2 + 5h^2 v^2}{(\Lambda^2 + h^2 v^2)^2} \right] \\ &= \frac{m_t^4}{4\pi^2 v^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2m_t^2 \Lambda^2}{(\Lambda^2 + m_t^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung ist an der Stelle $\phi = v$ für alle $\Lambda \neq 0$ positiv, so dass immer ein Minimum des Potentials bei $\phi = v$ vorliegt. Als Ergebnis für die Higgsmasse ergibt sich

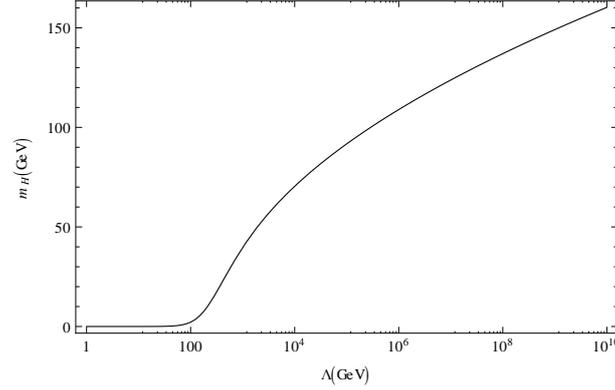


Abbildung 3.1: Higgsmasse m_H in Abhängigkeit des cutoff Λ .

letztendlich:

$$m_H(\Lambda) = \frac{m_t^2}{2\pi v} \sqrt{2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2m_t^2\Lambda^2}{(\Lambda^2 + m_t^2)^2}}.$$

Abb.[3.1] stellt die Abhängigkeit der Higgsmasse vom cutoff dar. Für hinreichend große cutoff ab 10^3 GeV dominiert der Logarithmus unter der Wurzel den zweiten Term, so dass ein wurzelförmig logarithmisch gedämpfter Anstieg zu beobachten ist. Setzt man einen cutoff der Theorie im Bereich um $\Lambda = 1,23 \cdot 10^7$ GeV an, liefert dies eine Higgsmasse von 125 GeV. Die Angabe der Higgsmasse für kleine Λ in Abb.[3.1] ist eher als mathematische Spielerei zu sehen, die durch die analytischen Lösungen möglich ist. Physikalisch würde eine Theorie für diese geringen cutoff bereits ihr Gültigkeit verlieren, bevor Energieskalen wie die des Vakuumerwartungswertes erreicht sind. Unser Interesse liegt damit in dem Bereich $\Lambda > v$.

Massenterm und Selbstwechselwirkung

Die nächste Erweiterung des Modells stellt die Hinzunahme einer ϕ^4 -Kopplung im UV-Potential dar. Dieses ist nun durch das gewöhnliche störungstheoretische Potential $U_\Lambda = \frac{m_\Lambda^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24}\phi^4$ gegeben. Dabei muss die dimensionslose ($d = 4$) Kopplungskonstante λ_Λ positiv sein, um eine stabile UV-Physik zu gewährleisten. Das Massenquadrat m_Λ^2 kann nun auch negative Werte annehmen. Für das effektive Potential bedeutet dies einen zusätzlichen Term, der die ϕ^4 -Kopplung widerspiegelt:

$$U_0 = \frac{1}{2} \left(m_\Lambda^2 - \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2 \right) \phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24} \phi^4 + \frac{h^4 \phi^4}{16\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 \phi^2} \right). \quad (3.4)$$

Die erste Ableitung

$$\frac{\partial U_0}{\partial \phi} = \left(m_\Lambda^2 - \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2 \right) \phi + \frac{\lambda_\Lambda}{6} \phi^3 - \frac{h^4 \Lambda^2}{8\pi^2} \frac{\phi^3}{\Lambda^2 + h^2 \phi^2} + \frac{h^4 \phi^3}{4\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 \phi^2} \right)$$

weist wieder eine Nullstelle bei $\phi = 0$ auf. Damit folgt für die zweite Ableitung an dieser Stelle $U_0''(0) = m_\Lambda^2 - \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2$. Dies wurde natürlich erwartet, da der zusätzliche ϕ^4 -Term keine Veränderung des Potentials bei $\phi = 0$ bewirkt. Für den Fall $m_\Lambda^2 > \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2$ liegt

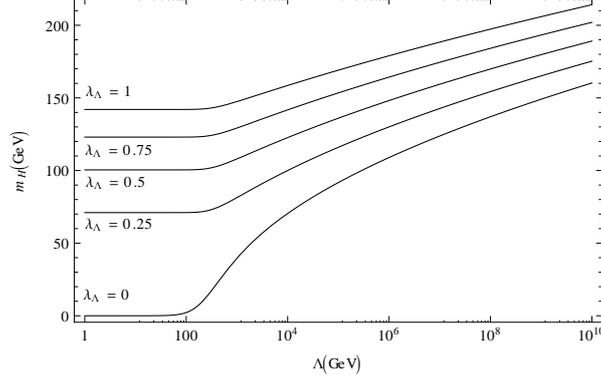


Abbildung 3.2: Higgsmasse m_H in Abhängigkeit des cutoff Λ für UV-Potentiale, die ϕ^4 -Terme besitzen. Dargestellt sind Kurven, bei denen die Kopplungskonstante λ_Λ zwischen 0 und 1 variiert.

erneut ein Minimum im Ursprung vor. Es existieren keine weiteren Extrema, so dass kein Higgs-Mechanismus existiert, welcher den Fermionen Masse verleiht.

Eine gebrochene Phase liegt nur dann vor, wenn $m_\Lambda^2 < \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2$ ist. Bei dieser Parameterkonstellation ist die zweite Ableitung bei $\phi = 0$ negativ, wodurch ein Maximum vorliegt. Weiter existieren zwei symmetrische Minima, so dass das Feld einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert besitzt ($v = 246$ GeV). Aus der Bedingung, dass die erste Ableitung am Minimum verschwindet $U_0'(v) = 0$, folgt erneut eine analytische Bestimmungsgleichung für den UV-Massenparameter der Theorie. Dieser hängt neben dem cutoff Λ nun zusätzlich von der ϕ^4 -Kopplungskonstante λ_Λ ab.

$$m_\Lambda^2(\Lambda, \lambda_\Lambda) = \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2 - \frac{h^4 v^2}{8\pi^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 v^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + h^2 v^2} \right] - \frac{\lambda_\Lambda}{6} v^2. \quad (3.5)$$

Analog ist ebenso die Higgsmasse von diesen beiden Parametern abhängig.

$$m_H(\Lambda, \lambda_\Lambda) = \sqrt{U_0''(v)} = \sqrt{\frac{m_t^4}{4\pi^2 v^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2m_t^2 \Lambda^2}{(\Lambda^2 + m_t^2)^2} \right] + \frac{v^2}{3} \lambda_\Lambda}.$$

In Abbildung (3.2) ist die Abhängigkeit der Higgsmasse vom cutoff für verschiedene Werte der ϕ^4 -Kopplungskonstanten λ_Λ dargestellt. Die eingeführte ϕ^4 -Wechselwirkung sorgt für eine konstante positive Verschiebung der Higgsmasse. Mathematisch nimmt die Masse des Higgsbosons ihren minimalen Wert für $\Lambda = 0$ an. Dieser liegt für feste λ_Λ bei $m_H = \sqrt{\frac{v^2}{3} \lambda_\Lambda}$. Für größer werdenden cutoff Λ wächst das Higgsmassenquadrat wieder logarithmisch.

Betrachten wir nun noch das resultierende IR-Potential der Theorie. Zu diesem Zweck wird das Ergebnis des UV-Massenparameters Gl.(3.5) in die Gleichung für das IR-Potential (3.4) eingesetzt.

$$U_0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{h^4 v^2}{8\pi^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 v^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + h^2 v^2} \right] - \frac{\lambda_\Lambda}{6} v^2 \right) \phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24} \phi^4 + \frac{h^4 \phi^4}{16\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 \phi^2} \right),$$

wobei die Abhängigkeit des IR-Potentials U_0 von ϕ in Abb.[3.3] dargestellt ist.

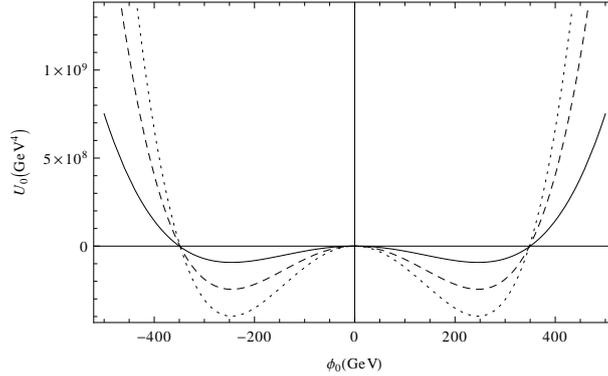


Abbildung 3.3: U_0 in Abhängigkeit von ϕ . Der cutoff wurde zu $\Lambda = 10^6$ GeV gewählt. Durchgezogene Linie: $\lambda_\Lambda = 0$, gestrichelt: $\lambda_\Lambda = 1$, gepunktet: $\lambda_\Lambda = 2$.

Das IR-Potential wurde so konstruiert, dass der Vakuumerwartungswert sich bei $v = \pm 246$ GeV befindet. Darüber hinaus ist es für alle Parameterwerte nach unten gebunden. Es treten keine Probleme durch unphysikalische Instabilitäten auf, die durch Top-Fluktuationen hervorgerufen werden. Diese Instabilitäten entstehen in der klassischen Störungstheorie, sind aber nur Artefakte der perturbativen Methoden und daher unphysikalisch. In [24] wurde gezeigt, dass die Destabilisierung des Vakuums erst dann erfolgt, wenn die Ergebnisse des effektiven 1-loop Potentials auf Bereiche ausgedehnt werden, in denen der Gültigkeitsbereich der Störungstheorie verletzt ist oder falls unphysikalische Annahmen vorgenommen werden.

Ein Problem, welches dennoch in unserer Approximation der Flussgleichung auftaucht, ist die Nichtkonvexität des effektiven Potentials im Innenbereich zwischen den beiden Minima. Dies resultiert aus der Tatsache, dass in der Meanfield-Näherung ein skalenunabhängiger Propagator angesetzt wird. Auch dieses Problem ist in der Störungstheorie gut bekannt² und wurde für eine reine skalare Theorie in [25] studiert. Im Innenbereich zwischen den Minima wird das Pfadintegral von zwei konkurrierenden Sattelpunkten beeinflusst. Somit verliert die Annahme der Störungstheorie, dass nur ein Sattelpunkt das Pfadintegral dominiert, ihre Gültigkeit in diesem Bereich. Im äußeren Bereich ($|\phi| > +v$) wird das effektive Potential U_0 jedoch gut durch U_{eff}^{1-loop} approximiert. Im Inneren liefert die Maxwell-Konstruktion des effektiven 1-loop Potentials eine sinnvolle Näherung für das effektive Potential, da der Grundzustand hier eine lineare Überlagerung zwischen den beiden Zuständen $|+v\rangle$ und $|-v\rangle$ ist [25].

Alternativ ist es möglich, von dem UV-Parameter λ_Λ zu einer Größe überzugehen, die sich im Experiment bestimmen lässt, der IR-Kopplungskonstante λ_0 . Dies ist mit Hilfe der Flussgleichung des effektiven Potentials möglich. Wertet man von diesem die vierte Ableitung am globalen Minium aus, erhalten wir die ϕ^4 -Kopplungskonstante:

$$\lambda_k = \left. \frac{\partial^4 U_k}{\partial \phi^4} \right|_{\phi=v_k} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_0 = \left. \frac{\partial^4 U_0}{\partial \phi^4} \right|_{\phi=v} .$$

²Auch hier werden Fluktuationen skalenunabhängig ausintegriert. Wird die Skalenabhängigkeit des Propagators in der Flussgleichung berücksichtigt, so ist das resultierende effektive Potential konvex [20].

Damit folgt

$$\lambda_0 = \lambda_\Lambda + \frac{m_t^4}{4\pi^2 v^4} \left[6 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 \phi^2} \right) - \frac{\Lambda^2 (25\Lambda^6 + 16m_t^2 \Lambda^4 + 21m_t^4 \Lambda^2 + 6m_t^6)}{(\Lambda^2 + m_t^2)^4} \right]. \quad (3.6)$$

Diese Gleichung lässt sich nach der nackten Kopplungskonstante λ_Λ umstellen und in die Gleichung der Higgsmasse (3.5) einsetzen.

$$m_H(\Lambda, \lambda_0) = \sqrt{\frac{2m_t^4}{3\pi^2 v^2} \frac{(2\Lambda^2 - m_t^2)\Lambda^6}{(\Lambda^2 + m_t^2)^4} + \frac{v^2}{3} \lambda_0}.$$

Diese ist nun für ein festes λ_0 auf das Intervall $\left[\sqrt{\frac{v^2}{3} \lambda_0}, \sqrt{\frac{v^2}{3} \lambda_0 + \frac{4m_t^4}{3\pi^2 v^2}} \right]$ beschränkt. Das Minimum wird im unphysikalischen Grenzfall eines verschwindenden cutoff $\Lambda \rightarrow 0$ angenommen, während das Maximum aus der Grenzwertbetrachtung $\Lambda \rightarrow \infty$ folgt.

Darüber hinaus ist eine starke Feinabstimmung der Kopplungskonstanten λ_0 nötig, falls man für eine bestimmte Higgsmasse eine Theorie konstruieren möchte, die über einen weiten Skalenbereich gültig sein soll. Dies wird vor allem in Abbildung (3.4) deutlich.

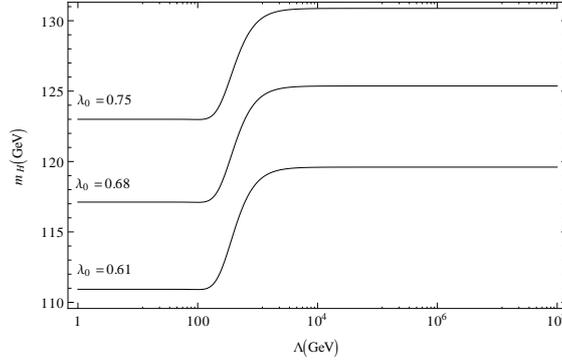


Abbildung 3.4: Dargestellt ist die Higgsmasse m_H in Abhängigkeit des cutoff Λ für verschiedene IR-Kopplungskonstanten λ_0 .

3.3 Berücksichtigung fermionischer und bosonischer Fluktuationen

Nachdem bis jetzt die bosonischen Fluktuationen in der Analyse des skalaren Potentials vernachlässigt worden, sollen diese nun mit berücksichtigt werden. Wir starten unsere Untersuchungen also von der vollen Gl.(3.1) aus, ohne Terme zu vernachlässigen. Da wir an der IR-Physik interessiert sind, setzen wir wieder $k = 0$ und betrachten das effektive Potential.

$$U_0 = U_\Lambda + \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 \left(\frac{1}{4} U_\Lambda'' - h^2 \phi^2 \right) + h^4 \phi^4 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 \phi^2} \right) - \frac{1}{4} (U_\Lambda'')^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{U_\Lambda''} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Wird für das UV-Potential ein reiner Massenterm angesetzt ($U_\Lambda = \frac{m_\Lambda^2}{2} \phi^2$), folgen die gleichen Ergebnisse wie im fermionischen Fall, da die bosonischen Fluktuationen durch die

zweite Ableitung des nackten Potentials eingehen. Da U''_Λ nicht mehr von dem skalaren Feld abhängen würde, bewirken die bosonischen Anteile lediglich eine konstante Verschiebung des IR-Potentials, welche ignoriert werden kann. Der einfachste \mathbb{Z}_2 -symmetrische Ansatz, der die bosonischen Anteile zum Fluss berücksichtigt, enthält somit neben dem Massenterm eine weitere ϕ^4 -Wechselwirkung.

$$U_\Lambda = \frac{m_\Lambda^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24}\phi^4 \quad \Rightarrow \quad U''_\Lambda = m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2 \quad \text{mit} \quad \lambda_\Lambda > 0, m_\Lambda^2 \in \mathbb{R}.$$

Das effektive Potential nimmt dadurch die folgende Gestalt an:

$$U_0 = \frac{1}{2} \left[m_\Lambda^2 + \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda_\Lambda}{8} - h^2 \right) \right] \phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24}\phi^4 + \frac{h^4\phi^4}{16\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2\phi^2} \right) - \frac{1}{64\pi^2} \left(m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2 \right)^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2} \right). \quad (3.8)$$

Die erste Ableitung nach dem skalaren Feld

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial \phi} &= \left[m_\Lambda^2 + \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda_\Lambda}{8} - h^2 \right) \right] \phi + \frac{\lambda_\Lambda}{6}\phi^3 - \frac{h^4\Lambda^2}{8\pi^2} \frac{\phi^3}{\Lambda^2 + h^2\phi^2} + \frac{h^4\phi^3}{4\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2\phi^2} \right) \\ &+ \frac{\lambda_\Lambda\Lambda^2}{64\pi^2} \frac{\phi(m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2)}{\Lambda^2 + m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2} - \frac{\lambda_\Lambda}{32\pi^2} \phi \left(m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2 \right) \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2} \right) \end{aligned}$$

liefert wieder ein Extremum bei $\phi = 0$. Damit die Symmetrie der Theorie spontan gebrochen ist, müssen neben diesem Extremum zwei weitere vorliegen, die globale Minima sind und in unserem Fall bei $v = 246$ GeV liegen. Dies konstruieren wir wieder durch die Bedingung, dass die erste Ableitung an dieser Stelle verschwinden soll. Damit ergibt sich eine transzendente Gleichung für die Bestimmung von m_Λ^2 :

$$0 = m_\Lambda^2 + \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda_\Lambda}{8} - \frac{m_t^2}{v^2} \right) + \frac{\lambda_\Lambda}{6}v^2 - \frac{m_t^4}{8\pi^2 v^2} \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m_t^2} + \frac{m_t^4}{4\pi^2 v^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) + \frac{\lambda_\Lambda\Lambda^2}{64\pi^2} \frac{m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}v^2}{\Lambda^2 + m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}v^2} - \frac{\lambda_\Lambda}{32\pi^2} \left(m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}v^2 \right) \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}v^2} \right). \quad (3.9)$$

Für die Higgsmasse folgt,

$$\begin{aligned} m_H^2 &= \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}(v) - \frac{1}{v} \overbrace{\frac{\partial U}{\partial \phi}}^{=0}(v) \\ &= \frac{m_t^4}{4\pi^2 v^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2m_t^2\Lambda^2}{(\Lambda^2 + m_t^2)^2} \right] + \frac{v^2}{3}\lambda_\Lambda \\ &\quad - \frac{\lambda_\Lambda^2 v^2}{64\pi^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}v^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2(m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}v^2)\Lambda^2}{(\Lambda^2 + m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}v^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Der Term $\frac{1}{v} \frac{\partial U}{\partial \phi}(v)$ wurde von der zweiten Ableitung des Potentials abgezogen, da sich auf diese Weise für die Higgsmasse die gleiche Struktur wie im Falle der rein fermionischen Fluktuationen ergibt (erste Zeile von Gl.(3.10)). Der Einfluss der bosonischen Fluktuationen spiegelt sich in der zweiten Zeile wieder. Diese verringern stets den Wert der Higgsmasse, da die bosonischen Fluktuationen den fermionischen entgegenwirken und damit das Ausbilden des Minimums bei $\phi \neq 0$ verhindern.

Da die bosonischen Parameter m_Λ und λ_Λ beide in transzendenter Weise in die Gln. (3.9) und (3.10) sowie in das effektive Potential (3.8) eingehen, wird nun die folgende Transformation der beiden Parameter vorgenommen,

$$m_\Lambda^2 \rightarrow m_s^2 - \frac{v^2}{2} \lambda_\Lambda, \quad \lambda_\Lambda \rightarrow \lambda_\Lambda.$$

Dabei ist die Transformation so konstruiert, dass $m_s^2 = U''_\Lambda(v)$ ist und damit dieser neue Parameter das skalare Analogon zu m_t der fermionischen Fluktuationen darstellt. Die für die nachfolgenden Betrachtungen wesentlichen Gleichungen lauten nun:

$$0 = m_s^2 - \frac{v^2}{3} \lambda_\Lambda + \lambda_\Lambda \frac{m_s^2}{64\pi^2} \left[\frac{\Lambda^4 + 2m_s^2 \Lambda^2}{m_s^2(\Lambda^2 + m_s^2)} - 2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_s^2} \right) \right] - \frac{m_t^4}{8\pi^2 v^2} \left[\frac{\Lambda^4 + 2m_t^2 \Lambda^2}{m_t^2(\Lambda^2 + m_t^2)} - 2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) \right] \quad (3.11)$$

und

$$m_H^2 = \frac{m_t^4}{4\pi^2 v^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2m_t^2 \Lambda^2}{(\Lambda^2 + m_t^2)^2} \right] + \frac{v^2}{3} \lambda_\Lambda - \frac{\lambda_\Lambda^2 v^2}{64\pi^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_s^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2m_s^2 \Lambda^2}{(\Lambda^2 + m_s^2)^2} \right]. \quad (3.12)$$

Das effektive Potential nimmt in diesen Parametern die folgende Gestalt an:

$$U_0 = \frac{1}{2} \left[m_s^2 - \frac{\lambda_\Lambda v^2}{2} + \frac{\Lambda^2}{8\pi^2} \left(\frac{\lambda_\Lambda}{8} - h^2 \right) \right] \phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24} \phi^4 + \frac{h^4 \phi^4}{16\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h^2 \phi^2} \right) - \frac{1}{64\pi^2} \left(m_s^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2} (\phi^2 - v^2) \right)^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_s^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2} (\phi^2 - v^2)} \right). \quad (3.13)$$

Neben der Problematik, dass das effektive Potential nicht überall konvex ist, welches bereits im fermionischen Fall diskutiert wurde, tritt zusätzlich der negative Aspekt auf, dass das effektive Potential nun auch komplex werden kann analog zu störungstheoretischen Berechnungen. Dies tritt dann auf, wenn die zweite Ableitung des nackten Potentials negativ wird, da hierdurch die vorkommenden Logarithmen komplex werden. Dieses Phänomen wurde ebenfalls in [25] analysiert. Der Imaginärteil des effektiven 1-loop Potentials beschreibt hierbei die halbe Zerfallsrate pro Einheitsvolumen einer homogenen Feldkonfiguration. Problematisch wird dies besonders, wenn die zweite Ableitung des UV-Potentials ausgewertet am eigentlichen globalen IR-Minimum v negativ ist, also $U''_\Lambda(v) < 0$. Die Störungstheorie ist dann nicht in der Lage den Vakuumzustand der Theorie zu bestimmen. Dies bedeutet, dass entweder die Annahme eines homogenen Grundzustandes nicht korrekt ist und dieser in eine inhomogene Feldkonfiguration zerfällt oder unsere verwendete Methode unzureichend ist, wie bereits oben diskutiert wurde.

