

BACHELORARBEIT

Untersuchung einer alternativen Lösungsstrategie der Wetterich-Gleichung

Pascal Zillmann

Jena im Juni 2024

Betreuer und Erstgutachter:

Holger Gies
Friedrich-Schiller-Universität
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch Physikalisches Institut
Fröbelstieg 1, 07743 Jena

Zweitgutachter:

Richard Schmieden
Friedrich-Schiller-Universität
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch Physikalisches Institut
Fröbelstieg 1, 07743 Jena

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Problemstellung und wichtige Größen	7
2.1	Erzeugendes Funktional und effektive Wirkung	7
2.2	Korrelationsfunktionen und eigentliche Vertizes	8
2.2.1	Einführung und Definition	8
2.2.2	Beziehungen zwischen den Korrelationsfunktionen und den eigentlichen Vertizes	9
2.2.3	Eine nützliche Eigenschaft	11
2.3	Exakte Lösung	11
3	Lösung mittels funktionaler Renormierungsgruppe	14
3.1	Die effektive Mittelwert-Wirkung	14
3.2	Wetterich-Flussgleichung	15
3.3	Differenzialgleichungssystem	16
3.3.1	Reihenentwicklung der Wetterich-Flussgleichung und Lösungsprinzip .	17
3.3.2	Herleitung konkreter Formeln für die Differenzialgleichungen	18
3.4	Diskussion anhand eines speziellen Regulators	20
3.4.1	Skalierung des Gleichungssystems	21
3.4.2	Diskussion	22
4	Alternatives Lösungsverfahren	26
4.1	Idee und Kriterien	26
4.2	Polynomnäherungen	28
4.2.1	Betrachtung der Anfangswerte	28
4.2.2	Betrachtung der Anfangswerte und einer Randbedingung	30
4.2.3	Bewertung und Fehleranalyse	32
4.3	Näherung mittels spezieller rationaler Funktionen	33
4.3.1	Entwicklungspunkt $b = -1$	33
4.3.2	Entwicklungspunkt $b = -0,5$	37
4.3.3	Bewertung und Fehleranalyse	41

5	Fazit und Ausblick	42
A	Programme	45
A.1	Herleitung der Beziehungen zwischen den Korrelationsfunktionen und den eigentlichen Vertizes	45
A.2	Herleitung der Flussgleichungen	47
B	Koeffizienten für die Näherung mittels spezieller rationaler Funktionen	52
B.1	Entwicklungspunkt $b = -1$	52
B.1.1	Betrachtung der Anfangswerte	52
B.1.2	Betrachtung von Anfangswerten und einer Randbedingung	53
B.2	Entwicklungspunkt $b = -0,5$	54
B.2.1	Betrachtung der Anfangswerte	54
B.2.2	Betrachtung von Anfangswerten und einer Randbedingung	55
	Literaturverzeichnis	57
	Eigenständigkeitserklärung	59

1 Einleitung

In der Quantenfeldtheorie ist das erzeugende Funktional eine wichtige Größe. In ihren Entwicklungskoeffizienten, den Korrelationsfunktionen (auch n -Punkt-Funktionen genannt), ist die gesamte physikalische Information gespeichert, vgl. [Zin08]. Beispielsweise kann man mit ihnen Streuprozesse zwischen Teilchen, d. h. Wechselwirkungsprozesse, beschreiben.

Um an dieses erzeugende Funktional bzw. die Korrelationsfunktionen zu gelangen, bedient man sich einer weiteren Größe, der effektiven Wirkung, die zum erzeugenden Funktional in Beziehung steht. Diese kann mithilfe des Konzepts der funktionalen Renormierungsgruppe bestimmt werden, siehe bspw. [BTW02; Bra12; Dup+21; Gie12; Wet93]. Hierzu wird nach [Wet93] zur Wirkung, auf der das erzeugende Funktional basiert, ein sogenannter Regulator-Term hinzugefügt. Es resultiert eine neue Größe, die effektive Mittelwert-Wirkung, die zwischen der Wirkung und der effektiven Wirkung interpoliert. Der Regulator-Term steuert hierbei diese Interpolation.

Für die effektive Mittelwert-Wirkung gilt eine Differenzialgleichung, die Wetterich-Flussgleichung, welche 1993 von Christof Wetterich hergeleitet wurde, vgl. [Wet93]. Für eine Vielzahl von Systemen gibt es Verfahren, wie diese näherungsweise gelöst werden kann, vgl. bspw. [BTW02; Bra12; Dup+21]. Im Standard-Verfahren entwickelt man die Gleichung in eine Reihe, erhält somit unendlich viele, gekoppelte Differenzialgleichungen und nähert das System, indem man nur die ersten Gleichungen betrachtet. Alle weiteren Entwicklungskoeffizienten werden auf ihren Anfangswert, d. h. oft auf null, gesetzt. In vielen Fällen funktioniert dieses Verfahren gut.

Es gibt allerdings Fälle, in denen mit dem oben beschriebenen Verfahren bestimmte Lösungen der Wetterich-Gleichung nicht gefunden werden können, die sich jedoch aus anderen Lösungsverfahren ergeben. Beispiele können in [GZ17; Gie+19] gefunden werden, wo ein bestimmtes Skalenverhalten in nicht-abelschen Eichtheorien angenommen und daraus auf das zu erwartende Verhalten der höheren Kopplungen geschlossen wird. Auch in der nichtlinearen, materiefreien Elektrodynamik wurde ein neuer Lösungstyp für quantenskaleninvariante Theorien basierend auf einer nicht-trivialen Annahme für die 2-Punkt-Funktion mit einer anderen Methode entdeckt, vgl. [GS24]. Die vielen verschiedenen Lösungszugänge verdeutlichen, wie reichhaltig die Theorie um die Wetterich-Flussgleichung ist.

In dieser Arbeit soll ein weiterer Ansatz untersucht werden, der in ähnlicher Form bereits in [Zie21] vorgestellt wird. Hierbei wird zunächst eine Näherung für einen der Entwicklungskoeffizienten der effektiven Mittelwert-Wirkung auf allen Skalen vorgegeben. Aus dieser werden dann über das Differenzialgleichungssystem, welches sich aus der Wetterich-Gleichung ergibt und das in einer speziellen Struktur vorliegt, sukzessive die anderen Entwicklungskoeffizienten berechnet.

Anstelle einer Quantenfeldtheorie, die über ein Funktionalintegral definiert ist, wird in dieser Arbeit ein N -dimensionales Integral betrachtet. Dieses kann als nulldimensionales Analogon eines $\mathcal{O}(N)$ -Modells angesehen werden. Im Zusammenhang mit der funktionalen Renormierungsgruppe wurde dieses Modell erstmalig in [KB12] untersucht, um die Qualität von Standard-Näherungsverfahren zu testen. Das Modell ist nützlich, da die exakte Lösung des Integrals bekannt ist.

Anhand des Beispiels im \mathbb{R}^N wird im Kapitel 2 in dieser Arbeit zunächst die Problemstellung genauer erläutert. Ferner werden wichtige Begriffe eingeführt, Beziehungen zwischen den Entwicklungskoeffizienten des erzeugenden Funktionals und der effektiven Wirkung hergeleitet sowie die exakte Lösung des Integrals berechnet. Im darauffolgenden Kapitel 3 wird die Wetterich-Flussgleichung hergeleitet und das oben beschriebene Standard-Verfahren erläutert und am Beispiel diskutiert. Schließlich führt Kapitel 4 in das alternative Lösungsverfahren ein. Anhand zweier Klassen von Näherungen – Polynomen und speziellen rationalen Funktionen – wird das Verfahren getestet. Den Abschluss der Arbeit bildet Kapitel 5, in dem ein Fazit gezogen sowie ein Ausblick gegeben wird.

2 Problemstellung und wichtige Größen

In diesem Kapitel wird zunächst die grundsätzliche Problemstellung erläutert, auf der diese Arbeit basiert. Anschließend werden die sogenannten Korrelationsfunktionen und eigentlichen Vertizes eingeführt sowie einige ihrer Eigenschaften hergeleitet. Schließlich wird die exakte Lösung des Problems als Referenzlösung angegeben. Die Ausführungen in diesem Kapitel basieren auf [Gie12; KB12].

2.1 Erzeugendes Funktional und effektive Wirkung

Im Zentrum dieser Arbeit steht das N -dimensionale Integral

$$Z(\mathbf{J}) := \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-S(\boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{\varphi} \quad (2.1)$$

für $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^N$, dessen Analogon in der Quantenfeldtheorie *erzeugendes Funktional* genannt wird. Hierbei ist

$$S(\boldsymbol{\varphi}) := \frac{r}{2} \boldsymbol{\varphi}^2 + \frac{u}{24} (\boldsymbol{\varphi}^2)^2 \quad (2.2)$$

als *Wirkung* gegeben. Das Integral konvergiert genau dann, wenn u positiv ist oder $u = 0$ zusammen mit $r > 0$ gilt. Für den zweiten Fall findet man

$$Z_{u=0}(\mathbf{J}) = \left(\frac{2\pi}{r}\right)^{N/2} \exp\left(\frac{\mathbf{J}^2}{2r}\right). \quad (2.3)$$

Im Folgenden wird immer $r, u > 0$ vorausgesetzt. Aus dem erzeugenden Funktional kann die Größe

$$W(\mathbf{J}) := \ln\left(\frac{Z(\mathbf{J})}{Z_{u=0}(0)}\right) = \ln\left(\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{N/2} Z(\mathbf{J})\right) \quad (2.4)$$

abgeleitet werden.¹ Ihre Legendre-Transformation heißt *effektive Wirkung* und ist definiert als

$$\Gamma(\boldsymbol{\phi}) := \sup_{\mathbf{J} \in \mathbb{R}^N} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\phi} - W(\mathbf{J})) = \mathbf{J}_{\text{sup}}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\phi} - W(\mathbf{J}_{\text{sup}}(\boldsymbol{\phi})). \quad (2.5)$$

¹ In der Quantenfeldtheorie wird W in der Regel als $\ln(Z[\mathbf{J}]/Z[0])$ definiert, damit gewünschte Konvergenzeigenschaften gelten. Hier ist allerdings die Definition aus [KB12, Formel (2.3)] zweckmäßig und ausreichend.

Der Einfachheit halber wird statt $\mathbf{J}_{\text{sup}}(\boldsymbol{\phi})$ immer \mathbf{J} geschrieben. Aus der effektiven Wirkung leitet sich das erzeugende Funktional ab. Daher wird es die Aufgabe sein, diese zu berechnen.

2.2 Korrelationsfunktionen und eigentliche Vertizes

2.2.1 Einführung und Definition

Die *Korrelationsfunktionen* $G_{\alpha}^{(n)}$, auch *n-Punkt-Funktionen* genannt, sind definiert durch

$$G^{(0)} := Z(0) \quad \text{und} \quad G_{\alpha}^{(n)} := \frac{1}{Z(0)} \frac{\partial^{\alpha} Z}{\partial \mathbf{J}^{\alpha}} \Big|_{\mathbf{J}=0}, \quad (2.6)$$

wobei $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein Multiindex der Länge $|\alpha| = n \in \mathbb{N}$ ist. In den Korrelationsfunktionen sind nach [Gie12; Zin08] die Informationen über die physikalischen Prozesse enthalten, die in der Quantenfeldtheorie untersucht werden, wie z. B. Streuprozesse. Teilt man den Integranden in Formel (2.1) durch $Z(\mathbf{J})$ und wählt dies als Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, so kann man die Korrelationsfunktion $G_{\alpha}^{(n)}$ für $n \geq 1$ auch als Erwartungswert von $\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ auffassen:

$$G_{\alpha}^{(n)} = \langle \boldsymbol{\varphi}^{\alpha} \rangle_{\mathbf{J}=0}. \quad (2.7)$$

Die Wirkung S ist rotationsinvariant. Nach [KB12] gilt dann dasselbe auch für das erzeugende Funktional: $Z(\mathbf{J}) = \tilde{Z}(\mathbf{J}^2)$. Mit der Taylorreihenentwicklung von \tilde{Z} findet man

$$Z(\mathbf{J}) = G^{(0)} + Z(0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} G^{(2m)} (\mathbf{J}^2)^m, \quad (2.8)$$

wobei

$$G^{(2m)} := \frac{1}{Z(0)} \frac{(2m)!}{m!} \frac{d^m \tilde{Z}}{d\tilde{\mathbf{J}}^m} \Big|_{\tilde{\mathbf{J}}=0} \quad (2.9)$$

für $m \geq 1$ gesetzt wurde. Mit dem Multinomialtheorem erhält man

$$Z(\mathbf{J}) = G^{(0)} + Z(0) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha|=m}} \frac{1}{\alpha!} \frac{m!}{(2m)!} G^{(2m)} \mathbf{J}^{2\alpha}. \quad (2.10)$$

Dem gegenüber steht die mehrdimensionale Reihenentwicklung von Z , welche mit Formel (2.6) wie folgt lautet:

$$Z(\mathbf{J}) = G^{(0)} + Z(0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha|=n}} \frac{1}{\alpha!} G_{\alpha}^{(n)} \mathbf{J}^{\alpha}. \quad (2.11)$$

Wegen $Z(\mathbf{J}) = \tilde{Z}(\mathbf{J}^2)$ sind alle Summanden null, die eine Komponente von \mathbf{J} mit ungerader Potenz enthalten. Die innere Summe reduziert sich also auf $\alpha \in (2\mathbb{N}_0)^N$. Eine Neuindizierung ergibt

$$Z(\mathbf{J}) = G^{(0)} + Z(0) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha|=m}} \frac{1}{(2\alpha)!} G_{2\alpha}^{(2m)} \mathbf{J}^{2\alpha}. \quad (2.12)$$

Da die Formeln (2.10) und (2.12) äquivalent sind, folgt durch einen Koeffizientenvergleich, dass

$$G_{2\alpha}^{(2m)} = \frac{m!}{(2m)!} \frac{(2\alpha)!}{\alpha!} G^{(2m)} \quad (2.13)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ gilt. Die $G_{\alpha}^{(n)}$ können also nur dann von null verschieden sein, wenn der erzeugende Multiindex α nur gerade Komponenten hat; dies entspricht einer geraden Anzahl an Ableitungen nach jeder Komponente von φ in Formel (2.6). Gleichzeitig zeigt Formel (2.13), dass die verschiedenen $G_{\alpha}^{(n)}$ für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ untereinander in Beziehung stehen. Es genügt, nur die Größe $G^{(n)}$ anzugeben, um die $G_{\alpha}^{(n)}$ zu bestimmen. Daher werden ab hier nur noch die $G^{(2m)}$ betrachtet, die ebenfalls als Korrelationsfunktionen bezeichnet werden.

Analoge Überlegungen können für W und Γ angestellt werden; der einzige Unterschied liegt darin, dass der Vorfaktor $1/Z(0)$ nicht berücksichtigt wird. Die Koeffizienten werden mit $G_c^{(2m)}$ bzw. $\Gamma^{(2m)}$ bezeichnet. Letztere nennt man in der Quantenfeldtheorie *eigentliche Vertizes*.

2.2.2 Beziehungen zwischen den Korrelationsfunktionen und den eigentlichen Vertizes

Die Beziehungen zwischen Z , W und Γ implizieren Beziehungen zwischen den Koeffizienten $G^{(2m)}$, $G_c^{(2m)}$ und $\Gamma^{(2m)}$. Für $m = 0$ folgt aus den Definitionen direkt

$$\Gamma^{(0)} = -G_c^{(0)} = \ln \left(\left(\frac{2\pi}{r} \right)^{N/2} \frac{1}{G^{(0)}} \right). \quad (2.14)$$

Für $m \geq 1$ ist etwas Vorarbeit nötig. Zunächst sollen Beziehungen zwischen den eigentlichen Vertizes $\Gamma^{(2m)}$ und $G_c^{(2m)}$ hergeleitet werden. Über die Beziehungen zwischen $G_c^{(2m)}$ und $G^{(2m)}$ wird später die Brücke zu den Korrelationsfunktionen geschlagen.

