

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut



seit 1558

Die Flussgleichung der funktionalen Renormierungsgruppe in der Quantenmechanik

Bachelorarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Bachelor of Science

vorgelegt von René Sondenheimer,
geboren am 19.08.1988 in Weimar

Jena, 30. September 2010

1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Holger Gies
2. Gutachter: Dr. rer. nat. Jens Braun

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	4
2. Lösungsmethoden für das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4} dx$	5
2.1. Exakte Integration	5
2.2. Entwicklung nach Potenzen von λ	8
2.3. Näherungslösung mit Hilfe der Flussgleichung der Renormierungsgruppe	10
3. Renormierungsgruppen Flussgleichung	14
4. Der anharmonischer Oszillator	17
4.1. Anharmonischer Oszillator in Störungstheorie	17
4.2. RG Flussgleichung	18
4.2.1. Massenartiger Regulator	19
4.2.2. Linearer Regulator	24
4.3. „Exakte“ numerische Lösung	27
4.4. Vergleich der Methoden	28
4.5. Stark-Kopplungslimes	31
5. Zusammenfassung	33
Anhang	33
A. Grundlagen der Quantenfeldtheorie	34
A.1. Korrelatoren, erzeugende Funktionale, Wick-Rotation	34
A.2. Effektive Wirkung	35

1. Einleitung

Die fundamentalen Grundlagen der modernen theoretischen Physik bilden, neben der Allgemeinen Relativitätstheorie, die Quantenfeldtheorien. Sie sind die einzigen bekannten konsistenten Vereinheitlichungen zwischen der Speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik und beschreiben drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen in unserem Universum. Dennoch sind die meisten QFTs nicht exakt lösbar. Die Feynman Regeln erlauben zwar eine gute störungstheoretische Behandlung, diese sind allerdings nur bei geringen Kopplungsstärken gültig. Zudem können sich weitere Probleme aus Schleifendiagrammen ergeben, die einen divergierenden Anteil zum Ergebnis beitragen. Diese divergierenden Beiträge können mit Methoden der Renormierungstheorie meist kompensiert werden. Gute Einführungen in diese Gebiete sind Standardlehrbücher wie [2] aber ebenfalls zu erwähnen wären [3] und [4]. Alternativ zur Störungstheorie kann ein anderer Ansatz gewählt werden, bei dem Stück für Stück skalenabhängige Quantenkorrekturen zur Wirkung hinzu integriert werden. Es wird also ein Fluss von der klassischen Wirkung hin zu einer effektiven Wirkung, die die QFT vollständig beschreibt, betrachtet. Diese Flussgleichung ist wieder nur in den seltensten Fällen exakt lösbar, erlaubt allerdings auch Näherungen, die jenseits der Störungstheorie für starke Kopplungen zutreffen.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst eine „0-dimensionale“ Feldtheorie betrachtet, deren analytisch exakte Lösung bestimmbar ist. Danach erfolgt ein Vergleich der exakten Lösung mit einer störungstheoretischen Entwicklung sowie einer Approximationsmethode, die auf der Flussgleichung der funktionalen Renormierungsgruppe beruht. Im Folgenden erfolgt eine kurze Herleitung der Flussgleichungen für „dimensionale“ Quantenfeldtheorien. Der Hauptteil dieser Arbeit ist dem anharmonischen Oszillator gewidmet. Es werden mit Hilfe der Flussgleichung die Grundzustandsenergien für verschiedene Kopplungsstärken bestimmt und diese mit den gut bekannten Ergebnissen der Störungstheorie verglichen.

Der Anhang beinhaltet eine kurze Einleitung in die Quantenfeldtheorien, welche für ein Verständnis der Betrachtungen in Kapitel 3 vorausgesetzt werden.

2. Lösungsmethoden für das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4} dx$$

Für eine einfache Einführung in das Themengebiet dieser Arbeit wurde die Lösung des parameterabhängigen Integrals

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4} dx \quad (2.1)$$

gewählt. Diese erfolgte auf drei unterschiedlichen Wegen. Zu Beginn wurde eine exakte analytische Lösung für Gl.(2.1) gesucht. Danach erfolgte eine Potenzreihenentwicklung um den Punkt $\lambda = 0$ und eine approximative Lösung mittels Methoden der Renormierungsgruppentheorie.

Während die störungstheoretische Entwicklung nur im Grenzfall kleiner Kopplungen λ sinnvolle Lösungen liefert (und im allgemeinen meist einen Konvergenzradius von 0 besitzt), liefern die Methoden der Renormierungsgruppe meist bessere Näherungslösungen, wie im Folgenden gezeigt wird.

2.1. Exakte Integration

Für die exakte Integration werden zunächst einige einfache Termumformungen und Variablensubstitutionen durchgeführt sowie Eigenschaften des Integranden (gerade Funktion) ausgenutzt.

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2-\lambda x^4} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}(\lambda x^2 + \lambda^2 x^4)} dx \\ &= 2e^{\frac{1}{4\lambda}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}(\lambda x^2 + \frac{1}{2})^2} dx. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nun wird die Substitution $y = \lambda x^2$ durchgeführt und der $e^{\frac{1}{4\lambda}}$ -Term umgeformt,

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= 2e^{\frac{1}{4\lambda}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}(\lambda x^2 + \frac{1}{2})^2} dx = \lambda^{-1/2} e^{\frac{1}{4\lambda}} \int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-\frac{1}{\lambda}(y + \frac{1}{2})^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \lambda^{-1/2} e^{\frac{1}{8\lambda}} \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} e^{-\frac{1}{\lambda}(y + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{8\lambda}} dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Im weiteren Verlauf wird nun das Integral auf der rechten Seite von Gl.(2.3) untersucht. Dabei dient die Substitution $\mu = \frac{1}{8\lambda}$ als abkürzende Schreibweise.

$$\int_0^{\infty} 2y^{-1/2} e^{-\frac{1}{\lambda}(y+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{8\lambda}} dy = \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy. \quad (2.4)$$

Als nächstes wird die modifizierte Besselsche Differentialgleichung betrachtet, welche gegeben ist durch:

$$\left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - x^2 - n^2 \right) y(x) = 0. \quad (2.5)$$

Diese Differentialgleichung wird von den modifizierten Besselfunktionen $I_n(x)$ bzw. durch die MacDonald-Funktionen $K_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin(p\pi)}$ gelöst.

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass das Integral $\int_0^{\infty} 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy$ die modifizierte Besselsche Differentialgleichung (2.5) löst.

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu} \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy &= -\mu \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} (8y^2 + 8y + 1) e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\ &= \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} y(-\mu)(8y + 4) e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy - \mu \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} (4y + 1) e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\ &= \int_0^{\infty} 2y^{1/2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy - \mu \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} (4y + 1) e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy - \mu \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} (4y + 1) e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Im letzten Schritt wurde das 1. Integral auf der rechten Seite partiell integriert, wobei der Oberflächenterm verschwindet.

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d^2}{d\mu^2} \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy &= \mu^2 \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} (8y^2 + 8y + 1)^2 e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\ &= \mu^2 \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} (64y^4 + 128y^3 + 80y^2 + 16y) e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\ &\quad + \mu^2 \int_0^{\infty} 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Formt man das erste der beiden Integral auf der rechten Seite von Gl.(2.7) um, erhält man:

$$\begin{aligned}
& \mu^2 \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}(64y^4 + 128y^3 + 80y^2 + 16y)e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&= \mu^2 \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}y^2(64y^2 + 64y + 16)e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&\quad + \mu^2 \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}y(64y^4 + 64y + 16)e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&= \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}y^2(4\mu + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2})e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&\quad + \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}y(4\mu + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2})e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&= \frac{3}{16} \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy + \mu \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}(4y^2 + 4y)e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \quad (2.8) \\
&\quad - \frac{1}{8} \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}\frac{\partial}{\partial y}e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&= \frac{3}{16} \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy + \mu \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}(4y^2 + 4y)e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&\quad + \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}\mu(2y + 1)e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&= \frac{3}{16} \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy + \mu \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}(4y + 1)e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&\quad + \mu \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}(4y^2 + 2y)e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy.
\end{aligned}$$

Der letzte Term der rechten Seite von Gl.(2.8) lässt sich vereinfachen zu:

$$\begin{aligned}
\mu \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}(4y^2 + 2y)e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy &= -\frac{1}{4} \int_0^{\infty} 2y^{1/2}\frac{\partial}{\partial y}e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{\infty} 2y^{-1/2}e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse aus Gl.(2.8) und Gl.(2.9) liefern für Gl.(2.7):

$$\begin{aligned}
& \mu^2 \frac{d^2}{d\mu^2} \int_0^\infty 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&= \frac{5}{16} \int_0^\infty 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy + \mu^2 \int_0^\infty 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy \\
&\quad + \mu \int_0^\infty 2y^{-1/2} (4y+1) e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Setzt man schließlich Gl.(2.6) und Gl.(2.10) in die modifizierte Besselsche DGl. (2.5) ein, folgt:

$$\left(\frac{1}{16} - n^2\right) \int_0^\infty 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy = 0. \tag{2.11}$$

Diese Beziehung wird offensichtlich durch $n = \frac{1}{4}$ gelöst. Damit löst das gesuchte Integral $\int_0^\infty 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy$ die modifizierte Besselsche DGl und ist als MacDonald-Funktion darstellbar.

$$\int_0^\infty 2y^{-1/2} e^{-\mu(8y^2+8y+1)} dy = K_{\frac{1}{4}}(\mu). \tag{2.12}$$

Führt man nun die Rücksubstitution $\mu = \frac{1}{8\lambda}$ aus und setzt (2.12) in (2.3) ein, erhält man die exakte analytische Lösung für die gesuchte Funktion $I(\lambda)$.

$$I(\lambda) = \frac{e^{\frac{1}{8\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8\lambda}\right). \tag{2.13}$$

2.2. Entwicklung nach Potenzen von λ

Im Folgenden soll die Funktion

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - \lambda x^4} dx$$

in einer Taylorentwicklung um den Punkt $\lambda = 0$ durchgeführt werden. Die Taylorreihe ist gegeben durch:

$$I(\lambda) = \sum_{n=0}^N \frac{I^{(n)}(0)}{n!} \lambda^n, \quad I^{(n)} := \frac{d^n}{d\lambda^n} I, \tag{2.14}$$

wodurch die n -fache Ableitung des Integrals berechnet und an der Stelle $\lambda = 0$ ausgewertet werden muss.

$$I^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{4n} e^{-x^2 - \lambda x^4} dx \quad (2.15)$$

$$I^{(n)}(0) = (-1)^n \int_0^{\infty} 2x^{4n} e^{-x^2} dx. \quad (2.16)$$

Betrachtet man weiter das Integral auf der rechten Seite von (2.16) und nutzt die Definition der Eulerschen Γ -Funktion

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.17)$$

dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} 2x^{4n} e^{-x^2} dx &\stackrel{x^2=y}{=} \int_0^{\infty} 2y^{2n} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^{\infty} y^{2n-\frac{1}{2}} e^{-y} dy \\ &= \int_0^{\infty} y^{(2n+\frac{1}{2})-1} e^{-y} dy \\ &= \Gamma(2n + \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nutzt man die Ergebnisse von (2.16) und (2.18) aus und setzt diese in (2.14) ein, erhält man die gesuchte Taylorreihe.

$$I(\lambda) = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{\Gamma(2n + \frac{1}{2})}{n!} \lambda^n. \quad (2.19)$$

Um eine Abschätzung der Qualität dieser Approximation durchzuführen, wird das Konvergenzgebiet dieser Reihenentwicklung untersucht. Für eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_n a_n (x - x_0)^n \quad (2.20)$$

lässt sich der Konvergenzradius mit der Formel von Cauchy-Hadamard bestimmen. Falls ab einem bestimmten Index alle Koeffizienten $a_n \neq 0$ sind und der Limes existiert, gibt es eine alternative Möglichkeit den Konvergenzradius einfacher zu berechnen. Diese ist gegeben durch:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (2.21)$$

Für den Konvergenzradius der Taylorreihe gilt:

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n+1}{(2n + \frac{5}{2})(2n + \frac{3}{2})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.22)$$

$$\Rightarrow r = 0. \quad (2.23)$$

Da der Konvergenzradius der Taylorentwicklung 0 ist, konvergiert die Taylorreihe nur im Entwicklungspunkt $\lambda = 0$ gegen die gesuchte Funktion. Dies stellt somit eine ungünstige Näherung für die Funktion $I(\lambda)$ dar.