Um nun sinnvolle IR-Physik mit Hilfe der Meanfield-Näherung beschreiben zu können, schränken wir den Parameterraum ein. Sobald man den Fall $m_s^2 > 0$ betrachtet, liegen die beiden globalen IR-Minima der Theorie immer in einem Bereich, der durch einen reellen Potentialverlauf beschrieben wird. Dies zeigt sich wie folgt: Man erhält einen komplexen Zweig des Logarithmus, falls dessen Argument negativ wird. Dafür muss $m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2} \phi^2 = m_s^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2} (\phi^2 - v^2) < 0$ gelten. Das effektive Potential U_0 wird nun für die reellen Feldamplituden

$$|\phi| < \sqrt{v^2 - \underbrace{\frac{2}{\lambda_\Lambda} m_s^2}_{\geq 0}}$$

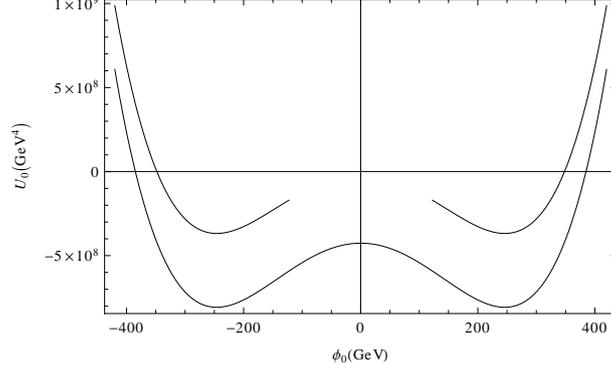


Abbildung 3.5: Potentialverläufe für verschiedene m_s . Obere Kurve: $m_s = 300$ GeV, $\lambda_\Lambda = 3.95651 \rightarrow U_0$ reell für $|\phi| > 122.6$ GeV. Untere Kurve: $m_s = 500$ GeV, $\lambda_\Lambda = 3.95642 \rightarrow U_0$ reell $\forall \phi$, da immer $\phi^2 > -6.6 \cdot 10^4$ GeV ist.

komplex. Gilt $\frac{2}{\lambda_\Lambda} m_s^2 > v^2$ liefert die Meanfield-Näherung für alle ϕ reelle U_0 , da in diesem Fall das Argument des Logarithmus $m_s^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2} (\phi^2 - v^2)$ nicht negativ wird. Für die Feldamplituden $\phi = \pm v$ ist das effektive Potential ebenfalls immer reell. Im ungünstigsten Fall versagt die Meanfield-Näherung im gesamten Bereich $|\phi| < v$ ($\frac{2m_s^2}{\lambda_\Lambda} = 0$).

Zur Veranschaulichung sind in Abb.[3.5] Potentialverläufe für verschiedene Parameter dargestellt. Es wurden Kombinationen gewählt, in denen zum einen die Meanfield-Näherung nur bis zu einem gewissen ϕ reelle Werte für das effektive Potential liefert und zum anderen alle Feldamplituden reelle Verläufe ergeben. Gl.(3.11) wurde dabei als Bestimmungsgleichung für die Kopplungskonstante λ_Λ angesehen, der cutoff liegt bei $\Lambda = 10^6$ GeV.

Die Realitätsbedingung $m_s^2 > 0$ für $U(v)$ sichert nun, dass die Higgsmasse Gl.(3.12) keine komplexen Werte annimmt. Ebenso liefert nun die Bestimmungsgleichung (3.11) für die Kopplungskonstante λ_Λ nur noch reelle Werte. Für den Fall $m_s^2 < 0$ würde diese Gleichung komplexe λ_Λ bestimmen, so dass das gesamte UV-Potential U_Λ komplex werden würde. Die Forderung nicht negativer m_s^2 schränkt darüber hinaus den Wertebereich des UV-Massenparameters m_Λ^2 ein. Während auf UV-Niveau dieser noch beliebige reelle Werte annehmen konnte, ist er nun auf das Intervall $m_\Lambda^2 \in [-\frac{v^2}{2} \lambda_\Lambda, \infty]$ beschränkt.

Betrachten wir noch die Gl.(3.11), bevor wir uns mit der Bestimmung der Higgsmasse beschäftigen. Diese lässt sich auf Grund der durchgeführten Parametertransformation nach λ_Λ explizit umstellen.

$$\lambda_\Lambda = \frac{\frac{m_t^4}{8\pi^2 v^2} \left[\frac{\Lambda^4 + 2m_t^2 \Lambda^2}{m_t^2 (\Lambda^2 + m_t^2)} - 2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) \right] - m_s^2}{\frac{m_s^2}{64\pi^2} \left[\frac{\Lambda^4 + 2m_s^2 \Lambda^2}{m_s^2 (\Lambda^2 + m_s^2)} - 2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_s^2} \right) \right] - \frac{v^2}{3}}. \quad (3.14)$$

Diese Kopplungskonstante sollte nicht negativ sein, damit das UV-Potential nach unten gebunden ist. Wird nun ein festes m_s^2 gewählt, hängt λ_Λ nur noch von dem cutoff Λ der Theorie ab. Die Bestimmung der Nullstelle Λ_{NSt} beziehungsweise Polstelle Λ_{PSt} ergibt sich aus dem Verschwinden des Zählers beziehungsweise Nenners und liefert transzendente Gleichungen für die jeweiligen Λ -Werte. Dadurch resultiert ein Intervall des cutoff, in dem das gewählte m_s^2 nicht realisiert werden kann, wenn man die physikalisch sinnvolle Forderung $\lambda_\Lambda > 0$ stellen möchte, um eine stabile UV-Physik zu gewähren. Je nachdem ob Λ_{NSt}

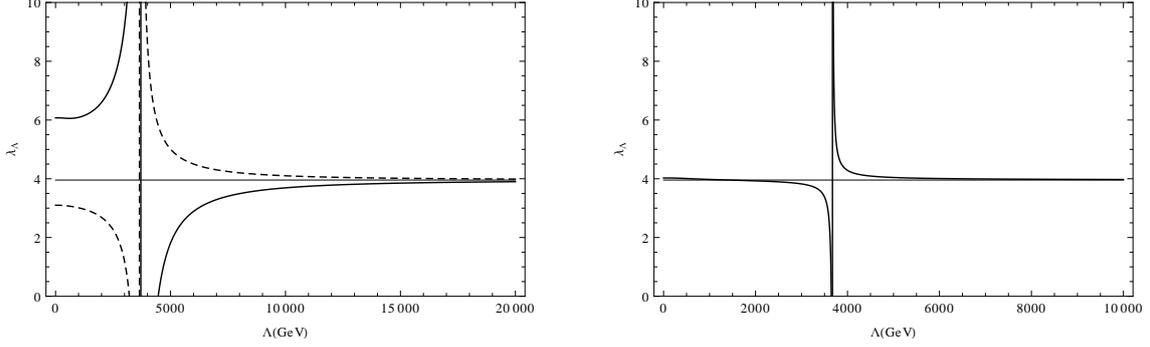


Abbildung 3.6: UV-Kopplungskonstante λ_Λ gegen den cutoff Λ . Links wurde $m_s = 250$ GeV (gestrichelt) bzw. $m_s = 350$ GeV (durchgezogen) gewählt. Rechts ist mit $m_s = 285$ GeV der freie Parameter so gewählt worden, dass beliebige positive Werte λ_Λ in der Theorie angenommen werden können.

kleiner oder größer als Λ_{PSt} ist, gilt $\Lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus [\Lambda_{\text{NST}}, \Lambda_{\text{PSt}}]$ oder $\Lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus [\Lambda_{\text{PSt}}, \Lambda_{\text{NST}}]$.

Darüber hinaus wird in Abb.[3.6] deutlich, dass nicht jeder positive Wert von der Kopplungskonstanten λ_Λ realisiert werden kann. Nur für bestimmte m_s^2 (im obigen Beispiel $m_s = 285$ GeV) gibt es keine weiteren Einschränkungen an diesen Parameter der Theorie. Ein interessanter Punkt ist, dass für große cutoff die Kopplungskonstante unabhängig von m_s^2 gegen einen konstanten Wert strebt.

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \lambda_\Lambda = 8h^2.$$

Eine weitere wichtige Beziehung zwischen den Parametern der Theorie lässt sich direkt an der Forderung $U'(v) \stackrel{!}{=} 0$ ablesen. Wertet man Gl.(3.11) für große Λ aus und berücksichtigt, dass m_s^2 als dimensionsbehaftete Kopplung etwa in der Größenordnung von Λ^2 ist, erhält man:

$$0 = m_s^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{64\pi^2} \Lambda^2 \left(1 + \frac{m_s^2}{\Lambda^2 + m_s^2} \right) - \frac{h^2}{8\pi^2} \Lambda^2 - 2m_s^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_s^2} \right) \quad (3.15)$$

Für $\lambda_\Lambda > 8h^2$ kann der Fall eintreten, dass diese Beziehung für gewisse Λ durch kein positives m_s^2 mehr erfüllt wird. Auf Grund des Logarithmus werden komplexe m_s^2 bestimmt, so dass keine sinnvollen Aussagen in der Meanfield-Näherung mehr getroffen werden können. Möchte man dieses Problem umgehen, sollte $\lambda_\Lambda < 8h^2$ gewählt werden, da so immer gewährleistet ist, dass m_s^2 reell und positiv ist. Während im Fall rein fermionischer Fluktuationen λ_Λ prinzipiell noch beliebig positive Werte annehmen konnte, liefern die nun zusätzlich berücksichtigten bosonischen Fluktuationen eine Einschränkung an die potentiellen Werte im Rahmen der Meanfield-Näherung, wenn man keine Einschränkungen an den cutoff stellen möchte und das Minimum der Theorie durch einen reellen Potentialverlauf beschrieben werden soll.

Für die Bestimmung der Higgsmasse nutzen wir nun Gl.(3.11) um numerisch m_s^2 zu erhalten. Dabei werden die bereits analysierten Bedingungen an die Parameter der Theorie berücksichtigt. Die Masse des Higgs-Bosons ist damit nur noch eine Funktion der Kopplungskonstanten λ_Λ und des cutoff Λ der Theorie $m_H = m_H(\lambda_\Lambda, \Lambda)$ analog zum fermionischen Fall. Die Berechnung von m_s^2 und Wahl von λ_Λ als freien Parameter wurde lediglich getroffen, um einen direkten Vergleich mit den Werten der Higgsmassen, die rein durch

fermionische Fluktuationen induziert sind, treffen zu können. Natürlich ist es alternativ möglich, Gl.(3.14) für λ_Λ in die Gleichung der Higgsmasse (3.12) einzusetzen und explizit diese als Funktion von m_s^2 anzugeben.

Die Ergebnisse der Higgsmasse in Abhängigkeit vom UV-cutoff wurden in Abb.[3.7] grafisch dargestellt. Dabei wurden für die ϕ^4 -Kopplungskonstanten nur Werte zwischen $0 \leq \lambda_\Lambda \leq 8h^2$ berücksichtigt, um sinnvolle Ergebnisse innerhalb der Meanfield-Approximation zu erhalten. Auffällig ist, dass für große Kopplungskonstanten λ_Λ (im obigen Bsp. $\lambda_\Lambda = 3.5$) der Kurvenverlauf nicht mehr durch eine minimale Higgsmasse bei $\Lambda = 0$ charakterisiert wird, wie dies im Falle rein fermionischer Fluktuationen war. Für Kopplungen λ_Λ nahe $8h^2$ wächst m_s^2 gemäß Gl.(3.11) nur langsam mit größer werdendem cutoff an, da die dominierende Ordnung $\mathcal{O}(\Lambda^2)$ für nicht allzu große Λ einen geringen Einfluss ausübt. Die bosonischen Fluktuationen m_s^2 liegen damit in der Größenordnung der Top-Fluktuationen, so dass die Ausdrücke in den eckigen Klammern von Gl.(3.12) in etwa gleiche Werte annehmen. Für große λ_Λ wird nun das Minus in der zweiten Zeile der Higgsmassengleichung relevant, so dass für anwachsende Λ die Higgsmasse zunächst kleiner wird, bis sie ein Minimum erreicht hat. Nach dem Erreichen des Minimums ist nur noch ein positiver Anstieg der Higgsmasse zu verzeichnen. Diese nimmt asymptotisch ihren logarithmischen Verlauf an, der bereits aus dem fermionischen Fall bekannt ist. Dies erklärt sich folgendermaßen. Für große Λ kann in guter Näherung Gl.(3.15) zur Bestimmung von m_s^2 benutzt werden. Der Quotient m_s^2/Λ^2 nimmt damit einen konstanten Wert C an, so dass die bosonischen Terme keinen cutoff abhängigen Einfluss mehr auf die Higgsmasse haben, sondern diese nur noch konstant verschieben (zweite Zeile von Gl.(3.12)):

$$2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_s^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2m_s^2\Lambda^2}{(\Lambda^2 + m_s^2)^2} = 2 \ln \left(1 + \frac{1}{C} \right) - \frac{3 + 2C}{(1 + C)^2}, \quad \Lambda \gg m_t.$$

Dadurch übernehmen für große Λ die fermionischen Fluktuationen wieder das asymptotische Verhalten der Higgsmasse und es ist ein logarithmischer Anstieg im Verlauf von m_H^2 zu beobachten.

Für den Fall des maximal zulässigen $\lambda_\Lambda = 8h^2$ zeigt sich ein besonderes Verhalten. In Gl.(3.11) verschwindet nun die führende Ordnung des cutoff, so dass die zu bestimmenden bosonischen Fluktuationen m_s^2 nur noch logarithmisch mit diesem anwachsen und in einem großen Intervall des cutoff in der selben Größenordnung wie die Top-Fluktuationen liegen. Dadurch sinkt das Higgsmassenquadrat m_H^2 gemäß Gl.(3.12), wie im eben diskutierten Fall und verschwindet für $\Lambda = 4.72 \cdot 10^{10}$ GeV. Für größere Λ wird m_H^2 negativ, so dass kein Minimum bei $v = 246$ GeV mehr vorliegt. Erst jenseits der Planck-Skala erreicht das Quadrat der Higgsmasse ein Minimum wie im Fall $\lambda_\Lambda \lesssim 8h^2$ und wächst danach

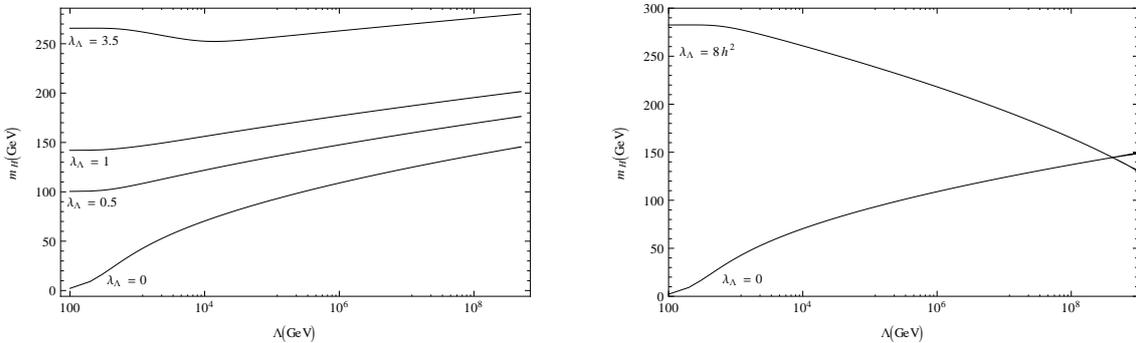


Abbildung 3.7: Masse des Higgs-Bosons für verschiedene Werte der Kopplungskonstanten λ_Λ .

logarithmisch.

Der Schnittpunkt der beiden Kurven für $\lambda_\Lambda = 0$ und $\lambda_\Lambda = 8h^2$ liegt bei $\Lambda_s = 4.12269 \cdot 10^8$ GeV. Jenseits dieses Wertes werden für festes Λ die minimalen Higgsmassen durch den Parameter $\lambda_\Lambda = 8h^2$ charakterisiert. Die untere Higgsmassenschranke wird damit nicht mehr durch eine feste Wahl von λ_Λ beschrieben, sondern ist je nach cutoff entweder durch $\lambda_\Lambda = 0$ ($\Lambda < \Lambda_s$) oder $\lambda_\Lambda = 8h^2$ ($\Lambda > \Lambda_s$) gegeben. Untersucht man die Higgsmasse als Funktion von λ_Λ , wird deren Maximum in dem Intervall $\lambda_\Lambda \in [0, 8h^2)$ liegen. Es stellt sich heraus, dass die Kopplungskonstante, welche die Higgsmasse maximiert, annähernd unabhängig vom cutoff ist und einen Wert von $\lambda_\Lambda \approx 3.7232$ ($\Lambda = 10^6 \dots 10^{10}$ GeV) annimmt. Für $3.7232 < \lambda_\Lambda < 8h^2$ sinken die Werte der Higgsmasse wieder. Damit existieren Parameterkonstellationen bei denen für zwei verschieden gewählte λ_Λ die gleiche Higgsmasse bei festem cutoff beschrieben wird. Dies wird sofort in Abb.[3.7] ersichtlich, da beispielsweise die Kurve mit $\lambda_\Lambda = 8h^2$ einen Schnittpunkt mit allen weiteren Kurven aufweist. Diese nicht eindeutige Beziehung zwischen der Higgsmasse im Infraroten und dem UV-Parameter λ_Λ bei festem cutoff kann jedoch als Artefakt der Meanfield-Näherung angesehen werden. Dieser Effekt tritt nicht auf, wenn eine Analyse der Flussgleichung mit einem skalenabhängigen Propagator durchgeführt wird. Ebenso wenig zeigten Gittersimulationen dieses Verhalten [12]. In beiden Fällen nahm die Higgsmasse für wachsende λ_Λ stets zu, wodurch eine eindeutige Beziehung zwischen m_H und λ_Λ gegeben ist. Einigermaßen verlässliche Aussagen lassen sich daher nur für kleine UV-Parameter λ_Λ treffen.

Abb.[3.8] vergleicht die Abhängigkeit der Higgsmasse vom cutoff aus dem Kapitel der fermionischen Fluktuationen mit den Ergebnissen der erweiterten Meanfield-Näherung, welche die bosonischen Fluktuationen mit berücksichtigt. Wie erwartet verringern dabei die bosonischen Fluktuationen die Higgsmasse gegenüber den rein fermionischen Ergebnissen.

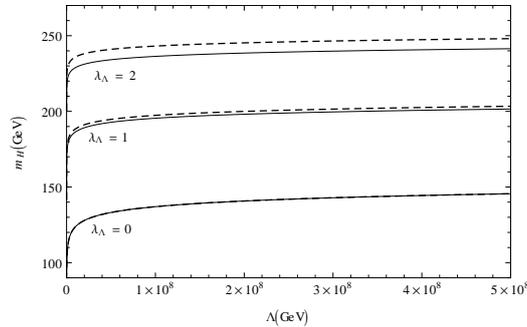


Abbildung 3.8: Kurvenverläufe der Higgsmasse für verschiedene λ_Λ . Bei den gestrichelten Verläufen wurden nur fermionische Fluktuationen berücksichtigt. Die durchgehenden Linien sind die Ergebnisse der erweiterten Meanfield-Näherung.

3.4 Erweiterungen des UV-Potentials

In den beiden vorangegangenen Abschnitten ist die Struktur der Higgsmassenschranke in Abhängigkeit von den Parametern des UV-Potentials untersucht worden. Dabei schränkten wir uns bisher auf das Standardhiggspotential $U_\Lambda = \frac{m_\Lambda^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24}\phi^4$ ein, welches in störungstheoretischen Rechnungen verwendet wird. In diesen werden keine höheren Terme

als die ϕ^4 -Selbstwechselwirkung zugelassen, da höhere Feldpotenzen in $d = 4$ nicht mehr perturbativ renormierbar sind. Die untere Schranke in unserem Modell resultierte für eine verschwindende Selbstwechselwirkung $\lambda_\Lambda = 0$.

$$\min_{\lambda_\Lambda \geq 0} m_H(\lambda_\Lambda) = m_H(0).$$

Abweichungen von dieser Schranke konnten im Falle großer Λ für $\lambda_\Lambda = 8h^2$ beobachtet werden, stellen jedoch keine physikalischen Gegebenheiten des Modells dar, was sich an der späteren Analyse der Flussgleichung mit einem skalenabhängigen Propagator $\Gamma_k^{(2)}$ zeigen wird. Eine obere Schranke kann lediglich aus Konsistenzbedingungen an die verwendeten Näherungsverfahren konstruiert werden. Fordert man, dass die Higgsmasse für wachsende λ_Λ stets größer wird, folgt die Einschränkung $\lambda_\Lambda < 3.72$.