An der Stelle, an der das Supremum in Formel (2.5) angenommen wird, muss die notwendige Optimalitätsbedingung

$$\nabla_{\mathbf{J}} W(\mathbf{J}) = \phi \quad (2.15)$$

gelten. Hier wird die Bezeichnung „ ϕ “ klar: Analog zur Begründung für Formel (2.7) ist die Ableitung $\partial W / \partial J_i$ gleich dem Erwartungswert $\langle \varphi_i \rangle_J$, d. h. $\phi = \nabla_{\mathbf{J}} W = \langle \varphi \rangle_J$. Durch

Ableiten der Formel (2.5) nach ϕ folgt mit Ketten- und Produktregel sowie der obigen Optimalitätsbedingung wiederum

$$\nabla_{\phi} \Gamma(\phi) = J. \quad (2.16)$$

Mit den beiden Formeln (2.15) und (2.16) und dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion kann nun für die Hesse-Matrizen $D_{\phi}^2 \Gamma$ und $D_J^2 W$ die folgende zentrale Beziehung bestimmt werden:

$$D_{\phi}^2 \Gamma = D_{\phi} J = (D_J \phi)^{-1} = (D_J^2 W)^{-1}. \quad (2.17)$$

Im Folgenden wird angenommen, dass $\phi = 0$ genau dann gilt, wenn $J = 0$ ist. Dies ist im Allgemeinen nicht automatisch erfüllt, hier allerdings wegen der Rotationssymmetrie der Wirkung (und damit von Z , W und Γ) eine sinnvolle Annahme. Mit Formel (2.13) ergibt sich somit

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{G_c^{(2)}}. \quad (2.18)$$

Um die Beziehungen für die höheren Koeffizienten zu ermitteln, kann der Differenzialoperator $\partial^{2m-2}/\partial \phi_i^{2m-2}$, der auf die Formel (2.17) angewendet werden muss, mit mehrfacher Anwendung der mehrdimensionalen Kettenregel umgeschrieben werden. Ferner müssen Ableitungen inverser Matrizen berechnet werden. Da dies insgesamt einen sehr hohen Rechenaufwand bedeutet, der mit m stark anwächst, wird die Herleitung der Zusammenhänge zwischen den Koeffizienten hier über Funktionalableitungen durchgeführt. Der Lösungsweg ist damit allgemeiner als nötig, jedoch sind die resultierenden Aussagen auch für diese Arbeit gültig.

Formel (2.17) lautet in der Form mit Funktionalableitungen nach [Gie12, Formeln (23)–(24)]

$$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi^2} = \frac{\delta J}{\delta \phi} = \left(\frac{\delta \phi}{\delta J} \right)^{-1} = \left(\frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \right)^{-1}. \quad (2.19)$$

Leitet man diese Gleichung ab, so erhält man mit der Kettenregel

$$\frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi^3} = \frac{\delta}{\delta \phi} \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi^2} \right] = \frac{\delta J}{\delta \phi} \frac{\delta}{\delta J} \left[\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi^2} \right] = \left(\frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \right)^{-1} \frac{\delta}{\delta J} \left[\left(\frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \right)^{-1} \right] = - \left(\frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \right)^{-3} \frac{\delta^3 W}{\delta J^3}. \quad (2.20)$$

Für die vierte Ableitung findet man mit dem gleichen Vorgehen

$$\frac{\delta^4 \Gamma}{\delta \phi^4} = 3 \left(\frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \right)^{-5} \left(\frac{\delta^3 W}{\delta J^3} \right)^2 - \left(\frac{\delta^2 W}{\delta J^2} \right)^{-4} \frac{\delta^4 W}{\delta J^4}. \quad (2.21)$$

Dies kann man beliebig fortführen. Analog zur Variante mit partiellen Ableitungen entsprechen $\delta^n \Gamma / \delta \phi^n$ und $\delta^n W / \delta \phi^n$ den Größen $\Gamma^{(n)}$ bzw. $G_c^{(n)}$. Für $m = 2$ erhält man damit bspw.

$$\Gamma^{(4)} = -G_c^{(4)} (G_c^{(2)})^{-4}. \quad (2.22)$$

Um den Zusammenhang zwischen $G_c^{(2m)}$ und $G^{(2m)}$ zu bestimmen, wird die Formel (2.4) mehrfach abgeleitet. Mit den obigen Ergebnissen erhält man schließlich die Beziehungen zwischen den eigentlichen Vertizes und den Korrelationsfunktionen für $m \geq 1$. Die ersten drei Beziehungen lauten

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{G^{(2)}} , \quad (2.23)$$

$$\Gamma^{(4)} = -\frac{G^{(4)}}{(G^{(2)})^4} + \frac{3}{(G^{(2)})^2} , \quad (2.24)$$

$$\Gamma^{(6)} = 10 \frac{(G^{(4)})^2}{(G^{(2)})^7} - \frac{G^{(6)}}{(G^{(2)})^6} - 45 \frac{G^{(4)}}{(G^{(2)})^5} + \frac{60}{(G^{(2)})^3} . \quad (2.25)$$

Für die Herleitung der Beziehungen wurde ein Python-Programm entwickelt, vgl. Anhang A.1.

2.2.3 Eine nützliche Eigenschaft

Man kann in der Definition des erzeugenden Funktional, vgl. Formel (2.1), die Variablentransformation $\tilde{\varphi} := \sqrt{r}\varphi$ durchführen. Dann ergibt sich für die Korrelationsfunktionen mit $m \geq 1$

$$G^{(2m)} = \frac{1}{r^m} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\varphi}_1^{2m} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^2 - \frac{1}{24} \frac{u}{r^2} (\tilde{\varphi}^2)^2\right) d\tilde{\varphi}}{\int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}^2 - \frac{1}{24} \frac{u}{r^2} (\tilde{\varphi}^2)^2\right) d\tilde{\varphi}} . \quad (2.26)$$

Hier wird deutlich, dass $\tilde{G}^{(2m)} := r^m G^{(2m)}$ nur vom Verhältnis von u und r^2 abhängt. Der Quotient u/r^2 wird (dimensionslose) *Kopplung* genannt.

Wie man in den Formeln (2.23)–(2.25) erkennt, gilt eine ähnliche Aussage auch für die eigentlichen Vertizes $\Gamma^{(2m)}$; die Größen $\tilde{\Gamma}^{(2m)} := \Gamma^{(2m)}/r^m$ für $m \neq 1$ und $\tilde{\Gamma}^{(2)} := \Gamma^{(2)}/r - 1$ sind ebenfalls nur von der Kopplung abhängig.² Diese Skalierung wird an späterer Stelle noch nützlich sein.

2.3 Exakte Lösung

Das erzeugende Funktional lässt sich für das betrachtete Beispiel exakt berechnen. In diesem Abschnitt wird die exakte Lösung für dessen Entwicklungskoeffizienten, die Korrelationsfunktionen, bestimmt, welche für die späteren Betrachtungen als Referenzlösung dienen soll. Der vorgestellte Lösungsweg basiert auf [KB12, Abschnitt III], ist aber etwas allgemeiner gehalten.

² In Abschnitt 3.4.1 wird klar werden, wieso die Definition für $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ von der Definition der anderen $\tilde{\Gamma}^{(2m)}$ abweicht. Für die Betrachtungen hier ist der Unterschied jedoch irrelevant.

Zunächst wird das Integral

$$Z(0) = G^{(0)} = \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{r}{2}\boldsymbol{\varphi}^2 - \frac{u}{24}(\boldsymbol{\varphi}^2)^2\right) d\boldsymbol{\varphi} \quad (2.27)$$

betrachtet. Mit verallgemeinerten Kugelkoordinaten und der Abkürzung

$$\mathcal{R}_n(r, u) := \int_0^\infty \rho^n \exp\left(-\frac{r}{2}\rho^2 - \frac{u}{24}\rho^4\right) d\rho \quad (2.28)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich

$$Z(0) = G^{(0)} = |\omega_N| \mathcal{R}_{N-1}(r, u). \quad (2.29)$$

Hierbei steht $|\omega_N|$ für den Flächeninhalt der N -dimensionalen Einheitssphäre. $\mathcal{R}_n(r, u)$ lässt sich nach [KB12] durch

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(r, u) & (2^{5-3n} 3^{-1-n} u^{n+3})^{1/4} \\ &= \sqrt{u} \Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3r^2}{2u}\right) - \sqrt{6}r \Gamma\left(\frac{n+3}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{3r^2}{2u}\right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

explizit angeben, wobei ${}_1F_1$ Kummers konfluente hypergeometrische Funktion ist. Eine Definition für ${}_1F_1$ ist zum Beispiel in [GR07, Abschnitt 9.2] zu finden.

Der Erwartungswert $\langle (\boldsymbol{\varphi}^2)^m \rangle_{J=0}$ ergibt sich mit Kugelkoordinaten und Formel (2.29) einerseits zu

$$\langle (\boldsymbol{\varphi}^2)^m \rangle_{J=0} = \frac{1}{Z(0)} \int_{\mathbb{R}^N} (\boldsymbol{\varphi}^2)^m \exp(-S(\boldsymbol{\varphi})) d\boldsymbol{\varphi} = \frac{\mathcal{R}_{2m+N-1}(r, u)}{\mathcal{R}_{N-1}(r, u)}. \quad (2.31)$$

Andererseits erhält man mit dem Multinomialtheorem und den Formeln (2.7) und (2.13)

$$\langle (\boldsymbol{\varphi}^2)^m \rangle_{J=0} = \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^N \\ |\boldsymbol{\alpha}|=m}} \frac{m!}{\boldsymbol{\alpha}!} \langle \boldsymbol{\varphi}^{2\boldsymbol{\alpha}} \rangle = G^{(2m)} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^N \\ |\boldsymbol{\alpha}|=m}} \left(\frac{m!}{\boldsymbol{\alpha}!}\right)^2 \frac{(2\boldsymbol{\alpha})!}{(2m)!}. \quad (2.32)$$

Gleichsetzen der beiden Formeln führt auf die exakte Lösung für $G^{(2m)}$:

$$G^{(2m)} = \frac{\mathcal{R}_{2m+N-1}(r, u)}{\mathcal{R}_{N-1}(r, u)} \bigg/ \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^N \\ |\boldsymbol{\alpha}|=m}} \left(\frac{m!}{\boldsymbol{\alpha}!}\right)^2 \frac{(2\boldsymbol{\alpha})!}{(2m)!}. \quad (2.33)$$

In der Definition von \mathcal{R}_n in Formel (2.28) kann wie in Abschnitt 2.2.3 eine Koordinatentransformation durchgeführt werden. Mittels der Definition

$$\tilde{\mathcal{R}}_n\left(\frac{u}{r^2}\right) := \frac{1}{r^{N/2+n}} \int_0^\infty \tilde{\rho}^n \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\rho}^2 - \frac{1}{24}\frac{u}{r^2}\tilde{\rho}^4\right) d\tilde{\rho} \quad (2.34)$$

kann man die exakte Lösung für die skalierten Korrelationsfunktionen $\tilde{G}^{(2m)}$ durch

$$\tilde{G}^{(2m)} = \frac{\tilde{\mathcal{R}}_{2m+N-1}(u/r^2)}{\tilde{\mathcal{R}}_{N-1}(u/r^2)} \bigg/ \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha|=m}} \left(\frac{m!}{\alpha!} \right)^2 \frac{(2\alpha)!}{(2m)!} . \quad (2.35)$$

angeben. Insbesondere erhält man

$$\tilde{G}^{(2)} = \frac{1}{N} \frac{\tilde{\mathcal{R}}_{N+1}(u/r^2)}{\tilde{\mathcal{R}}_{N-1}(u/r^2)} , \quad (2.36)$$

$$\tilde{G}^{(4)} = \frac{3}{N(N+2)} \frac{\tilde{\mathcal{R}}_{N+3}(u/r^2)}{\tilde{\mathcal{R}}_{N-1}(u/r^2)} , \quad (2.37)$$

$$\tilde{G}^{(6)} = \frac{15}{N(N+2)(N+4)} \frac{\tilde{\mathcal{R}}_{N+5}(u/r^2)}{\tilde{\mathcal{R}}_{N-1}(u/r^2)} . \quad (2.38)$$

Die exakten Lösungen für die $\Gamma^{(2m)}$ bzw. $\tilde{F}^{(2m)}$ ergeben sich unmittelbar aus den Formeln (2.14) und (2.23)–(2.25). Abbildung 2.1 zeigt beispielhaft die exakte Lösung für $\tilde{F}^{(2)}$ und $\tilde{F}^{(4)}$.

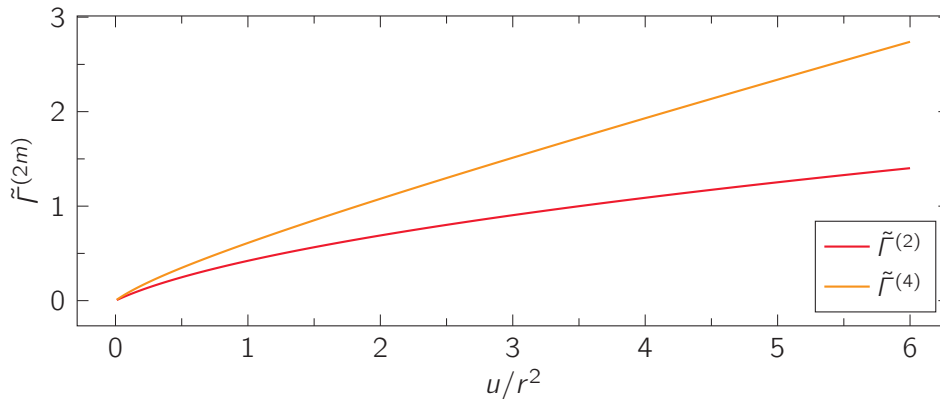


Abb. 2.1: Exakte Lösung für die eigentlichen Vertizes $\tilde{F}^{(2)}$ und $\tilde{F}^{(4)}$ in Abhängigkeit von der Koppelung u/r^2 bei $N = 2$.

Für die Berechnung konkreter Werte sollte man beachten, dass die Formel (2.30) bei kleinen Werten von u/r^2 auf numerische Probleme führt. Abhilfe schafft die Integraldarstellung in Formel (2.28), die durch numerische Integration errechnet werden kann. Für größere Werte von u/r^2 ist die Variante mit Formel (2.30) ausreichend.

3 Lösung mittels funktionaler Renormierungsgruppe

In der Quantenfeldtheorie können das erzeugende Funktional und die Korrelationsfunktionen im Allgemeinen nicht exakt ausgerechnet werden. Daher wurden Näherungsverfahren entwickelt. Eine Möglichkeit ist die Lösung mittels der funktionalen Renormierungsgruppe. In diesem Kapitel wird dieses Lösungsverfahren für das Beispiel aus Formel (2.1) erläutert und diskutiert. Hierbei ist die sogenannte Wetterich-Flussgleichung von zentraler Bedeutung, für die eine Herleitung angegeben wird.

Wie bereits in Abschnitt 2.1 erläutert wurde, genügt es, für die Berechnung des erzeugenden Funktionals die effektive Wirkung bzw. die eigentlichen Vertizes zu betrachten. Daher wird sich hier darauf beschränkt.

3.1 Die effektive Mittelwert-Wirkung

Beim Lösungsverfahren mittels der funktionalen Renormierungsgruppe wird nach [Gie12; KB12; Wet93] die effektive Wirkung Γ bestimmt, indem zwischen der Wirkung S und der effektiven Wirkung interpoliert wird. Der Interpolationsparameter wird im Folgenden mit k bezeichnet, die Interpolation selbst ist die *effektive Mittelwert-Wirkung* Γ_k . Für $k = k_0$ soll diese der Wirkung und für $k = k_1$ der effektiven Wirkung entsprechen:

$$\Gamma_{k_0} = S \quad \text{und} \quad \Gamma_{k_1} = \Gamma. \quad (3.1)$$

Als Ansatz für Γ_k wird zunächst zur Wirkung S der sogenannte *Regulator-Term*

$$\Delta S_k(\varphi) = \frac{1}{2} R_k \varphi^2 \quad (3.2)$$

addiert. Dabei soll der *Regulator* R_k nach [KB12] die Bedingungen

$$\lim_{k \rightarrow k_0} R_k = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow k_1} R_k = 0 \quad (3.3)$$

sowie

$$\lim_{R_k \rightarrow \infty} \Gamma_k = S \quad \text{und} \quad \lim_{R_k \rightarrow 0} \Gamma_k = \Gamma \quad (3.4)$$

erfüllen. Der Regulator steuert also die Interpolation von S nach Γ .