In der nachfolgenden Grafik wurde die exakte Lösung (rot) des zu untersuchenden Integrals gegenüber der 1. (grün) und 5. (blau) Ordnung der Reihenentwicklung geplottet. Hierbei wird deutlich, dass diese Näherungsmethode kaum zielführend für eine Approximation des Integrals ist. Lediglich in einem sehr kleinen Intervall um den Entwicklungspunkt sind sinnvolle Aussagen möglich.

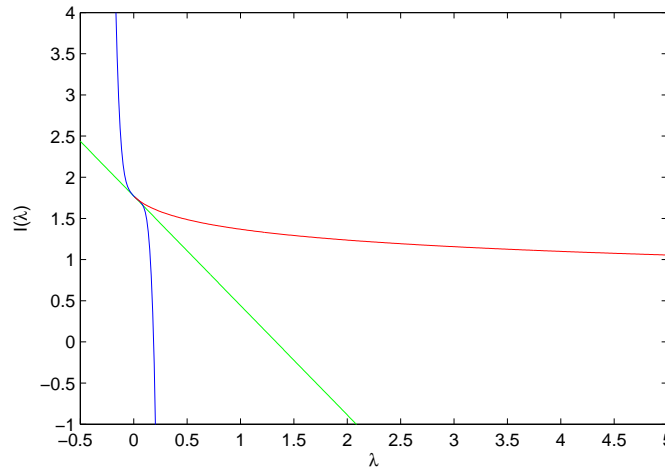


Abbildung 2.1.: Plot $I(\lambda)$ (rot) im Vergleich zur 1. Ordnung (grün) und 5. Ordnung (blau) der Taylorentwicklung.

2.3. Näherungslösung mit Hilfe der Flussgleichung der Renormierungsgruppe

Nach Einführung einer äußeren Quelle J und einem Regulatorterm R ergibt sich die Funktion $I(\lambda)$ zu:

$$I_R(\lambda, J) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - \frac{1}{2}Rx^2 - \lambda x^4 + Jx} dx. \quad (2.24)$$

Nennenswert in diesem Zusammenhang ist die folgende nützliche Identität.

$$\partial_R I = -\frac{1}{2} \partial_J^2 I. \quad (2.25)$$

(Bemerkung: die nachfolgenden Betrachtungen stellen den 0-dim. Zugang zur RG Flussgleichung dar.) Betrachtet man weiter als neue Größe den Logarithmus der Funktion $I_R(\lambda, J)$ und dessen erste Ableitung bezüglich des Quellterms, ergibt sich:

$$W_J = \ln I_R(\lambda, J) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial W_J}{\partial J} = \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial J} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2 - \frac{1}{2} R x^2 - \lambda x^4 + J x} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - \frac{1}{2} R x^2 - \lambda x^4 + J x} dx} = \langle x \rangle_J =: X \quad (2.27)$$

mit X als Mittelwert von x bezüglich der äußeren Quelle J . Für spätere Betrachtungen wird weiterhin die 2. Ableitung von W_J bezüglich J gebildet (Abkürzung: $' := \frac{\partial}{\partial J}$).

$$W_J'' = \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{I'}{I} \right) = -\frac{1}{I^2} I'^2 + \frac{I''}{I} = -X^2 + \frac{I''}{I}. \quad (2.28)$$

Die Beziehung (2.27) erlaubt es eine Legendre Transformation von W_J durchzuführen, wobei von der äußeren Quelle J als Variable zu dem dort definierten Mittelwert X übergegangen wird. Wird von der Transformaten zusätzlich der Regulatorterm $\frac{1}{2} R X^2$ abgezogen, ergibt sich die Funktion $\Gamma_R(X)$, die im Sinne der Quantenfeldtheorie eine interpolierende Wirkung darstellt.

$$\Gamma_R(X) = J X - W_J - \frac{1}{2} R X^2. \quad (2.29)$$

Für die Ableitungen von $\Gamma_R(X)$ gilt:

$$\frac{\partial \Gamma_R}{\partial X} = \frac{\partial J}{\partial X} X + J - \underbrace{\frac{\partial W}{\partial J}}_{=X} \frac{\partial J}{\partial X} - R X = J - R X \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma_R}{\partial X^2} = \frac{\partial J}{\partial X} - R \Rightarrow \frac{\partial^2 \Gamma_R}{\partial X^2} + R = \left(\frac{\partial X}{\partial J} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial J^2} \right)^{-1}. \quad (2.31)$$

Nach dieser Vorarbeit ist man nun in der Lage den Fluss von $\Gamma_R(X)$ zu betrachten.

$$\begin{aligned} \partial_R \Gamma_R &= (\partial_R J) X - \partial_R W_J - \underbrace{\frac{\partial W}{\partial J}}_X (\partial_R J) - \frac{1}{2} X^2 \\ &\stackrel{(2.26)}{=} -\partial_R \ln I - \frac{1}{2} X^2 = -\frac{1}{I} \partial_R I - \frac{1}{2} X^2 \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \frac{1}{2} \frac{I''}{I} - \frac{1}{2} X^2 \stackrel{(2.28)}{=} \frac{1}{2} W_J'' + \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{2} X^2 \\ &= \frac{1}{2} W_J''. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nutzt man für W_J'' die Beziehung (2.31), gelangt man zur Flussgleichung von $\Gamma_R(X)$:

$$\partial_R \Gamma = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial X^2} + R}. \quad (2.33)$$

Um das gesuchte Integral (2.1) bestimmen zu können, kehrt man zur Definition von $\Gamma_R(X)$ zurück und betrachtet den Fall des verschwindenden Regulators.

$$\Gamma_{R \rightarrow 0} = JX - W_J. \quad (2.34)$$

Wird zusätzlich der Fall einer verschwindenden äußeren Quelle J betrachtet, folgt:

$$\lim_{J \rightarrow 0} \Gamma_{R \rightarrow 0}(X) = -W_0 \stackrel{(2.26)}{=} -\ln(I(\lambda)), \quad (2.35)$$

womit sich für die Lösung des zu untersuchenden Integrals folgendes ergibt:

$$I(\lambda) = e^{-\Gamma_{R \rightarrow 0}(X=X_{min}=0)}. \quad (2.36)$$

Macht man für $\Gamma_R(X)$ den Ansatz folgender Potenzreihe (motiviert durch die Struktur des Integrals (2.1)):

$$\Gamma_R(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} X^{2n} \quad (2.37)$$

folgt mit (2.36) für (2.1):

$$I(\lambda) = e^{-a_0}. \quad (2.38)$$

Hierbei sind die Koeffizienten Funktionen des Regulators $a_n = a_n(R)$, die aus der Flussgleichung gewonnen werden können ($\dot{a}_n := \partial_R a_n$).

$$\begin{aligned} \partial_R \Gamma &= \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_{2n} X^{2n} & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial X^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)(2n+1) a_{2n+2} X^{2n} \\ \frac{1}{2} \stackrel{(2.33)}{=} \dot{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial X^2} + R \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} X^{2n} \left[R \dot{a}_{2n} + \sum_{k=0}^n (2k+2)(2k+1) a_{2k+2} \dot{a}_{2(n-k)} \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Diese Beziehung liefert ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, welches nicht mehr analytisch gelöst werden kann. Bricht man die Potenzreihenentwicklung nach der vierten Ordnung in X ab, folgt:

$$\dot{a}_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{R + 2a_2} \quad (2.40)$$

$$\dot{a}_2 = \frac{-6}{(R + 2a_2)^2} a_4 \quad (2.41)$$

$$\dot{a}_4 = \frac{72}{(R + 2a_2)^3} a_4^2. \quad (2.42)$$

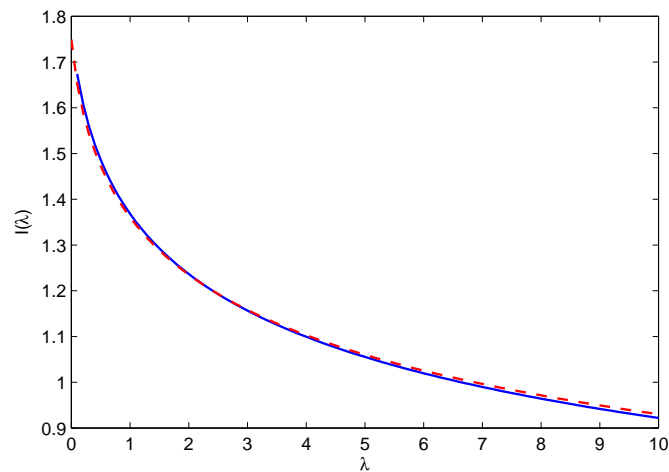


Abbildung 2.2.: Plot $I(\lambda)$ (rot) im Vergleich zur 1. Ordnung (grün) und 5. Ordnung (blau) der Taylorentwicklung.

Löst man dieses Gleichungssystem numerisch und plottet das Ergebnis gegen die bekannte exakte Lösung des Integrals $I(\lambda)$, ist ein qualitativer Vergleich mit dem Ergebnis der Taylorentwicklung möglich.

(Für die numerische Integration der gegebenen Probleme wurde das Software-Paket Matlab genutzt. Für die Lösung der Differentialgleichungssysteme wurde mit „ode45“ ein Standardsolver verwendet, der ein explizites Runge-Kutta-Verfahren nutzt.)

Deutlich wird, dass die mit der Methode der Flussgleichung der Renormierungsgruppentheorie gewonnene Lösung ein deutlich besseres approximatives Verhalten aufzeigt, als die Methoden einer polynomialen Entwicklung um den Punkt $\lambda = 0$. Während die zuletzt genannte Methode nur in einem kleinen Bereich um den Entwicklungspunkt sinnvolle Näherungen liefert, ergibt die Flussgleichung eine wesentlich besser konvergierende Lösung über einen weiten Bereich von λ .

3. Renormierungsgruppen Flussgleichung

Während in den Bestimmungsgleichungen für die effektive Wirkung Γ , wie Gl. (A.18) oder die Dyson-Schwinger-Gleichungen über alle Quantenfluktuationen auf einmal integriert wird, kann man einen alternativen Zugang wählen, indem man einer Idee Wilsons folgt. Hierbei wird Impulsschale für Impulsschale über die Fluktuationen integriert. In der Sprache der effektiven Wirkung sucht man nach einer interpolierenden Wirkung Γ_k , mit einem Impulsschalenparameter k , so dass die volle Quantenwirkung Γ im Grenzfall $k \rightarrow 0$ erreicht werden soll. Strebt k gegen den cutoff-Parameter Λ entspricht Γ_k der klassischen Wirkung, ab der die Quantenfluktuationen vernachlässigt werden können. (Γ_k stellt also die Näherung einer effektiven Theorie dar, die auf einer Energieskala k gültig ist.)

$$\Gamma_{k \rightarrow \Lambda} \simeq S_{bare} \quad \Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma. \quad (3.1)$$

Dies kann durch ein erzeugendes Funktional realisiert werden. Dafür definiert man zunächst das IR regularisierte Schwinger-Funktional (es wird rein im euklidischen gerechnet):

$$Z_k[J] := e^{-\Delta S_k[\frac{\delta}{\delta J}]} Z[J] = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + (J, \phi)} \equiv e^{W_k[J]} \quad (3.2)$$

mit einem Regulatorterm

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(-p) R_k(p) \phi(p) \quad (3.3)$$

der quadratisch in ϕ ist und als impulsabhängiger Massenterm betrachtet werden kann. An die Regulator Funktion $R_k(p)$ werden folgende Bedingungen gestellt:

$$\lim_{p^2/k^2 \rightarrow 0} R_k(p) > 0 \quad (3.4)$$

(was eine IR Regularisierung implementiert)

$$\lim_{k^2/p^2 \rightarrow 0} R_k(p) = 0 \quad (3.5)$$

wodurch R verschwindet für $k \rightarrow 0$. Eine unmittelbare Konsequenz aus dieser Bedingung ist, dass man dadurch automatisch das Standard erzeugende Funktional $Z_{k \rightarrow 0}[J] = Z[J]$ sowie die volle effektive Wirkung $\Gamma_{k \rightarrow 0} = \Gamma$ erhält.

$$\lim_{k^2 \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} R_k(p) \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

Dies rechtfertigt eine Sattelpunkts-Approximation des Funktionalintegrals, welches dominiert ist von der Lösung ϕ_0 der klassischen Theorie, welche die Wirkung minimiert.