Mit der Wetterich-Gleichung steht jedoch ein über die perturbative Beschreibung hinausgehender Zugang zur Quantenfeldtheorie zur Verfügung, so dass nun Abweichungen des UV-Potentials von der ϕ^4 Struktur untersucht werden sollen. Das Hauptaugenmerk ist dabei auf die Beeinflussung der unteren Higgsmassenschranke gerichtet.

$$U_\Lambda = \frac{m_\Lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24} \phi^4 + \Delta U(\phi^2).$$

3.4.1 Fermionische Fluktuationen

Zunächst wird wieder der einfache Fall rein fermionischer Fluktuationen untersucht. Das effektive Potential ist gegeben durch

$$U_0 = U_\Lambda + F(\phi).$$

Dabei stellt die Funktion $F(\phi)$ den Einfluss der fermionischen Fluktuationen dar.

$$F(\phi) = \frac{1}{16\pi^2} \left(-h^2 \Lambda^2 \phi^2 + h^4 \phi^4 \ln \frac{\Lambda^2 + h^2 \phi^2}{h^2 \phi^2} \right).$$

Im Folgenden gilt weiterhin die Kurzschreibweise $' \equiv \frac{\partial}{\partial \phi}$. Die Forderung, dass bei $\phi = v$ ein Minimum vorliegen soll, $U'_0(v) = 0$, legt den Parameter m_Λ^2 fest. Damit folgt für die Higgsmasse

$$m_H^2 = U''_0(v) - \frac{1}{v} U'_0(v) = \left[\Delta U'' - \frac{1}{v} \Delta U' + F'' - \frac{1}{v} F' + \frac{\lambda_\Lambda v^2}{6} \right]_{\phi=v}.$$

Setzt man für die Abweichung ΔU des gewöhnlichen Potentials einen ϕ^6 -Term an, $\Delta U = \frac{\tilde{g}_\Lambda}{6!} \phi^6 = \frac{g_\Lambda}{6! \Lambda^2} \phi^6$ mit der dimensionslosen Kopplungskonstante g_Λ , erhält man

$$m_H^2(\Lambda, \lambda_\Lambda, g_\Lambda) = \frac{m_t^4}{4\pi^2 v^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2m_t^2 \Lambda^2}{(\Lambda^2 + m_t^2)^2} \right] + \frac{v^2}{3} \lambda_\Lambda + \frac{v^4}{30\Lambda^2} g_\Lambda.$$

Der zusätzliche Term sorgt erneut für eine konstante positive Verschiebung, da $g_\Lambda > 0$ sein muss, um ein stabiles UV-Potential zu besitzen. Allerdings kann nun die ϕ^4 -Kopplungskonstante negative Werte annehmen, so dass die Verschiebung des Verlaufes der Masse jetzt über zwei Parameter erfolgt. Es ist nun möglich, für einen fest gewählten cutoff Λ die untere Schranke bei geeigneter Parameterwahl zu unterschreiten. Allerdings muss dabei der folgende Punkt berücksichtigt werden. Prinzipiell reicht bereits eine beliebig

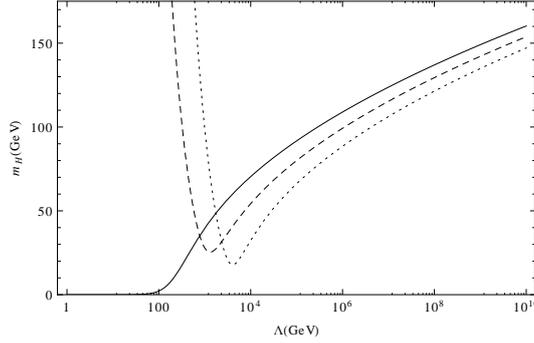


Abbildung 3.9: Unter Hinzunahme einer skalaren ϕ^6 -Kopplung ist es möglich, die untere Schranke der Higgsmasse zu unterschreiten. Durchgezogener Verlauf: $\lambda_\Lambda = g_\Lambda = 0$. Gestrichelter Verlauf: $\lambda_\Lambda = -0.1$, $g_\Lambda = 10$. Gepunkteter Verlauf: $\lambda_\Lambda = -0.2$, $g_\Lambda = 100$.

kleine positive Kopplungskonstante g_Λ , um eine stabile UV-Physik zu gewährleisten. Es ist jedoch möglich, dass das effektive Potential U_0 weitere Minima aufweist, falls g_Λ zu klein ist. Diese liegen dann meist bei sehr großen Feldamplituden und sind die globalen Minima der Theorie. Das IR-Vakuum bei $v = 246$ GeV wäre nur metastabil, so dass Zerfälle in das „echte“ IR-Vakuum möglich sind.

Zwei mögliche Kurvenverläufe, welche die untere Schranke der Higgsmasse für genügend große Λ unterschreiten, sind in Abb.[3.9] geplottet. Die durchgezogene Linie stellt dabei die bekannte Schranke dar und ist für die Parameter $\lambda_\Lambda = g_\Lambda = 0$ realisiert. Für den gestrichelten Verlauf wurden die UV-Parameter zu $\lambda_\Lambda = -0.1$ und $g_\Lambda = 10$ gewählt, während im gepunkteten Fall $\lambda_\Lambda = -0.2$ sowie $g_\Lambda = 100$ gilt. Die Änderung in der Kopplungskonstante g_Λ erfolgte lediglich, um ein stabiles IR-Vakuum bei $v = 246$ GeV realisieren zu können. Der wesentliche Unterschied in den Verläufen der Kurven im Vergleich zu der massiven ϕ^4 -Theorie ist der große Einfluss der dimensionsbehafteten ϕ^6 -Kopplung \tilde{g}_Λ ($\sim \Lambda^{-2}$) zur Higgsmasse im Falle kleiner cutoff ($\Lambda \approx v$). Da der cutoff allerdings jenseits der Skala des Vakuumerwartungswertes liegen sollte, ist dieser Bereich für unsere Betrachtungen nicht relevant. Darüber hinaus tritt dieser Effekt nicht mehr auf, wenn die bosonischen Fluktuationen in die Rechnungen mit einbezogen werden. Die Λ^{-2} -Struktur in der Higgsmasse erklärt nun das Verringern dieser im Bereich $\Lambda = 1$ TeV. Für größere cutoff kann dieser Term vernachlässigt werden, so dass nur noch das logarithmische Anwachsen der Higgsmasse zu beobachten ist, während die negative ϕ^4 -Kopplungskonstante λ_Λ die Higgsmasse gegenüber der Schranke verringert.

3.4.2 Fermionische und bosonische Fluktuationen

Es sollen nun die bisherigen Ergebnisse auf den Fall der erweiterten Meanfield-Näherung ausgedehnt werden, in welcher wir die bosonischen Fluktuationen mitberücksichtigen. Die benötigten Ableitungen des effektiven Potentials Gl.(3.7) lauten für allgemeine nackte Po-

tentiale:

$$\begin{aligned}
U'_0 &= U'_\Lambda - \frac{U_\Lambda^{(3)}}{64\pi^2} \left[2U''_\Lambda \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{U''_\Lambda} \right) - \frac{\Lambda^4 + 2\Lambda^2 U''_\Lambda}{\Lambda^2 + U''_\Lambda} \right] + F', \\
U''_0 &= U''_\Lambda - \frac{U_\Lambda^{(4)}}{64\pi^2} \left[2U''_\Lambda \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{U''_\Lambda} \right) - \frac{\Lambda^4 + 2\Lambda^2 U''_\Lambda}{\Lambda^2 + U''_\Lambda} \right] \\
&\quad - \frac{(U_\Lambda^{(3)})^2}{64\pi^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{U''_\Lambda} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2\Lambda^2 U''_\Lambda}{(\Lambda^2 + U''_\Lambda)^2} \right] + F''.
\end{aligned}$$

Da die beiden Gleichungen an der Stelle $\phi = v$ ausgewertet werden sollen, wird an das UV-Potential die Forderung gestellt, an dieser Stelle in einer Potenzreihe entwickelbar zu sein. Aus diesem Grund wird der folgende Ansatz vorgenommen:

$$U_\Lambda = \sum_{n=1} \lambda_{n,\Lambda} \frac{\Lambda^{2(2-n)}}{2^n n!} (\phi^2 - v^2)^n,$$

wobei die dimensionslosen Kopplungskonstanten $\lambda_{n,\Lambda}$ eingeführt und entsprechend normiert wurden. Diese dimensionslosen Parameter sollten von der gleichen Größenordnung sein, wenn man annimmt, dass die Natur auf der UV-Skala eine Theorie generiert, die zufällig verteilte Kopplungskonstanten besitzt. Anders ausgedrückt würde es unnatürlich erscheinen, wenn eine der dimensionslosen Kopplungskonstanten besonders groß im Vergleich zu den anderen wäre. Eine weitere nützliche Relation ist die Redefinition des Parameters $\lambda_{1,\Lambda}$, in dem erneut der Parameter m_s^2 eingeführt wird. Dies erfolgt wieder so, dass $U''_\Lambda(v) = m_s^2$ gelten soll, wodurch die anderen Kopplungskonstanten linear in die Higgs-masse und die Bestimmungsgleichung für m_s^2 ($U'_\Lambda(v) = 0$) eingehen. Damit gilt nun für m_s^2 :

$$m_s^2 = \lambda_{n,\Lambda} \Lambda^2 + \lambda_{2,\Lambda} v^2.$$

Für die Ableitungen des UV-Potentials an der Stelle $\phi = v$ gilt,

$$\begin{aligned}
U'_\Lambda(v) &= m_s^2 v - \lambda_{2,\Lambda} v^3, \quad U''_\Lambda(v) = m_s^2, \quad U_\Lambda^{(3)}(v) = 3\lambda_{2,\Lambda} v + \lambda_{3,\Lambda} \frac{v^3}{\Lambda^2}, \\
U_\Lambda^{(4)}(v) &= 3\lambda_{2,\Lambda} + \frac{6v^2}{\Lambda^2} \lambda_{3,\Lambda} + \frac{v^4}{\Lambda^4} \lambda_{4,\Lambda}.
\end{aligned}$$

Um nun den bosonischen Parameter m_s^2 zu bestimmen, muss die transzendente Gleichung

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{v} U'_0(v) = \frac{F'(v)}{v} + m_s^2 - \lambda_{2,\Lambda} v^2 - \frac{\lambda_{3,\Lambda} \frac{v^2}{\Lambda^2} + 3\lambda_{2,\Lambda}}{64\pi^2} \left[2m_s^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_s^2} \right) - \frac{\Lambda^4 + 2\Lambda^2 m_s^2}{\Lambda^2 + m_s^2} \right] \quad (3.16)$$

ausgewertet werden. Die Higgs-masse hängt somit nur noch von den drei unabhängigen Kopplungskonstanten $\lambda_{2,\Lambda}$, $\lambda_{3,\Lambda}$ und $\lambda_{4,\Lambda}$ sowie dem cutoff Λ ab. Unser Ziel ist nun, bei gegebenem cutoff die untere Schranke der Higgs-masse zu unterschreiten. Dafür wird zunächst die einfachstmögliche Erweiterung des UV-Potentials angesetzt, indem ein ϕ^6 -Term zugelassen wird und alle höheren Feldpotenzen nicht berücksichtigt werden, $\lambda_{n,\Lambda} = 0$ für $n \geq 4$. Die Higgs-masse ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned}
m_H^2 &= F''(v) - \frac{1}{v} F'(v) + \lambda_{2,\Lambda} v^2 - \frac{5v^2 \lambda_{3,\Lambda}}{64\pi^2 \Lambda^2} \left[2m_s^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_s^2} \right) - \frac{\Lambda^4 + 2\Lambda^2 m_s^2}{\Lambda^2 + m_s^2} \right] \\
&\quad - \frac{(3\lambda_{2,\Lambda} v + \lambda_{3,\Lambda} \frac{v^3}{\Lambda^2})^2}{64\pi^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{m_s^2} \right) - \frac{3\Lambda^4 + 2\Lambda^2 m_s^2}{(\Lambda^2 + m_s^2)^2} \right], \quad (3.17)
\end{aligned}$$

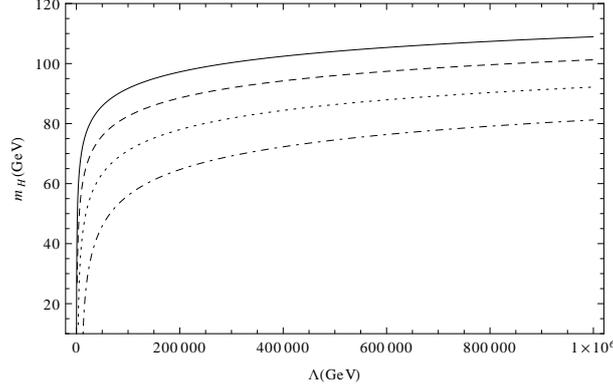


Abbildung 3.10: Plot $m_H(\Lambda)$ für verschiedene Parameter $\lambda_{2,\Lambda}$ und $\lambda_{3,\Lambda}$. Die durchgezogene Linie stellt die untere Schranke des ϕ^4 -Modells dar, wodurch $\lambda_{2,\Lambda} = \lambda_{3,\Lambda} = 0$ gilt. Gestrichelt: $\lambda_{2,\Lambda} = -0.1$, $\lambda_{3,\Lambda} = 10$. Gepunktet: $\lambda_{2,\Lambda} = -0.2$, $\lambda_{3,\Lambda} = 20$. Gestrichelt und gepunktet: $\lambda_{2,\Lambda} = -0.3$, $\lambda_{3,\Lambda} = 30$.

wobei $m_H^2 = U_0''(v) = U_0''(v) - U_0'(v)/v$ ausgenutzt wurde. Während der Parameter $\lambda_{2,\Lambda}$ beliebige reelle Werte annehmen darf, muss $\lambda_{3,\Lambda}$ positiv sein, damit das UV-Potential nach unten gebunden ist. Im Grenzfall $\lambda_{3,\Lambda} = 0$ (und $\lambda_{2,\Lambda} \geq 0$) wird das bereits bekannte Ergebnis der ϕ^4 -Theorie reproduziert.

In Abb.[3.10] sind verschiedene Kurvenverläufe der Higgsmasse in Abhängigkeit des cut-off dargestellt. Durch die Wahl eines negativen $\lambda_{2,\Lambda}$ kann, analog zum Fall rein fermionischer Fluktuationen, die untere Schranke der Higgsmasse (durchgezogene Linie, $\lambda_{2,\Lambda} = \lambda_{3,\Lambda} = 0$) verschoben werden. Allerdings muss die Kopplungskonstante $\lambda_{3,\Lambda}$ so gewählt werden, dass das Minimum bei $\phi = v = 246$ GeV das globale Minimum bleibt. Wählt man diesen Parameter zu klein existieren wieder weitere Minima, welche energetisch tiefer liegen als jenes bei $\phi = v$, so dass das beobachtete Vakuum nur metastabil wäre. Dieser Umstand wurde bei der Wahl der Parameter berücksichtigt, wodurch für die angegebenen Kurvenverläufe nur solche Parameterkombinationen gewählt wurden, die den Vakuumerwartungswert bei $\phi = v$ garantieren. Exemplarisch wurden in Abb.[3.11] das IR- und UV-Potential für die Parameter $\lambda_{2,\Lambda} = -0.1$, $\lambda_{3,\Lambda} = 10$ und $\Lambda = 10^5$ GeV geplottet.³

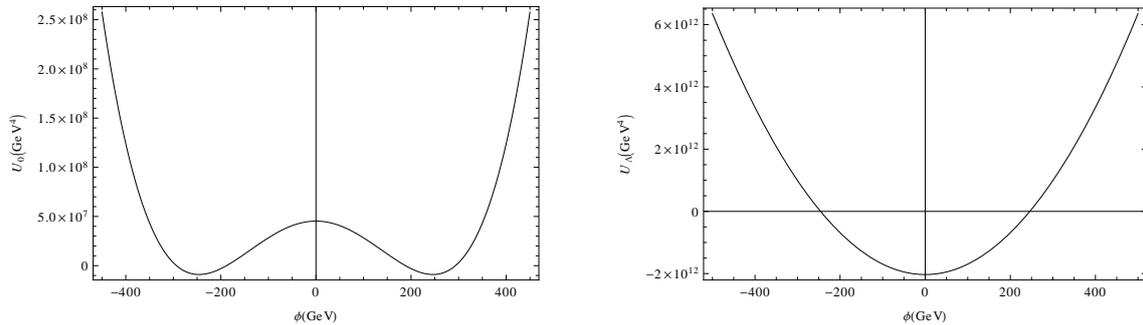


Abbildung 3.11: IR-Potential $U_0(\phi)$ (links) und UV-Potential $U_\Lambda(\phi)$ (rechts) der ϕ^6 -Theorie.

³Das IR-Potential wurde dabei um einen physikalisch irrelevanten Term von $-1.0244897 \cdot 10^{15}$ GeV⁴ verschoben.

Ein weiterer Umstand, der beachtet werden muss, ist, dass neben der Ausbildung mehrerer Minima nun auch ein Maximum des effektiven Potentials bei $\phi = 246 \text{ GeV}$ vorliegen kann. Dieser Effekt tritt vor allem für kleine cutoff Λ auf, so dass der Vakuumerwartungswert nun durch $v \neq 246 \text{ GeV}$ gegeben ist. Trotz dieser Punkte können durch den zusätzlichen Freiheitsgrad im UV-Potential Higgsmassen unterhalb der von der ϕ^4 -Theorie vorgegebenen Grenze konstruiert werden. Durch die Wahl eines negativen $\lambda_{2,\Lambda}$ scheint sich die Kurve in gewisser Weise nach unten verschieben zu lassen, so dass für einen festen cutoff keine feste untere Schranke mehr angegeben werden kann.

4 RG-Flussgleichungen des Higgs-Yukawa-Modells

Nachdem im vorherigen Kapitel gezeigt wurde, dass es in der Meanfield-Näherung möglich ist, die konstruierte Schranke der Higgsmasse durch Abweichungen des skalaren Potentials von der ϕ^4 Form zu unterschreiten, soll dies im weiteren Verlauf der Arbeit für die IR-Physik des Higgs-Yukawa-Modells untersucht werden, wenn eine Rückkopplung des Flusses der Kopplungskonstanten in die Flussgleichung berücksichtigt wird. Für die Trunkierung bedeutet dies, dass derselbe Ansatz an berücksichtigten Operatoren wie im Falle der Meanfield-Näherung gewählt wird. Der wesentliche Unterschied besteht jetzt jedoch darin, dass die Kopplungskonstanten als skalenabhängig betrachtet werden, so dass der RG-Fluss bedeutend verbessert wird, da nun Fluktuationen auf verschiedenen Skalen unterschiedlich beschrieben werden. Weiter wird eine Wellenfunktionsrenormierung der Felder berücksichtigt, so dass die Approximation der effektiven Mittelwertwirkung nun die folgende Form annimmt:

$$\Gamma_k = \int d^d x \left(\frac{Z_{\phi k}}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + U_k(\phi^2) + Z_{\psi k} \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + i h_k \phi \bar{\psi} \psi \right), \quad (4.1)$$

beziehungsweise

$$\Gamma_k = \int d^d x U_k(\phi^2) + \int_p \left(\frac{Z_{\phi k}}{2} \phi(p) p^2 \phi(-p) - Z_{\psi k} \bar{\psi}(p) \not{p} \psi(p) + \int_q i h_k \phi(p-q) \bar{\psi}(p) \psi(q) \right).$$

Entsprechend der Trunkierung besitzt die Fluktuationsmatrix $\Gamma_k^{(2)}$ die gleiche Struktur wie im Falle der Meanfield-Näherung, lediglich die Kopplungskonstanten werden skalenabhängig.

$$\Gamma_k^{(2)}(p, q) = \begin{pmatrix} Z_{\phi k} p^2 \delta_{p,q} + \int d^d x U_k''(\phi) e^{i(q-p)x} & i h_k \bar{\psi}(q-p) & -i h_k \psi^T(p-q) \\ -i h_k \bar{\psi}^T(q-p) & 0 & -Z_{\psi k} \not{p}^T \delta_{q,p} - i h_k \phi(p-q) \\ i h_k \psi(p-q) & -Z_{\psi k} \not{p} \delta_{p,q} + i h_k \phi(p-q) & 0 \end{pmatrix}.$$

Sowohl für den bosonischen als auch den fermionischen Regulator wird ebenfalls wie im Falle der Meanfield-Näherung der optimierte Regulator gewählt. Dieser war durch

$$\begin{aligned} R_{B,k}(p) &= Z_{\phi k} p^2 r_B(k^2/p^2) = Z_{\phi k} (k^2 - p^2) \Theta(k^2 - p^2), \\ R_{F,k}(p) &= Z_{\psi k} \not{p} r_F(k^2/p^2), \quad 1 + r_B = (1 + r_F)^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

gegeben. Darüber hinaus wird mit den masselosen inversen Mittelwertpropagatoren die folgende abkürzende Schreibweise eingeführt:

$$P(p) = p^2(1 + r_B(p)), \quad P_F(p) = p^2(1 + r_F(p))^2.$$

4.1 Fluss des skalaren Potentials

Die Flussgleichung des skalaren Potentials lässt sich wieder durch eine Projektion der effektiven Wirkung auf ein konstantes skalares Feld sowie verschwindende fermionische Felder erhalten.

$$\delta_0 \partial_t U_k = \frac{1}{2} \text{STr} \left(\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} \right) \Big|_{\substack{\phi=\phi_0 \\ \psi=\psi=0}}. \quad (4.3)$$

Dabei ist δ_0 der Volumenfaktor, welcher aus dem Raumzeitintegral der effektiven Mittelwertwirkung Γ_k resultiert. Unter der Projektion ergibt sich für das Inverse von $\Gamma_k^{(2)} + R_k$:

$$\left(\Gamma_k^{(2)} + R_k(p) \right)^{-1} \Big|_{\substack{\phi=\phi_0 \\ \psi=\psi=0}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_{\phi k} P(p) + U_k''} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-Z_{\psi k} (1+r_F) \not{p} - i h_k \phi_0}{Z_{\psi k}^2 P_F(p) + h_k^2 \phi_0^2} \\ 0 & \frac{-Z_{\psi k} (1+r_F) \not{p}^T + i h_k \phi_0}{Z_{\psi k}^2 P_F(p) + h_k^2 \phi_0^2} & 0 \end{pmatrix} \delta_{p,q}. \quad (4.4)$$

Nach der Multiplikation von $\partial_t R_k$ mit $(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}$ erhält man ein Objekt, welches in den Feldindizes bereits diagonal ist:

$$\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} = \delta_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial_t R_B}{Z_{\phi k} P(p) + U_k''(\phi_0)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\partial_t R_F^T(-p) [-Z_{\psi k} \not{p}^T (1+r_F) + i h_k \phi_0]}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 \phi_0^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial_t R_F(p) [Z_{\psi k} \not{p} (1+r_F) + i h_k \phi_0]}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 \phi_0^2} \end{pmatrix}.$$

Bei der Bildung der Superspur müssen nun lediglich noch die Spinorindizes sowie das Minuszeichen im fermionischen Sektor berücksichtigt werden. Darüber hinaus kürzt der Volumenfaktor δ_0 der Flussgleichung, der durch die Matrixmultiplikation bezüglich der „Impulsindizes“ entstand, den entstehenden δ_0 Term auf Grund der Projektion auf der linken Seite von Gl.(4.3). Nutzt man aus, dass die Spur der γ -Matrizen verschwindet sowie die Identität $\not{p}^2 = p^2 \mathbb{1}$, folgt

$$\partial_t U_k = \frac{1}{2} \int_p \frac{\partial_t R_B}{Z_{\phi k} P(p) + U_k''(\phi_0)} - d_\gamma \int_p \frac{Z_{\psi k} p^2 (1+r_F) \partial_t (Z_{\psi k} r_F)}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 \phi_0^2},$$

mit d_γ als Dimension der γ -Matrizen.