Die Addition des Regulator-Terms ΔS_k zur Wirkung S bedeutet für das hier betrachtete Funktional, dass r durch $r + R_k$ ersetzt wird, vgl. Formeln (2.1) und (2.2). Daher soll hier noch $r + R_k > 0$ gefordert werden.³ Ein Beispiel für einen Regulator ist

$$R_k = \frac{1}{k} - r \quad \text{für} \quad k_0 := 0 < k \leq \frac{1}{r} =: k_1. \quad (3.5)$$

Mit dem zusätzlichen Regulator-Term lassen sich das erzeugende Funktional zu

$$Z_k(\mathbf{J}) := \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-S(\boldsymbol{\varphi}) - \Delta S_k(\boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varphi}) d\boldsymbol{\varphi} \quad (3.6)$$

sowie W zu

$$W_k(\mathbf{J}) := \ln \left(\frac{Z_k(\mathbf{J})}{Z_{k,u=0}(0)} \right) = \ln \left(\left(\frac{r + R_k}{2\pi} \right)^{N/2} Z_k(\mathbf{J}) \right) \quad (3.7)$$

anpassen. Die *effektive Mittelwert-Wirkung* kann dann wie folgt definiert werden:

$$\Gamma_k(\boldsymbol{\phi}) := \sup_{\mathbf{J} \in \mathbb{R}^N} (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\phi} - W_k(\mathbf{J})) - \Delta S_k(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{J}_{k,\text{sup}}(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\phi} - W_k(\mathbf{J}_{k,\text{sup}}(\boldsymbol{\phi})) - \Delta S_k(\boldsymbol{\phi}). \quad (3.8)$$

Im Vergleich zu Formel (2.5) wird von der Legendre-Transformation noch der Regulator-Term subtrahiert. In [Wet93] wird gezeigt, dass diese Definition die Bedingung in Formel (3.4) erfüllt. Im Folgenden wird wie in Abschnitt 2.2.1 statt $\mathbf{J}_{k,\text{sup}}(\boldsymbol{\phi})$ immer \mathbf{J}_k geschrieben und wie in Abschnitt 2.2.2 angenommen, dass $\mathbf{J}_k = 0$ genau dann gilt, wenn $\boldsymbol{\phi} = 0$ ist.

3.2 Wetterich-Flussgleichung

Für die effektive Mittelwert-Wirkung Γ_k gilt eine Flussgleichung, die auch *Wetterich-Flussgleichung* genannt wird. Sie wurde von Christof Wetterich in [Wet93] bewiesen und ist unabhängig von der konkreten Wirkung. In diesem Abschnitt wird die Gleichung basierend auf [Gie12; Wet93] für den \mathbb{R}^N hergeleitet. In analoger Form gilt sie auch in der Quantenfeldtheorie.

Wie der Name suggeriert, soll die Wetterich-Flussgleichung den Fluss von Γ_k , d. h.

$$\frac{d\Gamma_k(\boldsymbol{\phi})}{dk} = \frac{d\mathbf{J}_k}{dk} \cdot \boldsymbol{\phi} - \frac{dW_k(\mathbf{J}_k)}{dk} - \frac{1}{2} \frac{dR_k}{dk} \boldsymbol{\phi}^2, \quad (3.9)$$

³ Für einen monotonen (stetigen) Regulator R_k ist dies aufgrund der Bedingung in Formel (3.3) stets erfüllt.

beschreiben, wobei hier die Definition von Γ_k gemäß Formel (3.8) eingesetzt wurde. Für den zweiten Summanden der rechten Seite von Formel (3.9) gilt mit Formel (3.7)

$$\frac{dW_k(\mathbf{J}_k)}{dk} = \frac{1}{Z_k(\mathbf{J}_k)} \frac{dZ_k(\mathbf{J}_k)}{dk} + \frac{N}{2} \frac{dR_k}{dk} \frac{1}{r + R_k}. \quad (3.10)$$

Wie in Abschnitt 2.2.1 kann auch mit $Z_k(\mathbf{J}_k)$ ein Erwartungswert definiert werden, der mit $\langle \cdot \rangle_{k, \mathbf{J}_k}$ bezeichnet wird. Dann kann man den Fluss von $Z_k(\mathbf{J}_k)$ mit Formel (3.6) durch

$$\frac{1}{Z_k(\mathbf{J}_k)} \frac{dZ_k(\mathbf{J}_k)}{dk} = \frac{d\mathbf{J}_k}{dk} \cdot \langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_{k, \mathbf{J}_k} - \frac{1}{2} \frac{dR_k}{dk} \langle \boldsymbol{\varphi}^2 \rangle_{k, \mathbf{J}_k} \quad (3.11)$$

ausdrücken. Analog zu Formel (2.15) gilt wieder die Optimalitätsbedingung

$$\langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_{k, \mathbf{J}_k} = \nabla_{\mathbf{J}_k} W_k(\mathbf{J}_k) = \boldsymbol{\phi}. \quad (3.12)$$

Ferner ist

$$\text{Tr}(D_{\mathbf{J}_k}^2 W_k(\mathbf{J}_k)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 W_k}{\partial J_k^2}(\mathbf{J}_k) = \langle \boldsymbol{\varphi}^2 \rangle_{k, \mathbf{J}_k} - \langle \boldsymbol{\varphi} \rangle_{k, \mathbf{J}_k}^2. \quad (3.13)$$

Mit den Formeln (3.10)–(3.13) lässt sich Formel (3.9) nun als

$$\frac{d\Gamma_k(\boldsymbol{\phi})}{dk} = \frac{1}{2} \frac{dR_k}{dk} \text{Tr}(D_{\mathbf{J}_k}^2 W_k(\mathbf{J}_k)) - \frac{N}{2} \frac{dR_k}{dk} \frac{1}{r + R_k} \quad (3.14)$$

schreiben. Außerdem gilt analog zu Formel (2.16)

$$\nabla_{\boldsymbol{\phi}} \Gamma_k(\boldsymbol{\phi}) = \mathbf{J}_k - R_k \boldsymbol{\phi} \quad (3.15)$$

und somit

$$D_{\boldsymbol{\phi}}^2 \Gamma_k + R_k \mathbb{1} = D_{\boldsymbol{\phi}} \mathbf{J}_k = (D_{\mathbf{J}_k} \boldsymbol{\phi})^{-1} = (D_{\mathbf{J}_k}^2 W_k)^{-1}. \quad (3.16)$$

Setzt man dies in Formel (3.14) ein, so erhält man schließlich die *Wetterich-Flussgleichung*:

$$\frac{d\Gamma_k(\boldsymbol{\phi})}{dk} = \frac{1}{2} \frac{dR_k}{dk} \text{Tr}\left((D_{\boldsymbol{\phi}}^2 \Gamma_k(\boldsymbol{\phi}) + R_k \mathbb{1})^{-1}\right) - \frac{N}{2} \frac{dR_k}{dk} \frac{1}{r + R_k}. \quad (3.17)$$

3.3 Differenzialgleichungssystem

Die Wetterich-Gleichung kann nun genutzt werden, um die effektive Mittelwert-Wirkung Γ_k zu bestimmen. Hierzu werden beide Seiten der Gleichung in eine Reihe entwickelt. Für jeden Koeffizienten der Reihe erhält man eine Differenzialgleichung. Die Gleichungen sind gekoppelt

und werden näherungsweise gelöst. In diesem Abschnitt wird dieses Lösungsverfahren (im Folgenden Standard-Verfahren genannt) vorgestellt. Dieses Verfahren wird auch in den Reviews [BTW02; Bra12; Dup+21] mit weiteren Beispielen vertieft.

3.3.1 Reihenentwicklung der Wetterich-Flussgleichung und Lösungsprinzip

Die Wetterich-Gleichung in Formel (3.17) wird nun auf beiden Seiten nach ϕ in eine Taylor-Reihe entwickelt, vgl. [KB12]. Die Koeffizienten $\Gamma_{k,\alpha}^{(n)}$ der Reihe sind dabei analog zu den eigentlichen Vertizes definiert, vgl. Abschnitt 2.2.1. Aufgrund der Rotationssymmetrie von Γ_k sind die $\Gamma_{k,\alpha}^{(n)}$ für Multiindizes α mit ungeraden Einträgen gleich null. Ein Koeffizientenvergleich liefert dann Flussgleichungen für die übrigen Koeffizienten $\Gamma_{k,\alpha}^{(2m)}$:

$$\frac{d\Gamma_{k,\alpha}^{(2m)}}{dk} = \frac{1}{2} \frac{dR_k}{dk} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial \phi^{2\alpha}} \left[\text{Tr} \left((D_\phi^2 \Gamma_k(\phi) + R_k \mathbf{1})^{-1} \right) + \frac{N}{r + R_k} \right]_{\phi=0}. \quad (3.18)$$

Auch die $\Gamma_{k,\alpha}^{(2m)}$ stehen für festes m analog zu Formel (2.13) untereinander in Beziehung und können durch $\Gamma_k^{(2m)}$, die Koeffizienten der Reihe

$$\Gamma_k(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} \Gamma_k^{(2m)} (\phi^2)^m, \quad (3.19)$$

beschrieben werden. Ferner wird im Folgenden der Fall $m = 0$ separat betrachtet. Es ergibt sich

$$\frac{d\Gamma_k^{(2m)}}{dk} = \frac{1}{2} \frac{dR_k}{dk} \begin{cases} \text{Tr} \left((D_\phi^2 \Gamma_k|_{\phi=0} + R_k \mathbf{1})^{-1} \right) + \frac{N}{r + R_k} & \text{für } m = 0 \\ \text{Tr} \left(\frac{\partial^{2m}}{\partial \phi_i^{2m}} \left[(D_\phi^2 \Gamma_k(\phi) + R_k \mathbf{1})^{-1} \right]_{\phi=0} \right) & \text{für } m \geq 1 \end{cases}. \quad (3.20)$$

Im Folgenden wird die Gleichung für ein gegebenes m die m -te Gleichung des Systems genannt. Man erhält also unendlich viele gekoppelte Differenzialgleichungen für die $\Gamma_k^{(2m)}$. Die Anfangsbedingungen für dieses Differenzialgleichungssystem sind durch Formel (3.1) bestimmt. Durch einen Koeffizientenvergleich mit der Wirkung S , vgl. Formel (2.2), ergeben sie sich zu

$$\Gamma_{k_0}^{(0)} = 0, \quad \Gamma_{k_0}^{(2)} = r, \quad \Gamma_{k_0}^{(4)} = u \quad \text{und} \quad \Gamma_{k_0}^{(2m)} = 0 \quad \text{für } m \geq 3. \quad (3.21)$$

Von diesen Anfangswerten an wird das Differenzialgleichungssystem bis zu k_1 integriert. Nach Formel (3.1) erhält man damit ein Ergebnis für $\Gamma^{(2m)}$, woraus sich unmittelbar Γ ergibt.

In [KB12] wird ein Verfahren für eine Näherungslösung des Systems vorgestellt. Hiernach wird die Reihenentwicklung in Formel (3.19) bei $m = m_t$ abgebrochen, sodass nur die Differenzialgleichungen für $m = 0, \dots, m_t$ verbleiben. Ferner wird der Koeffizient $\Gamma_k^{(2m_t+2)}$, der in der m_t -ten Gleichung vorkommt, konstant auf seinen Anfangswert gemäß Formel (3.21) gesetzt. Das resultierende System mit $m_t + 1$ Differenzialgleichungen und ebenso vielen Unbekannten wird dann für einen gegebenen Regulator (i. d. R. numerisch) gelöst.

3.3.2 Herleitung konkreter Formeln für die Differenzialgleichungen

Im vorigen Abschnitt wurde das Lösungsprinzip vollständig erklärt. Nun soll die Ableitung auf der rechten Seite der Formel (3.20) ausgeführt werden, sodass sich eine etwas andere allgemeine Formel für die Differenzialgleichungen ergibt. Da im Fall $m = 0$ in der genannten Formel keine Ableitungen auftreten, wird hier nur $m \geq 1$ betrachtet. Schließlich werden die Gleichungen für die ersten Koeffizienten explizit angegeben.

Es muss die partielle Ableitung einer Matrix-Inversen bestimmt werden. Hierfür kann allerdings ein Trick verwendet werden, der die umständliche Rechnung mit Matrix-Ableitungen vereinfacht. Zunächst wird die Abkürzung $U(\boldsymbol{\phi}) := D_{\boldsymbol{\phi}}^2 \Gamma_k(\boldsymbol{\phi}) + R_k \mathbf{1}$ eingeführt. Durch Umstellen von

$$0 = \frac{\partial \mathbf{1}}{\partial \phi_i} = \frac{\partial}{\partial \phi_i} [U U^{-1}] = \frac{\partial U}{\partial \phi_i} U^{-1} + U \frac{\partial U^{-1}}{\partial \phi_i}. \quad (3.22)$$

erhält man die Relation

$$\frac{\partial U^{-1}}{\partial \phi_i} = -U^{-1} \frac{\partial U}{\partial \phi_i} U^{-1}. \quad (3.23)$$

Für die höheren Ableitungen muss dann die Produktregel angewendet werden. Es entsteht eine Summe aus Termen der Form

$$U^{-1} \prod_j \left(\frac{\partial^{n_j} U}{\partial \phi_i^{n_j}} U^{-1} \right). \quad (3.24)$$

In der Formel (3.20) werden die Ableitungen an der Stelle $\boldsymbol{\phi} = 0$ ausgewertet. Dort entsprechen sie den $\Gamma_{k,\alpha}^{(n)}$:

$$\left. \frac{\partial^{n_j} U}{\partial \phi_i^{n_j}} \right|_{\boldsymbol{\phi}=0} = \frac{\partial^{n_j}}{\partial \phi_i^{n_j}} [D_{\boldsymbol{\phi}}^2 \Gamma_k(\boldsymbol{\phi})]_{\boldsymbol{\phi}=0} = \left(\Gamma_{k, n_j \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_p + \mathbf{e}_q}^{(n_j+2)} \right)_{p,q=1,\dots,N}. \quad (3.25)$$

Die $\Gamma_{k, n_j \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_p + \mathbf{e}_q}^{(n_j+2)}$ sind dabei null, wenn n_j ungerade ist oder $p \neq q$ gilt. Demnach verbleiben nur die geraden Ableitungen, welche Diagonalmatrizen der Form

$$\left. \frac{\partial^{2m_j} U}{\partial \phi_i^{2m_j}} \right|_{\boldsymbol{\phi}=0} = \text{diag} \left(\Gamma_{k, 2m_j \mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_1}^{(2m_j+2)}, \dots, \Gamma_{k, 2m_j \mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_N}^{(2m_j+2)} \right) \quad (3.26)$$

sind. Auch U^{-1} ist bei $\phi = 0$ diagonal, denn es gilt

$$U^{-1}(0) = \left(D_{\phi}^2 \Gamma_k|_{\phi=0} + R_k \mathbf{1} \right)^{-1} = \frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} \mathbf{1}. \quad (3.27)$$

Da Diagonalmatrizen immer kommutieren, vereinfachen sich die Summanden, die durch Formel (3.24) beschrieben sind. Die gesuchte Ableitung in Formel (3.20) kann dann mithilfe der Produkt- und Kettenregel für skalare Funktionen berechnet werden; U wird hierbei mit der Funktion f identifiziert, U^{-1} entspricht $1/f$. Es gilt

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial \phi_i^{2m}} \left[\frac{1}{f} \right] = \sum_{n=1}^{2m} \binom{2m+1}{n+1} \frac{(-1)^n}{f^{n+1}} \frac{\partial^{2m} f^n}{\partial \phi_i^{2m}} = \sum_{n=1}^{2m} \binom{2m+1}{n+1} \frac{(-1)^n}{f^{n+1}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=2m}} \frac{(2m)!}{\alpha!} \prod_{\ell=1}^n \frac{\partial^{\alpha_\ell} f}{\partial \phi_i^{\alpha_\ell}}, \quad (3.28)$$

wobei für den ersten Schritt WolframAlpha bemüht und im zweiten Schritt die Leibniz-Regel für mehrfache Produkte nach [Wal17] verwendet wurde. Beachtet man die Formeln (3.26) und (3.27) sowie die Tatsache, dass Ableitungen ungerader Ordnung null sind, ergibt sich