Für die Konstruktion von Γ_k geht man ähnlich vor, wie bei der effektiven Wirkung Γ , allerdings gibt es kleine Abweichungen. Zunächst wird das erzeugende Funktional $W_k[J]$ untersucht und die Abkürzungen $t = \ln \frac{k}{\Lambda}$, $\partial_t = k \frac{d}{dk}$ genutzt.

$$\begin{aligned}
\partial_t W_k[J] &= \frac{1}{Z_k} \partial_t Z_k[J] = \frac{1}{Z_k} \int_{\Lambda} \mathcal{D}\phi (-\partial_t \Delta S_k) e^{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + (J, \phi)} \\
&= -\frac{1}{Z_k} \int_{\Lambda} \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] - \Delta S_k[\phi] + (J, \phi)} \int \frac{d^D p}{2\pi^D} \frac{1}{2} \phi(-p) \partial_t R_k(p) \phi(p) \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{2\pi^D} \partial_t R_k(p) \langle \phi(-p) \phi(p) \rangle_J \\
&= -\frac{1}{2} \int_p \partial_t R_k(p) (\langle \phi(-p) \phi(p) \rangle_{conJ} - \underbrace{\langle \phi(-p) \rangle_J \langle \phi(p) \rangle_J}_{\phi_{cl}(-p) \phi_{cl}(p)}) \\
&= -\frac{1}{2} \int_p \partial_t R_k(p) G_k(p) + \partial_t S_k[\phi_{cl}].
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Die interpolierende Wirkung Γ_k wird analog zur effektiven Wirkung Γ als modifizierte Legendre-Transformation eingeführt:

$$\Gamma_k[\phi_{cl}] = -W_k[J] + (J, \phi_{cl}) - \Delta S_k[\phi_{cl}] \tag{3.8}$$

mit dem klassischen Feld ϕ_{cl} , welches den 1-Punkt-Korrelator unter Anwesenheit eines äußeren Feldes darstellt.

$$\phi_{cl} = \langle \hat{\phi} \rangle_J = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J}. \tag{3.9}$$

Aufgrund der Modifikation durch den Regulatorterm erhält die Bewegungsgleichung einen regulatorabhängigen Zusatzterm.

$$J = \frac{\delta \Gamma_k[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}} + R_k \phi_{cl} \tag{3.10}$$

$$\frac{\delta J}{\delta \phi_{cl}} = \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_{cl} \delta \phi_{cl}} + R_k \equiv \Gamma_k^{(2)} + R_k. \tag{3.11}$$

Weiterhin gilt folgende wichtige Identität:

$$\delta(x - y) = \frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = \int_z \frac{\delta J(x)}{\delta \phi_{cl}(z)} \frac{\delta \phi_{cl}(z)}{\delta J(y)} = \int_z (\Gamma_k^{(2)} + R_k) G_k \tag{3.12}$$

oder in Operatornotation:

$$G_k^{-1} = \Gamma_k^{(2)} + R_k. \tag{3.13}$$

Nun ist es möglich, den Fluss von Γ_k direkt zu untersuchen:

$$\begin{aligned}
\partial_t \Gamma_k &= -\partial_t W_k - (\partial_t J, \phi_{cl}) + \partial_t(J, \phi_{cl}) - \partial_t \Delta S_k[\phi_{cl}] \\
&\stackrel{(3.7)}{=} \frac{1}{2} \int_p (\partial_t R_k) G_k + \partial_t \Delta S_k[\phi_{cl}] - \partial_t \Delta S_k[\phi_{cl}] \\
&\stackrel{(3.13)}{=} \frac{1}{2} Tr [\partial_t R_k (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Der Regulatorterm R_k im Nenner sorgt per Konstruktion für eine IR-Regularisierung, während der $\partial_t R_k$ -Term im Zähler für eine UV-Regularisierung sorgt. Die Trajektorie von Γ_Λ nach Γ_0 ist durch ihre Endpunkte fixiert und variiert je nach Regulatorwahl.

Die Störungstheorie ist in (3.14) ebenfalls enthalten. Wird für Γ_k eine 1-loop Entwicklung angesetzt, $\Gamma_k = S + \hbar \Gamma_k^{1-loop} + \mathcal{O}(\hbar^2)$, kann $\Gamma_k^{(2)}$ auf der rechten Seite von (3.14) durch $S^{(2)}$ ersetzt werden, wodurch die resultierende Gleichung direkt integriert werden kann.

$$\partial_t \Gamma_k^{1-loop} = \frac{1}{2} Tr [\partial_t R_k (S^{(2)} + R_k)^{-1}] = \frac{1}{2} \partial_t Tr \ln(S^{(2)} + R_k). \tag{3.15}$$

Damit ergibt sich die 1-loop Störungstheorie:

$$\Gamma^{1-loop} = S + \frac{1}{2} Tr \ln S^{(2)} + const. \tag{3.16}$$

Ähnlich können auch höhere loop-Entwicklungen berechnet werden, so dass die komplette Störungstheorie aus der Flussgleichung gewonnen werden kann.

Wird für (3.14) eine Vertexentwicklung durchgeführt, gelangt man zu Gleichungen, die den Dyson-Schwinger-Gleichungen ähnlich aber nicht identisch sind.

Eine weitere Methode Bestimmungsgleichungen für die interpolierende Wirkung zu finden, stellt die eine Operatorentwicklung dar. Diese ergibt sich für eine Theorie mit einem reellen skalaren Feld zu (Z_k : *Wellenfunktionsrenormierung*):

$$\Gamma_k = \int d^D x \left[V_k(\phi) + \frac{1}{2} Z_k(\phi) (\partial_\mu \phi)^2 + \mathcal{O}(\partial^4) \right] \tag{3.17}$$

mit V_k als eine Art effektives Potential.

4. Der anharmonischer Oszillator

Der Hauptteil dieser Arbeit beschäftigt sich damit, die Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators zu untersuchen. Dieser stellt eine $1 + 0$ -dimensionale reelle, skalare Feldtheorie dar. Hierbei handelt es sich um einen harmonischen Oszillator, der einen x^4 Selbstwechselwirkungsterm besitzt. Neben einer kurzen Betrachtung der Störungstheorie, die nur für kleine Kopplungsstärken sinnvolle Aussagen macht, werden im Folgenden die im vorhergehenden Kapitel dargestellten Methoden der Flussgleichung der interpolierenden Wirkung auf das Problem angewendet.

4.1. Anharmonischer Oszillator in Störungstheorie

Der Hamiltonoperator des anharmonischen Oszillators ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{x}^2 + \frac{\lambda}{4!}\hat{x}^4 \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_{st}. \quad (4.1)$$

Dieses quantenmechanische Problem lässt sich sehr gut durch eine störungstheoretische Entwicklung beschreiben. Dabei ist $\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{x}^2$ der Hamiltonoperator des ungestörten Systems, welcher einen harmonischen Oszillator beschreibt, dessen Spektrum bestens bekannt ist. Die Eigenwerte E_n^0 zu den Eigenzuständen $|n\rangle$ (Normierung: $\langle m|n\rangle = \delta_{nm}$) sind gegeben durch:

$$\hat{H}_0 |n\rangle = E_n^0 |n\rangle \quad E_n^0 = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (4.2)$$

Der zweite Term des Hamiltonians $\hat{H}_{st} = \frac{\lambda}{4!}\hat{x}^4$ wird als Störterm betrachtet. Für kleine Kopplungen λ lässt sich mit einfachen störungstheoretischen Methoden eine gute Approximation für das Spektrum des vollen Hamiltonians finden. Beschränkt man sich auf eine Entwicklung bis zur 2. Ordnung, ergeben sich die Energieniveaus gemäß:

$$E_n = E_n^0 + \langle n | \hat{H}_{st} | n \rangle + \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \hat{H}_{st} | n \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0}. \quad (4.3)$$

Eine elegante Variante die Energieniveaus zu berechnen, erfolgt mit Hilfe der Leiteroperatoren \hat{a}, \hat{a}^\dagger sowie dem Besetzungszahloperator \hat{n} , welche auf folgende Weise definiert sind und diverse Kommutatorrelationen erfüllen:

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{\omega} \right) \quad \hat{a}^\dagger := \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{\omega} \right) \quad \hat{n} := \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (4.4)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{1} \quad [\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad [\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (4.5)$$

Damit lässt sich der Störterm beschreiben durch $\hat{H}_{st} = \frac{\lambda}{4!(2\omega)^2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4$. Für die zu bestimmenden Skalarprodukte ergibt sich:

$$\langle m | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4 | n \rangle = \langle m | (\hat{a}^{\dagger 4} + \hat{a}^4 + 6\hat{a}^{\dagger 2} - 2\hat{a}^2 + 4\hat{a}^{\dagger 2}\hat{n} + 4\hat{a}^2\hat{n} + 6\hat{n}^2 + 6\hat{n} + 3\hat{1}) | n \rangle$$

woraus für die Energieniveaus in 2. Ordnung Störungstheorie folgendes resultiert:

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\lambda}{32\omega^2} (2n^2 + 2n + 1) - \omega \left(\frac{\lambda}{96\omega^3} \right)^2 (68n^3 + 102n^2 + 118n + 42). \quad (4.6)$$

Die für die Arbeit relevante Grundzustandsenergie ergibt sich nach:

$$E_0 = \frac{1}{2}\omega + \frac{\lambda}{32\omega^2} - \frac{42}{\omega} \left(\frac{\lambda}{96\omega^2} \right)^2 = \frac{1}{2}\omega + \frac{3}{4}\omega \left(\frac{\lambda}{24\omega^3} \right) - \frac{21}{8}\omega \left(\frac{\lambda}{24\omega^3} \right)^2. \quad (4.7)$$

Die Struktur von (4.7) legt eine Entwicklung der Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators in Potenzen von $\frac{\lambda}{24\omega^3}$ nah.

$$E_0(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{BW} \omega \left(\frac{\lambda}{24\omega^3} \right)^n. \quad (4.8)$$

Diese störungstheoretische Entwicklung in Potenzen der Kopplung λ wurden intensiv von Bender und Wu untersucht [5]. Neben der Bestimmung der Koeffizienten c_n^{BW} in hoher Ordnung konnte ebenfalls gezeigt werden, dass die Reihe (4.8) nicht für jedes beliebige $\lambda \neq 0$ konvergiert.

4.2. RG Flussgleichung

Die betrachteten Methoden der Renormierungsgruppe, im Besonderen die Flussgleichung der interpolierenden Wirkung, sollen nun im Folgenden auf den quantenmechanischen anharmonischen Oszillator angewendet werden. Die klassische Wirkung der Theorie ist gegeben durch ($\dot{x} \equiv \frac{\partial x}{\partial \tau}$):

$$S = \int d\tau \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + \frac{\lambda}{4!} x^4 \right). \quad (4.9)$$

Aufgrund der Struktur der Wirkung S wird folgender Ansatz für die interpolierende Wirkung Γ_k vorgenommen:

$$\Gamma_k[x] = \int d\tau \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V_k(x) + \mathcal{O}(\partial^4) \right). \quad (4.10)$$

$V_k(x)$ stellt das effektive Potential dar, dessen Fluss im Folgenden untersucht wird, um die Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators zu berechnen.