Um die Integrale zu lösen, muss nun für weitere Rechnungen eine spezielle Regulatorfunktion gewählt werden. Die Verwendung von Gl.(4.2) hat den mathematischen Vorteil, dass die Integrale analytisch berechenbar sind. Mit der Einführung der anomalen Dimensionen für das skalare und fermionische Feld

$$\eta_\phi := -\partial_t \ln Z_{\phi k}, \quad \eta_\psi := -\partial_t \ln Z_{\psi k} \quad (4.5)$$

sowie der Kurzschreibweise $v_d = (2^{d+1} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}))^{-1}$, ergibt sich für den Fluss des effektiven Mittelwertpotentials schließlich die folgende Differentialgleichung:

$$\partial_t U_k = \frac{4v_d}{d} k^{d+2} \left[\frac{Z_{\phi k}}{Z_{\phi k} k^2 + U_k''} \left(1 - \frac{\eta_\phi}{d+2} \right) - d_\gamma \frac{Z_{\psi k}^2}{Z_{\psi k}^2 k^2 + h_k^2 \phi_0^2} \left(1 - \frac{\eta_\psi}{d+1} \right) \right]. \quad (4.6)$$

4.2 Fluss der Yukawa-Kopplung

Um den Fluss der Yukawa-Kopplung zu bestimmen, zerlegt man zunächst das skalare Feld in seinen Vakuumerwartungswert und einen fluktuierenden Anteil.

$$\phi(x) = v_k + \sigma(x).$$

Der Vakuumerwartungswert des Feldes wird hierbei skalenabhängig sein, da dieser von der Form des skalaren Potentials u_k abhängt. Bei der Ableitung der Flussgleichung der Yukawa-Kopplung wird nun berücksichtigt, dass nur der vom Vakuumerwartungswert abweichende, fluktuierende Anteil des skalaren Feldes mit den fermionischen Feldern wechselwirkt, $h_k \sigma \bar{\psi} \psi$, während der Anteil des Vakuumerwartungswertes als Massenterm der Fermionen wirkt. Aus diesem Grund betrachten wir die Projektion auf den Operator $\sigma \bar{\psi} \psi$ anstatt der Projektion auf $\phi \bar{\psi} \psi$, wodurch sich als Projektionsregel auf die Yukawa-Kopplung folgende Gleichung ergibt:

$$\delta_0 \mathbb{1}_{d_\gamma} h_k = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \sigma(p'')} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(p')} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(q')} \Bigg|_{\substack{\sigma=\psi=\bar{\psi}=0 \\ p''=p'=q'=0}}$$

mit einer Einheitsmatrix im Spinorraum $\mathbb{1}_{d_\gamma}$. Damit gilt für die Flussgleichung der Yukawa-Kopplung:

$$\delta_0 \mathbb{1}_{d_\gamma} \partial_t h_k = \frac{1}{2i} \frac{\delta}{\delta \sigma(p'')} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(p')} \text{STr} \left[\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} \right] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(q')} \Bigg|_{\substack{\sigma=\psi=\bar{\psi}=0 \\ p''=p'=q'=0}}.$$

Als nächstes formen wir die Flussgleichung durch einen nützlichen Trick formal um, indem ein Operator $\tilde{\partial}_t$ eingeführt wird, der wie ∂_t als Skalenableitung fungiert, jedoch nur auf die k -Abhängigkeit des Regulators wirkt.

$$\tilde{\partial}_t := \sum_{i=\phi,\psi} \int dx \frac{\partial_t(Z_i r_i(x))}{Z_i} \frac{\delta}{\delta r_i(x)} \quad (4.7)$$

Der Operator innerhalb der Superspurs nimmt dadurch die folgende Form an:

$$\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} = \tilde{\partial}_t \ln(\Gamma_k^{(2)} + R_k) = \tilde{\partial}_t \ln(\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k) + \tilde{\partial}_t \ln \left(1 + \frac{\Delta \Gamma_k^{(2)}}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \right). \quad (4.8)$$

Zusätzlich wurde hierbei der Operator $\Gamma_k^{(2)} + R_k$ in einen Propagator- $\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k$ und einen Feldanteil $\Delta \Gamma_k^{(2)}$ aufgespalten.¹ Während im Propagatoranteil alle von den Feldfluktuationen unabhängigen Komponenten zusammengefasst sind,

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k &= (\Gamma_{k,0}^{(2)}(p) + R_k(p)) \delta_{p,q} \\ &= \begin{pmatrix} Z_{\phi k} P + U_k''(v_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Z_{\psi k} \not{p}^T (1 + r_F) - i h_k v_k \\ 0 & -Z_{\psi k} \not{p} (1 + r_F) + i h_k v_k & 0 \end{pmatrix} (p) \delta_{p,q}, \end{aligned}$$

¹Diese einfachen Umformungen der operatorwertigen Objekte sind natürlich nur möglich, da lediglich die Spur dieser Objekte in die Flussgleichung eingeht.

enthält der Feldanteil nur noch die feldabhängigen Fluktuationen,

$$\Delta\Gamma_k^{(2)} = \begin{pmatrix} \int d^d x (U_k''(\phi) - U_k''(v_k)) e^{i(q-p)x} & ih_k \bar{\psi} & -ih_k \psi^T \\ -ih_k \bar{\psi}^T & 0 & -ih_k \sigma \\ ih_k \psi & ih_k \sigma & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Damit braucht für die weiteren Rechnungen der erste Term auf der rechten Seite von Gl.(4.8) nicht mehr betrachtet werden, da dieser keine Abhängigkeiten der Felder mehr enthält und dadurch unter der Projektion verschwindet. Fasst man nun den Operator $(\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k)^{-1} \Delta\Gamma_k^{(2)}$ als eine Entwicklung in den Feldern auf, tragen durch die Projektion nur die Anteile zum Fluss bei, in denen jedes der drei Felder genau einmal vorkommt. Damit lässt sich zunächst der rein bosonische Sektor des feldabhängigen Anteils der Fluktuationsmatrix (4.9) vereinfachen. Entwickelt man $U_k''(\phi)$ in eine Taylorreihe um den Vakuumerwartungswert, kann aufgrund der Projektion lediglich der lineare Term zur Flussgleichung beitragen, alle höheren Terme werden durch die Projektion eliminiert.

$$\begin{aligned} \int d^d x (U_k''(\phi) - U_k''(v_k)) e^{i(q-p)x} &= \int d^d x (U_k''(\sigma + v_k) - U_k''(v_k)) e^{i(q-p)x} \\ &= \int d^d x [U_k''(v_k) + U_k'''(v_k) \sigma(x) + \mathcal{O}(\sigma^2) - U_k''(v_k)] e^{i(q-p)x} \\ &= U_k'''(v_k) \sigma(p - q) + \mathcal{O}(\sigma^2). \end{aligned}$$

Darüber hinaus lässt sich die Flussgleichung für die Yukawa-Kopplung weiter vereinfachen, indem man die Taylorentwicklung des Logarithmus benutzt. Diese ist gegeben durch $\ln x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \mp \dots$. Lediglich der kubische Anteil der Entwicklung wird unter der Projektion nicht verschwindende Anteile haben, so dass die Flussgleichung nun die folgende Struktur besitzt:

$$\delta_0 \mathbb{1}_{d_\gamma} \partial_t h_k = \frac{1}{6i} \frac{\delta}{\delta \sigma(p'')} \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\psi}(p')} \tilde{\partial}_t \text{STr} \left(\frac{\Delta\Gamma_k^{(2)}}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \right)^3 \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(q')} \Bigg|_{\substack{\sigma=\psi=\bar{\psi}=0 \\ p''=p'=q'=0}}.$$

Aufgrund der Diagonalstruktur des Operators $\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k$ bezüglich der „Impulsindizes“, lässt sich dieser relativ einfach invertieren. Im Wesentlichen wurde diese Matrixstruktur bereits bei den Berechnungen für den Fluss des skalaren Potentials invertiert, was Gl.(4.4) ergab. Im jetzigen Fall muss lediglich ϕ_0 durch v_k ersetzt werden. Damit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Gamma_k^{(2)}}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} &= \int_r \frac{\delta_{p,r}}{(\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k)(p)} \Delta\Gamma_k^{(2)}(r, q) = \left(\frac{\Delta\Gamma_k^{(2)}}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \right) (p, q) \\ &= ih_k \begin{pmatrix} \frac{U_k'''(v_k) \sigma}{(ih_k)(Z_{\phi k} P + U_k''')} & \frac{\bar{\psi}}{Z_{\phi k} P + U_k'''} & \frac{-\psi^T}{Z_{\phi k} P + U_k'''} \\ \frac{-Z_{\psi k}(1+r_F) \not{p} - ih_k v_k}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2} \psi & \frac{-Z_{\psi k}(1+r_F) \not{p} - ih_k v_k}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2} \sigma & 0 \\ \frac{Z_{\psi k}(1+r_F) \not{p}^T - ih_k v_k}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2} \bar{\psi}^T & 0 & \frac{Z_{\psi k}(1+r_F) \not{p}^T - ih_k v_k}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2} \sigma \end{pmatrix} (p, q). \end{aligned}$$

Das Ausführen der Matrixmultiplikationen beim Bilden der dritten Potenz des Operators $(\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k)^{-1} \Delta\Gamma_k^{(2)}$ und das Bilden der Superspur kann nun in einfacher Weise durchgeführt werden, ist jedoch mit hohem Schreibaufwand verbunden. Aus diesem Grund wird

hier auf eine detaillierte Rechnung verzichtet. Die einzelnen Schritte können grob in folgender Weise zusammengefasst werden. Zunächst müssen lediglich die Impulsabhängigkeiten der Felder betrachtet werden, während die anderen Impulsabhängigkeiten (beispielsweise von P oder P_F) für die Zwischenschritte eine untergeordnete Rolle spielen. Dies ist möglich, da auf Grund der Projektion Deltafunktionen entstehen, deren Auswertung dazu führt, dass alle auftretenden Funktionen verschiedener Impulsvariablen am Ende nur noch von einem einzigen Impuls in quadratischer Weise abhängen. Die Superspur sorgt schließlich für eine Integration über diesen Impuls. Weiter lässt sich die Rechnung vereinfachen, in dem man systematisch alle Terme vernachlässigt, in denen jedes Feld nicht genau einmal vorkommt. Dadurch entsteht schließlich eine Matrix, die in ihren Feldindizes diagonal ist. Damit gelangt man nach Bildung der Spuren sowie Ausnutzung von diversen Spuridentitäten bezüglich der Diracindizes wie $\text{tr}(\psi\psi) = -\text{tr}(\bar{\psi}\psi) = -\bar{\psi}\psi$ zu:

$$\begin{aligned} & \delta_0 \mathbb{1}_{d_\gamma} \partial_t h_k \\ &= \frac{1}{i} (ih_k)^3 \tilde{\partial}_t \frac{\delta}{\delta\sigma(p'')} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(p')} \int_p \int_q \int_r \sigma(p-q) \bar{\psi}(r-q) \psi(r-p) \left(\frac{1}{(Z_{\phi k} P + U_k'')(Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{v_k U_k'''}{(Z_{\phi k} P + U_k'')^2 (Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2)} + \frac{2(ih_k v_k)^2}{(Z_{\phi k} P + U_k'')(Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2)^2} \right) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(q')} \Big|_{p''=p'=q'=0}. \end{aligned}$$

Die Integrale bezüglich q und r resultieren aus den Matrixmultiplikationen, während die Integration über den Impuls p von der Superspur herrührt. Wird nun die Projektionsregel für die Yukawa-Kopplung angewandt, erhält man:

$$\begin{aligned} \partial_t h_k &= -i (ih_k)^3 \int_p \tilde{\partial}_t \left(\frac{1}{(Z_{\phi k} P + U_k'')(Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2)} - \frac{v_k U_k'''}{(Z_{\phi k} P + U_k'')^2 (Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{2(ih_k v_k)^2}{(Z_{\phi k} P + U_k'')(Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Die Yukawa-Kopplung tritt in allen Flussgleichungen, die benutzt werden, quadratisch auf, daher ist es nützlich, lediglich den Fluss der quadratischen Yukawa-Kopplung zu untersuchen. Dieser ergibt sich, wenn die eben abgeleitete Gleichung mit $2h_k$ multipliziert wird, $2h_k \partial_t h_k = \partial_t h_k^2$. Verwenden wir nun noch den optimierten Regulator (4.2), dann folgt für den Fluss von h_k^2 :

$$\begin{aligned} \partial_t h_k^2 &= \frac{8h_k^4 k^{d+2}}{2^d \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}) d} \left\{ \frac{\xi_\phi + \xi_\psi}{(Z_{\phi k} k^2 + U_k'')(Z_{\psi k}^2 k^2 + h_k^2 v_k^2)} - \frac{v_k U_k''' (2\xi_\phi + \xi_\psi)}{(Z_{\phi k} k^2 + U_k'')^2 (Z_{\psi k}^2 k^2 + h_k^2 v_k^2)} \right. \\ & \quad \left. + (ih_k)^2 \frac{2v_k^2 (\xi_\phi + 2\xi_\psi)}{(Z_{\phi k} k^2 + U_k'')(Z_{\psi k}^2 k^2 + h_k^2 v_k^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\text{mit } \xi_\phi = \frac{Z_{\phi k}}{Z_{\phi k} k^2 + U_k''} \left(1 - \frac{\eta_\phi}{d+2} \right), \quad \xi_\psi = \frac{Z_{\psi k}^2}{Z_{\psi k}^2 k^2 + h_k^2 v_k^2} \left(1 - \frac{\eta_\psi}{d+1} \right).$$

4.3 Anomale Dimensionen

Nachdem die Flussgleichungen des skalaren Potentials und der Yukawa-Kopplung hergeleitet wurden, muss noch der Fluss der beiden übrigen skalenabhängigen Größen unserer Trunkierung untersucht werden. Dies sind die Wellenfunktionsrenormierung des skalaren sowie des fermionischen Feldes. Deren Flussgleichungen lassen sich elegant mit Hilfe der anomalen Dimensionen der Felder ausdrücken, welche in Gl.(4.5) definiert wurden.

4.3.1 Anomale Dimension des Skalarfeldes

Betrachtet man die gewählte Trunkierung, lässt sich als Projektion auf die Wellenfunktionsrenormierung $Z_{\phi k}$ die folgende Regel finden:

$$\delta_0 Z_{\phi k} = \partial_{q'^2} \frac{\delta}{\delta \sigma(p')} \frac{\delta}{\delta \sigma(q')} \Gamma_k \Big|_{\substack{\sigma=\psi=\bar{\psi}=0 \\ p'=q'=0}}.$$

Hierbei projizieren wir wieder bezüglich der Fluktuationen σ um den Vakuumerwartungswert und nicht bezüglich des reinen Skalarfeldes ϕ . Diese Wahl der Projektion geschieht aus dem Grund, dass die Operatoren $(\partial_\mu \phi)^2$ und $(\partial_\mu \sigma)^2$ im Falle einer spontanen Symmetriebrechung unterschiedlich fließen. Von den Operatoren der Form $\phi^n (\partial_\mu \phi)^2$ übersteht damit der Anteil $v_k^n (\partial_\mu \phi)^2$ die Projektion, welcher für einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert den Fluss von $Z_{\phi k}$ wesentlich beeinflusst. In der sich damit ergebenden Flussgleichung

$$\delta_0 \partial_t Z_{\phi k} = \frac{1}{2} \partial_{q'^2} \frac{\delta}{\delta \sigma(p')} \frac{\delta}{\delta \sigma(q')} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \ln(\Gamma_k^{(2)} + R_k) \right] \Big|_{\substack{\sigma=\psi=\bar{\psi}=0 \\ p'=q'=0}}$$

spalten wir wie im Fall der Yukawa-Kopplung den Operator $\Gamma_k^{(2)} + R_k$ in einen Feld- und Propagatoranteil auf. Der feldunabhängige Term auf der rechten Seite von Gl.(4.8) verschwindet wieder durch die Projektionsvorschrift. Da bei der Projektion keine Funktionalableitungen bezüglich der Fermionfelder vorgenommen werden, können diese bereits zu Beginn der Rechnung Null gesetzt werden, was den Rechenaufwand bei den Matrixmultiplikationen erheblich vereinfacht. Für die Matrix $(\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k)^{-1} \Delta \Gamma_k^{(2)}$ erhält man dadurch das gleiche Ergebnis, wie im Falle der Yukawa-Kopplung für verschwindende fermionische Felder und einen zusätzlichen Term im rein bosonischen Sektor. Dieser resultiert daher, dass für die Projektion die Terme berücksichtigt werden müssen, die quadratisch in σ sind. Dies bedeutet, dass es für $U_k''(\phi)$ nicht ausreichend ist, die Taylorentwicklung nur bis zum linearen Glied auszuführen. Formal muss zunächst der quadratische Term in die weiteren Überlegungen mit einbezogen werden. Es gilt somit:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Gamma_k^{(2)}}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \Big|_{\bar{\psi}=\psi=0} &= \int_r (\Gamma_{k,0}^{(2)}(p) + R_k(p))^{-1} \delta_{p,r} \Delta \Gamma_k^{(2)}(r, q) \\ &= M_1(p) \sigma(p - q) + M_2(p) \int_{r'} \sigma(r') \sigma(p - q - r'), \end{aligned}$$

$$\text{mit } M_1(p) = i h_k \begin{pmatrix} \frac{1}{i h_k} \frac{U_k'''(v_k)}{Z_{\phi k} P + U_k''(v_k)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-Z_{\psi k} (1+r_F) \not{p} - i h_k v_k}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Z_{\psi k} (1+r_F) \not{p}^T - i h_k v_k}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } M_2(p) = \frac{\frac{1}{2} U_k^{(4)}(v_k)}{Z_{\phi k} P(p) + U_k''(v_k)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entwickelt man nun den Logarithmus innerhalb der Flussgleichung, können von der Tayloreihe zunächst nur der lineare und der quadratische Term zu dieser beitragen, da alle

höheren Ordnungen durch die Projektion verschwinden. Untersucht man den linearen Term genauer, zeigt sich, dass dieser ebenfalls keinen Beitrag zum Fluss der skalaren Wellenfunktionsrenormierung liefert. Diagrammatisch handelt es sich um einen Tadpol-Graphen, welcher nicht von den externen Impulsen abhängt, so dass dieser Beitrag unter der Ableitung nach einem externen Impuls verschwindet. Dies folgt auch sofort aus der obigen Rechnung, da der entsprechende Term in der Flussgleichung durch den quadratischen Anteil von σ in der Fluktuationmatrix gegeben ist, welcher als einziger Term relevant für das lineare Glied der Taylorreihe bezüglich der Projektion ist. Dieser ist unter Berücksichtigung der Projektion proportional zu $\partial_{q^2} \text{Tr}(M_2(p)) = 0$. Die entsprechende Flussgleichung vereinfacht sich damit zu:

$$\delta_0 \partial_t Z_{\phi k} = -\frac{1}{4} \partial_{q'^2} \frac{\delta}{\delta \sigma(p')} \frac{\delta}{\delta \sigma(q')} \tilde{\partial}_t \text{STr} \left(\frac{\Delta \Gamma_k^{(2)}}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \right)^2 \Bigg|_{\substack{\sigma=\psi=\bar{\psi}=0 \\ p'=q'=0}},$$

wobei nun der quadratische Term bezüglich σ innerhalb der Fluktuationmatrix vernachlässigt werden kann. Es gilt nun:

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(p')} \frac{\delta}{\delta \sigma(q')} \tilde{\partial}_t \text{STr} \left(\frac{\Delta \Gamma_k^{(2)}}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \right)^2 \Bigg|_{\substack{\sigma=0 \\ \psi=\bar{\psi}=0}} = \delta_{-q',p'} \int_p \tilde{\partial}_t \text{Str} [M_1(p)(M_1(p-q') + M_1(p+q'))].$$

Nach der Spurbildung und weiterer Anwendung der Projektionsregeln entstehen sowohl im fermionischen als auch im bosonischen Anteil Terme der Form $\partial_{q'^2} \int_p f(p)(f(p-q') + f(p+q'))|_{q'^2=0}$. Damit genügt es den Integranden bezüglich q' in einer Taylorreihe zu entwickeln und lediglich das quadratische Glied zu berücksichtigen. Nutzt man weiter aus, dass die daraus resultierenden Funktionen nur noch quadratisch von der Impulsvariablen abhängen, lassen sich die Ableitungen auf die folgende Weise umschreiben, $\partial_{p^\mu} f(p) = p_\mu \partial_{p^2} g(p^2)$ mit $f(p) = g(p^2)$. Dadurch vereinfacht sich die Flussgleichung zu:

$$\begin{aligned} \delta_0 \partial_t Z_{\phi k} &= \frac{\delta_0}{d} \int_p \tilde{\partial}_t p^2 \left[\left(\partial_{p^2} \frac{U_k'''(v_k)}{Z_{\phi k} P + U_k''} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2d_\gamma h_k^2 \left(p^2 \left(\partial_{p^2} \frac{Z_{\psi k}(1+r_F)}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2} \right)^2 - \left(\partial_{p^2} \frac{h_k v_k}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Die Auswertung des Integrals unter Verwendung des optimierten Regulators und der anomalen Dimensionen führt auf

$$\begin{aligned} \eta_\phi &= \frac{4v_d}{Z_{\phi k} d} \left[(U_k'''(v_k))^2 \frac{Z_{\phi k}^2 k^{d+2}}{(Z_{\phi k} k^2 + U_k'')^4} \right. \\ &\quad \left. + 2d_\gamma h_k^2 Z_\psi^{-2} k^{d-4} \left(\xi_\eta^4 + \xi_\eta^3 \frac{1-\eta_\psi}{d-2} - \xi_\eta^2 \left(\frac{1-\eta_\psi}{2d-4} + \frac{1}{4} \right) - \frac{(v_k h_k)^2}{Z_{\psi k}^2 k^2} \xi_\eta^4 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\text{mit } \xi_\eta = \frac{Z_{\psi k}^2 k^2}{Z_{\psi k}^2 k^2 + h_k^2 v_k^2}.$$

4.3.2 Anomale Dimension der Fermionfelder

Um aus der effektiven Mittelwertwirkung die Wellenfunktionsrenormierung des fermionischen Feldes zu extrahieren, muss die folgende Projektion erfolgen:

$$\delta_0 Z_{\psi k} = \frac{1}{dd_\gamma} \text{tr} \gamma^\mu \partial_{p'^\mu} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(p')} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(q')} \Bigg|_{\substack{\sigma=\psi=\bar{\psi}=0 \\ p'=q'=0}}.$$

Die Argumentationsstruktur bei der Ableitung der Flussgleichung folgt im Wesentlichen den gleichen Argumenten wie im vorangegangenen Abschnitt der Wellenfunktionsrenormierung des Skalarfeldes, so dass auf eine detaillierte Rechnung verzichtet wird. Relevant sind die Terme, in denen ψ und $\bar{\psi}$ genau einmal vorkommt, wodurch der quadratische Term der Entwicklung des Logarithmus wieder der einzige Term ist, der durch die Projektion nicht verschwindet.

$$\begin{aligned} \delta_0 Z_{\psi k} &= \frac{1}{2dd_\gamma} \text{tr} \gamma^\mu \partial_{p'^\mu} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(p')} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \ln(\Gamma_k^{(2)} + R_k) \right] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(q')} \Bigg|_{\substack{\sigma=\psi=\bar{\psi}=0 \\ p'=q'=0}} \\ &= -\frac{1}{4dd_\gamma} \text{tr} \gamma^\mu \partial_{p'^\mu} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(p')} \tilde{\partial}_t \text{STr} \left(\frac{\Delta \Gamma_k^{(2)}}{\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k} \right)^2 \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(q')} \Bigg|_{\substack{\sigma=\psi=\bar{\psi}=0 \\ p'=q'=0}}. \end{aligned}$$

Die Matrix $(\Gamma_{k,0}^{(2)} + R_k)^{-1} \Delta \Gamma_k^{(2)}$ wurde bereits bei der Betrachtung des Flusses der Yukawa-Kopplung bestimmt und kann hier auf den Fall $\sigma = 0$ vereinfacht werden. Nach Quadrierung dieser und anschließender Spurbildung sowie der Anwendung der funktionalen Ableitungen ist es sinnvoll, den entstehenden Integranden bis zum linearen Term in p' zu entwickeln. Die anderen Terme der Entwicklung verschwinden durch die Ableitung bezüglich p'^μ . Nach diesen formalen Schritten gelangt man schließlich zu

$$\partial_t Z_{\psi k} = \frac{2}{d} \int_p \tilde{\partial}_t h_k^2 p^2 \left(\frac{Z_{\psi k}(1+r_F)}{Z_{\psi k}^2 P_F + h_k^2 v_k^2} \partial_{p^2} \frac{1}{Z_{\phi k} P + U_k''} \right).$$

Die letzte Flussgleichung die noch bestimmt werden musste, lautet nach der Integration damit nun:

$$\eta_\psi = \frac{8v_d}{d} \frac{Z_{\phi k} h_k^2 k^{d+2}}{(Z_{\psi k}^2 k^2 + h_k^2 v_k^2)(Z_{\phi k} k^2 + U_k'')^2} \left(1 - \frac{\eta_\phi}{d+1} \right). \quad (4.12)$$

4.4 Dimensionslose Flussgleichungen

Um den Renormierungsgruppenfluss der einzelnen Parameter unseres Modells zu bestimmen, müssen die Differentialgleichungen (4.6), (4.10), (4.11) und (4.12) simultan gelöst werden. Dies wird im Allgemeinen nur noch numerisch möglich sein. Als problematisch kann sich hierbei auswirken, dass einige Größen dimensionsbehaftet sind. Die Dimensionen der einzelnen Objekte können an der Wirkung (dimensionslos) abgelesen werden und erzeugen natürlich einen eigenen trivialen Fluss. Die sich dadurch meist ergebenden numerischen Probleme können umgangen werden, indem man mit Hilfe einer Division durch entsprechende k -Potenzen zu dimensionslosen Größen übergeht.