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial \phi_i^{2m}} \left[(D_{\phi}^2 \Gamma_k(\phi) + R_k \mathbf{1})^{-1} \right]_{\phi=0} = \sum_{n=1}^{2m} \binom{2m+1}{n+1} \frac{(-1)^n}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{n+1}} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \frac{(2m)!}{(2\alpha)!} \prod_{\ell=1}^n D_{\alpha_\ell} \quad (3.29)$$

mit

$$D_{\alpha_\ell} := \begin{cases} \text{diag}(\Gamma_{k,2e_1}^{(2)} + R_k, \dots, \Gamma_{k,2e_N}^{(2)} + R_k) & \text{für } \alpha_\ell = 0 \\ \text{diag}(\Gamma_{k,2\alpha_\ell e_1+2e_1}^{(2\alpha_\ell+2)}, \dots, \Gamma_{k,2\alpha_\ell e_N+2e_N}^{(2\alpha_\ell+2)}) & \text{für } \alpha_\ell \geq 1 \end{cases}. \quad (3.30)$$

Über die Beziehung zwischen den $\Gamma_{k,\alpha}^{(2m)}$ und $\Gamma_k^{(2m)}$, vgl. Abschnitt 3.3.1, erhält man

$$\text{Tr} \left(\prod_{\ell=1}^n D_{\alpha_\ell} \right) = \left((N-1) \prod_{\ell=1}^n \frac{1}{2\alpha_\ell + 1} + 1 \right) \prod_{\ell=1}^n \begin{cases} \Gamma_k^{(2)} + R_k & \text{für } \alpha_\ell = 0 \\ \Gamma_k^{(2\alpha_\ell+2)} & \text{für } \alpha_\ell \geq 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

für die Spur der auftretenden Diagonalmatrix-Produkte. Mit Formel (3.29) ergibt sich Formel (3.20) für $m \geq 1$ schließlich zu

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_k^{(2m)}}{dk} &= \frac{1}{2} \frac{dR_k}{dk} \sum_{n=1}^{2m} \binom{2m+1}{n+1} \frac{(-1)^n}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \frac{(2m)!}{(2\alpha)!} \left(\prod_{\ell=1}^n \frac{N-1}{2\alpha_\ell + 1} + 1 \right) \prod_{\ell=1}^n \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha_\ell = 0 \\ \frac{\Gamma_k^{(2\alpha_\ell+2)}}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} & \text{für } \alpha_\ell \geq 1 \end{cases}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Damit lassen sich die ersten Differenzialgleichungen wie folgt schreiben:

$$\frac{d\Gamma_k^{(0)}}{dk} = \frac{N}{2} \frac{dR_k}{dk} \left(\frac{1}{\Gamma_k^{(2)} + R_k} - \frac{1}{r + R_k} \right), \quad (3.33)$$

$$\frac{d\Gamma_k^{(2)}}{dk} = -\frac{N+2}{6} \frac{dR_k}{dk} \frac{\Gamma_k^{(4)}}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^2}, \quad (3.34)$$

$$\frac{d\Gamma_k^{(4)}}{dk} = \frac{N+8}{3} \frac{dR_k}{dk} \frac{(\Gamma_k^{(4)})^2}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^3} - \frac{N+4}{10} \frac{dR_k}{dk} \frac{\Gamma_k^{(6)}}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^2}. \quad (3.35)$$

Für den Fluss von $\Gamma_k^{(6)}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_k^{(6)}}{dk} = & -\frac{5(N+26)}{3} \frac{dR_k}{dk} \frac{(\Gamma_k^{(4)})^3}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^4} \\ & + (N+14) \frac{dR_k}{dk} \frac{\Gamma_k^{(4)} \Gamma_k^{(6)}}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^3} - \frac{N+6}{14} \frac{dR_k}{dk} \frac{\Gamma_k^{(8)}}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

und für $\Gamma_k^{(8)}$

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_k^{(8)}}{dk} = & \frac{140(N+80)}{9} \frac{dR_k}{dk} \frac{(\Gamma_k^{(4)})^4}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^5} - 14(N+44) \frac{dR_k}{dk} \frac{(\Gamma_k^{(4)})^2 \Gamma_k^{(6)}}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^4} \\ & + \frac{4(N+20)}{3} \frac{dR_k}{dk} \frac{\Gamma_k^{(4)} \Gamma_k^{(8)}}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^3} + \frac{7(N+24)}{5} \frac{dR_k}{dk} \frac{(\Gamma_k^{(6)})^2}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^3} - \frac{N+8}{18} \frac{dR_k}{dk} \frac{\Gamma_k^{(10)}}{(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Im Anhang A.2 befindet sich ein Python-Programm, das die Gleichungen automatisch erzeugt.

3.4 Diskussion anhand eines speziellen Regulators

Die bisherigen allgemeinen Betrachtungen sollen nun konkretisiert werden, indem der spezielle Regulator aus Formel (3.5) verwendet wird. Mit diesem Regulator wird das im Abschnitt 3.3.1 beschriebene Verfahren ähnlich wie in [KB12] für verschiedene Werte von m_t durchgeführt und mit der exakten Lösung aus Abschnitt 2.3 verglichen.

Die Flussgleichungen in den Formeln (3.33)–(3.36) lauten mit dem Regulator aus Formel (3.5)

$$\frac{d\Gamma_k^{(0)}}{dk} = \frac{N}{2} \frac{\Sigma_k}{k\Sigma_k + 1}, \quad (3.38)$$

$$\frac{d\Gamma_k^{(2)}}{dk} = \frac{d\Sigma_k}{dk} = \frac{N+2}{6} \frac{\Gamma_k^{(4)}}{(k\Sigma_k + 1)^2}, \quad (3.39)$$

$$\frac{d\Gamma_k^{(4)}}{dk} = -\frac{N+8}{3} \frac{k \left(\Gamma_k^{(4)}\right)^2}{(k\Sigma_k + 1)^3} + \frac{N+4}{10} \frac{\Gamma_k^{(6)}}{(k\Sigma_k + 1)^2}, \quad (3.40)$$

$$\frac{d\Gamma_k^{(6)}}{dk} = \frac{5(N+26)}{3} \frac{k^2 \left(\Gamma_k^{(4)}\right)^3}{(k\Sigma_k + 1)^4} - (N+14) \frac{k\Gamma_k^{(4)}\Gamma_k^{(6)}}{(k\Sigma_k + 1)^3} + \frac{N+6}{14} \frac{\Gamma_k^{(8)}}{(k\Sigma_k + 1)^2}, \quad (3.41)$$

wobei $\Sigma_k := \Gamma_k^{(2)} - r$ gesetzt wurde. Für $\Gamma_k^{(8)}$ gilt entsprechend Formel (3.37)

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_k^{(8)}}{dk} = & -\frac{140(N+80)}{9} \frac{k^3 \left(\Gamma_k^{(4)}\right)^4}{(k\Sigma_k + 1)^5} + 14(N+44) \frac{k^2 \left(\Gamma_k^{(4)}\right)^2 \Gamma_k^{(6)}}{(k\Sigma_k + 1)^4} \\ & - \frac{4(N+20)}{3} \frac{k\Gamma_k^{(4)}\Gamma_k^{(8)}}{(k\Sigma_k + 1)^3} - \frac{7(N+24)}{5} \frac{k \left(\Gamma_k^{(6)}\right)^2}{(k\Sigma_k + 1)^3} + \frac{N+8}{18} \frac{\Gamma_k^{(10)}}{(k\Sigma_k + 1)^2}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.4.1 Skalierung des Gleichungssystems

Im Abschnitt 2.2.3 wurde gezeigt, dass sich die Korrelationsfunktionen $G^{(2m)}$ bzw. die eigentlichen Vertizes $\Gamma^{(2m)}$ auf die Größen $\tilde{G}^{(2m)}$ bzw. $\tilde{\Gamma}^{(2m)}$ skalieren lassen, welche nur noch von der Kopplung u/r^2 abhängen. Für $G_k^{(2m)}$, das über Z_k analog zum Abschnitt 2.2.1 definiert wird, lässt sich eine ähnliche Eigenschaft ableiten. Hierzu wird wieder dieselbe Transformation wie im Abschnitt 2.2.3, d. h. $\tilde{\varphi} = \sqrt{r}\varphi$, verwendet. Es ergibt sich

$$G_k^{(2m)} = \frac{1}{r^m} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\varphi}_1^{2m} \exp\left(-\frac{1}{2kr} \tilde{\varphi}^2 - \frac{1}{24} \frac{u}{r^2} (\tilde{\varphi}^2)^2\right) d\tilde{\varphi}}{\int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{1}{2kr} \tilde{\varphi}^2 - \frac{1}{24} \frac{u}{r^2} (\tilde{\varphi}^2)^2\right) d\tilde{\varphi}}, \quad (3.43)$$

wonach $r^m G_k^{(2m)}$ für ein fest gewähltes Produkt $\kappa := kr$ wieder nur von u/r^2 abhängt. Analoge Aussagen gelten für $\tilde{\Gamma}_\kappa^{(2m)} := \Gamma_k^{(2m)}/r^m$ für $m \neq 1$ sowie $\tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)} := \Sigma_k/r = \Gamma_k^{(2)}/r - 1$.

Da man darüber hinaus das System für den gegebenen Regulator immer von $k = 0$ bis $k = 1/r$ integriert, liegt es nahe, nicht k , sondern κ als Variable zu verwenden. Das bietet den Vorteil, dass die Integrationsgrenzen $\kappa = 0$ und $\kappa = 1$ stets von r unabhängig sind. Formel (3.32) lässt sich mit diesem Ansatz zu

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}_\kappa^{(2m)}}{d\kappa} = & -\frac{1}{2\kappa} \sum_{n=1}^{2m} \binom{2m+1}{n+1} \frac{(-1)^n}{\kappa \tilde{f}_\kappa^{(2)} + 1} \\ & \times \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \frac{(2m)!}{(2\alpha)!} \left(\prod_{\ell=1}^n \frac{N-1}{2\alpha_\ell+1} + 1 \right) \prod_{\ell=1}^n \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha_\ell = 0 \\ \frac{\kappa \tilde{f}_\kappa^{(2\alpha_\ell+2)}}{\kappa \tilde{f}_\kappa^{(2)} + 1} & \text{für } \alpha_\ell \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.44)$$

umformulieren. Formel (3.38) wird zu

$$\frac{d\tilde{f}_\kappa^{(0)}}{d\kappa} = \frac{N}{2} \frac{\tilde{f}_\kappa^{(2)}}{\kappa \tilde{f}_\kappa^{(2)} + 1}. \quad (3.45)$$

Die Anfangswerte müssen ebenfalls skaliert werden; es wird also

$$\tilde{f}_0^{(4)} = \frac{u}{r^2} \quad \text{und} \quad \tilde{f}_0^{(2m)} = 0 \quad \text{für } m \neq 2 \quad (3.46)$$

gefordert. Auch hier ergibt sich die Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 .

Folglich ist die Skalierung des Differenzialgleichungssystems auf die $\tilde{f}_\kappa^{(2m)}$ bei Integration von $\kappa = 0$ bis $\kappa = 1$ ein sinnvoller Ansatz, wenn man sich ein rein von u/r^2 abhängiges Bild machen möchte. Die konkreten Differenzialgleichungen, die man aus der Formel (3.44) erhält, sind hierbei völlig analog zu jenen in den Formeln (3.39)–(3.42).

3.4.2 Diskussion

In diesem Abschnitt wird das in Abschnitt 3.3.1 beschriebene Lösungsverfahren auf das skalierte Gleichungssystem angewendet. Hierbei werden für m_t die Werte 2, 3 und 4 untersucht. Am Beispiel von $N = 2$ erhält man die Abbildungen 3.1–3.3, in denen die Näherungslösungen für $\tilde{f}^{(2)}$, $\tilde{f}^{(4)}$ und $\tilde{f}^{(6)}$ mit den exakten Lösungen vergleichend dargestellt sind. In den Abbildungen 3.4–3.6 sind Werte in Abhängigkeit von N dargestellt.

Um $\tilde{f}^{(2m)}$ sinnvoll berechnen zu können, muss allerdings $m_t \geq m$ gelten, da ansonsten das Verfahren vorsieht, $\tilde{f}^{(2m)}$ konstant auf den Anfangswert zu setzen. Daher ist in Abbildungen 3.3 und 3.6 keine Näherung für $m_t = 2$ angegeben.

Wie die Abbildungen zeigen, führt der Ansatz bereits für niedrige Werte des Reihenabbruchparameters m_t zu sehr guten Ergebnissen. So sind die relativen Abweichungen für $m_t = 3$ für $\tilde{f}^{(2)}$ und $\tilde{f}^{(4)}$ im Bereich 10^{-2} . Auch für $\tilde{f}^{(6)}$ erhält man (je nach Kopplung) für $m_t = 3$ bzw. $m_t = 4$ Abweichungen im Bereich 10^{-2} bis 10^{-1} .

Ferner wird deutlich, dass das Verfahren für verschiedene Werte von m_t auf verschiedene $\tilde{f}^{(2m)}$ für dasselbe m führt. Im hier betrachteten Beispiel ergibt sich mit steigendem m_t oft

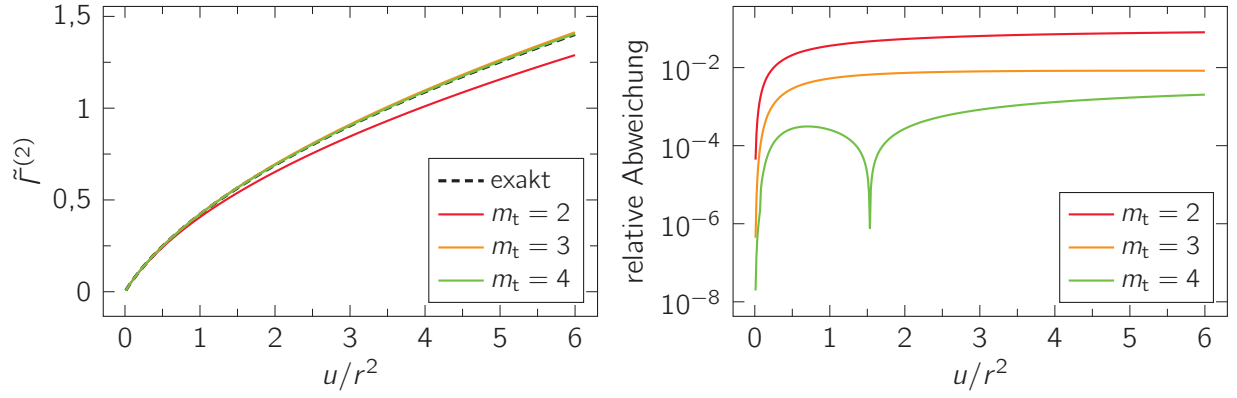


Abb. 3.1: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(2)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des im Text beschriebenen Ansatzes ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Reihenabbruchparameters m_t und bei $N = 2$. Links sind die absoluten Werte, rechts der relative Fehler der Näherungen aufgetragen. Nach [KB12, Abb. 3].