Mit diesem Ansatz ergibt sich für die linke Seite von (3.14):

$$\partial_t \Gamma_k[x] = \int d\tau \partial_t V_k(x). \quad (4.11)$$

Für die Bestimmung der rechten Seite von (3.14) ist es nötig eine geeignete Regulatorfunktion zu wählen, welche die Bedingungen (3.4)-(3.6) erfüllt. Desweiteren muss $\Gamma_k^{(2)}$ bestimmt werden ($V' \equiv \frac{\partial V}{\partial x}$).

$$\begin{aligned}\Gamma_k^{(2)} &= \frac{\delta}{\delta x(\tau_2)} \frac{\delta}{\delta x(\tau_1)} \Gamma_k[x] = \frac{\delta}{\delta x(\tau_2)} \int d\tau (\dot{x} \partial \tau \delta(\tau - \tau_1) + V'_k(x) \delta(\tau - \tau_1)) \\ &= (-\partial_{\tau_1}^2 + V''_k) \delta(\tau_1 - \tau_2).\end{aligned}\quad (4.12)$$

Nach einem Übergang in den Impulsraum mittels Fouriertransformation ($-\partial_\tau^2 = p^2$, etc.) und Vergleich von linker und rechter Seite der Flussgleichung (3.14), erhält man die folgende Gleichung für den Fluss des effektiven Potentials:

$$\partial_t V_k(x) = \frac{1}{2} \int_p \frac{\partial_t R_k(p)}{p^2 + V''_k + R_k(p)}.\quad (4.13)$$

Die Wahl einer geeigneten Regulatorfunktion ist entscheidend dafür, wie aufwendig die Lösung des Problems sich gestaltet. Im Folgenden soll die Flussgleichung des effektiven Potentials (4.13) für zwei verschiedene Regulatoren betrachtet werden.

4.2.1. Massenartiger Regulator

Eine einfache Regulatorfunktion stellt der massenartige Regulator dar.

$$R_k(p) = k^2.\quad (4.14)$$

Aus Gl.(4.13) folgt:

$$\partial_t V_k = \frac{1}{2} \int_p \frac{2k^2}{p^2 + V''_k + k^2} = \frac{k^2}{2\pi} \frac{\pi}{\sqrt{V''_k + k^2}}.\quad (4.15)$$

Dies liefert schließlich für den Fluss des effektiven Potentials V_k die Beziehung:

$$\frac{d}{dk} V_k(x) = \frac{k}{2\sqrt{V''_k + k^2}}.\quad (4.16)$$

In Analogie zum klassischen Potential des anharmonischen Oszillators wird eine polynomiale Entwicklung für das effektive Potential angesetzt.

$$V_k(x) = \tilde{E}_k + \frac{1}{2} \omega_k^2 x^2 + \frac{\lambda_k}{4!} x^4 + \mathcal{O}(x^6).\quad (4.17)$$

Die vom Skalenparameter k abhängigen Größen Frequenz ω_k und Kopplungskonstante λ_k beinhalten nun die Effekte der Quantenfluktuationen. Die klassische Wirkung S (4.9) stellt bei dem UV-cutoff $k = \Lambda$ die Randbedingung, dass die skalenabhängigen Konstanten durch die klassische Frequenz ω und Kopplung λ gegeben sind. Weiterhin ist zu beachten, dass \tilde{E}_k nicht die gesuchte Grundzustandsenergie darstellt, sondern um einen x -unabhängigen konstanten Wert ΔE von dieser abweicht $E_{0k} = \tilde{E}_k - \Delta E$. Nach dem

Einsetzen von (4.17) in (4.16) und Vergleich nach gleichen x -Potenzen erhält man ein System von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$$\frac{d}{dk} \tilde{E}_k = \frac{k}{2\sqrt{k^2 + \omega_k^2}} \quad (4.18)$$

$$\frac{d}{dk} \omega_k^2 = -\frac{1}{4} \frac{k}{(k^2 + \omega_k^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda_k \quad (4.19)$$

$$\frac{d}{dk} \lambda_k = \frac{9}{8} \frac{k}{(k^2 + \omega_k^2)^{\frac{5}{2}}} \lambda_k^2 + O(x^6). \quad (4.20)$$

Wobei der $O(x^6)$ -Term aus höheren Entwicklungen des effektiven Potentials resultiert. Um die Grundzustandsenergie $E_0 \equiv E_{0,k=0}$ zu bestimmen, betrachtet man den Fall $\omega = \lambda = 0$, für den $E_0 = 0$ gelten sollte. Dies liefert $\Delta E = \frac{1}{2}k$, womit sich der Fluss der Grundzustandsenergie ergibt zu:

$$\frac{d}{dk} E_{0k} = \frac{k}{2\sqrt{k^2 + \omega_k^2}} - \frac{1}{2}. \quad (4.21)$$

Dies garantiert zusätzlich, dass die Grundzustandsenergie für $k = \Lambda (= \infty)$ verschwindet (vgl. klassische Wirkung).

Die Gleichungen (4.19)-(4.21) können nun mit verschiedenen Approximationsmethoden behandelt werden, um die Grundzustandsenergie E_0 der Theorie zu berechnen. Die einfachste mögliche Näherung ist das Verschwinden der Kopplung $\lambda = 0$. Dies implementiert sofort, dass $\omega_k = \omega_{k=\Lambda} \equiv \omega$ eine Konstante ist, wodurch (4.21) direkt integriert werden kann.

$$E_{0k} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + \omega^2}} - 1 \right) dk = \frac{1}{2} \left(\sqrt{k^2 + \omega^2} - k \right) \\ \lim_{k \rightarrow 0} E_{0k} = \frac{1}{2} \omega. \quad (4.22)$$

Das Ergebnis aus (4.22) war natürlich zu erwarten, da sich im Fall verschwindender Kopplung das Problem auf einen harmonischen Oszillator reduziert, dessen Grundzustandsenergie durch $E_0 = \frac{1}{2}\omega$ gegeben ist.

Die einfachste nicht-triviale Lösung für das vorliegende Problem ist der Ansatz einer konstanten Kopplung, die ebenfalls durch die cutoff-Bedingung determiniert ist $\lambda_k = \text{const.} = \lambda$. Nach einer Integration des Flusses der Frequenz (4.19) können die Resultate von ω_k in (4.21) eingesetzt werden, um die Grundzustandsenergie der vollen Quantentheorie ($k = 0$) in Abhängigkeit der Kopplung zu bestimmen $E_0 = E_0(\lambda)$.

Die nächst höhere Entwicklung besteht in einer Betrachtung einer skalenparameter-abhängigen Kopplung λ_k . In diesem Fall muss das gekoppelte Differentialgleichungssystem (4.19)-(4.21) gelöst werden. Da hierfür keine analytischen Lösungen bekannt sind, wurde das Gleichungssystem numerisch gelöst und geplottet. Hierfür wird der ode45-Solver erneut genutzt. Allerdings wird die relative Fehlertoleranz von 10^{-3} (Standard-einstellung) auf 10^{-4} verringert. Bis auf den Fall $\lambda = 0$ existieren keine nennenswerten

Unterschiede zwischen beiden Fällen. Wird aber die Berechnung für $\lambda = 0$ ($\omega = 2$) durchgeführt, weichen die Werte für E_0 voneinander ab, $E_0 = 0.988$ zu $E_0 = 0.999$. Da die Grundzustandsenergie für diesen Fall gut bekannt ist $E_0 = 1$ (harmonischer Oszillator), wird der niedrigeren Fehlerrolanz der Vorzug gegeben.

Die nachfolgende Grafik (4.1) zeigt die Ergebnisse für die Abhängigkeit der Grundzustandsenergie E_0 von der Kopplungsstärke λ , die durch die klassische Theorie bestimmt ist. Dabei zeigt der schwarz gestrichelte Plot den Fall eines konstanten λ , während der blaue Kurvenverlauf den Fluss der Kopplungskonstante berücksichtigt. Für die Frequenz wurde $\omega = 2$ festgelegt.

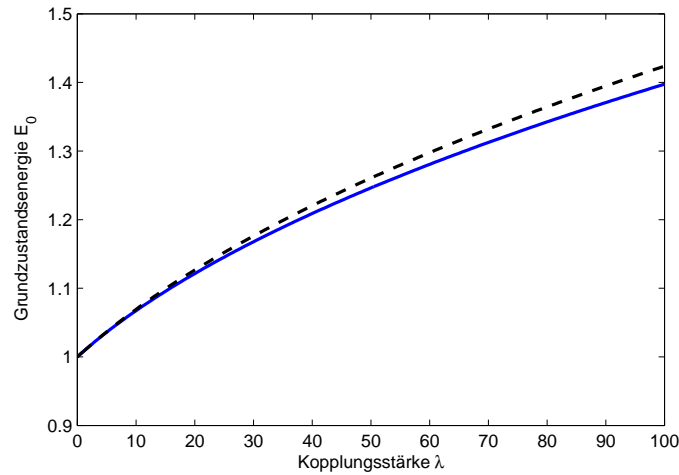


Abbildung 4.1.: Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators für $\omega = 2$ in Abhängigkeit von λ ; Flussgleichung basierend auf Gl.(4.19),(4.21) (schwarz gestrichelt) und (4.19)-(4.21) (blau).

Die Kurvenverläufe sind für kleine λ nahezu identisch, während bei steigender Kopplungsstärke die Differenz zwischen beiden Kurven zunimmt.

Für einen Vergleich mit dem störungstheoretischem Ergebnis (4.7) wurden die numerischen Ergebnisse für den Fall kleiner Kopplungen ($\lambda = 0, 1/1000, \dots, 3/100$) mit einem Polynom 2.Ordnung gefittet ($\omega = 1$).

$$E_0 = c_0 + c_1 \left(\frac{\lambda}{24} \right) + c_2 \left(\frac{\lambda}{24} \right)^2. \quad (4.23)$$

Dabei ergibt sich für die Koeffizienten:

$$\lambda = const. : \quad c_0 = 0.5 \quad c_1 = 0.75 \quad c_2 = -2.00 \quad (4.24)$$

$$\lambda = \lambda_k : \quad c_0 = 0.5 \quad c_1 = 0.75 \quad c_2 = -2,64 \quad (4.25)$$

$$Stoerungstheorie : \quad c_0 = \frac{1}{2} \quad c_1 = \frac{3}{4} \quad c_2 = -\frac{21}{8}. \quad (4.26)$$

Bis zur 1. Ordnung stimmen beide Ergebnisse mit den Resultaten der Störungstheorie überein, zusätzlich ergeben sich in 2. Ordnung die richtigen Vorzeichen und Größenordnungen. Für den Fall einer nicht-fließenden Kopplung liegt ein Fehler von 24% in der zweiten Ordnung vor. Betrachtet man zusätzlich den Fluss von λ , kann dieser auf unter 1% reduziert werden.