Weiterhin äußerst nützlich ist, dass durch entsprechende Reskalierung der Felder und Kopplungskonstanten die explizite Abhängigkeit der Flussgleichungen von den Wellenfunktionsrenormierungen $Z_{\phi k}$ und $Z_{\psi k}$ eliminiert werden kann. Die Flussgleichungen hängen dann nur noch über die anomalen Dimensionen von $Z_{\phi k}$ und $Z_{\psi k}$ ab. Diese haben aber den entscheidenden Vorteil, dass sie algebraische Bestimmungsgleichungen besitzen und damit auf jeder Skala direkt durch die restlichen Parameter bestimmt sind.

Aus diesen beiden Gründen werden nun die folgenden redefinierten Größen eingeführt.

$$u_k = k^{-d}U_k, \quad \rho = Z_{\phi k}k^{2-d}\frac{1}{2}\phi_0^2, \quad \kappa_k = Z_{\phi k}k^{2-d}\frac{1}{2}v_k^2, \quad \tilde{h}_k^2 = Z_{\phi k}Z_{\psi k}^2k^{4-d}h_k^2.$$

Im Folgenden wird die redefinierte Yukawa-Kopplung ohne Tilde geschrieben. Aus dem jeweiligen Kontext ist eindeutig ersichtlich, ob es sich um die ursprüngliche Kopplungskonstante (es treten weitere dimensionsbehaftete Größen in der Gleichung auf) oder um die dimensionslose handelt. Damit ergibt sich mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \xi_\kappa &= 1 + u'_k(\kappa_k) + 2\kappa_k u''_k(\kappa_k), & \xi_\eta &= \frac{1}{1 + 2h_k^2\kappa_k}, \\ \tilde{\xi}_\phi &= \frac{1}{1 + u'_k(\kappa_k) + 2\kappa_k u''_k(\kappa_k)} \left(1 + \frac{\eta_\phi}{d+2}\right), & \tilde{\xi}_\psi &= \frac{1}{1 + 2h_k^2\kappa_k} \left(1 + \frac{\eta_\psi}{d+1}\right) \end{aligned}$$

das folgende differential-algebraische Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \partial_t u_k &= -du_k + (d-2 + \eta_\phi)\rho u'_k + \frac{4v_d}{d} \left[\frac{1 - \frac{\eta_\phi}{d+2}}{1 + u'_k + 2\rho u''_k} - d_\gamma \frac{1 - \frac{\eta_\psi}{d+1}}{1 + 2h_k^2\rho} \right] \\ \partial_t h_k^2 &= (d-4 + \eta_\phi + 2\eta_\psi)h_k^2 + \frac{16v_d}{d} h_k^4 \left[\frac{\tilde{\xi}_\phi + \tilde{\xi}_\psi}{\xi_\kappa(1 + 2h_k^2\kappa_k)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\kappa_k(3u''_k(\kappa_k) + 2\kappa_k u'''_k(\kappa_k))}{\xi_\kappa^2(1 + 2h_k^2\kappa_k)} (2\tilde{\xi}_\phi + \tilde{\xi}_\psi) - \frac{4h_k^2\kappa_k}{\xi_\kappa(1 + 2h_k^2\kappa_k)^2} (\tilde{\xi}_\phi + 2\tilde{\xi}_\psi) \right] \\ \eta_\phi &= \frac{8v_d}{d} \left[\frac{\kappa_k(3u''_k(\kappa_k) + 2\kappa_k u'''_k(\kappa_k))^2}{\xi_\kappa^4} \right. \\ &\quad \left. + d_\gamma h_k^2 \left(\xi_\eta^4 + \xi_\eta^3 \frac{1 - \eta_\psi}{d-2} - \xi_\eta^2 \left(\frac{1 - \eta_\psi}{2d-4} + \frac{1}{4} \right) - 2h_k^2\kappa_k \xi_\eta^4 \right) \right] \\ \eta_\psi &= \frac{8v_d}{d} h_k^2 \frac{1 - \frac{\eta_\phi}{d+1}}{(1 + 2h_k^2\kappa_k)\xi_\kappa^2}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Striche bedeuten hierbei Ableitungen bezüglich ρ , $' \equiv \partial_\rho$.

5 Schranken der Higgsmasse

Um die IR-Masse des skalaren Feldes zu untersuchen, muss dessen IR-Potential bekannt sein. Es gilt also für einen bestimmten cutoff ein mikroskopisches Potential festzulegen, die Flussgleichung bezüglich u_k auszuintegrieren und schließlich den Grenzfall $k \rightarrow 0$ zu studieren. Die Masse der Theorie ergibt sich dann als Krümmung des Potentials an dessen Minimum.

Durch die Komplexität des Flussgleichungssystems (4.13) ist es nötig, eine weitere Trunkierung vorzunehmen, die des effektiven Mittelwertpotentials u_k . Dies ist nötig, da das Potential auf einer Skala k prinzipiell beliebig viele Freiheitsgrade besitzen kann. Die einzige Einschränkung an dessen Form ist die \mathbb{Z}_2 -Symmetrie. Wesentlich für unsere Untersuchungen sind die Eigenschaften um das globale Minimum, so dass wir in der Lage sind, eine Entwicklung um dieses vornehmen zu können. Abhängig von der Phase, in der sich das System befindet, werden daher zwei verschiedene Parametrisierungen für das skalare Potential gewählt. Im Falle einer symmetrischen Phase ($\kappa_k = 0$) entwickeln wir das Potential um den Ursprung $\rho = 0$.

$$u_k = \sum_{n=1}^{n_{trun}} \frac{\lambda_{n,k}}{n!} \rho^n. \quad (5.1)$$

Liegt eine spontane Symmetriebrechung ($\kappa_k \neq 0$) vor, erfolgt eine Entwicklung um das Minimum $\rho = \kappa_k$:

$$u_k = \sum_{n=2}^{n_{trun}} \frac{\lambda_{n,k}}{n!} (\rho - \kappa_k)^n. \quad (5.2)$$

Die Wahl der Form des Potential in der spontan gebrochenen Phase (5.2) garantiert, dass das Potential bei $\rho = \kappa_k$ ein Extremum besitzt. Fordert man zusätzlich $\lambda_2 > 0$ ist dieses Extremum ein Minimum und κ_k stellt den Vakuumerwartungswert der Theorie dar, falls kein weiteres Minimum existiert, für welches das Potential negative Werte annimmt. Darüber hinaus sollte sichergestellt sein, dass die Kopplungskonstante vor der höchsten ρ -Potenz $\lambda_{n_{trun}}$ auf allen Skalen positiv und damit das Potential stets von unten gebunden ist.

Durch die Einschränkung des Potentials auf ein Polynom vom Grade n_{trun} muss lediglich der Fluss von einer endlichen Anzahl an Parametern bestimmt werden. Die Gln. (4.13) reduzieren sich damit auf ein System von $(n_{trun} + 1)$ gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung sowie zwei algebraischer Gleichungen. Dabei lassen sich die Flussgleichungen der λ_n ($n \geq 1$) im symmetrischen Fall durch

$$\partial_t \lambda_n = \partial_\rho^n (\partial_t u_k)|_{\rho=0} \quad (5.3)$$

bestimmen, während in der spontan gebrochenen Phase für den Fluss der λ_n ($n \geq 2$)

$$\partial_t \lambda_n = \partial_\rho^n (\partial_t u_k)|_{\rho=\kappa_k} + \partial_\rho^{n+1} u_k|_{\rho=\kappa_k} \partial_t \kappa_k = \partial_\rho^n (\partial_t u_k)|_{\rho=\kappa_k} + \lambda_{n+1} \partial_t \kappa_k \quad (5.4)$$

gilt (mit $\lambda_{n_{trun}+1} = 0$). Der Fluss des Vakuumerwartungswertes fügt sich in dieses Schema ein und folgt aus der Tatsache, dass die erste Ableitung des Potentials bei $\rho = \kappa_k$ verschwindet, $u'_k(\kappa_k) = 0 \Rightarrow \partial_t u'_k(\kappa_k) = 0$:

$$\partial_t \kappa_k = -\frac{1}{\lambda_2} \partial_\rho (\partial_t u_k)|_{\rho=\kappa_k}. \quad (5.5)$$

Diese Approximation des Potentials wird dann gute Ergebnisse für die Form von u_k um den Entwicklungspunkt liefern, wenn der Einfluss der Kopplungskonstanten der nicht berücksichtigten Operatoren $n > n_{trun}$ auf die Gestalt des Potentials vernachlässigbar ist. Eine Möglichkeit zu testen, ob die gewählte Näherung sinnvoll ist, wäre n_{trun} zu erhöhen. Haben die zusätzlich berücksichtigten Operatoren einen geringen Einfluss auf das Ergebnis, ist dies ein Indiz für eine gut gewählte Trunkierung, jedoch keine Garantie dafür.

Prinzipiell laufen die Rechnungen zur Bestimmung der Higgsmasse nach dem folgenden Schema ab. Das Verhalten der IR-Physik wird von den numerischen Werten der Parameter des UV-Potentials u_Λ sowie der nackten Yukawa-Kopplung h_Λ^2 abhängen. Damit der Higgseffekt im Infraroten auftritt, sollte sich das System für kleine k in der spontan gebrochenen Phase befinden. Im Wesentlichen sorgen die fermionischen Fluktuationen dafür, dass das System in diese Phase getrieben wird, so dass es beispielsweise möglich ist, im symmetrischen Regime zu starten und in die gebrochene Phase hineinzufließen, solange die bosonischen Parameter λ_n im Vergleich zu der Yukawa-Kopplung h_k^2 nicht zu groß sind. Ebenso sind Wechsel von der spontan gebrochenen Symmetrie in die symmetrische Phase denkbar. Beim Lösen der Flussgleichungen muss also darauf geachtet werden, ob bei bestimmten Skalen t_s das System zwischen den beiden Phasen wechselt. Auf Grund der durchgeführten Entwicklungen (5.1) und (5.2) des Potentials, lässt sich dieses streng genommen nur um die Entwicklungspunkte verlässlich beschreiben. Daher ist es von entscheidender Bedeutung die Parametrisierungen entsprechend anzupassen, falls ein Phasenübergang stattfindet. Dies führt zu einer Modifikation des Flussgleichungssystems, da dieses unterschiedliche algebraische Strukturen in den einzelnen Phasen aufweist.

Zusätzlich muss sichergestellt werden, dass wir nach Ausintegration der Fluktuationen bei der „richtigen“ IR-Physik ankommen. Aus diesem Grund wird für die Startparameter eine Feineinstellung vorgenommen, die dafür sorgt, dass der Fluss im Grenzfall $k \rightarrow 0$ die im Experiment bestimmten Standardmodellparameter korrekt reproduziert. Um den Vakuumerwartungswert bei $v = 246$ GeV zu fixieren, erfolgt im Ultravioletten ein Feintuning der skalaren Masse $\lambda_{1,\Lambda}$ im Falle eines symmetrischen Startpotentials beziehungsweise des Vakuumerwartungswertes κ_Λ , falls die Symmetrie spontan gebrochen ist. Damit die Top-Masse bei $m_t = 173$ GeV liegt, wird die nackte Yukawa-Kopplung h_Λ feinjustiert. Da das Produkt aus Yukawa-Kopplung und Vakuumerwartungswert die Top-Masse liefert, $m_t(k) = \sqrt{2h_k^2 \kappa_k}$, sollte für die IR-Yukawa-Kopplung $h_0 = \frac{173}{246}$ gelten.

5.1 Vernachlässigung der anomalen Dimensionen

In einer ersten einfachen Approximation vernachlässigen wir die anomalen Dimensionen in den Flussgleichungen (4.13). Der mathematische Vorteil dieser Vereinfachung besteht darin, dass sich das Problem auf ein gewöhnliches, gekoppeltes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für die Kopplungskonstanten des Potentials und die Yukawa-Kopplung reduziert und diese Differentialgleichungen eine einfachere Struktur erhalten. Dies kann auf der Ebene der effektiven Mittelwertwirkung dadurch erreicht werden, in dem die Ableitungsentwicklung lediglich in führender Ordnung betrachtet wird.

Beginnt man die Untersuchung wieder mit einem ϕ^4 -Startpotential, besteht die einfachste Trunkierung, die für das skalare Potential durchgeführt werden kann, aus einer ϕ^4 -Theorie. Damit gilt $n_{trun} = 2$:

$$u_k = \lambda_1 \rho + \frac{\lambda_2}{2} \rho^2 \quad \text{bzw.} \quad u_k = \frac{\lambda_2}{2} (\rho - \kappa_k)^2.$$

In beiden Fällen muss $\lambda_2 > 0$ auf allen Skalen k sein, damit keine Instabilitäten entstehen. Zusätzlich muss in der symmetrischen Phase $\lambda_{1,k} \geq 0$ gelten. Für negative $\lambda_{1,k}$ ist die Symmetrie des Systems spontan gebrochen, so dass ein nichtverschwindender Vakuumenerwartungswert existiert und die zweite Parametrisierung des Potentials für dessen Beschreibung gewählt wird. Ob das System einen Wechsel zwischen den beiden Phasen durchführt, kann damit an den Lösungen der Flussgleichungen von λ_1 beziehungsweise κ_k erkannt werden, welche an der Phasengrenze eine Nullstelle aufweisen.

Durch die gewählte Trunkierung müssen nun drei gekoppelte Differentialgleichungen simultan gelöst werden. Diese sind in der symmetrischen Phase ($d = 4$)

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_1 &= -2\lambda_1 + \frac{1}{32\pi^2} \left[8h_k^2 - \frac{3\lambda_2}{(1 + \lambda_1)^2} \right], \\ \partial_t \lambda_2 &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{18\lambda_2^2}{(1 + \lambda_1)^3} - 32h_k^4 \right], \\ \partial_t h_k^2 &= \frac{h_k^4}{8\pi^2} \frac{2 + \lambda_1}{(1 + \lambda_1)^2}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

und im Falle der spontanen Symmetriebrechung

$$\begin{aligned} \partial_t \kappa_k &= -2\kappa_k - \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{\lambda_2} \left[-\frac{3\lambda_2}{(1 + 2\lambda_2\kappa_k)^2} + \frac{8h_k^2}{(1 + 2\lambda_2\kappa_k)^2} \right], \\ \partial_t \lambda_2 &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{18\lambda_2}{(1 + 2\lambda_2\kappa_k)^3} - \frac{32h_k^4}{(1 + 2\lambda_2\kappa_k)^3} \right], \\ \partial_t h_k^2 &= \frac{h_k^4}{8\pi^2} \left[\frac{1}{(1 + 2\lambda_2\kappa_k)(1 + 2h_k^2\kappa_k)} \left(\frac{1}{1 + 2\lambda_2\kappa_k} + \frac{1}{1 + 2h_k^2\kappa_k} \right) \right. \\ &\quad - \frac{6\lambda_2\kappa_k}{(1 + 2\lambda_2\kappa_k)^2(1 + 2h_k^2\kappa_k)} \left(\frac{2}{1 + 2\lambda_2\kappa_k} + \frac{1}{1 + 2h_k^2\kappa_k} \right) \\ &\quad \left. - \frac{4h_k^2\kappa_k}{(1 + 2\lambda_2\kappa_k)(1 + 2h_k^2\kappa_k)^2} \left(\frac{1}{1 + 2\lambda_2\kappa_k} + \frac{2}{1 + 2h_k^2\kappa_k} \right) \right]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Durch die gegebenen Randbedingungen im Infraroten an die Top-Masse sowie den Vakuumenerwartungswert, muss die IR-Physik durch die spontan gebrochene Phase beschrieben werden, so dass für die Higgsmasse als zweite Ableitung des Potentials am Minimum gilt:

$$m_H = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{2\kappa_k u''(\kappa_k) k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{2\lambda_{2,k} \kappa_k k^2} = v_0 \sqrt{\lambda_{2,0}}.$$

Diese kann nun lediglich noch vom einzigen freien Parameter des UV-Potentials $\lambda_{2,\Lambda}$ sowie dem cutoff der Theorie abhängen.¹ Das kleinstmöglich wählbare $\lambda_{2,\Lambda}$ ist $\lambda_{2,\Lambda} = 0$, was voraussetzt, dass wir im ungebrochenen Fall mit positivem $\lambda_{1,\Lambda}$ starten. Das Gleichungssystem (5.6) wird nun numerisch im Intervall $[t_s, 0]$ gelöst, wobei t_s die Skala charakterisiert

¹Die anderen Parameter der Theorie sind durch die IR-Bedingungen an die Physik determiniert.

bei der die Funktion λ_1 eine Nullstelle aufweist, $\lambda_1(t = t_s) = 0$. Ab dieser Skala erhält das Higgsfeld einen Vakuumerwartungswert, wodurch die Fermionen in der Theorie eine Masse erhalten. Durch die nun erfolgende Entwicklung des Potentials um κ_k findet ein Wechsel zu den Bestimmungsgleichungen (5.7) für die physikalischen Parameter statt. Die Anfangswerte dieses Differentialgleichungssystems bei der Skala t_s ergeben sich dabei aus den Parametern der symmetrischen Phase bei dieser Skala, $\kappa(t_s) = 0$, $\lambda_2^{sb}(t_s) = \lambda_2^{sym}(t_s)$ und $h^{2sb}(t_s) = h^{2sym}(t_s)$. Besitzt κ_k keine weitere Nullstelle, liegt nun auf allen weiteren Skalen eine spontan gebrochene Symmetrie vor. In diesem Fall werden die Gln.(5.7) bis zu der willkürlich gewählten Skala $t_0 = -30$ gelöst. Bei dieser Skala sind bei allen durchgeführten Rechnungen längst die Flussgleichungen ausgefroren, so dass die sich hier ergebenden Werte als IR-Kopplungen angesehen werden können.² Durch das Ausfrieren der Flüsse spielt es darüber hinaus keine Rolle, dass die dimensionsbehaftete Skala k_0 für unterschiedliche cutoff Λ verschieden ist und so eigentlich Physik auf verschiedenen Skalen beschrieben wird. Durch die Untersuchungen bis $\Lambda = 10^8$ GeV gilt für die IR-Skala damit immer $k_0 < 10^{-5}$ GeV, wodurch die IR-Physik in unserem Fall gut beschrieben wird.

Beginnt man bei festem cutoff den Anfangswert $\lambda_{2,\Lambda}$ zu vergrößern, muss $\lambda_{1,\Lambda}$ verringert werden, um im Infraroten einen Vakuumerwartungswert von 246 GeV zu erhalten. Ab einem bestimmten $\lambda_{2,\Lambda} = \lambda_{2,\Lambda}^{ms}$ wird $\lambda_{1,\Lambda}$ schließlich verschwinden, so dass für $\lambda_{2,\Lambda} > \lambda_{2,\Lambda}^{ms}$ das System in der spontan gebrochenen Phase starten muss. Hier ist es im getesteten Parameterbereich direkt möglich von der cutoff-Skala $t = 0$ ($k = \Lambda$) bis zur IR-Physik ($t = -30$) das DGL-system (5.7) numerisch zu lösen, da das System keinen Wechsel der Phase vornimmt.

Die Resultate der Higgsmasse in Abhängigkeit von $\lambda_{2,\Lambda}$ und dem cutoff Λ sind in Abb.[5.1] zusammengefasst. Als cutoff der Theorie wurde ein Bereich zwischen 10^4 GeV und 10^8 GeV untersucht. Bei festem cutoff kann beobachtet werden, wie die Higgsmasse für größer werdende UV-Werte der ϕ^4 -Kopplung $\lambda_{2,\Lambda}$ wächst. Durch die Einschränkung des UV-Potentials u_Λ auf eine ϕ^4 -Theorie und die damit resultierende untere Schranke an die erlaubten Werte für $\lambda_{2,\Lambda}$ sorgen somit für eine untere Schranke an die Higgsmasse, exakt wie im Falle der Meanfield-Näherung. Es ist in der Theorie nicht möglich Higgsmassen unterhalb der in Abb.[5.1] blau dargestellten Werte zu realisieren.

Etwas komplexer gestaltet sich die Konstruktion der oberen Schranke. In dem hier vorgestellten Modell lässt sich $\lambda_{2,\Lambda}$ nicht beliebig erhöhen, da so beliebig große Nichtkonvexitäten im UV-Potential erzeugt werden würden. Dies ist aber auf Grund der verwendeten Methoden der Flussgleichung nicht möglich. Zur Erinnerung sei hier noch einmal die Konstruktion der effektiven Mittelwertwirkung als modifizierte Legendre-Transformation angeben:

$$\Gamma_k = \sup_J \left\{ -W_k[J] + \int J^T \Phi \right\} - \Delta S_k[\Phi] =: \tilde{\Gamma}_k - \Delta S_k[\Phi]. \quad (5.8)$$

Da $\tilde{\Gamma}_k$ als Legendre-Transformierte konvex ist, ist die einzige Nichtkonvexität, die im effektiven Mittelwertpotential u_k entstehen kann, durch den Regulatorterm gegeben. Je nach gewähltem Regulator ist damit vorgegeben, welche maximale Nichtkonvexität das UV-Potential u_Λ annehmen kann. Im Falle konstanter skalarer Felder sowie verschwindender fermionischer Felder ergibt sich für den Regulatorterm im Ultravioletten:

$$\Delta S_\Lambda[\phi_0] = \frac{1}{2} \int_p \delta_{-p} \phi_0 R_{B\Lambda}(p) \phi_0 \delta_p = \delta_0 \rho \Lambda^2 R_{B\Lambda}(0) \stackrel{(4.2)}{=} \delta_0 \rho \Lambda^4.$$

²Obwohl die IR-Physik $k = 0$ formal durch $t \rightarrow -\infty$ gegeben ist.