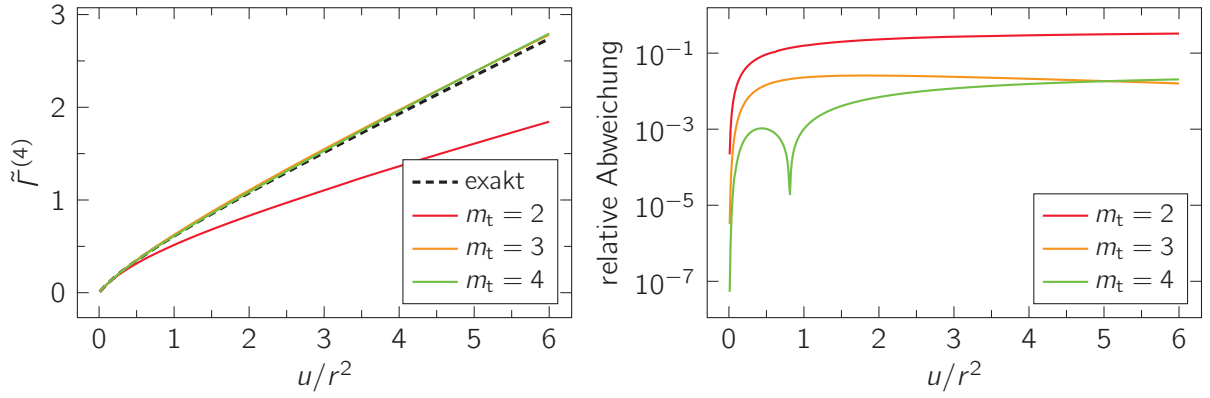


Abb. 3.2: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des im Text beschriebenen Ansatzes ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Reihenabbruchparameters m_t und bei $N = 2$. Links sind die absoluten Werte, rechts der relative Fehler der Näherungen aufgetragen. Nach [KB12, Abb. 4].

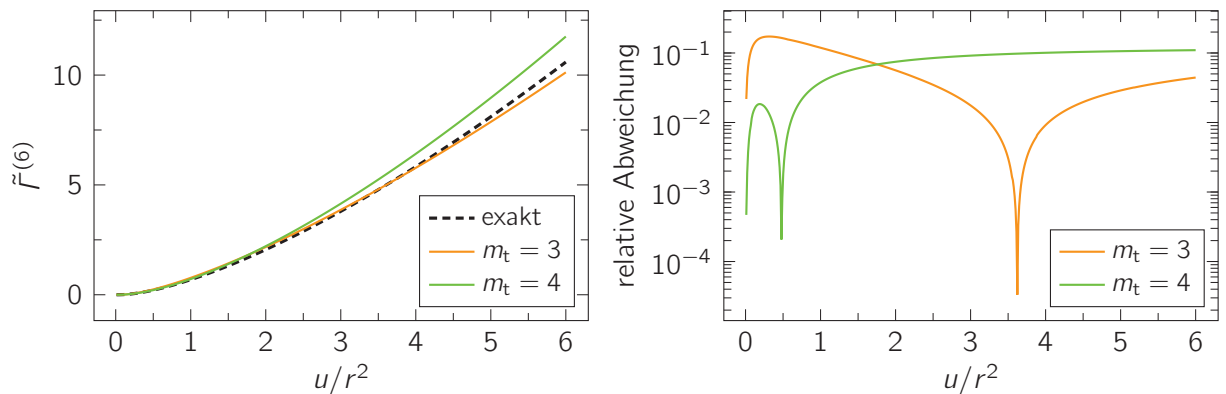


Abb. 3.3: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(6)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des im Text beschriebenen Ansatzes ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Reihenabbruchparameters m_t und bei $N = 2$. Links sind die absoluten Werte, rechts der relative Fehler der Näherungen aufgetragen.

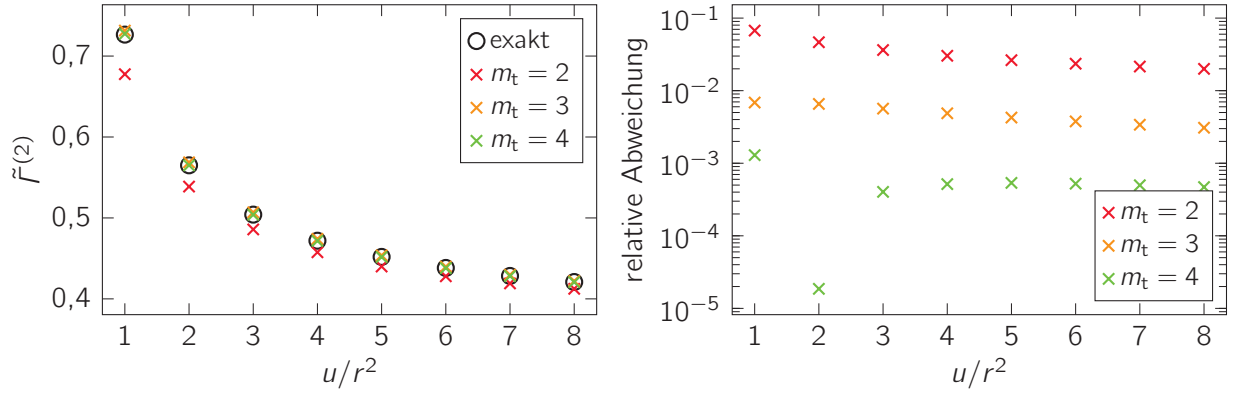


Abb. 3.4: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(2)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des im Text beschriebenen Ansatzes ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Dimension N für verschiedene Werte des Reihenabbruchparameters m_t . Es wurde als Kopplung jeweils $u/r^2 = 3/N$ gewählt. Links sind die absoluten Werte, rechts der relative Fehler der Näherungen aufgetragen. Nach [KB12, Abb. 10].

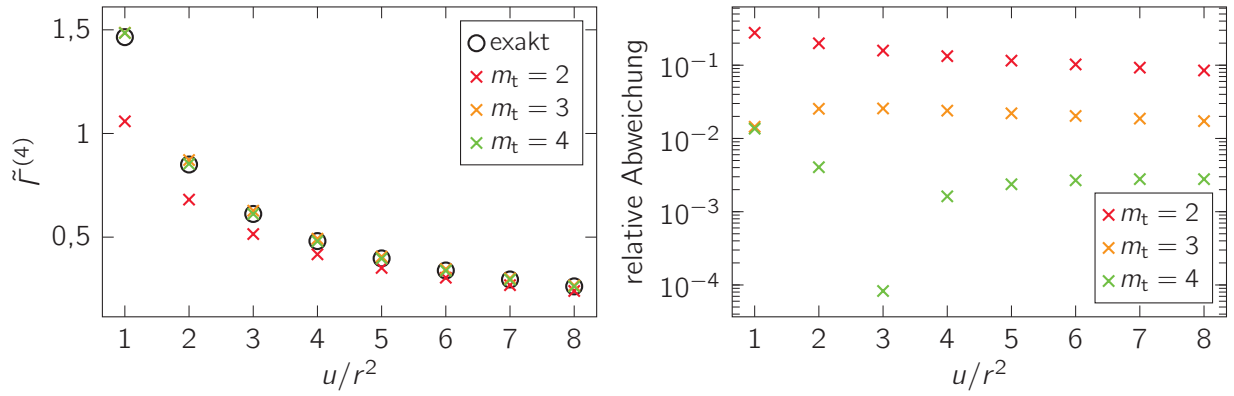


Abb. 3.5: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des im Text beschriebenen Ansatzes ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Dimension N für verschiedene Werte des Reihenabbruchparameters m_t . Es wurde als Kopplung jeweils $u/r^2 = 3/N$ gewählt. Links sind die absoluten Werte, rechts der relative Fehler der Näherungen aufgetragen. Nach [KB12, Abb. 11].

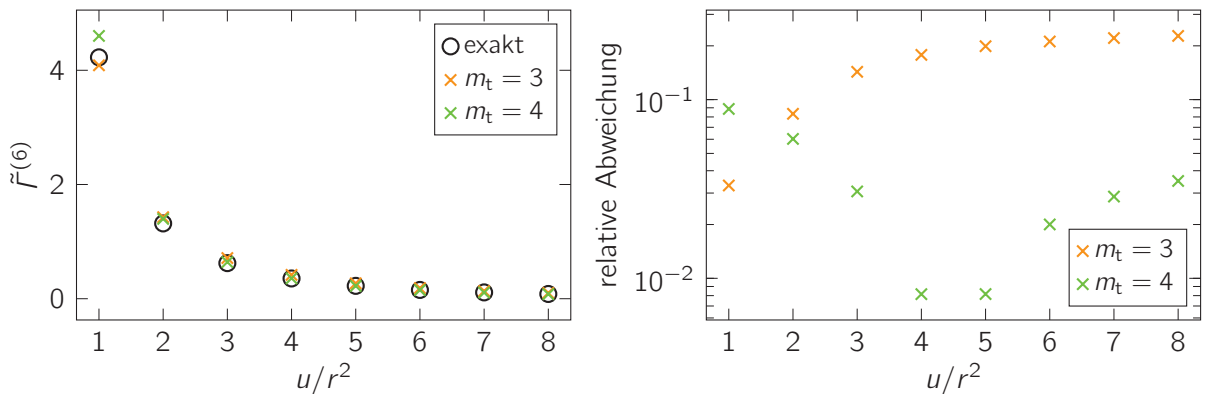


Abb. 3.6: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(6)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des im Text beschriebenen Ansatzes ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Dimension N für verschiedene Werte des Reihenabbruchparameters m_t . Es wurde als Kopplung jeweils $u/r^2 = 3/N$ gewählt. Links sind die absoluten Werte, rechts der relative Fehler der Näherungen aufgetragen.

eine Verbesserung der Genauigkeit. In manchen Bereichen der Kopplung wird diese Ordnung allerdings vertauscht.

Für das Verfahren ist das Lösen eines Differenzialgleichungssystems nötig, das i. d. R. numerisch gelöst wird. Wenngleich das System nur eine Näherung ist, so liefert es für das betrachtete Beispiel des erzeugenden Funktional in Formel (2.1) sehr gute Ergebnisse.

4 Alternatives Lösungsverfahren

In diesem Kapitel wird ein alternatives Lösungsverfahren untersucht. Motiviert wird dieses durch die spezielle Struktur des Differenzialgleichungssystems, das sich aus der Wetterich-Flussgleichung ergibt, vgl. Formel (3.44). Hierbei soll nur der Regulator aus Formel (3.5) betrachtet werden. Schließlich werden einige konkrete Ansätze für das zu untersuchende Verfahren angegeben und diskutiert.

4.1 Idee und Kriterien

Die Flussgleichung für $\tilde{f}_\kappa^{(2m)}$ in der Formel (3.44) hat für alle $m \geq 1$ die Form

$$\frac{d\tilde{f}_\kappa^{(2m)}}{d\kappa} = A_m(\tilde{f}_\kappa^{(2)}; \kappa) \tilde{f}_\kappa^{(2m+2)} + B_m(\tilde{f}_\kappa^{(2)}, \dots, \tilde{f}_\kappa^{(2m)}; \kappa), \quad (4.1)$$

wobei A_m, B_m geeignete Funktionen sind; zwischen $\tilde{f}_\kappa^{(2m+2)}$ und dem Fluss von $\tilde{f}_\kappa^{(2m)}$ besteht also ein affiner Zusammenhang. Durch Umstellen der Gleichung erhält man eine Formel, mit der $\tilde{f}_\kappa^{(2m+2)}$ aus $\tilde{f}_\kappa^{(2)}, \dots, \tilde{f}_\kappa^{(2m)}$ berechnet werden kann:

$$\tilde{f}_\kappa^{(2m+2)} = \frac{1}{A_m(\tilde{f}_\kappa^{(2)}; \kappa)} \left(\frac{d\tilde{f}_\kappa^{(2m)}}{d\kappa} - B_m(\tilde{f}_\kappa^{(2)}, \dots, \tilde{f}_\kappa^{(2m)}; \kappa) \right). \quad (4.2)$$

Startet man nun in der ersten Formel ($m = 1$) mit einem gegebenen $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$, so lässt sich damit $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ berechnen:

$$\tilde{f}_\kappa^{(4)} = \frac{6 \left(\kappa \tilde{f}_\kappa^{(2)} + 1 \right)^2}{N + 2} \frac{d\tilde{f}_\kappa^{(2)}}{d\kappa}. \quad (4.3)$$

Hieraus kann mit der darauffolgenden Formel $\tilde{f}_\kappa^{(6)}$ bestimmt werden:

$$\tilde{f}_\kappa^{(6)} = \frac{60 \left(\kappa \tilde{f}_\kappa^{(2)} + 1 \right)^3}{(N + 2)(N + 4)} \left(2\tilde{f}_\kappa^{(2)} \frac{d\tilde{f}_\kappa^{(2)}}{d\kappa} + 4\kappa \frac{N + 5}{N + 2} \left(\frac{d\tilde{f}_\kappa^{(2)}}{d\kappa} \right)^2 + \left(\kappa \tilde{f}_\kappa^{(2)} + 1 \right) \frac{d^2 \tilde{f}_\kappa^{(2)}}{d\kappa^2} \right). \quad (4.4)$$

Das Verfahren lässt sich beliebig fortführen, wobei in jedem Schritt lediglich ein entsprechender Fluss, d. h. eine Ableitung, benötigt wird. Aus den $\tilde{f}_\kappa^{(2m)}$ lassen sich dann die eigentlich interessanten Randwerte $\tilde{f}^{(2m)}$ bestimmen.

Der hier betrachtete Fall des \mathbb{R}^N ermöglicht es, die einzelnen Gleichungen sehr einfach nach $\tilde{f}^{(2m+2)}$ umzustellen. Für komplexere Beispiele ist dies schwieriger. In [Zie21] wird eine Rechtsinverse für den linearen Integraloperator, der im Allgemeinen vor $\tilde{f}^{(2m+2)}$ steht, angegeben. Damit wird dann das Verfahren in ähnlicher Weise durchgeführt und eine exakte Lösung für die Wetterich-Gleichung konstruiert.

Im Allgemeinen ist $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ nicht bekannt. Es muss daher eine geeignete Näherung gewählt werden. Damit das Ergebnis für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}, \dots, \tilde{f}_\kappa^{(2m)}$ des oben vorgeschlagenen Verfahrens brauchbar ist, scheint es zielführend, a priori Kriterien für das Ergebnis aufzustellen. So sollten bspw. die Anfangswerte mit Formel (3.46) übereinstimmen; eventuell ist zusätzlich die Fixierung des Anfangswerts von $\tilde{f}_\kappa^{(2m+2)}$ oder weiterer höherer Koeffizienten sinnvoll. Andererseits könnte zumindest $\tilde{f}^{(2)}$ bekannt sein und als Randwert für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ dienen; in der Quantenfeldtheorie könnte zum Beispiel die physikalische Masse eines Teilchens experimentell gemessen worden sein. Nicht zuletzt sollte die Näherung für einen möglichst großen Bereich von Werten für die Kopplung u/r^2 gut sein.

Zur Bewertung der Näherungen wird neben der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(2m)}$ auch die exakte Lösung für die Interpolation $\tilde{f}_\kappa^{(2m)}$ herangezogen. Die Herleitung ist dabei grundsätzlich analog zu Abschnitt 2.3. Die Koeffizienten $G_k^{(2m)}$ der Reihenentwicklung von Z_k ergeben sich zunächst zu

$$G_k^{(2m)} = \frac{\mathcal{R}_{2m+N-1}(1/k, u)}{\mathcal{R}_{N-1}(1/k, u)} \bigg/ \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^N \\ |\alpha|=m}} \left(\frac{m!}{\alpha!} \right)^2 \frac{(2\alpha)!}{(2m)!} . \quad (4.5)$$

Der Verknüpfung zwischen den $G_k^{(2m)}$ und den $\Gamma_k^{(2m)}$ liegt jedoch Formel (3.16) zugrunde, d. h. es muss im Vergleich zum Abschnitt 2.2.2 der zusätzliche Regulatorterm ΔS_k berücksichtigt werden. Damit gilt für die Beziehung zwischen $G_k^{(2)}$ und $\Gamma_k^{(2)}$

$$\Gamma_k^{(2)} = \frac{1}{G_k^{(2)}} - R_k . \quad (4.6)$$

Führt man dann die Skalierung wie in Abschnitt 3.4.1 durch, ergibt sich

$$\tilde{f}_\kappa^{(2)} = \frac{\Gamma_k^{(2)}}{r} - 1 = \frac{1}{G_k^{(2)} r} - \frac{1}{kr} = \frac{1}{\tilde{G}_\kappa^{(2)}} - \frac{1}{\kappa} . \quad (4.7)$$

Die Beziehungen für die höheren Koeffizienten sind völlig analog zu Abschnitt 2.2.2, da der Regulator R_k durch das Ableiten verschwindet.