Um Allgemein das qualitative Verhalten der Approximationen einschätzen zu können, wurde eine höhere Entwicklung des effektiven Potentials vorgenommen.

$$V_k(x) = \tilde{E}_k + \frac{1}{2}\omega_k^2 x^2 + \frac{\lambda_k}{4!}x^4 + \sum_{n=3}^6 a_{k,2n}x^{2n}. \quad (4.27)$$

Hierbei muss für jede neu hinzukommende Ordnung der komplette Fluss des Koeffizienten $a_{k,2n}$ betrachtet werden, da für diese die Randbedingung $a_{\Lambda,2n} = 0$ ($n > 2$) gilt. Einsetzen von (4.27) in die Flussgleichung des Potentials (4.16) liefert erneut ein System gekoppelter Differentialgleichungen, welches numerisch gelöst werden kann.

$$\frac{d}{dk}E_{0k} = \frac{k}{2\sqrt{k^2 + \omega_k^2}} - \frac{1}{2} \quad \frac{d}{dk}\omega_k^2 = -\frac{1}{4} \frac{k}{(k^2 + \omega_k^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda_k \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dk}\lambda_k = \frac{9}{8} \frac{k}{(k^2 + \omega_k^2)^{\frac{5}{2}}} \lambda_k^2 - 180 \frac{k}{(k^2 + \omega_k^2)^{\frac{3}{2}}} a_{k6} \quad (4.29)$$

$$\frac{d}{dk}a_{k6} = -\frac{5}{256} \frac{k}{(k^2 + \omega_k^2)^{\frac{7}{2}}} \lambda_k^3 + \frac{45}{8} \frac{\lambda_k a_{k6}}{(k^2 + \omega_k^2)^{\frac{5}{2}}} - 14 \frac{k}{(k^2 + \omega_k^2)^{\frac{3}{2}}} a_{k8} \quad (4.30)$$

$$\frac{d}{dk}a_{k8} = f_1(k, \omega_k^2, \lambda_k, a_{k6}, a_{k8}, a_{k10}) \quad \frac{d}{dk}a_{k10} = f_2(k, \omega_k^2, \lambda_k, a_{k6}, a_{k8}, a_{k10}, a_{k12}) \quad (4.31)$$

$$\frac{d}{dk}a_{k12} = f_3(k, \omega_k^2, \lambda_k, a_{k6}, a_{k8}, a_{k10}, a_{k12}). \quad (4.32)$$

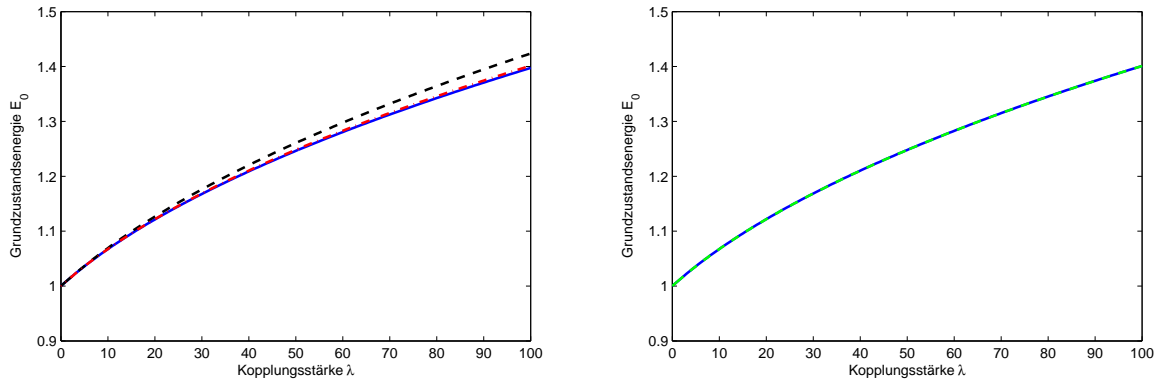


Abbildung 4.2.: Grundzustandsenergie gegen Kopplung geplottet, $\omega = 2$. Links: effektives Potential $V_k(x)$ entwickelt bis x^4 ohne Fluss von λ (schwarz gestrichelt) und mit Fluss von λ (blau) sowie bis x^6 (rot). Rechts: Entwicklung bis x^8 (grün) und x^{10} (blau).

Die Funktionen f_1, f_2, f_3 können leicht mittels Computeralgebrasystems berechnet werden. Die Ergebnisse für E_0 sind in den Graphen (4.2) geplottet.

Die Lösungen konvergieren recht schnell. Dies wird vor allem deutlich, wenn man die Differenz der Grundzustandsenergien ΔE_0 zwischen zwei aufeinander folgenden Entwicklungen des effektiven Potentials betrachtet (Abbildung (4.3)).

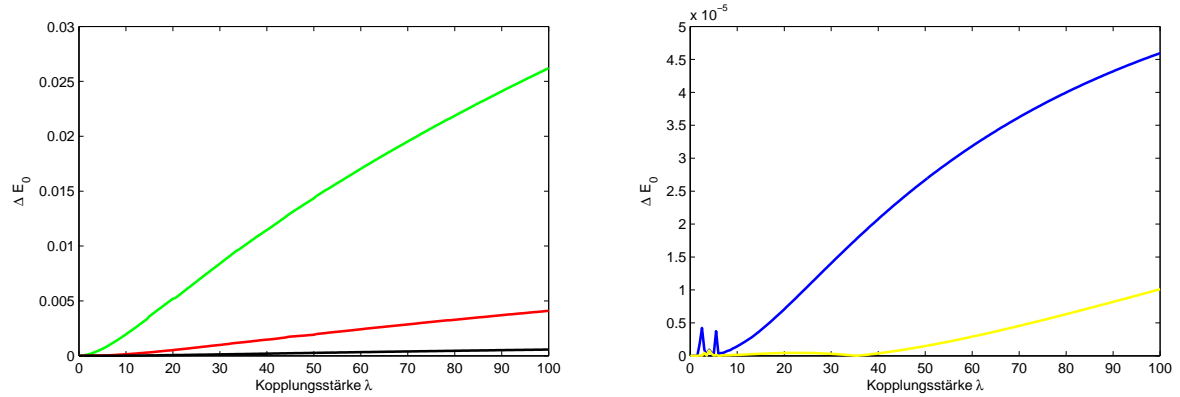


Abbildung 4.3.: Differenz der Grundzustandsenergie gegen Kopplung geplottet, $\omega = 2$. Links: Differenz zwischen der x^4 -Entwicklung mit und ohne Fluss der Kopplung (grün), zwischen x^4 mit Fluss und x^6 (rot), x^6 und x^8 (schwarz); Rechts: zwischen x^8 und x^{10} (blau), x^{10} und x^{12} (gelb).

Bereits bei einer Entwicklung, die den Fluss der Kopplung berücksichtigt, sind die Differenzen der Energien zu der nächst höheren Entwicklung (x^6) des effektiven Potentials in einem Bereich von 10^{-3} (Größenordnung der Energien: ≈ 1 für $\omega = 2$). Für höhere Entwicklungen werden die Abweichungen weiter verringert (10^{-6} zwischen den Entwicklungen x^{10} und x^{12}).

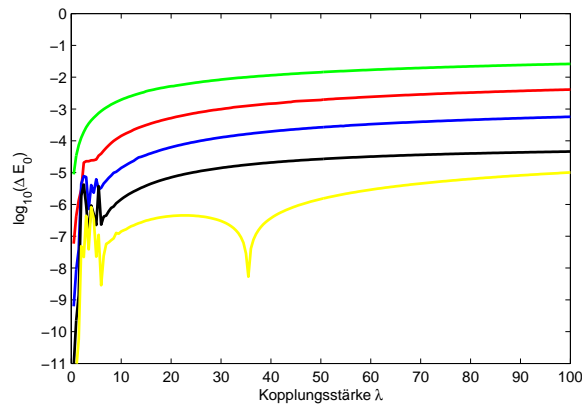


Abbildung 4.4.: Dekadischer Logarithmus der Differenz der E_0 zwischen den Entwicklungsordnungen x^4 mit und ohne Fluss der Kopplung (grün), x^4 und x^6 (rot), x^6 und x^8 (blau), x^8 und x^{10} (schwarz) sowie x^{10} und x^{12} .

Der dekadische Logarithmus der Energiedifferenzen ist in obiger Grafik (4.4) veranschaulicht. Im Fall kleiner Kopplungen stimmen die Lösungen für $E_0(\lambda)$ meist gut überein, so dass es zu Schwankungen zwischen sehr kleinen Werten von $\log(\Delta E_0)$ und der charakteristischen Größenordnung der jeweiligen Differenzen kommt. Wie bereits durch die Graphen der Abbildung (4.3) erwartet, sinkt die Differenz der Grundzustandsenergien zweier aufeinander folgender Entwicklungen des effektiven Potentials um eine Größenordnung. Die Ergebnisse aus den verschiedenen Entwicklungen konvergieren also recht schnell gegen einen festen Kurvenverlauf.

Von weiterer Bedeutung ist, dass die Differenzen im Fall der starken Kopplung nicht anfangen zu explodieren, wie dies im Fall einer störungstheoretischen Entwicklung gegeben wäre. Die Lösungsstruktur bleibt also auch für den Fall großer Kopplungen erhalten.

4.2.2. Linearer Regulator

Im Folgenden wird nun Gl.(4.13) mit Hilfe eines linearen Regulators ausgewertet (vgl.[1]). Dieser ist gegeben durch:

$$R_k(p) = (k^2 - p^2)\Theta(k^2 - p^2) \quad (4.33)$$

mit der Heaviside Funktion $\Theta(k^2 - p^2)$. Für die Ableitung der Regulatorfunktion ergibt sich $\partial_t R_k = 2k^2\Theta(k^2 - p^2)$. Nach der Auswertung von (4.13):

$$\partial_t V_k(x) = \frac{1}{2} \int_p \frac{2k^2\Theta(k^2 - p^2)}{k^2 + V_k''(x)} = \frac{1}{2\pi} \frac{2k^3}{k^2 + V_k''(x)} \quad (4.34)$$

ergibt sich für den Fluss des effektiven Potentials:

$$\frac{d}{dk} V_k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{k^2}{k^2 + V_k''}. \quad (4.35)$$

Wird für das effektive Potential wieder ein polynomialer Ansatz gemacht (4.17), folgt für den Fluss der Kopplungskonstanten erneut ein System von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

$$\frac{d}{dk} E_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{k^2}{k^2 + \omega_k^2} - 1 \right) \quad (4.36)$$

$$\frac{d}{dk} \omega_k^2 = -\frac{1}{\pi} \frac{k^2}{(k^2 + \omega_k^2)^2} \lambda_k \quad (4.37)$$

$$\frac{d}{dk} \lambda_k = \frac{6}{\pi} \frac{k^2}{(k^2 + \omega_k^2)^3} \lambda_k^2. \quad (4.38)$$

Die Gleichung für die Grundzustandsenergie ergibt sich wieder aus der Bedingung, dass diese für den Fall $\omega = \lambda = 0$ verschwinden soll.

Für eine erste simple Betrachtung dieser Beziehungen dient erneut der harmonische Oszillator $\lambda = 0 \Rightarrow \omega_k \equiv \omega$.

$$E_{0k} = -\frac{1}{\pi} \int \frac{\omega^2}{k^2 + \omega^2} dk = -\frac{1}{\pi} \omega \arctan\left(\frac{k}{\omega}\right) + \frac{1}{2}\omega. \quad (4.39)$$

Für den Fall $k = \Lambda (= \infty)$ folgt aus (4.39) $E_{0\Lambda} = 0$, darüber hinaus ergibt sich für den Fall $k = 0$ die erwartete Grundzustandsenergie des quantenmechanischen harmonischen Oszillators $E_0 = \frac{1}{2}\omega$.

Die numerische Integration des Differentialgleichungssystems (4.36)-(4.38) liefert erneut die durch den Massenregulator bekannte funktionale Abhängigkeit der Grundzustandsenergie $E_0 = E_{0,k=0}$ von der Kopplungsstärke. Im Folgenden werden wieder die beiden einfachsten nicht-trivialen Fälle, eine skalenparameter unabhängigen Kopplung $\lambda_k = \lambda_{k=\Lambda} \equiv \lambda$ sowie der volle Fluss λ_k , betrachtet und geplottet. (Als Lösungsfunktion diente wieder ode45. Hier lieferte bereits die Standardeinstellung der relativen Fehlertoleranz gute Ergebnisse im Fall $\lambda = 0$.)