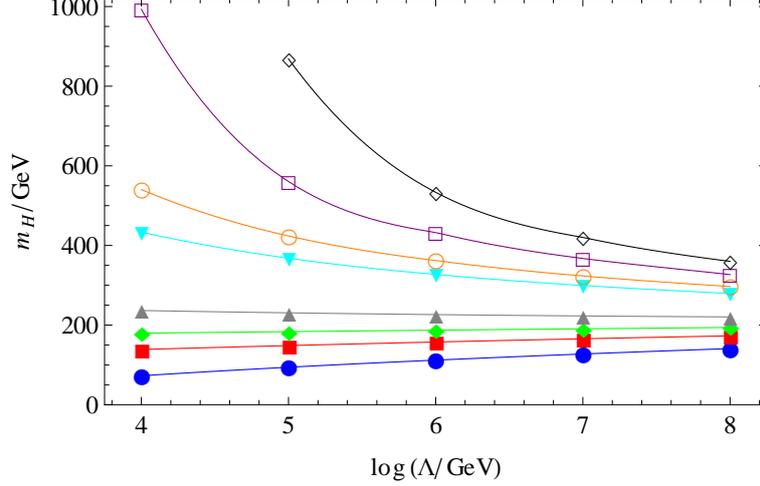


Abbildung 5.1: Darstellung der Higgsmasse m_H in Abhängigkeit des dekadischen Logarithmus $\log \Lambda$ bei verschiedenen UV-Kopplungen $\lambda_{2,\Lambda}$ für eine Trunkierung bis ρ^2 . Die zwischen den errechneten Werten verlaufenden Kurven wurden hierbei interpoliert, damit deren Verlauf besser gefolgt werden kann. Dargestellt sind $\lambda_{2,\Lambda} = 0$ (blau), $\lambda_{2,\Lambda} = 0.25$ (rot), $\lambda_{2,\Lambda} = 0.5$ (grün), $\lambda_{2,\Lambda} = 1$ (grau), $\lambda_{2,\Lambda} = 5$ (cyan), $\lambda_{2,\Lambda} = 10$ (orange), $\lambda_{2,\Lambda} = 100$ (purpur) und die obere Higgsmassenschranke (schwarz).

Betrachtet man als Maß für die Nichtkonvexität des UV-Potentials den Unterschied zwischen den Potentialwerten im Ursprung sowie derer am Minimum, kann als Bedingung an die UV-Parameter folgende Beziehung abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} (u_\Lambda(0) - u_\Lambda(\kappa_\Lambda))\Lambda^4 &= \frac{\lambda_{2,\Lambda}}{2}\kappa_\Lambda^2\Lambda^4 \leq \kappa_\Lambda\Lambda^4 \\ \Rightarrow \lambda_{2,\Lambda} &\leq \frac{2}{\kappa_\Lambda}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Die größtmögliche Nichtkonvexität des UV-Potentials ist durch das Gleichheitszeichen in Gl.(5.9) gegeben, wodurch alle Anfangswerte der Flussgleichungen (5.7) festgelegt sind. Wird dies berücksichtigt, bewegen sich die maximal zulässigen Werte für $\lambda_{2,\Lambda}$ in einem Bereich um $\lambda_{2,\Lambda} \approx 4400$. Diese Werte werden im Allgemeinen zwar vom cutoff abhängen, allerdings findet in dem hier untersuchten cutoff-Intervall keine allzu große Variation statt. Lediglich für den kleinsten gewählten cutoff $\Lambda = 10^4$ GeV weicht der Wert mit $\lambda_{2,\Lambda} = 4112.61$ deutlicher von den anderen ab. Die $\lambda_{2,\Lambda}$, mit denen die obere (schwarze) Kurve in Abb.[5.1] für die verschiedenen Λ konstruiert wurde, sind in Tab.[5.1] zu finden. Diese

Λ (GeV)	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
m_H^{\min} (GeV)	72.7	94.2	112	127.4	141
m_H^{\max} (GeV)	8893	869	533	420	360
$\lambda_{2,\Lambda}^{\max}$	4112.61	4402.44	4402.87	4403.36	4403.90

Tabelle 5.1: Zusammenhang zwischen dem cutoff Λ und der unteren m_H^{\min} sowie der oberen Higgsmassenschranke m_H^{\max} . Weiter sind für die jeweilig Λ die maximal wählbaren $\lambda_{2,\Lambda} = \lambda_{2,\Lambda}^{\max}$ angegeben, die durch Gl.(5.9) festgelegt sind. Berücksichtigt wurden Operatoren bis ρ^2 in der Trunkierung.

Kurve stellt gleichzeitig die in dem Modell maximal erreichbaren Higgsmassen dar. Bei der Darstellung der oberen Schranke wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Wert bei $\Lambda = 10^4$ GeV verzichtet. Dieser kann ebenfalls in Tab[5.1] gefunden werden.

Damit existiert für jeden cutoff Λ ein endliches Fenster an möglichen Werten der Higgs-masse, welches sich mit zunehmendem cutoff verengt. Higgsmassen außerhalb dieses Fensters lassen sich in der Theorie durch keinen Satz an UV-Parametern realisieren. Massen innerhalb des Fensters können durch entsprechende Wahl von $\lambda_{2,\Lambda}$ generiert werden. Darüber hinaus werden durch den RG-Fluss keine physikalischen Instabilitäten erzeugt, da für alle Skalen $0 \leq k \leq \Lambda$ die ϕ^4 -Kopplung $\lambda_{2,k}$ positiv ist. Sowohl die untere als auch die obere Schranke sind übersichtshalber noch einmal in Tab.[5.1] zusammen gefasst.

Höhere Trunkierungen und Variation des UV-Potentials

Im Folgenden werden wir nun die Trunkierung des skalaren effektiven Mittelwertpotentials erhöhen, um den Einfluss weiterer Operatoren zu berücksichtigen. Dies ist durch zwei Umstände motiviert. Zum einen dient die Erhöhung der Trunkierung als Test, ob die Kopplungskonstanten der vernachlässigten ρ -Potenzen einen geringen Einfluss auf die Ergebnisse ausüben. Zum Zweiten ist es von entscheidender Bedeutung weitere Operatoren zu berücksichtigen, wenn Abweichungen von dem ϕ^4 -UV-Potential untersucht werden sollen. Durch die hier verwendeten Methoden gibt es keinen Grund sich auf ϕ^4 -Startpotentiale einzuschränken, so dass grundsätzlich nahezu beliebige Anfangsbedingungen gewählt werden können.

Dennoch betrachten wir zunächst wieder lediglich nackte Potentiale mit $\lambda_{n,\Lambda} = 0$ für $n \geq 3$, um die Qualität der gewählten Trunkierung zu testen und konzentrieren uns zu Beginn auf die untere Schranke ($\lambda_{2,\Lambda} = 0$). Um sicherzustellen, dass die Potentiale immer von unten gebunden sind, wird $n_{trun} = 4$ als nächsthöhere Trunkierung des Potentials gewählt. Berücksichtigt man lediglich einen zusätzlichen ρ^3 -Term, wird dessen Kopplungskonstante sofort zu negativen Werten fließen. Dies gilt allgemein für alle zusätzlichen Terme mit ungeraden Potenzen in ρ , während für die geraden Potenzen sich positive Werte ergeben. Dieser Umstand wird sofort an den Flussgleichungen ersichtlich, da unter den gegebenen Anfangswerten für diese $\partial_t \lambda_n(t=0) = (-1)^{n+1} c_n h_\Lambda^{2n}$ mit einer positiven Konstante c_n an der Stelle $t = 0$ gilt. Die Gleichungssysteme ergeben sich nun aus

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda_1 &= -2\lambda_1 + \frac{1}{32\pi^2} \left[8h_k^2 - \frac{3\lambda_2}{(1+\lambda_1)^2} \right], & \partial_t \lambda_2 &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{18\lambda_2^2}{(1+\lambda_1)^3} - \frac{5\lambda_3}{(1+\lambda_1)^2} - 32h_k^4 \right], \\ \partial_t \lambda_3 &= 2\lambda_3 + \frac{1}{32\pi^2} \left[-\frac{162\lambda_2^3}{(1+\lambda_1)^4} + \frac{90\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)^3} - \frac{7\lambda_4}{(1+\lambda_1)^2} + 192h_k^6 \right], \\ \partial_t \lambda_4 &= 4\lambda_4 + \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{1944\lambda_2^4}{(1+\lambda_1)^5} - \frac{1620\lambda_2^2\lambda_3}{(1+\lambda_1)^4} + \frac{150\lambda_3^2}{(1+\lambda_1)^3} + \frac{168\lambda_2^3}{(1+\lambda_1)^3} - 1536h_k^8 \right], \\ \partial_t h_k^2 &= \frac{h_k^4}{8\pi^2} \frac{2+\lambda_1}{(1+\lambda_1)^2} \end{aligned}$$

im symmetrischen Fall und aus

$$\begin{aligned}
\partial_t \kappa_k &= -2\kappa_k - \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{\lambda_2} \left[-\frac{3\lambda_2 + 2\kappa_k \lambda_3}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^2} + \frac{8h_k^2}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^2} \right], \\
\partial_t \lambda_2 &= 2\kappa_k \lambda_3 + \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{2(3\lambda_2 + 2\kappa_k \lambda_3)^2}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^3} - \frac{5\lambda_3 + 2\kappa_k \lambda_4}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^2} - \frac{32h_k^4}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^3} \right] + \lambda_3 \partial_t \kappa_k, \\
\partial_t \lambda_3 &= 2\lambda_3 + 2\kappa_k \lambda_4 + \frac{1}{32\pi^2} \left[-\frac{6(3\lambda_2 + 2\kappa_k \lambda_3)^3}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^4} + \frac{6(3\lambda_2 + 2\kappa_k \lambda_3)(5\lambda_3 + 2\kappa_k \lambda_4)}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{7\lambda_4}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^2} + \frac{192h_k^6}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^4} \right] + \lambda_4 \partial_t \kappa_k, \\
\partial_t \lambda_4 &= 4\lambda_4 + \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{24(3\lambda_2 + 2\kappa_k \lambda_3)^4}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^5} + \frac{56(3\lambda_2 + 2\kappa_k \lambda_3)\lambda_4}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^3} + \frac{6(5\lambda_3 + 2\kappa_k \lambda_4)^2}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{36(3\lambda_2 + 2\kappa_k \lambda_3)^2(5\lambda_3 + 2\kappa_k \lambda_4)}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^4} - \frac{1536h_k^8}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^5} \right], \\
\partial_t h_k^2 &= \frac{h_k^4}{8\pi^2} \left[\frac{1}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)(1 + 2h_k^2 \kappa_k)} \left(\frac{1}{1 + 2\lambda_2 \kappa_k} + \frac{1}{1 + 2h_k^2 \kappa_k} \right) \right. \\
&\quad - \frac{6\lambda_2 \kappa_k + 4\lambda_3 \kappa_k^2}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)^2(1 + 2h_k^2 \kappa_k)} \left(\frac{2}{1 + 2\lambda_2 \kappa_k} + \frac{1}{1 + 2h_k^2 \kappa_k} \right) \\
&\quad \left. - \frac{4h_k^2 \kappa_k}{(1 + 2\lambda_2 \kappa_k)(1 + 2h_k^2 \kappa_k)^2} \left(\frac{1}{1 + 2\lambda_2 \kappa_k} + \frac{2}{1 + 2h_k^2 \kappa_k} \right) \right]
\end{aligned}$$

für die spontan gebrochene Symmetrie in $d = 4$.

Beginnt man nun diese Gleichungssysteme zu lösen, kann das Potential u_k theoretisch wesentlich komplexere Strukturen annehmen, als die beiden bisher betrachteten. Grundsätzlich ist es möglich, dass sich bereits ein Minima ausbildet, bevor $\lambda_{1,k}$ verschwindet. Darüber hinaus könnten mehrere Minima entstehen, so dass sich die Überprüfung, ob das Potential um den Vakuum Erwartungswert entwickelt wird, als wesentlich komplizierter erweist. Es stellt sich jedoch heraus, dass sich im Falle der unteren Higgsmassenschranke das System wie für die ρ^2 Trunkierung verhält, so dass als Bedingung der Phasengrenze wieder das Verschwinden von $\lambda_{1,k}$ betrachtet werden kann. Dies gilt ebenfalls für eine Trunkierung bis ρ^6 .³ Die Massen der unteren Schranke für verschiedene Trunkierungen finden sich in Tab.[5.2]. Die zusätzliche Berücksichtigung von Operatoren der Form ρ^3 und ρ^4 beeinflusst die untere Schranke um lediglich 2 GeV (relativer Unterschied von max. 3%), während Entwicklungen bis ρ^6 keine nennenswerten Einflüsse mehr auf die Ergebnisse haben. Abweichung zu der ρ^4 Trunkierung ergeben sich lediglich in der zweiten oder dritten Nachkommastelle, wodurch der bedeutend höhere Rechenaufwand nicht mehr gerechtfertigt ist.

Trunkierung \ Λ (GeV)	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
ρ^2	72.7	94.2	112.0	127.4	141.0
ρ^4	70.5	92.4	110.4	125.8	139.3
ρ^6	70.5	92.4	110.4	125.8	139.3

Tabelle 5.2: Higgsmassen in GeV für verschiedene cutoff und Trunkierungen. In der linken Spalte sind die jeweils höchsten berücksichtigten Potenzen angegeben.

³Die entsprechenden Gleichungen für die Parameter des Potentials u_k lassen sich leicht mittels eines Computeralgebrasystems aus Gl.(5.3)-Gl.(5.5) und Gl.(4.13) bestimmen.

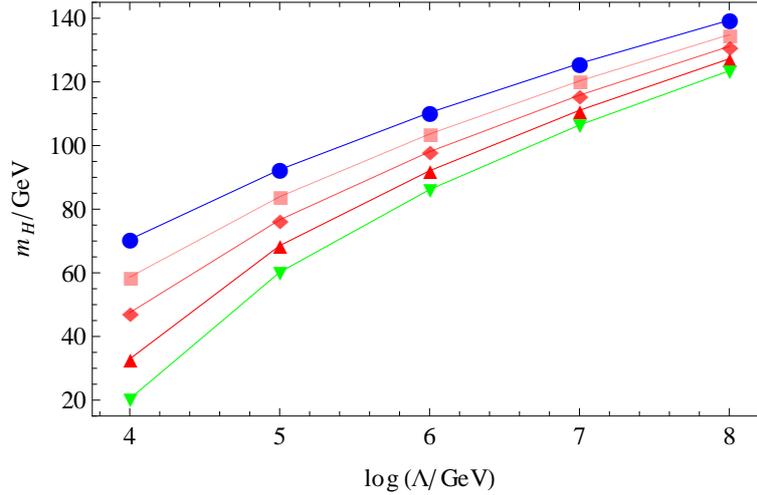


Abbildung 5.2: Darstellung der Higgsmasse m_H in Abhängigkeit des dekadischen Logarithmus $\log \Lambda$ bei verschiedenen UV-Kopplungen $\lambda_{2,\Lambda}$ und $\lambda_{3,\Lambda}$ für eine Trunkierung bis ρ^4 . Dargestellt sind die untere Schranke $\lambda_{2,\Lambda} = \lambda_{3,\Lambda} = 0$ (blau), sowie für $\lambda_{3,\Lambda} = 0.5$ die roten Werte $\lambda_{2,\Lambda} = -0.03$ (blaß), $\lambda_{2,\Lambda} = -0.05$, $\lambda_{2,\Lambda} = -0.07$ (kräftig) und die Kombination $\lambda_{3,\Lambda} = 2$, $\lambda_{2,\Lambda} = -0.1$ (grün).

Die ρ^4 -Trunkierung erlaubt nun Abweichungen von dem ϕ^4 -Startpotential zu untersuchen. Die interessante Frage in diesem Zusammenhang lautet dabei wieder, ob es möglich ist, die gefundene untere Schranke der Higgsmasse zu verschieben. Um dies zu realisieren, wird für das UV-Potential ein positiver Anfangswert der ϕ^6 -Kopplung $\lambda_{3,\Lambda}$ gewählt, wodurch negative $\lambda_{2,\Lambda}$ zulässig sind. In Abb.[5.2] sind die hieraus resultierenden Kurvenverläufe dargestellt. Dabei wurden die Startparameter $\lambda_{2,\Lambda}$ und $\lambda_{3,\Lambda}$ so gewählt, dass in der symmetrischen Phase gestartet wird und sich die Flussgleichungen in dem Sinne gutartig verhalten, dass die Skala t_s , bei der der Phasenübergang stattfindet, wieder durch die Nullstelle von $\lambda_{1,k}$ beschrieben wird. Dies setzt voraus, dass sowohl $\lambda_{2,k}$ als auch $\lambda_{3,k}$ ihr Vorzeichen wechseln, bevor t_s erreicht ist. Weiter wurde sichergestellt, dass die Kopplungskonstante $\lambda_{4,k}$ auf den Skalen $t \neq 0$ positiv ist. Trotz dieser Reihe an Bedingungen lassen sich ohne Probleme nackte Kopplungen finden, für die diese Einschränkungen erfüllt sind und die ein Unterschreiten der Higgsmassenschranke erlauben.

Betrachtet man die relative Abweichung der Higgsmasse von der unteren Schranke bei festgehaltenen $\lambda_{2,\Lambda}$ und $\lambda_{3,\Lambda}$ als Funktion des cutoff, nimmt diese mit wachsendem Λ ab. Zudem sinkt die Skala t_s , an welcher der spontane Symmetriebruch stattfindet, bei festem cutoff aber kleiner werdenden Higgsmassen, vgl. Tab.[5.3]. Dies kann folgendermaßen erklärt werden: Wird das System durch den Gaußschen Fixpunkt dominiert, sollte die Variation der UV-Werte der Kopplungen λ_n mit $n \geq 3$ keinen allzu großen Einfluss auf die Infrarotphysik haben, da es sich bei diesen um irrelevante Richtungen im Theorieraum in der Universalitätsklasse des Gaußschen Fixpunktes handelt. Dadurch werden unabhängig von der Wahl der Startparameter die Koppungskonstanten im Infraroten zwangsläufig klein. Der Unterschied zum bisherigen Fall besteht nun darin, dass durch die Wahl eines positiven $\lambda_{3,\Lambda}$ der Definitionsbereich der Kopplungskonstante λ_2 im Ultravioletten erweitert werden kann ($\lambda_{2,\Lambda} < 0$). Damit ergibt sich für die Lösungstrajektorien im Theorieraum die folgende Situation. Da die irrelevanten Kopplungen, die Abweichungen von der ϕ^4 -Theorie liefern, in der Universalitätsklasse des Gaußschen Fixpunktes durch den Fluss ins Infrarote

$\Lambda(\text{GeV})$	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$\Delta m_H(-0.3, 0.5)$	16.8 %	9.2 %	6.1 %	4.4 %	3.3 %
$\Delta m_H(-0.5, 0.5)$	32.6 %	17.1 %	11.1 %	7.9 %	5.9 %
$\Delta m_H(-0.7, 0.5)$	53.3 %	25.9 %	16.6 %	11.7 %	8.7 %
$\Delta m_H(-0.1, 2)$	77.0 %	34.9 %	21.9 %	15.4 %	11.4 %
$t_s(0, 0)$	-2.665	-4.703	-6.816	-8.967	-11.143
$t_s(-0.3, 0.5)$	-2.831	-4.801	-6.885	-9.020	-11.185
$t_s(-0.5, 0.5)$	-3.005	-4.889	-6.943	-9.064	-11.220
$t_s(-0.7, 0.5)$	-3.265	-4.994	-7.009	-9.111	-11.256
$t_s(-0.1, 2)$	-3.680	-5.111	-7.077	-9.158	-11.292

Tabelle 5.3: Für die einzelnen Λ sind die relativen Abweichungen der Higgsmasse von der unteren Schranke $\Delta m_H(\lambda_{2,\Lambda}, \lambda_{3,\Lambda}) = 1 - \frac{m_H(\lambda_{2,\Lambda}, \lambda_{3,\Lambda})}{m_H(0,0)}$ sowie die Skala der Phasenübergänge $t_s(\lambda_{2,\Lambda}, \lambda_{3,\Lambda})$ angegeben.

klein werden, nähern sich deren Trajektorien im Theorieraum denjenigen an, die durch die Flussgleichungen mit ϕ^4 -Startpotential gegeben sind. Dadurch kann die Infrarotphysik einer Theorie, die bei einem cutoff Λ durch Anfangsbedingungen mit $\lambda_{2,\Lambda} < 0$ und $\lambda_{3,\Lambda} > 0$ gegeben ist, äquivalent durch eine weitere Theorie beschrieben werden, die bei einem cutoff $\Lambda' < \Lambda$ durch die Parameter $\lambda_{2,\Lambda} \geq 0$ und $\lambda_{n,\Lambda} = 0$ ($n \geq 3$) definiert ist. Im eigentlichen Sinne erfolgt also keine Verschiebung der Higgsmassengrenze in Abb.[5.2] in Richtung kleinerer Higgsmassen, sondern vielmehr in Richtung größerer cutoff.⁴ Dies erklärt die Realisierung von Higgsmassen innerhalb des bisher verbotenen Bereichs unterhalb der Higgsmassenschranke und den Effekt, dass die Abweichungen von dieser mit größer werdendem cutoff abnehmen, da hier die Anstiege der Higgsmasse kleiner sind.

Die Erklärung, dass die Skala der Phasengrenze t_s bei festem cutoff aber kleiner werdender Higgsmasse sinkt, ordnet sich ebenfalls in dieses Bild ein. Das Heranfließen an die ϕ^4 -Trajektorien kostet „RG-Zeit“. Damit verringert sich zwangsläufig t_s , bei den hier als gutartig bezeichneten Flüssen, da zunächst Skalen benötigt werden, um ein Fließen zu positiven $\lambda_{2,\Lambda}$ und negativen $\lambda_{3,\Lambda}$ wie im Falle des ϕ^4 -Startpotentials zu ermöglichen.