4.2 Polynomnäherungen

Das im Abschnitt 4.1 vorgeschlagene Verfahren soll als erstes mit Polynomen getestet werden. Der Polynomgrad M ist dabei zunächst nicht festgelegt; die Polynomkoeffizienten heißen a_m :

$$\tilde{f}_{\kappa}^{(2)} \approx \sum_{m=0}^M a_m \kappa^m. \quad (4.8)$$

4.2.1 Betrachtung der Anfangswerte

Die Koeffizienten a_m des Polynoms werden im ersten Schritt aus den ersten $M + 1$ Anfangsbedingungen bestimmt, vgl. Formel (3.46). Die Forderung $\tilde{f}_0^{(2)} = 0$ liefert direkt $a_0 = 0$. In der m -ten Gleichung gibt es nur Ableitungen von $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ bis zur $(m - 1)$ -ten Ordnung; an der Stelle $\kappa = 0$ tauchen die Koeffizienten a_{m+1}, \dots, a_M dort nicht auf. Die Koeffizienten a_m können demnach mittels der m -ten Gleichung sukzessive in Abhängigkeit von den Koeffizienten a_0, \dots, a_{m-1} bestimmt werden, die wiederum mit den vorigen Gleichungen bestimmt werden. Es folgt, dass die Koeffizienten a_m für alle Polynomgrade $M \geq m$ gleich sind. Für die ersten sieben Koeffizienten ergibt sich

$$a_1 = \frac{N+2}{6} \frac{u}{r^2}, \quad a_3 = -\frac{(N+2)(N+4)}{36} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \quad a_5 = \frac{(N+2)(N+4)(N+5)}{108} \left(\frac{u}{r^2}\right)^3 \quad (4.9)$$

und $a_2 = a_4 = a_6 = 0$. Hier ist zu erkennen, dass jede zweite Anfangsbedingung, d. h. jene für $\tilde{f}_{\kappa}^{(6)}, \tilde{f}_{\kappa}^{(10)}, \tilde{f}_{\kappa}^{(14)}$, automatisch erfüllt ist und keine neue Information liefert. Ob sich dieses Verhalten fortsetzt, soll an dieser Stelle nicht weiter untersucht werden.

Abbildung 4.1 zeigt beispielhaft die Näherungen für $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ und $\tilde{f}_{\kappa}^{(4)}$ für $u/r^2 = 0,2$. Dabei wurden die Polynomgrade 1, 3 und 5 untersucht; für die Grade 2, 4 und 6 ergibt sich entsprechend der obigen Beobachtungen dasselbe Ergebnis wie für die Grade 1, 3 bzw. 5. In den Abbildungen 4.2–4.4 ist dargestellt, wie stark die mit dieser Näherung berechneten Koeffizienten $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}, \tilde{f}_{\kappa}^{(4)}$ und $\tilde{f}_{\kappa}^{(6)}$ von der exakten Lösung für $N = 2$ abweichen.

Es ist gut zu erkennen, dass der Ansatz zu großen Fehlern führt. Lediglich für kleine Werte der Kopplung u/r^2 ergeben sich relative Abweichungen bis höchstens 10^{-1} . Für $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ liegt die Grenze bei etwa 0,3, für $\tilde{f}_{\kappa}^{(4)}$ bei etwa 0,1 und für $\tilde{f}_{\kappa}^{(6)}$ werden derart kleine Abweichungen nicht erreicht. Die relativen Fehler wachsen für größere Werte der Kopplung schnell über 1.

Die Näherungen sollen mit steigenden Werten des Polynomgrads M besser werden. Es ist allerdings zu beobachten, dass diese Ordnung nur für kleine Werte der Kopplung auftritt. Danach kehrt sich die Ordnung um und mit größerem M steigt die Abweichung stark an. Auch bei anderen Werten für N ergibt sich ein ähnliches Bild, wie die Abbildung 4.5 zeigt.

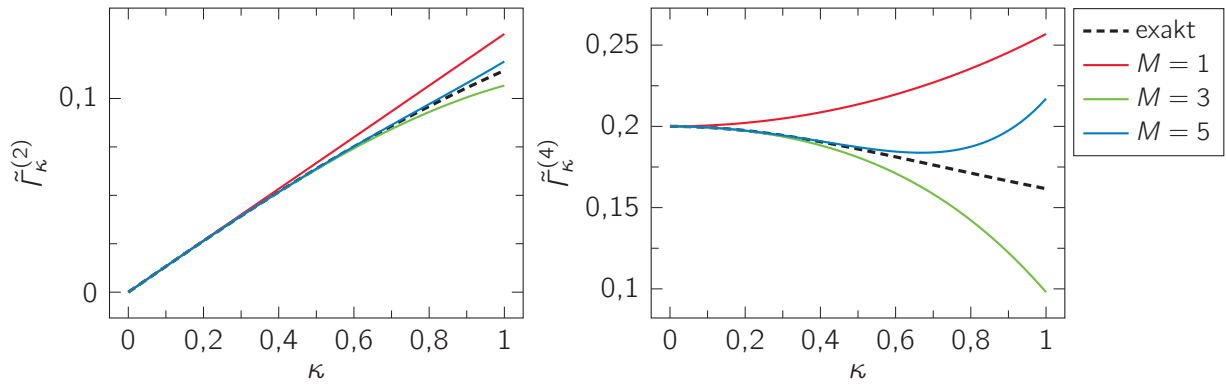


Abb. 4.1: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ (links) und $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit vom Interpolationsparameter κ für verschiedene Werte des Polynomgrads M und bei $N = 2$. Die Kopplung beträgt $u/r^2 = 0,2$.

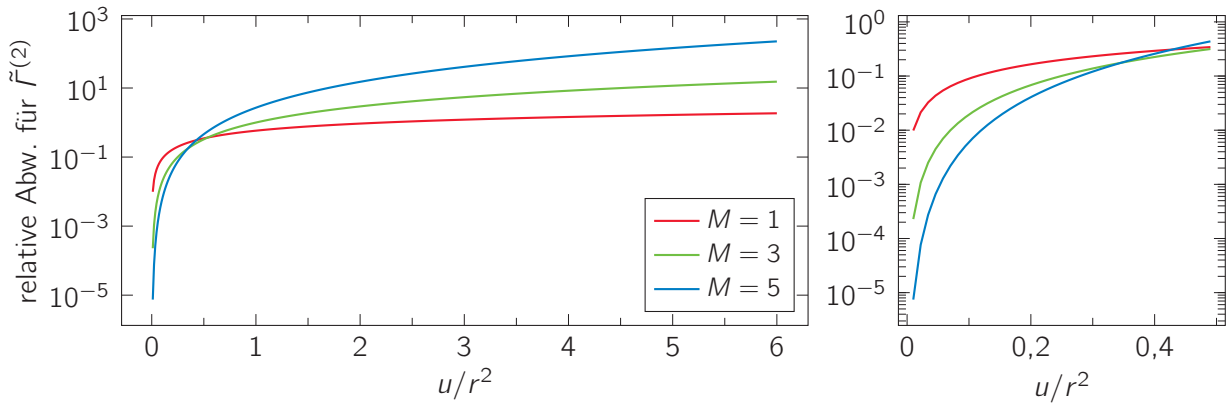


Abb. 4.2: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(2)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Polynomgrads M und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergroerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

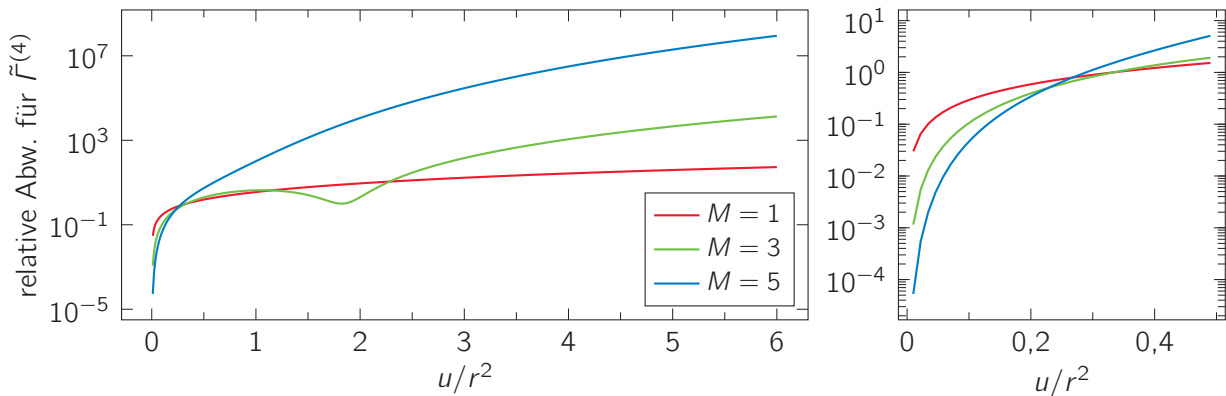


Abb. 4.3: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Polynomgrads M und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergroerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

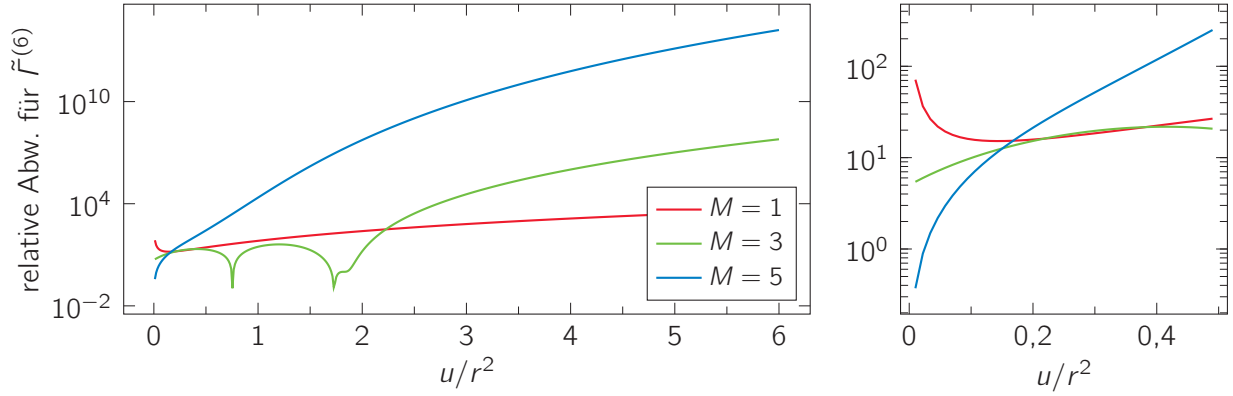


Abb. 4.4: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(6)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Polynomgrads M und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

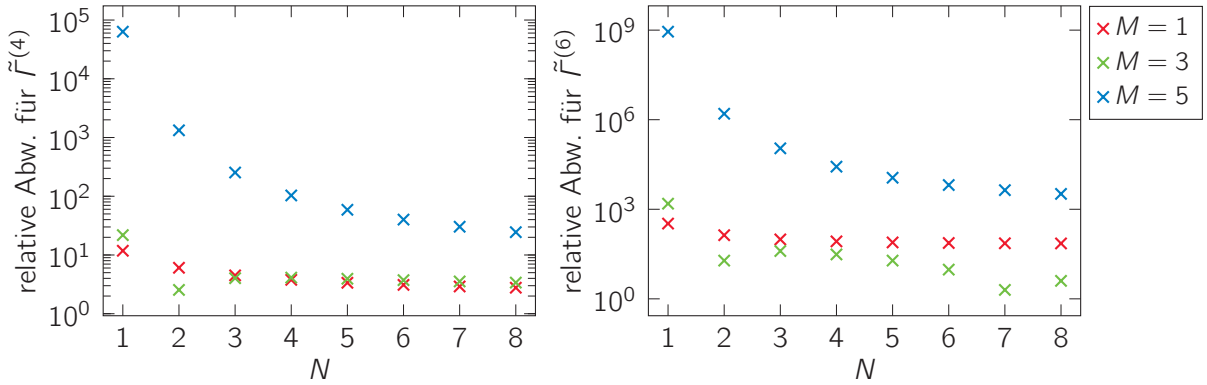


Abb. 4.5: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ (links) und $\tilde{f}^{(6)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Dimension N für verschiedene Werte des Polynomgrads M . Es wurde als Kopplung jeweils $u/r^2 = 3/N$ gewählt.

4.2.2 Betrachtung der Anfangswerte und einer Randbedingung

Wie in Abschnitt 4.1 bereits erwähnt wurde, könnte auch der Wert für $\tilde{f}^{(2)}$ bekannt sein. Im Folgenden wird dieser Fall betrachtet und der Randwert fixiert. Weiterhin werden die ersten M Anfangsbedingungen gefordert. Mit diesen errechnet man analog zum vorigen Abschnitt die Koeffizienten a_0, \dots, a_{M-1} . Aus Formel (4.8) kann dann mit der Randbedingung unmittelbar a_M berechnet werden:

$$a_M = \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \sum_{m=0}^{M-1} a_m. \quad (4.10)$$

Nun können auch gerade Polynomgrade auftreten, denn a_M ist für gerade M im Allgemeinen nicht null. Daher wurden für M hier die Werte 1 bis 4 untersucht. Abbildung 4.6 zeigt die Näherungen für $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ und $\tilde{f}_{\kappa}^{(4)}$ für $u/r^2 = 0,2$.

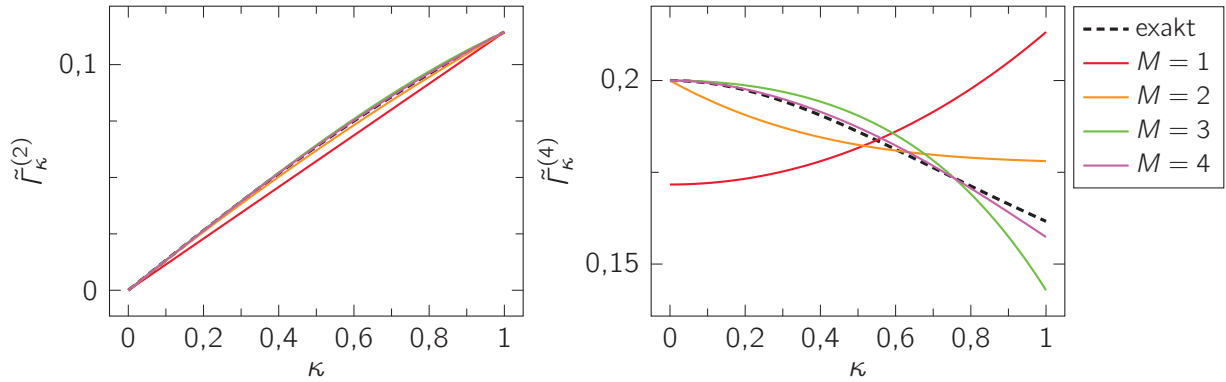


Abb. 4.6: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ (links) und $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit vom Interpolationsparameter κ für verschiedene Werte des Polynomgrads M und bei $N = 2$. Die Kopplung beträgt $u/r^2 = 0,2$.

In den Abbildungen 4.7 und 4.8 ist dargestellt, wie stark die mit dieser Näherung berechneten Koeffizienten $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ und $\tilde{f}_\kappa^{(6)}$ von der exakten Lösung für $N = 2$ abweichen. Abbildung 4.9 zeigt wieder die Abhängigkeit von N . Wenngleich die Abweichungen durch das Fixieren des Randwerts kleiner werden, ist der Fehler auch hier sehr gro. Auch die zu erwartende Verbesserung beim Erhöhen des Polynomgrads bleibt auf einen kleinen Bereich der Kopplung beschränkt.