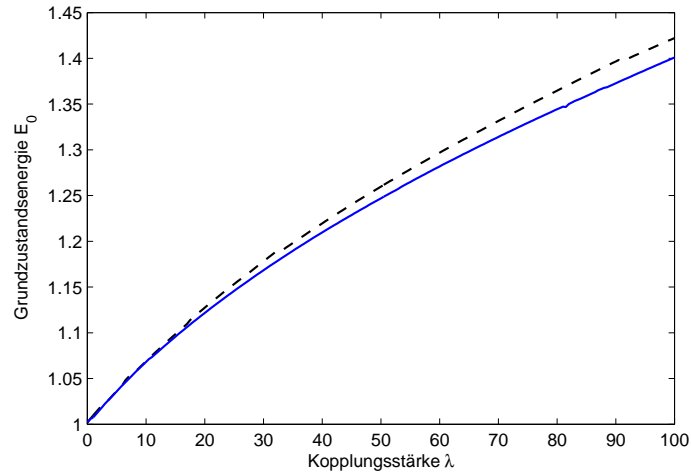


Abbildung 4.5.: Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators für $\omega = 2$ in Abhängigkeit von λ ; skalenparameter unabhängige Kopplung (schwarz gestrichelt) und Fluss der Kopplung (blau).

Führt man einen polynomialen zweiter Ordnung Fit (4.23) im Bereich kleiner Kopplungen durch ($\lambda = 0, 1/1000, \dots, 3/100$), erhält man für die Koeffizienten ähnliche Werte wie beim Massenregulator.

$$\lambda = \text{const.} : \quad c_0 = 0.5 \quad c_1 = 0.75 \quad c_2 = -2.19 \quad (4.40)$$

$$\lambda = \lambda_k : \quad c_0 = 0.5 \quad c_1 = 0.75 \quad c_2 = -2.81. \quad (4.41)$$

Wieder herrscht eine Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Störungstheorie (4.26) bis zur ersten Ordnung sowie ergibt sich für die zweite Ordnung das korrekte Vorzeichen. Für den Fall einer nicht fließenden Kopplung ergibt sich ein Fehler von 17% in der zweiten Ordnung. Berücksichtigt man den Fluss von λ verringert sich dieser auf 6%.

Entwickelt man das effektive Potential nach höheren x -Potenzen und löst das entstehende Differentialgleichungssystem, ergeben sich nur geringe Abweichungen von der x^4 -Entwicklung mit Berücksichtigung des Flusses der Kopplung. Die Lösungen für die

Grundzustandsenergie konvergieren analog zum Massenregulator recht stabil. Dies wird in der folgenden Grafik (4.6) geplottet, welche neben der x^4 -Entwicklung eine Entwicklung des effektiven Potentials bis x^{10} und x^{30} zeigt.

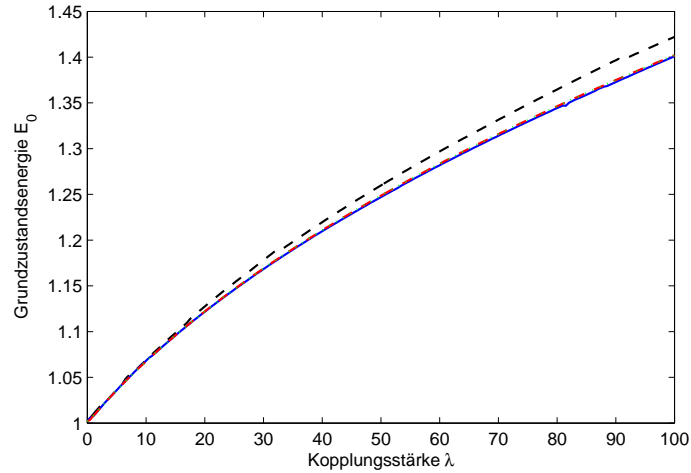


Abbildung 4.6.: Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators für $\omega = 2$ in Abhängigkeit von λ ; Entwicklung des effektiven Potentials bis x^4 mit skalenparameter unabhängiger Kopplung (schwarz gestrichelt) und Fluss der Kopplung (blau), x^{10} (rot) sowie x^{30} (grün).

Die 16 gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen können weiterhin durch numerische Löser auf dem Rechner bestimmt werden. Allerdings entstehen wie erwartet kaum größere Abweichungen zu niedrigeren Entwicklungen, so dass der Zeitaufwand für exaktere Berechnungen in den seltensten Fällen gerechtfertigt ist (meist sollte eine Entwicklung bis x^4 oder x^6 ausreichend sein).

In der folgenden Grafik (4.7) wird erneut der dekadische Logarithmus der Differenz der Grundzustandsenergie ΔE_0 zweier aufeinander folgender Entwicklungen des effektiven Potentials gegen die Kopplung geplottet.

Aufgrund der hohen Übereinstimmung der Lösungen bei kleinen Kopplungen λ sind die Differenzen in diesem Bereich analog zum massenartigen Regulator sehr klein oder in der charakteristischen Größenordnung. Besonders deutlich wird im Intervall $\lambda = 15 \dots 100$, dass die Differenz der Energiewerte um eine Größenordnung fällt, wodurch die Lösungen der verschiedenen Entwicklungen recht schnell konvergieren.

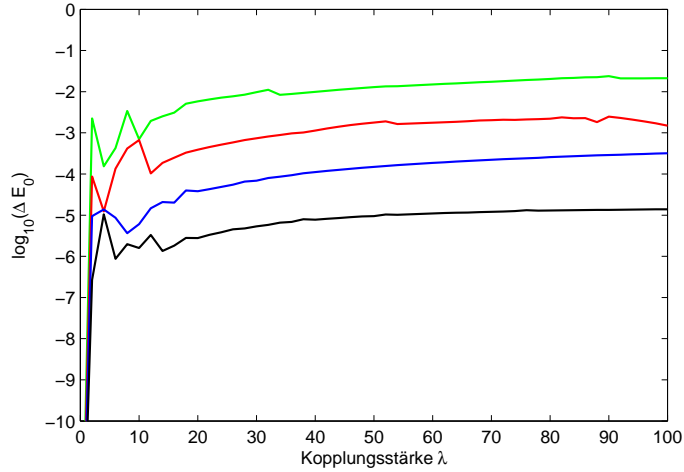


Abbildung 4.7.: Differenz der E_0 zwischen den Entwicklungsordnungen x^4 mit und ohne Fluss der Kopplung (grün), x^4 und x^6 (rot), x^6 und x^8 (blau) sowie x^8 und x^{10} (schwarz).

4.3. „Exakte“ numerische Lösung

Die Schrödingergleichung (zeitunabhängig) des anharmonischen Oszillators kann in Ortsdarstellung der Wellenfunktion numerisch direkt integriert werden. Der kleinste Eigenwert des Hamiltonoperators stellt dabei die Grundzustandsenergie des Problems dar.

$$E\psi(x) = \hat{H}\psi(x) \quad \hat{H} = -\frac{1}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{\lambda}{x^4}. \quad (4.42)$$

Nach einer Diskretisierung der Ortskoordinaten $x_i = -10, \dots, 10$ in Schrittweiten von $\Delta x = 1/100$, ergibt sich für die zweite Ableitung der Wellenfunktion auf dem Gitter:

$$\psi''(x_i) = \frac{1}{(\Delta x)^2}(\psi(x_{i-1}) - 2\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})). \quad (4.43)$$

Wendet man nun den Hamiltonoperator auf eine Wellenfunktion an einem diskreten Ort an, ergibt sich:

$$\hat{H}\psi(x_i) = \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}\omega^2 x_i^2 + \frac{\lambda}{24}x_i^4 \right) \psi(x_i) - \frac{1}{2(\Delta x)^2}\psi(x_{i-1}) - \frac{1}{2(\Delta x)^2}\psi(x_{i+1}). \quad (4.44)$$

Das zu findende Spektrum führt somit auf das folgende Eigenwertproblem:

$$E \begin{pmatrix} \psi(x_1) \\ \psi(x_2) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{\omega^2}{2}x_1^2 + \frac{\lambda}{24}x_1^4 \right) & -\frac{1}{2(\Delta x)^2} & & \\ -\frac{1}{2(\Delta x)^2} & \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{\omega^2}{2}x_2^2 + \frac{\lambda}{24}x_2^4 \right) & -\frac{1}{2(\Delta x)^2} & \\ & -\frac{1}{2(\Delta x)^2} & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(x_1) \\ \psi(x_2) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Der Hamiltonoperator ist in seiner diskretisierten Fassung eine Matrix, die nur auf der Haupt- und den beiden Nebendiagonalen besetzt ist. Diese lässt sich leicht diagonalisieren, so dass das Spektrum gut bestimmbar ist. Der kleinste Eigenwert stellt die Grundzustandsenergie dar, die mit der Kopplungsstärke variiert. Der funktionale Zusammenhang zwischen der Kopplung λ und der Grundzustandsenergie $E_0(\lambda)$ wird für den Fall $\omega = 2$ dargestellt, um einen Vergleich mit den Ergebnissen der Flussgleichungen durchzuführen.

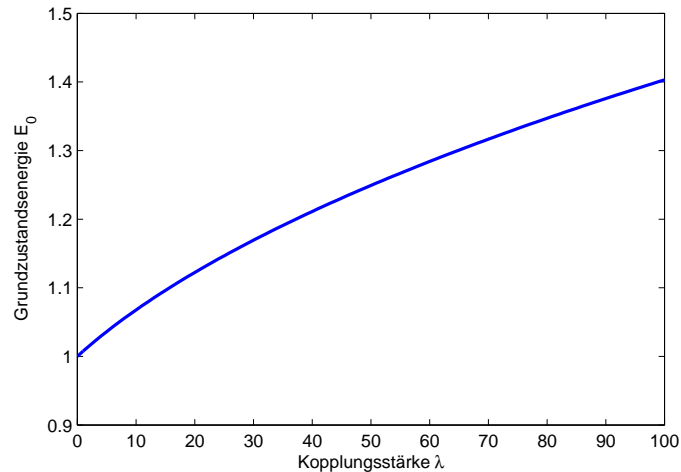


Abbildung 4.8.: Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators für $\omega = 2$ in Abhängigkeit von λ , ermittelt durch eine numerische Integration der Schrödingergleichung.

4.4. Vergleich der Methoden

Um die Güte der Approximationen für die Berechnung der Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke λ zu bestimmen, werden nun die betrachteten Methoden miteinander verglichen. Da eine analytisch exakte Lösung des Problems nicht bekannt ist, wird die numerische Integration der Schrödingergleichung als „exakte“ Lösung betrachtet, da diese die volle Quanteneffekte beschreibt und mit einfachen numerischen Verfahren gelöst werden kann. Die Flussgleichung der interpolierenden Wirkung beschreibt ebenfalls die volle Quantendynamik eines Systems, hängt aber von der Entwicklung der interpolierenden Wirkung beziehungsweise des effektiven Potentials ab und muss ebenfalls numerisch integriert werden, während eine störungstheoretische Entwicklung nur im Fall kleiner Kopplungen sinnvoll ist.

Die folgende Abbildung (4.9) liefert einen ersten Vergleich zwischen den untersuchten Methoden. Für die störungstheoretische Entwicklung 4. Ordnung für kleine Kopplungen wurden die Ergebnisse von Bender und Wu [5] genutzt. Besonders deutlich wird,

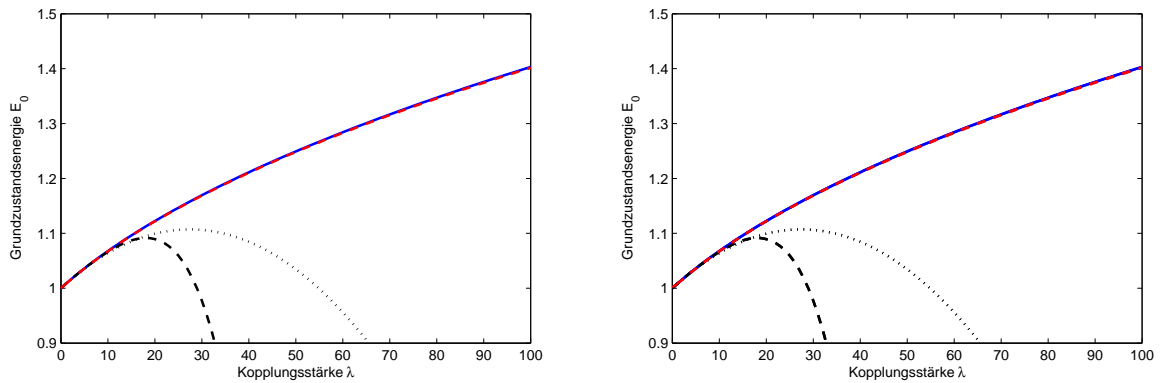


Abbildung 4.9.: Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators für $\omega = 2$ in Abhängigkeit von λ . Numerisch „exakte“ Lösung (blau), Störungstheorie 2. (schwarz, gepunktet) und 4. Ordnung (schwarz, gestrichelt) sowie Flussgleichung mit einer Entwicklung des effektiven Potentials bis x^6 (rot). Links: Massenregulator, Rechts: linearer Regulator.

dass für große Kopplungen die Störungstheorie keine sinnvollen Aussagen macht. Höhere Entwicklungen tragen kaum zu einem größeren Gültigkeitsbereich bei.