Nach dem wir nun den Fall kleiner Startparameter diskutiert haben, wenden wir uns jetzt dem Fall großer $\lambda_{2,\Lambda}$ zu. Konzentriert man sich zunächst wieder auf den Fall $\lambda_{n \geq 3, \Lambda} = 0$, kann folgendes festgestellt werden. Die Anfangswerte liefern für die Flussgleichungen am cutoff Strukturen der Form $\partial_t \lambda_n(0) = (-1)^{n+1} (c_n h_\Lambda^{2n} - d_n \lambda_{2,\Lambda}^n)$ mit positiven c_n und d_n . Ab einer gewissen Größe von $\lambda_{2,\Lambda}$ ändert sich damit das Vorzeichen des Anstieges der Kopplungen an der Stelle $t = 0$, so dass zunächst im Gegensatz zum Fall $\lambda_{2,\Lambda} = 0$ die ungeraden λ_n ins Positive fließen. Damit die trunkierten Potentiale keine Instabilitäten aufweisen, sollte also die höchste berücksichtigte Potenz der Feldoperatoren ρ ungerade sein. Dabei kann allerdings immer noch das Problem auftreten, dass die Funktionen $\lambda_{2n+1}(t)$ Nullstellen für $t \neq 0$ besitzen, so dass das Potential in einem gewissen Skalenbereich nicht von unten gebunden ist. Dies stellt jedoch kein reales Problem an die Physik dar, sondern ist lediglich ein Trunkierungsartefakt, das dadurch auftritt, dass nicht das volle Potential u_k untersucht wird, sondern lediglich eine ausgewählte Anzahl von Operatoren. Dass das volle Potential keine Instabilitäten besitzen kann, ist direkt durch die Wetterich-Gleichung gegeben. Es sei noch einmal daran erinnert, dass die einzige Nichtkonvexität des effektivi-

⁴Die Verschiebung der Higgsmassen erfolgt hierbei auf nichtlineare Weise, da die $\lambda_{n \geq 3, \Lambda}$ nichtlinear in die Flussgleichungen eingehen.

Trunkierung	ρ^3	ρ^4	ρ^5	ρ^6
$m_H(\text{GeV})$	548.9	547.4	547.0	547.0

Tabelle 5.4: Higgsmasse für $\lambda_{2,\Lambda} = 50$ und $\Lambda = 10^5 \text{ GeV}$ in verschiedenen Trunkierungen ($\lambda_{n>2,\Lambda} = 0$).

von Mittelwertpotentials durch den Regulatorterm erzeugt wird, vgl. Gl.(5.8). Dieser ist lediglich quadratisch in den Feldern, so dass für eine wechselwirkende Theorie das effektive Mittelwertpotential für große Feldamplituden stets konvex sein muss. Man ist durch die Flussgleichung dadurch per Konstruktion vor Instabilitäten geschützt. Wäre das volle Potential bekannt, würde dieser Effekt nicht auftreten. Darüber hinaus beeinflussen diese unphysikalischen Effekte in keiner Weise die Physik um den Vakuumerwartungswert der Theorie, was zu erwarten war, da die Trunkierungen so konstruiert wurden, dass dieser Bereich sinnvoll beschrieben wird. Das Versagen dieser für große Feldamplituden ist daher als eingeschränkte Behandlung des Potentials zu verstehen und kein realer Effekt. Dass die gewählten Trunkierungen trotz dieses Mangels das Potential um den Vakuumerwartungswert sinnvoll beschreiben, ist in Tab.[5.4] ersichtlich. Dabei wurden die Parameter $\lambda_{2,\Lambda}$ und Λ so gewählt, dass sich für die einzelnen Approximationen des Potentials verschiedene Trunkierungsartefakte ergeben. Werden Feldpotenzen bis ρ^3 berücksichtigt, ist das Potential u_k stets von unten gebunden, da $\lambda_{3,k}$ auf allen Skalen positiv ist. Für ρ^4 und ρ^6 sind die Kopplungskonstanten λ_4 beziehungsweise λ_6 negativ, so dass Instabilitäten in den trunkierten Potentialen auftreten. Diese entstehen jedoch erst für sehr große Feldamplituden, bei denen die Entwicklung um den Vakuumerwartungswert keine gute Approximation mehr darstellt. Bei der Trunkierung, in der Operatoren bis ρ^5 zugelassen werden, ist zwar $\lambda_{5,k}$ sowohl im UV- ($k \lesssim \Lambda$) als auch im IR-Bereich ($k \gtrsim 0$) positiv, allerdings weist die Funktion $\lambda_{5,k}$ zwei Nullstellen auf. Damit fließt die Theorie zwischenzeitlich durch einen Bereich, in dem das Potential nicht von unten gebunden ist. Da die Higgsmassen in Tab.[5.4] von diesen Effekten für große ρ keine signifikanten Änderungen erfahren, können diese Trunkierungsfehler ignoriert werden.

Betrachtet man nun den Fall großer $\lambda_{2,\Lambda}$ unter der Berücksichtigung höherer Trunkierungen, ist man mit dem Problem konfrontiert, dass die Anstiegsbeträge der Kopplungskonstanten an den Startwerten ($\partial_t \lambda_n(t=0)$) sehr groß werden. Dadurch beginnt u_k weitere Minima auszubilden, so dass unter Umständen sehr häufig der Entwicklungspunkt gewechselt werden muss, um eine Beschreibung um den Vakuumerwartungswert vornehmen zu können. Die Konstruktion der oberen Schranke gestaltet sich dadurch wesentlich komplizierter als die Berechnung der unteren Massengrenze für höhere Trunkierungen. Da zudem der Einfluss der hier vernachlässigten anomalen Dimensionen auf die Flussgleichungen für große $\lambda_{2,\Lambda}$ steigen wird, konzentrieren wir uns im weiteren Verlauf nur auf Anfangswerte bis $\lambda_{2,\Lambda} = 100$.

In Abb.[5.3] finden sich die Werte der unteren Higgsmassenschranke sowie die Ergebnisse für $\lambda_{2,\Lambda} = 100$. Zwischen diesen beiden Verläufen kann wieder durch entsprechende Wahl von $\lambda_{2,\Lambda}$ jede Higgsmasse angenommen werden. Neben diesen Werten wurden blauschattiert die Higgsmassen der ρ^2 Trunkierung angegeben. Wesentliche Abweichungen von diesen konnte nur bei dem kleinsten gewählten cutoff $\Lambda = 10^4 \text{ GeV}$ beobachtet werden, so dass es hier durchaus angebracht erscheint, höhere Operatoren mit zu berücksichtigen.

Selbstverständlich ist es nun ebenfalls möglich den Einfluss nicht verschwindender weiterer Kopplungskonstanten in dem Startpotential zu untersuchen. Diese lieferten für große $\lambda_{2,\Lambda}$ jedoch nur geringe Veränderungen der Higgsmasse. Bei fixierten Λ und $\lambda_{2,\Lambda}$ lagen die

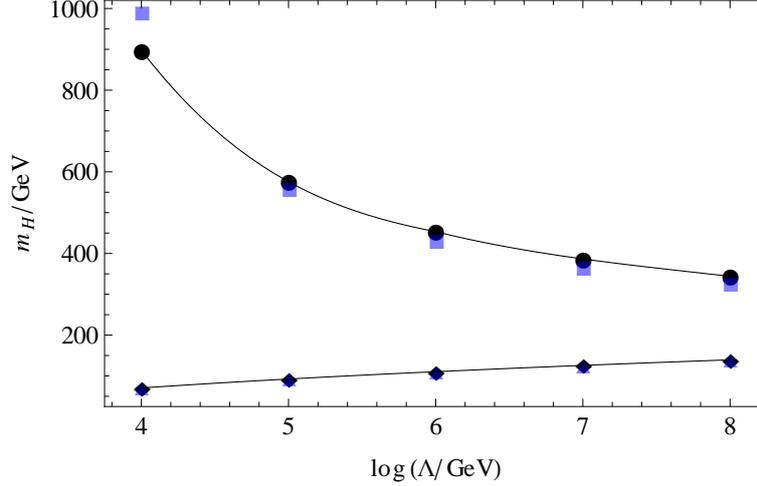


Abbildung 5.3: Darstellung der Higgsmasse m_H in Abhängigkeit des dekadischen Logarithmus $\log \Lambda$ unter Berücksichtigung höherer Operatoren für die UV-Kopplungen $\lambda_{2,\Lambda} = 0$ (ρ^4) (untere Higgsmassenschranke für eine UV- ϕ^4 -Theorie) und $\lambda_{2,\Lambda} = 100$ (ρ^3). Zum Vergleich wurden blau die Werte der Trunkierung $n_{trun} = 2$ angegeben.

gefundenen Änderungen für $\lambda_{3,\Lambda} \neq 0$ unterhalb eines GeV. Interessant wird dieser Fall jedoch für die obere Schranke der Higgsmasse. Die Veränderung der UV-Potentialform bewirkt eine Modifikation der Bestimmungsgleichung (5.9) des maximal wählbaren $\lambda_{2,\Lambda}$: $\lambda_{2,\Lambda} \leq \frac{2}{\kappa_\Lambda} + \frac{\lambda_{3,\Lambda}\kappa_\Lambda}{3}$. Dadurch lässt sich nun ebenfalls die obere Schranke verändern, da das Intervall der möglichen UV-Parameter $\lambda_{2,\Lambda}$ erneut erweitert werden kann, diesmal in Richtung größerer $\lambda_{2,\Lambda}$.

5.2 Berücksichtigung der anomalen Dimensionen

Zum Abschluss der Betrachtungen sollen nun die Ergebnisse dahin gehend verbessert werden, dass die anomalen Dimensionen in dem Gleichungssystem (4.13) mitberücksichtigt werden. Da die beiden anomalen Dimensionen mittels der zwei zusätzlichen algebraischen Gleichungen bestimmt werden können, sind diese auf allen Skalen durch die Parameter der Theorie fixiert. Die Lösungsstrategie folgt damit dem bisherigen Vorgehen. Das differential-algebraische Gleichungssystem (4.13) dient als Bestimmungsgleichung der Parameter des skalaren Potentials u_k , der Yukawa-Kopplung h_k sowie der anomalen Dimensionen η_ϕ und η_ψ . Je nach Phase wird für das skalare Potential die Trunkierung gemäß Gl.(5.1) oder Gl.(5.2) gewählt. Die Differentialgleichungen für die $\lambda_{n,k}$ und κ_k ergeben sich aus den Gln.(5.3)-(5.5). Durch die vorgenommene Ableitungsentwicklung des effektiven Potentials (4.1) sollte $\eta_{\phi/\psi} < 1$ gelten, damit die durchgeführte Entwicklung sinnvolle Ergebnisse liefert. Sollte dies nicht mehr der Fall sein, ist dies ein Hinweis auf das Zusammenbrechen der verwendeten Trunkierung, so dass höhere Terme der Ableitungsentwicklung einen wesentlichen Beitrag zu den Resultaten liefern sollten.

Die aus diesen Gleichungen mit einem quartischen UV-Potential resultierenden Higgsmassen können in Abb.[5.4] gefunden werden (schwarze Kurven). Um den Einfluss der anomalen Dimensionen zu verdeutlichen, wurden parallel auch die Higgsmassen dargestellt, bei denen die anomalen Dimensionen vernachlässigt wurden (blau schattiert). Damit ein

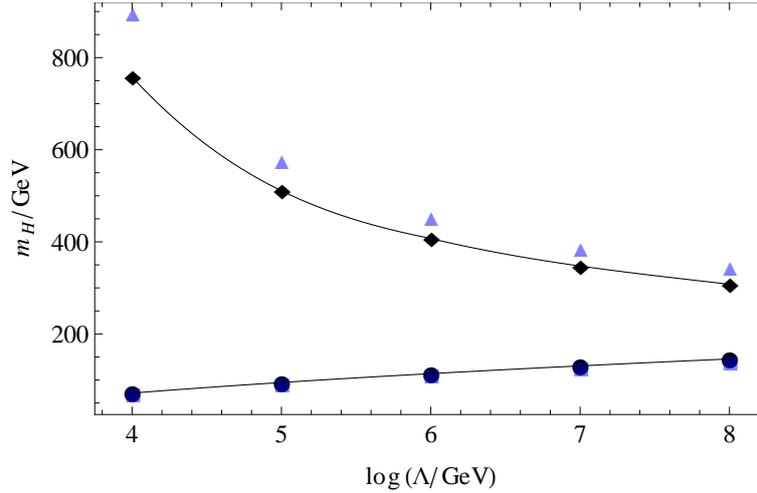


Abbildung 5.4: Darstellung der Higgsmasse m_H in Abhängigkeit des dekadischen Logarithmus $\log \Lambda$ unter Berücksichtigung der anomalen Dimensionen für die UV-Kopplungen $\lambda_{2,\Lambda} = 0$ und $\lambda_{2,\Lambda} = 100$. Zum Vergleich wurden blau die Werte für $\eta_\psi = \eta_\phi = 0$ angegeben.

Vergleich der beiden Werte möglich ist, sind bei den Kurven, die die anomalen Dimensionen berücksichtigen, die gleichen Trunkierungen des Potentials vorgenommen worden, wie bei jenen, für die $\eta_\psi = \eta_\phi = 0$ gilt. Die höchsten durchgeführten Trunkierungen waren $n_{trun} = 4$ im Falle $\lambda_{2,\Lambda} = 0$ (weitere Operatoren beeinflussten die Werte der unteren Schranke kaum) sowie $n_{trun} = 3$ im Falle $\lambda_{2,\Lambda} = 100$.

Es ist nun ebenfalls möglich Abweichungen des ϕ^4 Potentials zu zulassen, so dass die untere Higgsmassenschranke unterschritten werden kann. Als Beispiel wurde in Abb.[5.5] der Fall $\lambda_{2,\Lambda} = -0.5$ mit $\lambda_{3,\Lambda} = 0.5$ dargestellt. Die relativen Abweichungen der Higgsmasse von der unteren Schranke liegen zwischen 28.3% ($\Lambda = 10^4$ GeV) und 3.3% ($\Lambda = 10^8$ GeV) und fallen damit etwas geringer aus als im Falle $\eta_\psi = \eta_\phi = 0$ (Tab.[5.3]) jedoch nicht wesentlich.

In allen betrachteten Fällen ist der maximale Wert der anomalen Dimensionen im Ultravioletten ($t = 0$) angenommen worden. Das Maximum von η_ψ liegt zwar nicht exakt bei $t = 0$, ist jedoch stets deutlich kleiner gewesen als $\eta_\phi(0)$. Darüber hinaus streben beide anomalen Dimensionen im Grenzwert $k \rightarrow 0$ der Null entgegen. Dieses Verhalten wurde natürlich im Regime des Gaußschen Fixpunktes erwartet. Um zu testen, ob die Trunkierung der Ableitungsentwicklung gut gewählt ist, muss also lediglich $\eta_\phi(t = 0)$ untersucht werden. In den betrachteten Parameterbereichen galt für alle durchgeführten Rechnungen $\eta_i(t) < 1$ ($i = \phi, \psi$). Mit zunehmendem $\lambda_{2,\Lambda}$ kommt die anomale Dimension des skalaren Feldes jedoch schon recht nahe an $\eta_\phi \approx 1$ heran, was für die stärkere Beeinflussung der Higgsmassen im Falle großer $\lambda_{2,\Lambda}$ sorgt. Während für $\lambda_{2,\Lambda} = 100$ noch $\eta_\phi \approx 0.3$ gilt, wächst η_ϕ bereits auf $\eta_\phi \approx 0.57$ für $\lambda_{2,\Lambda} = 340$ an. Möchte man sich nun der oberen Schranke des quartischen UV-Potentials annähern, steigen diese Werte weiter an, wodurch sich das Finetuning als komplizierter heraus stellt, da die anomalen Dimensionen in den abzutastenden Parameterbereichen für h_Λ^2 und κ_Λ sehr groß werden können. Weiter könnten zudem höhere Trunkierungen des effektiven Mittelwertpotentials sowie Abweichungen von dem quartischen UV-Potential ebenfalls in die Überlegungen mit einbezogen werden, so dass wir uns hier auf ein maximales $\lambda_{2,\Lambda} = 340$ einschränken. Die in Tab.[5.5] angegebenen

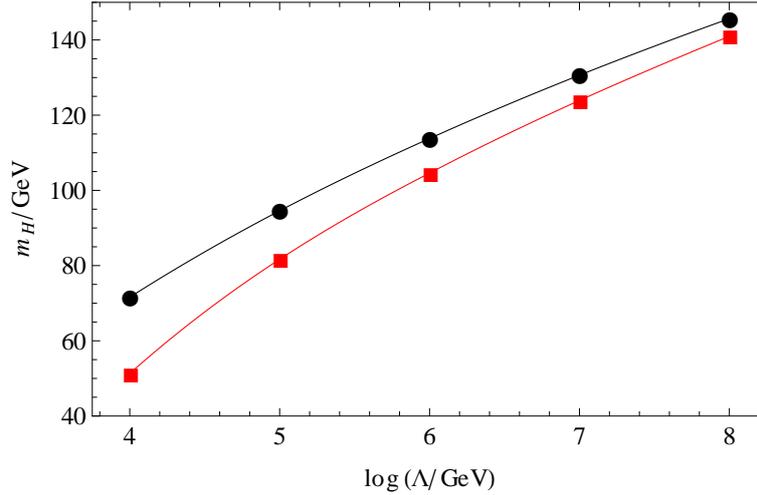


Abbildung 5.5: Darstellung der Higgsmasse m_H in Abhängigkeit des dekadischen Logarithmus $\log \Lambda$ unter Berücksichtigung der anomalen Dimensionen für die UV-Kopplungen $\lambda_{2,\Lambda} = \lambda_{3,\Lambda} = 0$ (schwarz) und $\lambda_{2,\Lambda} = -0.5$, $\lambda_{3,\Lambda} = 0.5$ (rot).

Werte sind damit nicht als obere Schranke im eigentlichen Sinne, sondern als maximal getesteter Bereich der Higgsmasse zu verstehen.

$\Lambda(\text{GeV})$	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$m_H^{\min}(\text{GeV})$	71.6	94.6	113.8	130.6	145.7
$m_H^{\text{mg}}(\text{GeV})$	1023.8	535.6	407.9	342.0	300.5

Tabelle 5.5: Untere Schranke der Higgsmasse m_H^{\min} sowie maximal getestete Higgsmassen m_H^{mg} ($\lambda_{2,\Lambda} = 340$) unter Berücksichtigung der anomalen Dimensionen für ein quartisches Startpotential u_Λ .

5.3 Vergleich der Higgsmassenschranken mit bisherigen Resultaten

Abschließend sollen die gewonnenen Ergebnisse der Higgsmassenschranken mit denen verglichen werden, die aus alternativen Methoden gewonnen wurden. Dabei erfolgt zunächst ein Vergleich zwischen den hier erzielten Resultaten der Meanfield-Näherung mit den Ergebnissen der „vollen“ Flussgleichung, welche die Rückkopplung des Flusses der Kopplungskonstanten in deren Flussgleichung berücksichtigt. Im Folgenden werden Ergebnisse aus perturbativen Rechnungen sowie Gittersimulationen vorgestellt. Abweichungen zu den Ergebnissen aus [14], die ebenfalls aus der funktionalen Renormierungsgruppe gewonnen wurden, sind bei der unteren Higgsmassenschranke dahingehend festzustellen, da in dieser Arbeit andere numerische Werte für die Masse des Top-Quark ($m_t = 178 \text{ GeV}$) sowie den Vakuumerwartungswert ($v_k = 247 \text{ GeV}$) angesetzt wurden. Dieser Umstand erklärt die in der hier vorliegenden Arbeit etwas kleineren Higgsmassen der unteren Schranke.

5.3.1 Vergleich zwischen Meanfield-Approximation und dem „vollen“ Fluss der Kopplungen

Vergleicht man zunächst die Resultate, die sich in der Meanfield-Näherung ergeben haben mit denen aus der vollen Flussgleichung, stellt man fest, dass die aus den Rechnungen folgende untere Schranke nicht sehr stark variiert. Beide Resultate wurden noch einmal in Tab.[5.6] zusammengefasst. Für den Vergleich wurden auf die Ergebnisse des Kap.(5.1) zurückgegriffen, in dem die anomalen Dimensionen in den Gln.(4.13) vernachlässigt wurden. Dies geschieht aus dem Grund, da wir innerhalb der Meanfield-Näherung keine Berücksichtigung von Wellenfunktionsrenormierungen der Felder vorgenommen hatten.

Die hohe Übereinstimmung der unteren Schranke ($\lambda_{2,\Lambda} = 0$) bei einem quartischen UV-Potential in den verwendeten Methoden stellt keine Überraschung dar. Da sich die Kopplungskonstanten beim Ausintegrieren der Fluktuationen auf den einzelnen Skalen nicht groß verändern, kann der Propagator innerhalb der Flussgleichung in guter Näherung als konstant angesehen werden, $\Gamma_k^{(2)} \approx \Gamma_\Lambda^{(2)}$. Dies versetzt uns damit direkt in den Fall der Meanfield-Näherung. Für größer werdende $\lambda_{2,\Lambda}$ erfahren die Kopplungskonstanten bedingt durch deren Flussgleichungen stärkere Anstiege, wodurch diese Annahme zunehmend schlechter wird. Die Problematik der Meanfield-Näherung, dass bei festem cutoff kein eindeutiger Zusammenhang zwischen $\lambda_{2,\Lambda}$ und der Higgsmasse gegeben war, besteht bei Berücksichtigung einer voll fließenden Theorie nicht mehr. Hier vergrößert sich stets m_H bei wachsendem $\lambda_{2,\Lambda}$, so dass eine obere Schranke der Higgsmasse durch das Gleichheitszeichen in Gl.(5.9) gegeben ist. Die Nichteindeutigkeit kann damit als Artefakt der Meanfield-Näherung angesehen werden. Diese weist darüber hinaus das Problem auf, dass für alle getesteten Parameterkonstellationen, das UV-Potential immer in der symmetrischen Phase startete. Bei den numerischen Lösungen der Flussgleichungen mit skalenabhängigem Propagator zeigte sich jedoch, dass je nach cutoff das UV-Potential ab einem gewissen $\lambda_{2,\Lambda}$ in der gebrochenen Phase vorliegt, damit die gewünschte IR-Physik folgt. Bei den betrachteten Λ -Werten galt dabei $\lambda_{2,\Lambda} \approx 2$ als Übergangskopplung zwischen symmetrischer und spontan gebrochener Phase des UV-Potentials. Für größer werdende Kopplungskonstanten beschreibt damit die Meanfield-Näherung die entsprechenden RG-Flüsse nur noch unzureichend.

$\Lambda(\text{GeV})$	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
Meanfield	70.4	91.7	108.9	123.8	137.0
volle Flussgleichung	70.5	92.4	110.4	125.8	139.3

Tabelle 5.6: Berechnete untere Higgsmassenschranke ($\lambda_\Lambda = 0$) in GeV für verschiedene cutoff. Diese wurden zum einen in der Meanfield-Approximation und zum anderen mit Hilfe der Gln.(4.13) ohne anomale Dimensionen bestimmt.