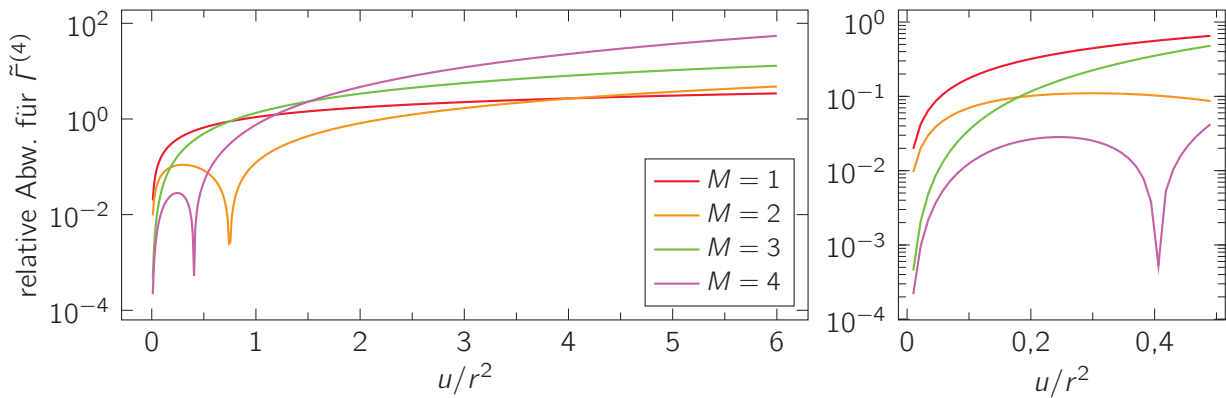


Abb. 4.7: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Polynomgrads M und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergroerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

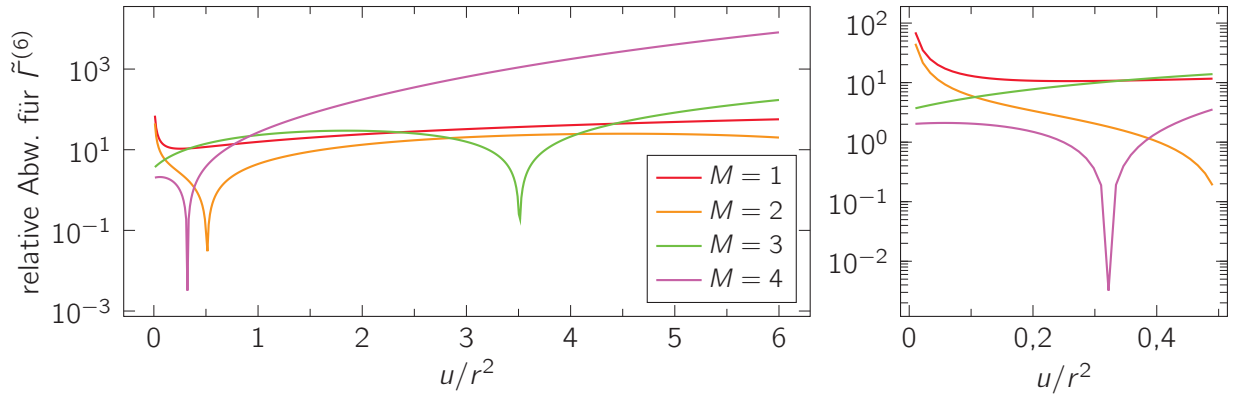


Abb. 4.8: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(6)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Polynomgrads M und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

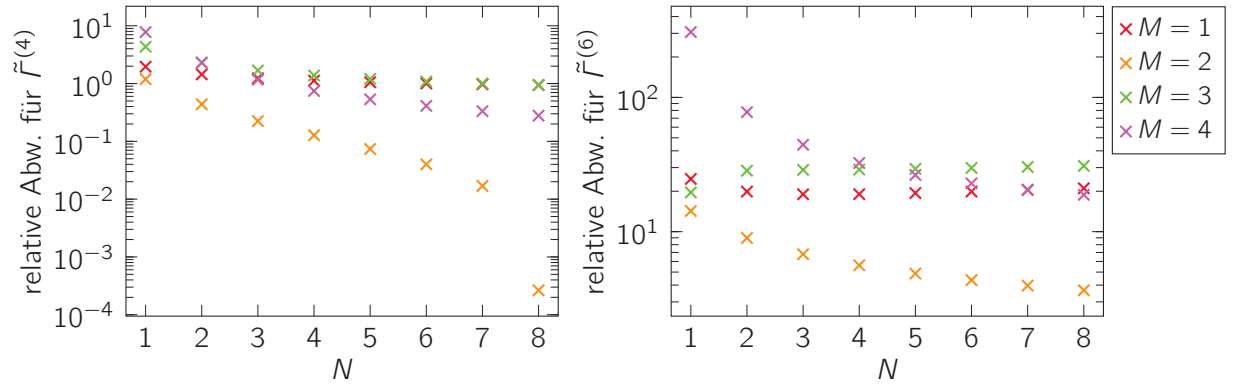


Abb. 4.9: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ (links) und $\tilde{f}^{(6)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Dimension N für verschiedene Werte des Polynomgrads M . Es wurde als Kopplung jeweils $u/r^2 = 3/N$ gewählt.

4.2.3 Bewertung und Fehleranalyse

Der gewählte Polynomansatz für $\tilde{f}^{(2)}$ ist als Näherung ungeeignet und dem Standard-Verfahren aus Kapitel 3 mit Abstand unterlegen. Es gibt lediglich einen sehr kleinen Bereich, in dem die Fehler in akzeptablen Größenordnungen liegen, der jedoch mit zunehmendem m kleiner wird.

Das Erhöhen des Polynomgrads M bietet nur für kleine Werte der Kopplung u/r^2 einen Mehrwert. Für große Werte kehrt sich die erwartete Genauigkeitsordnung, d. h. eine Verringerung des Fehlers bei Hinzunahme weiterer Terme zur Näherung, sogar um. Dies hat mindestens die folgenden Gründe. Erstens wird die Abweichung ähnlich wie bei der Approximation mit Taylor-Polynomen mit zunehmendem Abstand von der Entwicklungsstelle (hier $\kappa = 0$) immer größer. Zweitens spielen in die Berechnung der $\tilde{f}_{\kappa}^{(2m)}$ die Ableitungen von $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ in verschiedenen

Potenzen hinein, wie bspw. in den Formeln (4.3) und (4.4) zu sehen ist. Dadurch können selbst bei Fixierung des Randwerts große Fehler entstehen, wenn die Ableitungen von $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ bei $\kappa = 1$ von der exakten Lösung abweichen. Abbildung 4.10 zeigt dieses Problem eindrücklich für $u/r^2 = 3$; hier stimmt zwar der Randwert überein, allerdings ist der Anstieg der Näherung für $M = 4$ bei $\kappa = 1$ deutlich zu groß und die Näherung ist sogar konvex statt konkav.

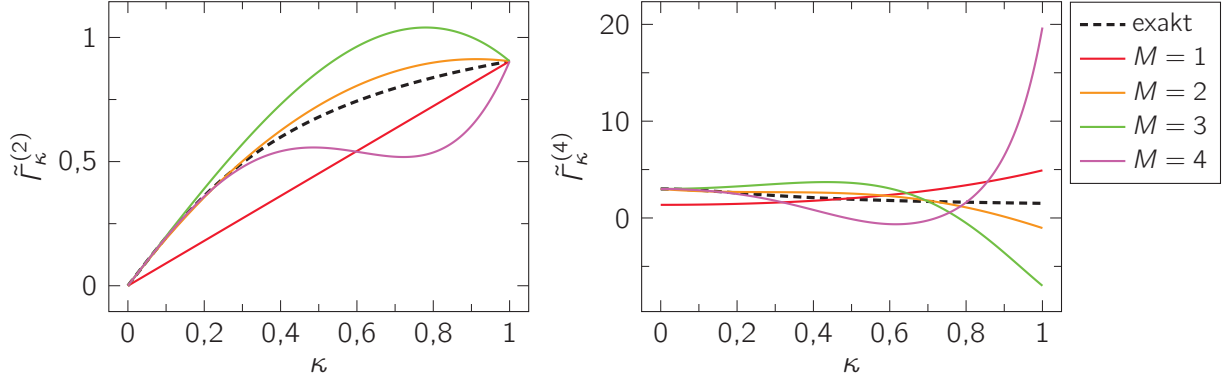


Abb. 4.10: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ (links) und $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Polynomansatzes, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit vom Interpolationsparameter κ für verschiedene Werte des Polynomgrads M und bei $N = 2$. Die Kopplung beträgt $u/r^2 = 3$.

Positiv ist dem Ansatz anzurechnen, dass die Koeffizienten a_m vom Polynomgrad unabhängig sind und sich aus den Gleichungen sukzessive berechnen lassen. Dies könnte möglicherweise als weiteres Kriterium für eine Näherung sinnvoll sein.

4.3 Näherung mittels spezieller rationaler Funktionen

Ausgehend von der exakten Lösung für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ in Abbildung 2.1 können auch weitere Ansätze ausprobiert werden. Hier soll $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ nun durch rationale Funktionen genähert werden. Konkret wird der Ansatz

$$\tilde{f}_\kappa^{(2)} = \sum_{m=0}^M \frac{a_m}{(\kappa - b)^m} \quad (4.11)$$

gewählt. Dabei werden die konkreten Entwicklungspunkte $b = -1$ und $b = -0,5$ betrachtet.

4.3.1 Entwicklungspunkt $b = -1$

Zuerst soll der Fall $b = -1$ untersucht werden. Zur Bestimmung der Koeffizienten a_m werden wieder die ersten $M + 1$ Anfangsbedingungen, vgl. Formel (3.46), herangezogen. Die Koeffizienten nehmen hier anders als bei der Polynomnäherung für verschiedene M

verschiedene Werte an. Die genauen Koeffizienten für $M = 1, \dots, 4$ sind im Anhang B.1.1 zu finden. Abbildung 4.11 zeigt die Näherungen für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ und $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ für $u/r^2 = 0,2$. Neben den Anfangsbedingungen könnte auch wieder der Randwert $\tilde{f}^{(2)}$ gegeben sein. Die Koeffizienten, die sich damit ergeben, sind im Anhang B.1.2 notiert. Abbildung 4.12 stellt die Näherungen für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ und $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ für $u/r^2 = 0,2$ dar.

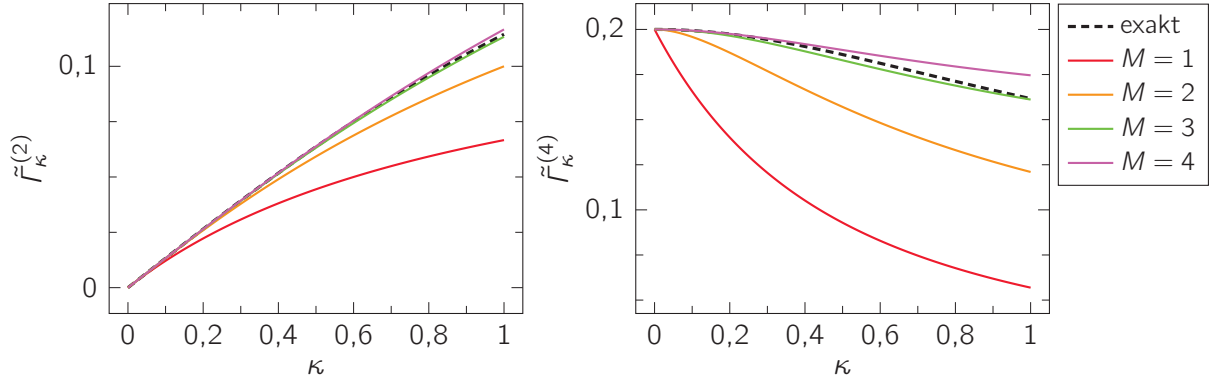


Abb. 4.11: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ (links) und $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -1$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit vom Interpolationsparameter κ für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Die Kopplung beträgt $u/r^2 = 0,2$.

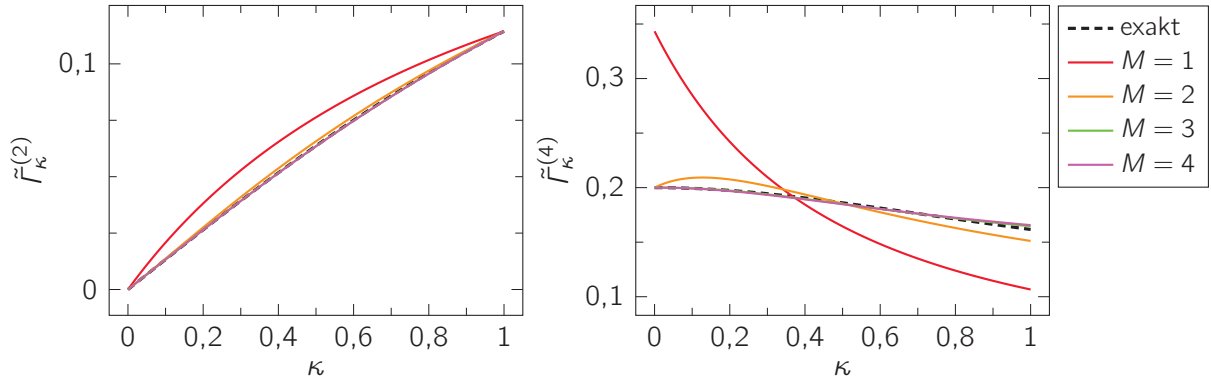


Abb. 4.12: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ (links) und $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -1$, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit vom Interpolationsparameter κ für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Die Kopplung beträgt $u/r^2 = 0,2$.

Die Abbildungen 4.13–4.16 zeigen wieder die Fehler der Näherungen bei Fixierung der Anfangsbedingungen; in den Abbildungen 4.17–4.19 sind die Abweichungen bei der zusätzlichen Fixierung der Randbedingung dargestellt. Im Vergleich zur Polynomnäherung mit fixierter Randbedingung aus Abschnitt 4.2.2 sind die Abweichungen von der exakten Lösung im ersten Fall in ähnlicher Größenordnung; im zweiten Fall ergibt sich eine Verbesserung um etwa eine Größenordnung. Aber auch hier gibt es nur einen kleinen Bereich um $u/r^2 = 0$, in dem die erwartete Genauigkeitsordnung angenommen wird. Für größere Werte von u/r^2 ändert sich diese sogar mehrfach und in unregelmäßigen Abständen.