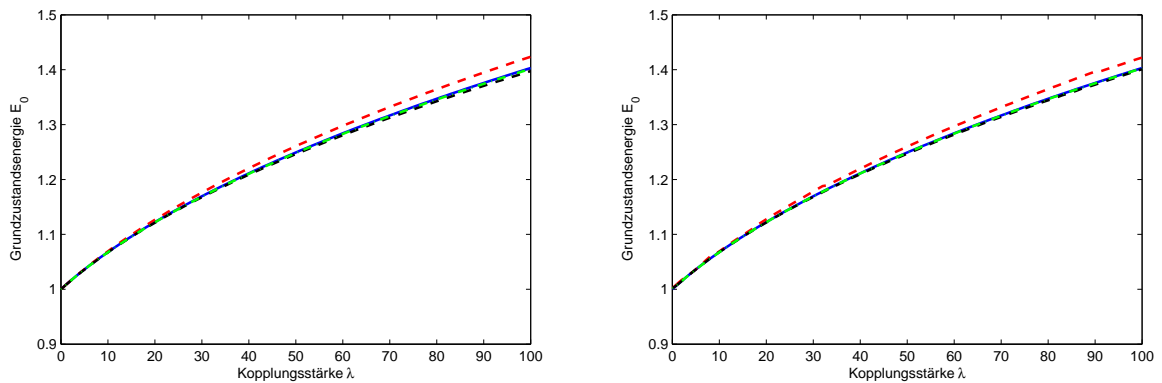


Abbildung 4.10.: Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators für $\omega = 2$ in Abhängigkeit von λ . Links: massenartiger Regulator; Rechts: linearer Regulator. Numerisch „exakt“ (blau), eff. Potential bis x^4 ohne (rot) und mit (schwarz) Fluss von λ sowie bis x^6 (grün) entwickelt.

Betrachtet man den Fluss der Kopplungskonstanten und entwickelt das effektive Potential bis zur Ordnung x^6 sind die Lösungen der beiden Regulatoren nahezu identisch mit denen der numerischen Integration der Schrödingergleichung. Eine Veränderung der Kurvenverläufe durch höhere Entwicklungen erfolgt lediglich um Werte in der Größenordnung 10^{-4} im betrachteten Intervall der Kopplungsstärke λ . Vergleicht man die Ergebnisse der Flussgleichungen mit zunehmender Ordnung in der Entwicklung des effektiven Potenti-

als erkennt man, dass diese recht gut gegen die numerisch „exakte“ Lösung konvergieren (Abbildung(4.10)).

Plottet man die Differenz zwischen den ermittelten Lösungen und der numerischen Integration der Schrödingergleichung (4.11), erkennt man die zunehmende Qualität der höheren Entwicklungsordnungen des effektiven Potentials. Ebenso wird die weite Stabilität der Lösung über das gesamte betrachtete Intervall der Kopplungsgröße deutlich. Die einfachste Näherung ($\lambda_k = \lambda = \text{const.}$) liefert selbst im Bereich $\lambda = 100$ nur einen Fehler von 1,5%, während nur ein kleiner Bereich existiert, indem die Störungstheorie sinnvolle Ergebnisse liefert.

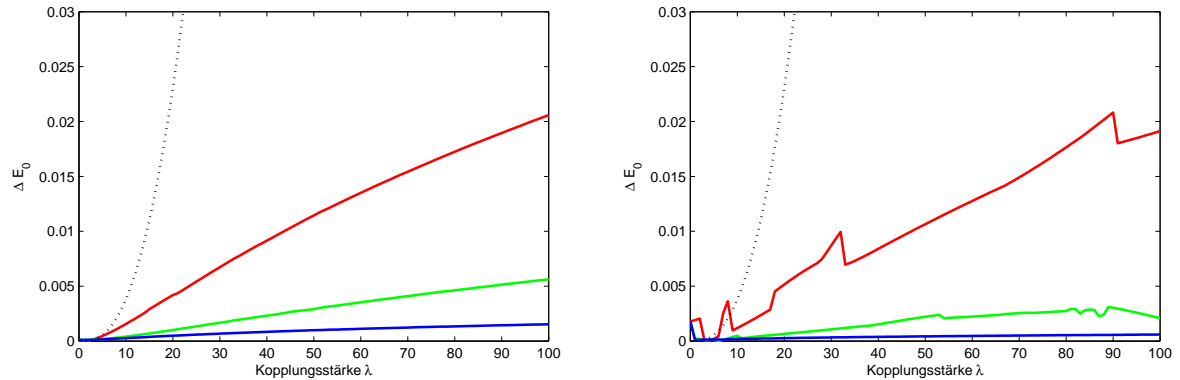


Abbildung 4.11.: Differenz zwischen der „exakten“ und den verschieden entwickelten Lösungen gegen λ . Links: massenartiger Regulator; Rechts: linearer Regulator. Störungstheorie 2.Ordnung (schwarz), eff. Potential bis x^4 ohne (rot) und mit (grün) Fluss von λ sowie bis x^6 (blau) entwickelt.

Betrachtet man wieder den dekadischen Logarithmus der Differenzen der Energiewerte, lässt sich das qualitative Annäherungsverhalten der unterschiedlichen Entwicklungen an die exakte Lösung untersuchen. Für beide Regulatoren konvergieren die Ergebnisse schnell gegen die gesuchte Lösung. Die Differenzen werden bei zunehmender Entwicklung des Potentials um einen Faktor 3 bis hin zu einer ganzen Größenordnung kleiner. Damit liegen diese Dimensionen ebenfalls in der schon betrachteten Größenordnung der Differenzen der Energiewerte, welche zwischen den einzelnen Entwicklungen liegen (vgl. Abbildung(4.4)). Die Lösungsmethoden der Flussgleichungen konvergieren also gut gegen die exakte Lösung.

Für die einfachste Approximation ist die Regulatorwahl unerheblich. Allerdings liefert der lineare Regulator mit steigender Ordnung kleinere Abweichungen von dem exakten Kurvenverlauf. Dies könnte auf die einfachere Struktur der Gleichungen zurückzuführen sein, die sich aus dem Fluss der Kopplungskonstanten ergeben. Für den linearen Regulator ergeben sich ganzrationale Funktionen in Nenner und Zähler, während für den massenartigen Regulator gebrochenrationale Funktionen in jeder Flussgleichung auftreten, was durch die numerische Berechnung zu leicht abweichenden Unterschieden führen kann. Zudem lieferte der lineare Regulator bereits bei höheren Fehlertoleranzen im Fall

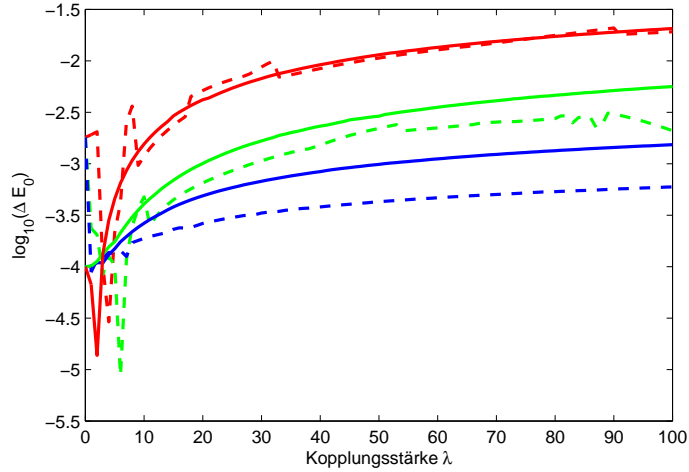


Abbildung 4.12.: $\log_{10}(\Delta E_0)$ gegen λ . Linearer Regulator (gestrichelt), Massenregulator (durchgehend). Entwicklung des eff. Potentials bis x^4 ohne (rot) und mit (grün) Fluss von λ und x^6 (blau).

$\lambda = 0$ Näherungen, die mit den exakten Werten übereinstimmen. Beim massenartigen Regulator musste die Toleranz verringert werden.

4.5. Stark-Kopplungslimes

Der Vorteil der Methode der Flussgleichung der funktionalen Renormierungsgruppe liegt in der Möglichkeit, Aussagen über den Fall starker Kopplungskonstanten zu machen. Für den anharmonischen Oszillator ist der Stark-Kopplungslimes gut bekannt [6]. Für den asymptotischen Fall starker Kopplungen ergibt sich ($\omega = 1$):

$$E_0 = \left(\frac{\lambda}{24}\right)^{1/3} \left[\alpha_0 + \mathcal{O}(\lambda^{-2/3})\right]. \quad (4.46)$$

Der Koeffizient α_0 kann in sehr hoher Ordnung bestimmt werden (vgl.[6]):

$$\alpha_0 = 0.667986... \quad (4.47)$$

Berechnet man die Grundzustandsenergie E_0 mit Hilfe eines massenartigen Regulators und führt die einfachste nicht-triviale Entwicklung für das effektive Potential aus (Gleichungen (4.19) und (4.21)), ergibt sich für den Koeffizienten in führender Ordnung $\alpha_0^{(\lambda)} = 0.6957$ (für die Kopplungsstärke wird ein Bereich um $\lambda = 10000$ gewählt). Dies entspricht einem Fehler von 4%. Betrachtet man die nächst höheren Ordnungen basierend auf (4.19)-(4.21) beziehungsweise einer Entwicklung bis x^6 erhält man für den Koeffizienten: $\alpha_0^{(\lambda_k)} = 0.6620$ und $\alpha_0^{(x^6)} = 0.6687$. Dabei verringern sich die Fehler auf 1% bzw. auf 0.1%.

Die Berechnungen sind analog für den linearen Regulator möglich. Es ergibt sich: $\alpha_0^{(\lambda)} = 0.6935$ (Fehler: 4%), $\alpha_0^{(\lambda_k)} = 0.6649$ (0.5%) und $\alpha_0^{(x^6)} = 0.6696$ (0.2). Beide Regulatoren liefern fast identische Ergebnisse, die sehr gut mit den bekannten Werten im Fall starker Kopplungen übereinstimmen.

5. Zusammenfassung

Zu Beginn der Arbeit konnte man sich anhand einer 0-dimensionalen Theorie von den Vorteilen der Approximationsmethoden der funktionalen Renormierungsgruppe gegenüber einer störungstheoretischen Entwicklung überzeugen. Die erlernten Methoden konnten dann auf ein quantenmechanisches Problem, den anharmonischen Oszillator, angewandt werden. Dessen Grundzustandsenergie wurde mit zwei unterschiedlichen Regulatoren untersucht. Die Ergebnisse stimmten für kleine Kopplungen sehr gut mit den aus der Störungstheorie bekannten Werten überein. Zusätzlich konnte die Güte der Approximation im Stark-Kopplungslimes nachgewiesen werden, so dass die Methoden der Flussgleichung über mehrere Größenordnungen gute Approximationen für die Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators liefern. Im Wesentlichen spielt die Regulatorwahl keine Rolle, da die Ergebnisse der beiden Varianten kaum voneinander abweichen. Allerdings können die Gleichungsstrukturen für den linearen Regulator bei größeren relativen Fehlertoleranzen (10^{-3} statt 10^{-4} beim massenartigen Regulator) numerisch gelöst werden, so dass diesem der Vorzug gegeben werden kann aber aufgrund der geringen Unterschiede nicht gegeben werden muss.