5.3.2 Vergleich mit perturbativen Methoden

Möchte man Schranken der Higgsmasse mit Hilfe störungstheoretischer Berechnungen konstruieren, muss der folgende Punkt beachtet werden. Es herrscht die relativ weit verbreitete Meinung vor, dass die Beiträge des Top-Quarks zum effektiven 1-loop Potential des Higgsfeldes das elektroschwache Vakuum destabilisieren (vgl. Referenz [1] in [24]). Um dieser Argumentationsstruktur zu folgen, reicht es aus, dass Higgs-Yukawa-Modell zu untersu-

chen, da dieses den Beitrag des Top-Quark zum effektiven Potential des Higgsfeldes korrekt wiedergibt. In diesem ergibt sich für das 1-loop Potential:

$$U^{1l}(\phi) = U_\mu + \frac{(U_\mu'')^2}{64\pi^2} \left(\ln \frac{U_\mu''}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) - \frac{h_\mu^4 \phi^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{h_\mu^2 \phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right), \quad U_\mu = \frac{m_\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_\mu}{24} \phi^4, \quad (5.10)$$

mit einer Niederenergieskala $\mu < \Lambda$. Man könnte nun argumentieren, dass es durch das Minuszeichen der fermionischen Beiträge möglich ist, dass diese die positive ϕ^4 -Kopplung λ_μ für genügend große ϕ und h_μ kompensieren, wodurch Instabilitäten entstehen.

Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Konstruktion der effektiven Wirkung als Legendre-Transformation, die garantiert, dass das exakte effektive Potential konvex ist. Branchina und Faivre konnten zeigen, dass die Instabilitäten des 1-loop Potentials nur dann entstehen, wenn es auf Regionen ausgeweitet wird, in denen der Gültigkeitsbereich der Störungstheorie verletzt ist, vgl.[24, 13]. Zusammenfassen lassen sich diese Überlegungen auf die folgende Weise (für eine detaillierte Analyse siehe [13]): Definiert man die Theorie bei einem endlichen cutoff Λ , ergibt sich aus Gl.(2.2) in $d = 4$ für ein quartisches UV-Potential $U_\Lambda = \frac{m_\Lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24} \phi^4$:

$$U^{1l}(\phi) = U_\Lambda + \frac{1}{64\pi^2} \left[\Lambda^2 U_\Lambda'' + \Lambda^4 \ln \left(1 + \frac{U_\Lambda''}{\Lambda^2} \right) - (U_\Lambda'')^2 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{U_\Lambda''} \right) \right] - \frac{1}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 h_\Lambda^2 \phi^2 + \Lambda^4 \ln \left(1 + \frac{h_\Lambda^2 \phi^2}{\Lambda^2} \right) - h_\Lambda^4 \phi^4 \ln \left(1 + \frac{\Lambda^2}{h_\Lambda^2 \phi^2} \right) \right]. \quad (5.11)$$

Die Beschränkung auf quartische UV-Potentiale erfolgt in der Regel, da dieses nur solche Operatoren enthält, für die sich später Counterterme einführen lassen. Durch den cutoff als obere Energiegrenze ist es sinnvoll, nur solche Feldamplituden zu betrachten, die kleiner als dieser sind, $\frac{\phi}{\Lambda} < 1$. Entwickelt man nun das 1-loop effektive Potential in $\frac{\phi}{\Lambda}$, erhalten wir

$$U^{1l}(\phi) = U_\Lambda + \frac{1}{64\pi^2} \left\{ 2\Lambda^2 U_\Lambda'' - (U_\Lambda'')^2 \left[\ln \frac{\Lambda^2}{U_\Lambda''} + \frac{1}{2} \right] \right\} - \frac{1}{16\pi^2} \left\{ 2\Lambda^2 h_\Lambda^2 \phi^2 - h_\Lambda^4 \phi^4 \left[\ln \frac{\Lambda^2}{h_\Lambda^2 \phi^2} + \frac{1}{2} \right] \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{\phi^2}{\Lambda^2}\right). \quad (5.12)$$

Spaltet man nun wie gewöhnlich die nackten Kopplungen in $m_\Lambda^2 = m_\mu^2 + \delta m^2$, $\lambda_\Lambda = \lambda_\mu + \delta \lambda$ und $h_\Lambda = h_\mu + \delta h = h_\mu$ mit Countertermen

$$\delta m^2 = \delta m_{\text{bos}}^2 + \delta m_{\text{fer}}^2 = -\frac{\lambda_\mu \Lambda^2}{32\pi^2} + \frac{\lambda_\mu m_\mu^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - 1 \right) + \frac{h_\mu^2 \Lambda^2}{4\pi^2},$$

$$\delta \lambda = \delta \lambda_{\text{bos}} + \delta \lambda_{\text{fer}} = \left(\frac{3\lambda_\mu^2}{32\pi^2} - \frac{3h_\mu^4}{2\pi^2} \right) \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - 1 \right),$$

auf, gelangt man zu Gl.(5.10). Da die vermeintlichen Instabilitäten des effektiven 1-loop Potentials durch die Top-Fluktuationen erzeugt werden, können wir für die weitere Diskussion die Beiträge der bosonischen Fluktuationen in Gl.(5.12) vernachlässigen:

$$U^{1l}(\phi) = \frac{m_\Lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24} \phi^4 - \frac{\Lambda^2 h_\Lambda^2}{8\pi^2} \phi^2 + \frac{h_\Lambda^4 \phi^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{h_\Lambda^2 \phi^2} + \frac{1}{2} \right). \quad (5.13)$$

Wird das effektive Potential in Abhängigkeit von den nackten Parametern betrachtet, entsteht somit keine Instabilität durch die Fluktuationen des Top-Quark. Dennoch scheint eine solche Instabilität in Gl.(5.10) vorhanden zu sein. Um dies zu verstehen, wählen wir Renormierungsbedingungen, die das Minimum bei dessen klassischem Wert fixieren, $v^2 = -\frac{6m_v^2}{\lambda_v}$. Damit ergibt sich aus Gl.(5.13):

$$U^{1l}(\phi) = \frac{m_v^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_v}{24}\phi^4 - \frac{h_v^4\phi^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\phi^2}{v^2} - \frac{3}{2} \right) - \frac{h_v^4 v^2}{8\pi^2} \phi^2. \quad (5.14)$$

Gl.(5.14) sollte eine gute perturbative Approximation des effektiven Potentials sein, solange

$$\lambda_v \ll 1, \quad h_v \ll 1 \quad \text{und} \quad \frac{h_v^4}{16\pi^2} \ln \frac{\phi^2}{v^2} \ll 1$$

gilt. Diese drei Bedingungen sind jedoch nicht ausreichend, um verlässliche Aussagen aus Gl.(5.14) ziehen zu können. Betrachtet man ein $\phi = \bar{\phi}$ sowie ein λ_v für die

$$\ln \frac{\bar{\phi}^2}{v^2} = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_v = \frac{3h_v^4}{4\pi^2}$$

gelten sollen, ist offenbar $U^{1l}(\bar{\phi}) < U^{1l}(v)$, was die Instabilität zeigen würde. Allerdings wurde hierbei ein wichtiger Punkt übersehen. Für die gewählten Parameter gilt offensichtlich die Ungleichung $\lambda_v + \frac{3h_v^4}{2\pi^2} \ln \frac{v^2}{\bar{\phi}^2} < 0$. Nutzt man nun aus, dass die nackte Kopplung λ_Λ , die positiv sein muss, mit der renormierten λ_v über die Beziehung $\lambda_\Lambda = \lambda_v - \frac{3h_v^4}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{v^2}$ zusammenhängt, folgt:

$$\lambda_\Lambda + \frac{3h_v^4}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\bar{\phi}^2} < 0.$$

Um dies zu ermöglichen, muss aber $\frac{\Lambda^2}{\bar{\phi}^2} < 1$ gelten. $\bar{\phi}$ liegt damit jenseits des Gültigkeitsbereiches, in dem das effektive 1-loop Potential sinnvoll definiert ist, so dass die Instabilität ebenfalls erst in diesem Bereich auftritt. Berücksichtigt man also die Forderungen $\lambda_\Lambda > 0$ und $\bar{\phi} < \Lambda$, ist das effektive Potential jenseits des Minimums konvex, wie dies von Gl.(5.13) beschrieben wird. Allgemeiner lassen sich nicht beliebige renormierte Kopplungen λ_v ansetzen, da diese durch RG-Flüsse mit nackten Kopplungen verbunden sein müssen, so dass sich im Infraroten gewisse Einschränkungen ergeben. Werden diese berücksichtigt, ist das effektive Potential in dem Bereich, in welchem es definiert ist, konvex.

Nach diesen Überlegungen wird nun in [13] eine untere Schranke der Higgsmasse als Funktion von Λ dadurch modelliert, indem der cutoff der Theorie am Wendepunkt des Potentials (jenseits des Minimums) angesetzt wird. Bis zu diesen Feldamplituden ist das Potential konvex, wenn man von dem Bereich zwischen den Minima absieht, so dass das Potential bis zu diesen Feldamplituden selbstkonsistent beschrieben wird. Leider ist ein direkter quantitativer Vergleich zwischen der in dieser Arbeit und der in [13] bestimmten unteren Schranke nicht möglich, da diese in [13] perturbativ für das komplette Standardmodell berechnet und etwas abweichende numerische Werte der Top-Masse ($m_t = 175$ GeV bzw. $m_t = 178$) angesetzt wurden. Auffällig ist, dass die dabei bestimmten Werte zwar in der gleichen Größenordnung wie die hier errechneten liegen, jedoch etwas größer sind. Ob dieser Effekt an den unterschiedlich betrachteten Theorien oder den unterschiedlichen Konstruktionsvorschriften der unteren Schranke liegt, kann durch Erweiterungen des hier vorgestellten Modells untersucht werden.

Darüber hinaus sei noch einmal angemerkt, dass die sich mit Hilfe der Wetterich-Gleichung konstruierte untere Schranke auf recht natürliche Weise ergab, wenn man sich auf quartische UV-Potentiale einschränkte, $\min_{\lambda, \Lambda} \{m_H(\lambda, \Lambda)\} = m_H(0, \Lambda)$. Physikalische Instabilitäten des IR-Potentials wurden in keiner Weise beobachtet. Nutzt man das perturbativ bestimmte effektive Potential (5.11), um die Higgsmassenschranke wie im Falle der Meanfield-Näherung zu bestimmen, ergibt sich von dieser trotz der unterschiedlich gewählten Regulatorfunktionen keine nennenswerte Abweichung.

5.3.3 Vergleich mit Gittermethoden

Gittersimulationen zeigen qualitativ das gleiche Verhalten wie der Zugang der funktionalen Renormierungsgruppe, wenn man die Higgsmassenschranken sowie die Stabilität des effektiven Potentials untersucht. In [12] wurde gezeigt, dass ein einfaches Higgs-Yukawa-Modell, in dem ein reelles Skalarfeld an $N_F = 8$ Fermionen koppelt, keine Instabilitäten aufzeigt. Erweiterungen des Modells, welche die $SU(2)$ Higgs-Dublett Struktur berücksichtigen, können in [26, 27, 28] gefunden werden. In diesen Modellen ergibt sich die untere Schranke der Higgsmasse für ein Verschwinden der quartischen UV-Kopplungskonstante, $\lambda_{2,\Lambda} = 0$, analog zu dem in dieser Arbeit betrachteten Fall. Eine endliche obere Higgsmassenschranke folgt, indem der Fall $\lambda_{2,\Lambda} \rightarrow \infty$ untersucht wird. Dies ist ein konzeptioneller Unterschied zu der hier vorgestellten Konstruktion der oberen Schranke. Die Methoden der funktionalen Renormierungsgruppe schränken die maximal erlaubten Werte für $\lambda_{2,\Lambda}$ in einem quartischen UV-Potential auf natürlichem Wege ein, so dass auf diese Weise die obere Schranke entstand. Wie sich die Existenz einer potentiellen 4. Teilchengeneration mit schweren Quarks auf die Schranken ausübt, wurde in [29] studiert. Diese verschiebt die untere Higgsmassenschranke deutlich zu größeren Massen. Da jedoch durch Abweichungen von einem quartischen UV-Potential die untere Schranke unterschritten werden kann, sind leichte Higgsmassen auch in diesem Falle denkbar. Allgemein sind relevante Abweichungen von der Struktur eines quartischen UV-Potentials in Gitterrechnungen noch nicht untersucht worden, so dass wir für die diesbezüglich erzielten Ergebnisse keine Vergleichsoptionen besitzen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Untersucht wurde ein Higgs-Yukawa-Modell, welches den Higgssektor des Standardmodells imitieren sollte. Dabei nutzten wir Methoden der funktionalen Renormierungsgruppe in Form der Wetterich-Gleichung, um die IR-Physik zu bestimmen. Speziell wurde sich auf die aus dem RG-Fluss resultierende Masse und Form des skalaren Potentials u_k konzentriert.

In einer ersten einfachen Approximation untersuchten wir das Modell in einer Meanfield-Näherung. In dieser konnte eine untere Massenschranke für verschwindende quartische UV-Kopplungen gefunden werden, wenn man sich auf den Standardfall einer ϕ^4 -Theorie im Ultravioletten einschränkt. Für größer werdende $\lambda_{2,\Lambda}$ stieß diese Approximation recht schnell an ihre Grenzen, so dass sich eine obere Schranke lediglich aus Konsistenzbedingungen an diese bestimmen lässt. Das Hauptinteresse dieser Arbeit lag in der Untersuchung, ob Abweichungen von der unteren Schranke möglich sind, wenn die ϕ^4 -Struktur des UV-Potentials aufgegeben wird. Da sich das UV-Potential einer direkten Beobachtung entzieht, kann dieses im Prinzip eine beliebige Form besitzen. Es gibt keinerlei Gründe, weshalb man sich ausgerechnet auf ein quartisches UV-Potential einschränken sollte. Hierbei führte bereits der naive Ansatz eines zusätzlichen Terms der Form $\lambda_{3,\Lambda}\phi^6$ zum gewünschten Ergebnis. Diese Modifikation erlaubt eine Ausdehnung des UV-Parameterbereiches auf negative $\lambda_{2,\Lambda}$, wodurch Higgsmassen konstruiert werden konnten, die deutlich unterhalb der unteren Massenschranke lagen.

Der nächste Schritt bestand darin, den vollen RG-Fluss (abgesehen von Trunkierungen) der Theorie zu untersuchen. Schränkte man sich wieder auf quartische UV-Potentiale ein, ergab sich auf natürlichem Wege eine untere Schranke der Higgsmasse für $\lambda_{2,\Lambda} = 0$. Für wachsende $\lambda_{2,\Lambda}$ zeigte die Higgsmasse ein monotonen Verhalten analog zu Gittersimulationen. Im Gegensatz zu diesen und den Betrachtungen in [14] wurde allerdings die obere Higgsmassenschranke nicht durch den Grenzfall $\lambda_{2,\Lambda} \rightarrow \infty$ konstruiert. Da die Flussgleichung nicht beliebige nichtkonvexe UV-Potentiale generieren kann, schränkte dies die quartische Kopplung auf einen maximal wählbaren Wert ein, der nicht überschritten werden durfte. Es konnten somit Higgsmassenschranken bestimmt werden, ohne das auf Instabilitäts-Szenarien oder das Trivialitäts-Problem zurückgegriffen werden musste. Diese entstanden vielmehr durch den Renormierungsgruppenfluss selbst.

Wird im UV-Potential ein weiterer $\lambda_{3,\Lambda}\phi^6$ Term berücksichtigt und lässt man damit negative $\lambda_{2,\Lambda}$ zu, erlaubt die Theorie auch in diesem Fall Massen unterhalb der unteren Schranke. Ebenso wird die obere Schranke verändert werden, da durch den zusätzlichen Term die Bestimmungsgleichung des größtmöglichen $\lambda_{2,\Lambda}$ modifiziert wird. An dieser Stelle festzuhalten wäre noch, dass bei allen durchgeführten Rechnungen keine Instabilitäten des skalaren Potentials entstanden.

Die durchgeführten Berechnungen wurden in der Regel mit der optimierten Regulatorfunktion ausgeführt. Der Vergleich zwischen der Meanfield-Näherung und den störungstheoretischen Ergebnissen scheint darauf hinzudeuten, dass die Regulatorwahl für kleine $\lambda_{2,\Lambda}$ keinen großen Einfluss auf die IR-Physik ausübt. Ob dies jedoch auch allgemein der Fall ist, sollte in weiteren Betrachtungen untersucht werden. Von besonderem Interesse wäre es, die Klasse an betrachteten UV-Potentialen zu erweitern. Der in dieser Arbeit genutzte

zusätzliche ϕ^6 Term erlaubte eine erhebliche Abweichung von den bisherigen Resultaten des quartischen UV-Potentials. Durch weitere Modifikation lassen sich darüber hinaus die Flüsse wesentlich komplexerer Potentialverläufe untersuchen.

Für eine quantitativ bessere Beschreibung des Higgssektors sollte in folgenden Untersuchungen das Modell zu einer standardmodell-ähnlicheren Theorie ausgebaut werden. Ein erster Schritt wäre die Berücksichtigung der Higgs-Dublett Struktur, wie dies bereits in Gittersimulationen erfolgt ist. Darüber hinaus wäre der Einfluss des QCD-Sektors auf den Fluss der Yukawa-Kopplung des Top-Quarks von besonderem Interesse, da dieser die Flussgleichung maßgeblich beeinflussen wird.

Literaturverzeichnis

- [1] F. Englert and R. Brout. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys.Rev.Lett.*, 13:321–323, 1964.
- [2] G.S. Guralnik, C.R. Hagen, and T.W.B. Kibble. Global Conservation Laws and Massless Particles. *Phys.Rev.Lett.*, 13:585–587, 1964.
- [3] Peter W. Higgs. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys.Lett.*, 12:132–133, 1964.
- [4] Peter W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys.Rev.Lett.*, 13:508–509, 1964.
- [5] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys.Lett.*, B716:1–29, 2012. arXiv:hep-ex/1207.7214.
- [6] Serguei Chatrchyan et al. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys.Lett.*, B716:30–61, 2012. arXiv:hep-ex/1207.7235.
- [7] Marc Sher. Electroweak Higgs Potentials and Vacuum Stability. *Phys.Rept.*, 179:273–418, 1989.
- [8] C. Ford, D.R.T. Jones, P.W. Stephenson, and M.B. Einhorn. The Effective potential and the renormalization group. *Nucl.Phys.*, B395:17–34, 1993. arXiv:hep-lat/9210033.
- [9] J.A. Casas, J.R. Espinosa, and M. Quiros. Improved Higgs mass stability bound in the standard model and implications for supersymmetry. *Phys.Lett.*, B342:171–179, 1995. arXiv:hep-ph/9409458.
- [10] J.A. Casas, J.R. Espinosa, and M. Quiros. Standard model stability bounds for new physics within LHC reach. *Phys.Lett.*, B382:374–382, 1996. arXiv:hep-ph/9603227.
- [11] Gino Isidori, Giovanni Ridolfi, and Alessandro Strumia. On the metastability of the standard model vacuum. *Nucl.Phys.*, B609:387–409, 2001. arXiv:hep-ph/0104016.
- [12] K. Holland. Triviality and the Higgs mass lower bound. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 140:155–161, 2005. arXiv:hep-lat/0409112.
- [13] Vincenzo Branchina and Hugo Faivre. Effective potential (in)stability and lower bounds on the scalar (Higgs) mass. *Phys.Rev.*, D72:065017, 2005. arXiv:hep-th/0503188.
- [14] C. Gneiting. Higgs mass bounds from renormalization flow. Master’s thesis, Universität Heidelberg, 2005.
- [15] D. V. Peskin, M. E. und Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Westview Press, 1995.

- [16] T. Kugo. *Eichtheorie*. Springer, 1997.
- [17] H. Gies. *Vorlesung Quantenfeldtheorie*. FSU Jena, SoSe 2010.
- [18] A. Maas. *Vorlesung „Das Standardmodell der Elementarteilchen“*. FSU Jena, SoSe 2011. <https://www.tpi.uni-jena.de/axm/sm2011.pdf> (zuletzt aufgerufen: 04.09.2012, 13:40 MESZ).
- [19] H. Gies. *Vorlesung Physik der Skalen*. FSU Jena, WS 2011/12.
- [20] Juergen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Phys.Rept.*, 363:223–386, 2002. arXiv:hep-ph/0005122.
- [21] H. Gies. Introduction to the functional RG and applications to gauge theories. , 2006. arXiv:hep-ph/0611146.
- [22] <http://pdg.lbl.gov/> (zuletzt aufgerufen: 04.09.2012, 13:56 MESZ).
- [23] Daniel F. Litim. Critical exponents from optimized renormalization group flows. *Nucl.Phys.*, B631:128–158, 2002. arXiv:hep-th/0203006.
- [24] Vincenzo Branchina, Hugo Faivre, and Vincent Pangon. Effective potential and vacuum stability. *J.Phys.G*, G36:015006, 2009. arXiv:hep-ph/0802.4423.
- [25] Erick J. Weinberg and Ai-qun Wu. Understanding complex perturbative effective potentials. *Phys.Rev.*, D36:2474, 1987.
- [26] P. Gerhold and K. Jansen. Lower Higgs boson mass bounds from a chirally invariant lattice Higgs-Yukawa model with overlap fermions. *JHEP*, 0907:025, 2009. arXiv:hep-lat/0902.4135.
- [27] P. Gerhold and K. Jansen. Upper Higgs boson mass bounds from a chirally invariant lattice Higgs-Yukawa model. *JHEP*, 1004:094, 2010. arXiv:hep-lat/1002.4336.
- [28] Zoltan Fodor, Kieran Holland, Julius Kuti, Daniel Nogradi, and Chris Schroeder. New Higgs physics from the lattice. *PoS, LAT2007:056*, 2007. arXiv:hep-lat/0710.3151.
- [29] P. Gerhold, K. Jansen, and J. Kallarackal. Higgs boson mass bounds in the presence of a very heavy fourth quark generation. *JHEP*, 1101:143, 2011. arXiv:hep-lat/1011.1648.

Danksagung

In erster Linie möchte ich mich herzlich bei Prof. Holger Gies bedanken. Zum einen dafür, dass ich auf einem hochinteressanten Thema diese Arbeit anfertigen durfte, zum anderen für die Unterstützung und Betreuung während der gesamten Bearbeitungszeit. Hierbei vor allem für die weiterbringenden Diskussionen sowie die Teilhabe an seinem umfassenden Wissen und Verständnis zum Thema der Flussgleichung. Weiter bedanke ich mich bei Prof. Jens Braun für die sofortige bereitwillige Übernahme der Zweitkorrektur.

Bei meinen Bürokollegen Tobias Hellwig, Dietrich Roscher und Sefan Lippoldt bedanke ich mich für diverse Diskussionen über verschiedenste physikalische Themen und Problemstellungen.

Meinen Eltern sowie meiner Schwester danke ich für die Unterstützung während meiner gesamten Ausbildungszeit und darüber hinaus. Schlussendlich möchte ich mich bei Marie bedanken, vor allem für ihre grenzenlose Geduld mit mir beim Erstellen dieser Arbeit.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

.....
Ort, Abgabedatum

.....
Unterschrift des Verfassers

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Masterarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

.....
Ort, Abgabedatum

.....
Unterschrift des Verfassers