A. Grundlagen der Quantenfeldtheorie

A.1. Korrelatoren, erzeugende Funktionale, Wick-Rotation

Alle für eine Quantenfeldtheorie (QFT) wesentlichen physikalischen Aussagen können aus Korrelationsfunktionen gewonnen werden. Diese sind definiert als die Vakuum-Vakuum Übergangsamplitude eines zeitgeordneten Produkts von n -Feldoperatoren im Heisenbergbild.

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := \langle \Omega | \mathcal{T} \hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_n) | \Omega \rangle \equiv \langle \hat{\phi}_1 \cdots \hat{\phi}_n \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Mit dem Grundzustand $|\Omega\rangle$ der wechselwirkenden Theorie und dem Zeitordnungsoperator \mathcal{T} . Diese Definition ist für praktische Rechnungen unhandlich. Eine weitaus praktischere Darstellung für die n -Punkt-Korrelatoren liefert der Funktionalintegralformalismus.

$$G^{(n)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi_1 \cdots \phi_n e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}. \quad (\text{A.2})$$

Gl. (A.2) ist die Funktionalintegraldarstellung für die n -Punkt-Korrelationsfunktionen, in der keine Operatoren mehr auftauchen, sondern lediglich die klassische Wirkung $S[\phi]$ sowie einfache Feldfunktionen $\phi(x_i) \equiv \phi_i$.

Um ein erzeugendes Funktional konstruieren zu können, verschiebt man zunächst die Wirkung um einen Quellterm mit einer äußeren Quelle J .

$$S_J[\phi] = S[\phi] - \int d^D x \phi(x) J(x) \equiv S - (\phi, J). \quad (\text{A.3})$$

Mit der Einführung des Schwinger-Funktional:

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\phi e^{iS_J[\phi]} \quad (\text{A.4})$$

steht nun ein erzeugendes Funktional zur Verfügung, aus dem die Korrelatoren mittels Funktionalableitung rekonstruiert werden können. Das erzeugende Funktional lässt sich darstellen als Schwinger-Funktional normiert auf $Z[0]$: $T[J] = \frac{Z[J]}{Z[0]}$, womit sich sofort verifizieren lässt, dass

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = i^n \frac{\delta^n}{\delta J_1 \cdots \delta J_n} T[J] \Big|_{J=0} = \frac{i^n}{Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta J_1 \cdots \delta J_n} Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (\text{A.5})$$

Ein mathematisch eleganter Trick in QFTs stellt die Wick-Rotation dar. Hierfür lässt man zunächst komplexe Zeiten zu und führt eine Transformation $t \rightarrow it$ durch, die

eine Rotation der reellen auf die imaginäre Zeitachse bewerkstelligt (Wick-Rotation). Dadurch wird eine Änderung der Metrik erreicht. Die Minkowski-Metrik (+,-,-,-) geht bis auf ein globales Minus über in eine einfache 4-dimensionale euklidische Metrik. Durch analytisches Fortsetzen kann am Ende der Rechnung zu reellen Zeiten zurückgekehrt werden. Diese Prozedur cancelt das i vor Funktionalen, wie der Wirkung S , in denen über die Zeit integriert wird. Für die Funktionalintegrale gilt dann:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-S_J[\phi]} \equiv e^{W[J]}. \quad (\text{A.6})$$

Im Folgenden wird im Euklidischen gearbeitet.

Eine weitere nützliche Größe neben dem erzeugenden Funktional der n -Punkt-Korrelatoren $Z[J]$ ist das erzeugende Funktional der zusammenhängenden (connected) Greenschen Funktionen $W[J]$.

$$e^{W[J]} := Z[J]. \quad (\text{A.7})$$

Dies kann man sich an folgenden Überlegungen verdeutlichen:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta J_1 \delta J_2} W[J] \Big|_{J=0} &= \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1 \delta J_2} \Big|_{J=0} - \frac{1}{Z^2[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_1} \frac{\delta Z[J]}{\delta J_2} \Big|_{J=0} \\ &= \langle \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \rangle - \langle \hat{\phi}_1 \rangle \langle \hat{\phi}_2 \rangle \\ &= \langle \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 \rangle_{con}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Dies gilt ebenso für alle höheren Ableitungen von $W[J]$. Die zusätzlichen Terme eliminieren die nichtzusammenhängenden Diagramme von $\langle \hat{\phi}_1 \cdots \hat{\phi}_n \rangle$, so dass $W[J]$ nur zusammenhängende Greensche Funktionen erzeugt.

$$\frac{\delta^n}{\delta J_1 \cdots \delta J_n} W[J] \Big|_{J=0} = \langle \hat{\phi}_1 \cdots \hat{\phi}_n \rangle_{con}. \quad (\text{A.9})$$

A.2. Effektive Wirkung

Der Ausgangspunkt der effektiven Wirkung stellt die Definition eines „klassischen“ Feldes dar, welches der Vakuumerwartungswert des Feldoperators $\hat{\phi}$ in Anwesenheit einer äußeren Quelle ist.

$$\phi_{cl} := \langle \hat{\phi} \rangle_J = \langle \Omega | \hat{\phi} | \Omega \rangle_J. \quad (\text{A.10})$$

Es entspricht also dem 1-Punkt-Korrellator. Dieser ergibt sich zu:

$$\phi_{cl} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \frac{\delta W[J]}{\delta J}. \quad (\text{A.11})$$

Mittels einer Legendre Transformation des erzeugenden Funktional der zusammenhängenden Greenschen Funktionen gelangt man zur effektiven Wirkung.

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -W[J] + (J, \phi_{cl}) \quad , \quad J = J[\phi_{cl}]. \quad (\text{A.12})$$

Die Bedeutung der Effektiven Wirkung wird klar, wenn deren erste funktionale Ableitung untersucht wird.

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)} = - \int d^D y \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}}_{=\phi_{cl}} \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)} + \int d^D y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)} \phi_{cl}(y) + \left(J(y), \frac{\delta\phi_{cl}(y)}{\delta\phi_{cl}(x)} \right) = J(x). \quad (\text{A.13})$$

Dies stellt die Bewegungsgleichung für ein Quantensystem dar, bei dem die effektive Wirkung die Dynamik des Erwartungswertes eines Feldoperators unter Berücksichtigung aller Effekte der Quantenfluktuationen beschreibt.

(Bemerkung: Eine alternative Einführung der effektiven Wirkung ohne vorher den Begriff des „klassischen“ Feldes einzuführen, wäre folgende Definition gewesen:

$$\Gamma[\phi_{cl}] := \sup_J \{ -W[J] + (J, \phi_{cl}) \}. \quad (\text{A.14})$$

Für jedes beliebige ϕ_{cl} existiert ein bestimmtes $J_{sup} = J[\phi_{cl}]$, welches $(J, \phi_{cl}) - W[J]$ maximiert. Für $J = J_{sup}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{\delta}{\delta J(x)} ((J, \phi_{cl}) - W[J]) = \phi_{cl} - \frac{\delta W[J]}{\delta J} \\ \Rightarrow \phi_{cl} &= \frac{\delta W[J]}{\delta J} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J} = \langle \hat{\phi} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Wobei ϕ_{cl} wieder die Bedeutung des Erwartungswertes des Feldoperators $\hat{\phi}$ in Anwesenheit einer äußeren Quelle J erhält.)

Um eine Bestimmungsgleichung für die effektive Wirkung $\Gamma[\phi_{cl}]$ zu erhalten, beginnt man mit dem erzeugenden Funktional der Korrelationsfunktionen.

$$e^{-\Gamma[\phi_{cl}] + (J, \phi_{cl})} = e^{W[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + (J, \phi)} \quad (\text{A.16})$$

$$\Rightarrow e^{-\Gamma[\phi_{cl}]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + (J, \phi - \phi_{cl})}. \quad (\text{A.17})$$

Nach einer konstanten Verschiebung um das „klassische“ Feld $\phi \rightarrow \phi + \phi_{cl}$, welche das Maß invariant lässt, erhält man eine funktionale Integro-Differentialgleichung für die effektive Wirkung:

$$e^{-\Gamma[\phi_{cl}]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi + \phi_{cl}] + \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{cl}}, \phi \right)}. \quad (\text{A.18})$$

Führt man für die effektive Wirkung eine Vertex-Entwicklung durch,

$$\Gamma[\phi_{cl}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \quad (\text{A.19})$$

und setzt diese in (A.18) ein, erhält man die Dyson-Schwinger Gleichungen. Die $\Gamma^{(n)}$ bezeichnet man als die eigentlichen Vertizes, was den 1-Teilchen irreduziblen Greenschen

Funktionen entspricht. Damit können die Korrelationsfunktionen aus den eigentlichen Vertizes $\Gamma^{(n)}$ rekonstruiert werden.

Da die Dyson-Schwinger Gleichungen nur in seltenen Fällen exakt lösbar sind, bietet sich meist eine störungstheoretische Berechnung an. Als einfaches Beispiel wird hier die 1-loop Ordnung betrachtet.

$$S[\phi + \phi_{cl}] - \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{cl}}, \phi \right) = S[\phi_{cl}] + \int \frac{\delta S}{\delta\phi}[\phi_{cl}]\phi + \int \phi \frac{\delta^2 S}{\delta\phi\delta\phi}[\phi_{cl}]\phi + \mathcal{O}(\phi^3) - \int \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{cl}}\phi. \quad (\text{A.20})$$

Mit dieser Entwicklung um $\phi = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma[\phi_{cl}]} &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi_{cl}] - \int \overbrace{\left(\frac{\delta S[\phi_{cl}]}{\delta\phi} - \frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}} \right)}^{\mathcal{O}(\hbar)} \phi - \int \phi \frac{\delta^2 S[\phi_{cl}]}{\delta\phi\delta\phi} \phi} \\ &= e^{-S[\phi_{cl}]} \int \mathcal{D}\phi e^{-\int \phi \frac{\delta^2 S[\phi_{cl}]}{\delta\phi\delta\phi} \phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Das zu lösende Integral ist vom Gaußschen Typ, so das gilt:

$$e^{-\Gamma[\phi_{cl}]} = e^{-S[\phi_{cl}]} \left(\det \frac{\delta^2 S[\phi_{cl}]}{\delta\phi\delta\phi} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.22})$$

Damit gilt für die effektive Wirkung in 1-loop Ordnung.

$$\Gamma[\phi_{cl}] = S[\phi_{cl}] + \frac{1}{2} \ln \det S^{(2)}[\phi_{cl}]. \quad (\text{A.23})$$

Literaturverzeichnis

- [1] H. Gies, Introduction to the functional rg and applications to gauge theories, arXiv:hep-ph/0611146
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory; 1995 ed. Boulder, CO: Westview, 1995.
- [3] H. Gies „Quantenfeldtheorie, Vorlesungsnotizen“ SoSe 2010
- [4] H. Gies „Physik der Skalen: die Renormierungsgruppe, Skript“ WiSe 2008/09
- [5] C. M. Bender and T. T. Wu, Phys. Rev. 184, 1231 (1969): Anharmonic Oscillator
- [6] W. Janke and H. Kleinert, Variational perturbation expansion for strong-coupling coefficients of the anharmonic oscillator, arXiv:quant-ph/9502019
- [7] T. Kienzler, Exakte Flussgleichungen im dreidimensionalen Wess-Zumino-Modell (Diplomarbeit), 2010
- [8] K-I. Aoki and A. Horikoshi and M. Taniguchi and H. Terao, Non-Perturbative Renormalization Group and Quantum Tunnelling, arXiv:hep-th/9812050