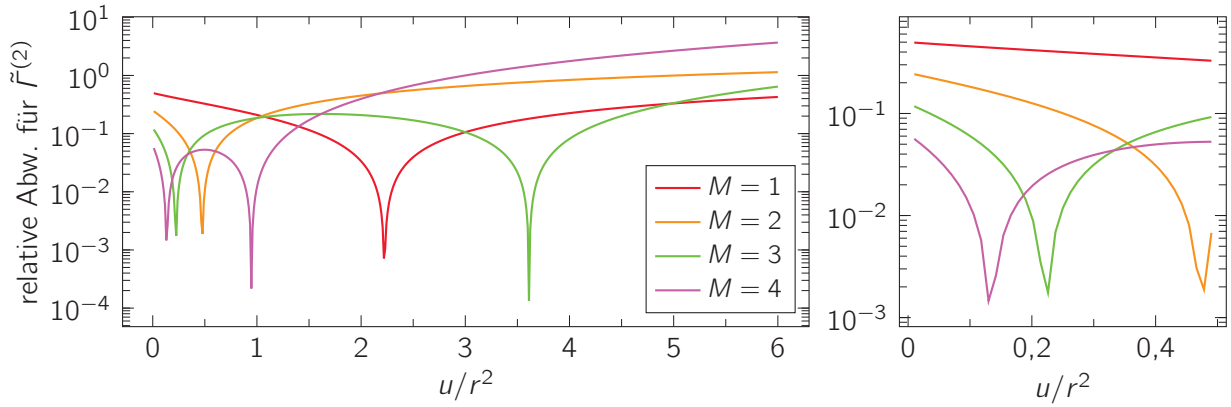


Abb. 4.13: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(2)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -1$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

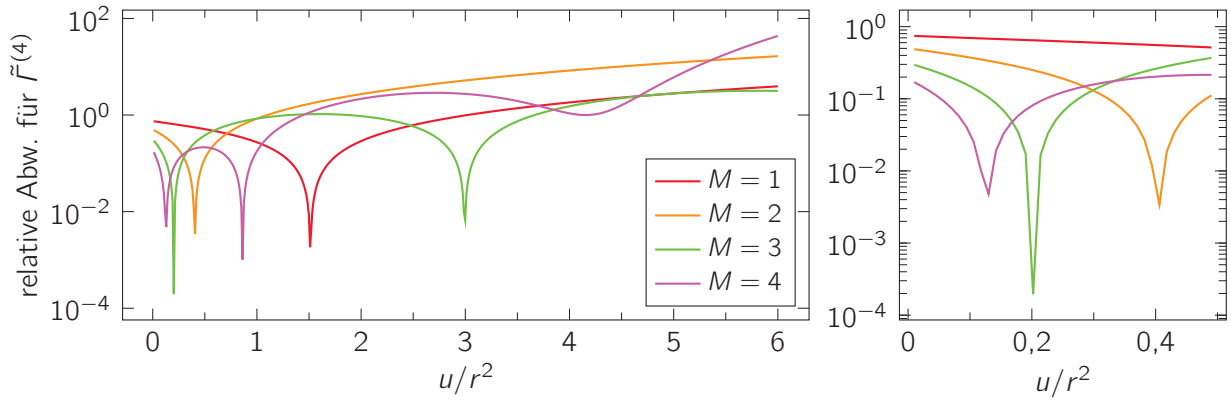


Abb. 4.14: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -1$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

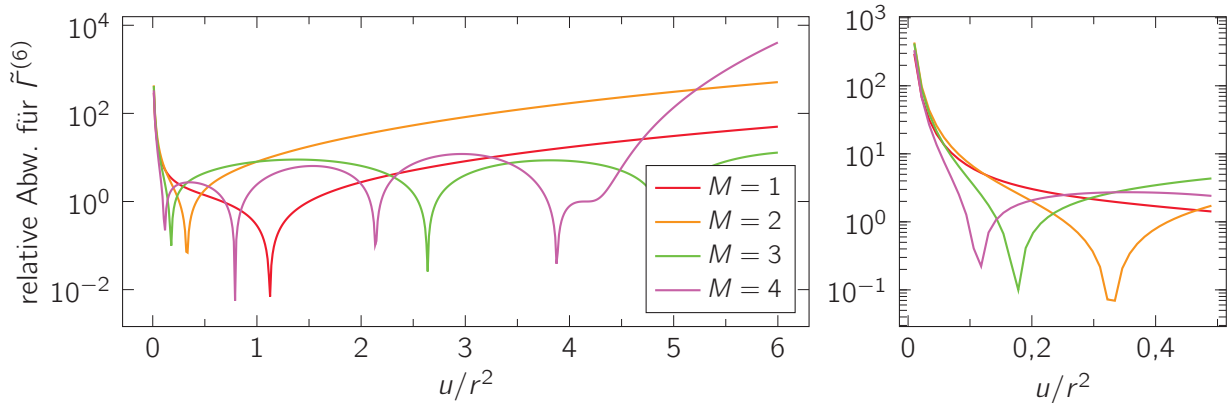


Abb. 4.15: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(6)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -1$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

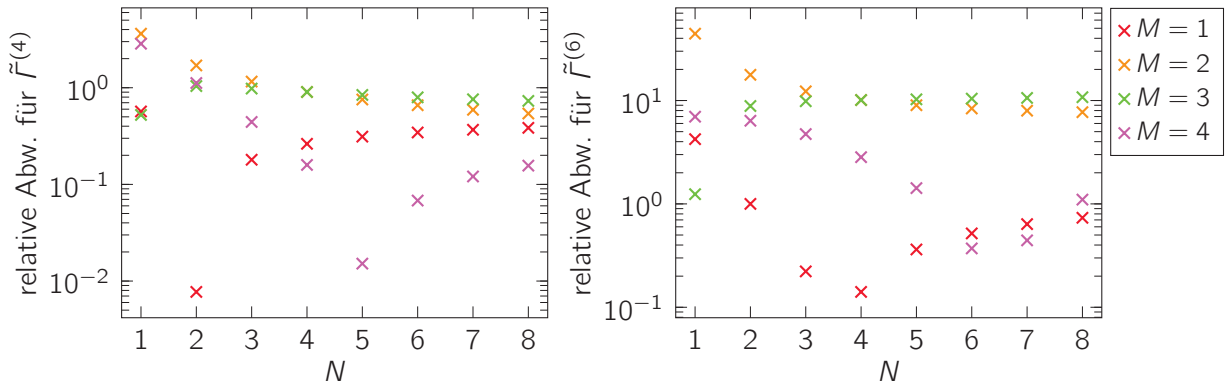


Abb. 4.16: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ (links) und $\tilde{f}^{(6)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -1$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Dimension N und für verschiedene Werte des Grads M der Näherung. Es wurde als Kopplung jeweils $u/r^2 = 3/N$ gewählt.

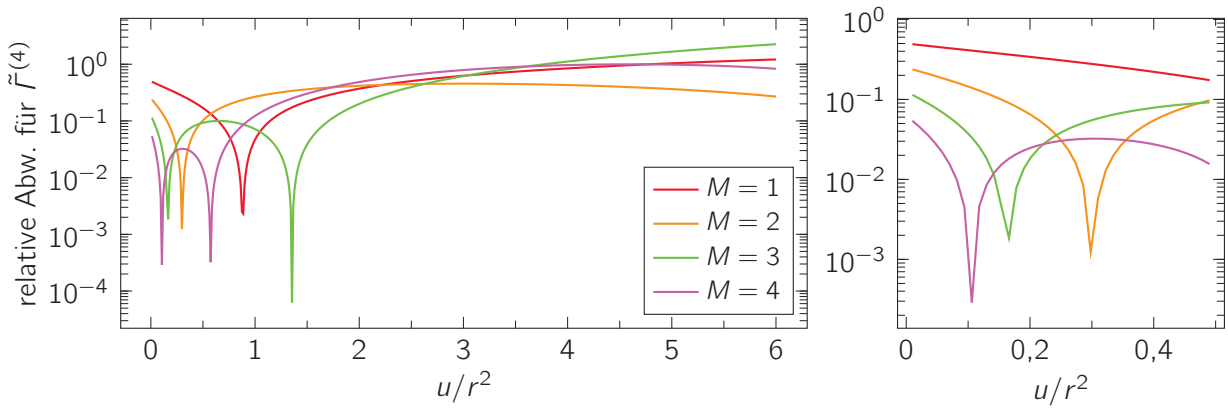


Abb. 4.17: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -1$, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

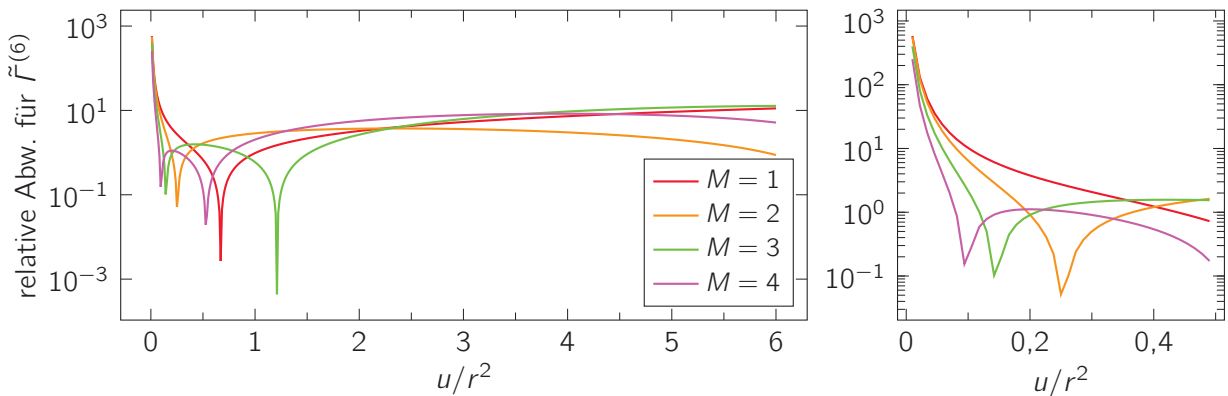


Abb. 4.18: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(6)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -1$, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

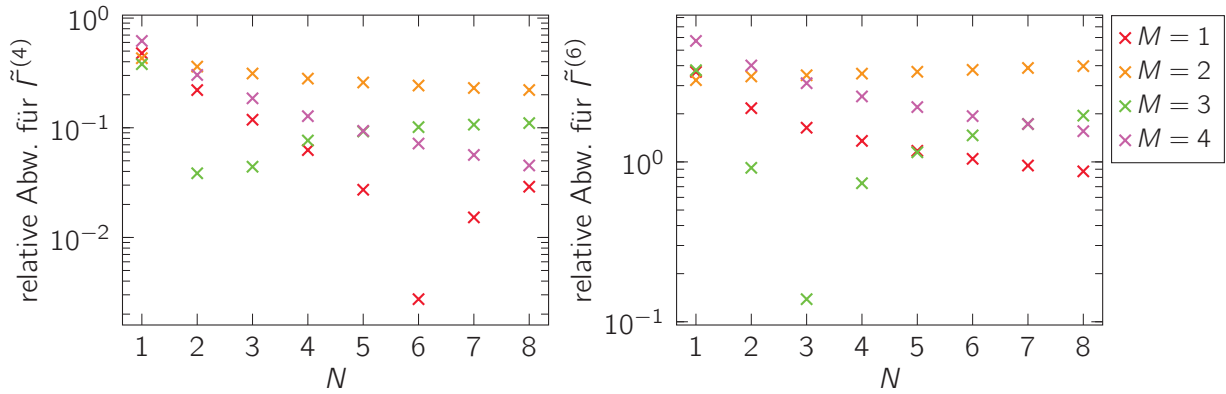


Abb. 4.19: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ (links) und $\tilde{f}^{(6)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -1$, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Dimension N und für verschiedene Werte des Grads M der Näherung. Es wurde als Kopplung jeweils $u/r^2 = 3/N$ gewählt.

4.3.2 Entwicklungspunkt $b = -0,5$

Der Abschnitt 4.3.1 hat gezeigt, dass sich mit der rationalen Näherung eine Verbesserung gegenüber der Polynomnäherung erreichen lässt. Dennoch ist das Ergebnis nicht zufriedenstellend. Hier soll daher ein zweiter Entwicklungspunkt betrachtet werden, $b = -0,5$, um zu untersuchen, ob die Wahl der Entwicklungsstelle einen Einfluss auf die Genauigkeit des Verfahrens hat. Die Abbildungen 4.20 und 4.21 stellen die Näherungen mit $M = 1, \dots, 4$ sowohl bei Fixierung der Randbedingungen als auch ohne diese dar, wobei wieder $u/r^2 = 0,2$ gewählt wurde. Die genauen Koeffizienten sind im Anhang B.2 zu finden.

Die Abbildungen 4.22–4.25 zeigen wieder die Fehler der Näherungen bei Fixierung der Anfangsbedingungen; in den Abbildungen 4.26–4.28 sind die Abweichungen bei der Fixierung der Randbedingung dargestellt. Die Ergebnisse sind denen mit $b = -1$ sehr ähnlich. Es zeigt sich im Wesentlichen nur eine Skalierung der Abhängigkeit von u/r^2 um etwa den Faktor 3. Die Veränderung der Entwicklungsstelle kann demnach die gewünschte Genauigkeitsordnung auf einen dreimal größeren Bereich ausweiten.

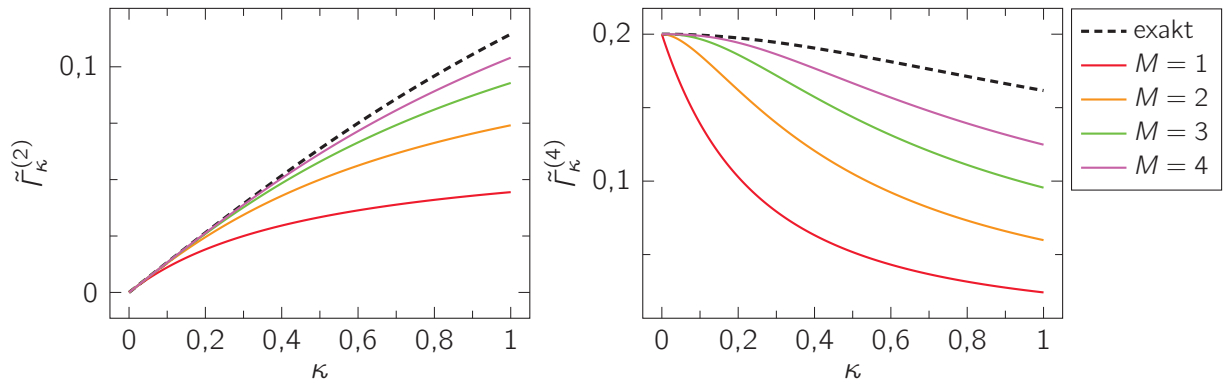


Abb. 4.20: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ (links) und $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -0,5$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit vom Interpolationsparameter κ für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Die Kopplung beträgt $u/r^2 = 0,2$.

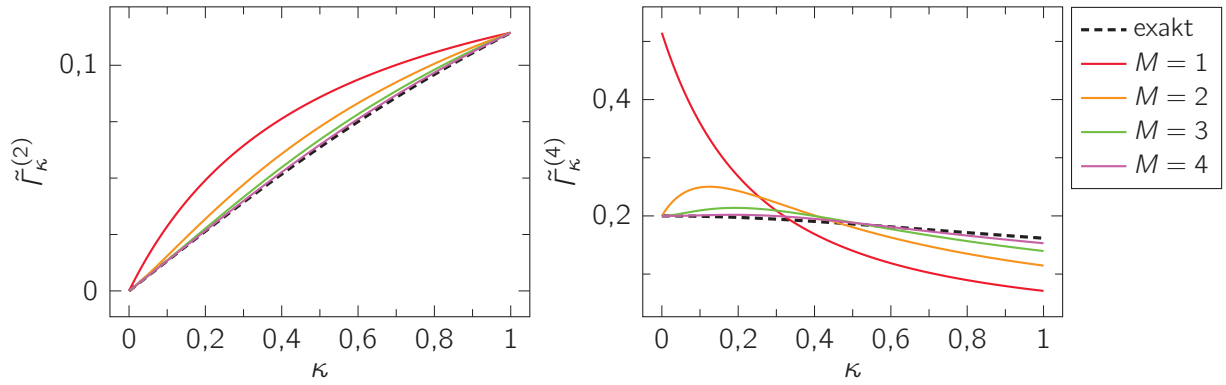


Abb. 4.21: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ (links) und $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -0,5$, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit vom Interpolationsparameter κ für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Die Kopplung beträgt $u/r^2 = 0,2$.

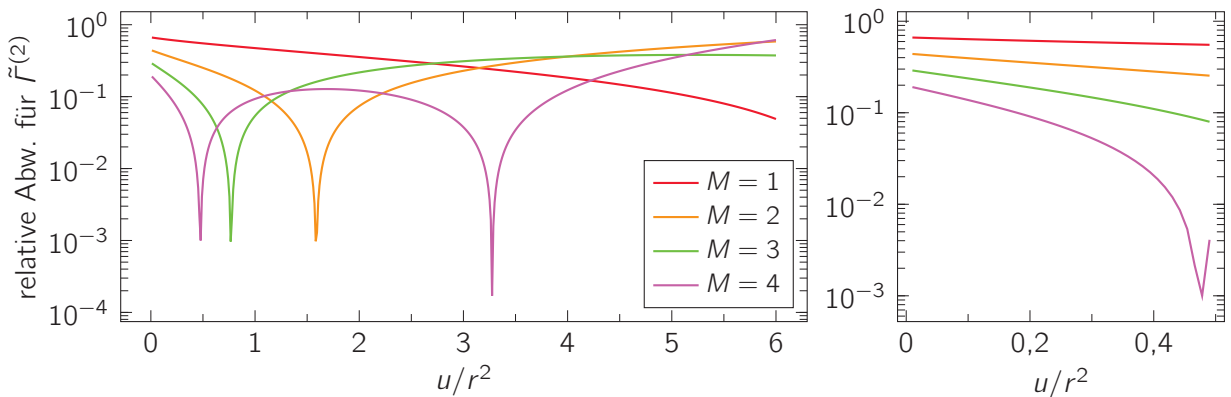


Abb. 4.22: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -0,5$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

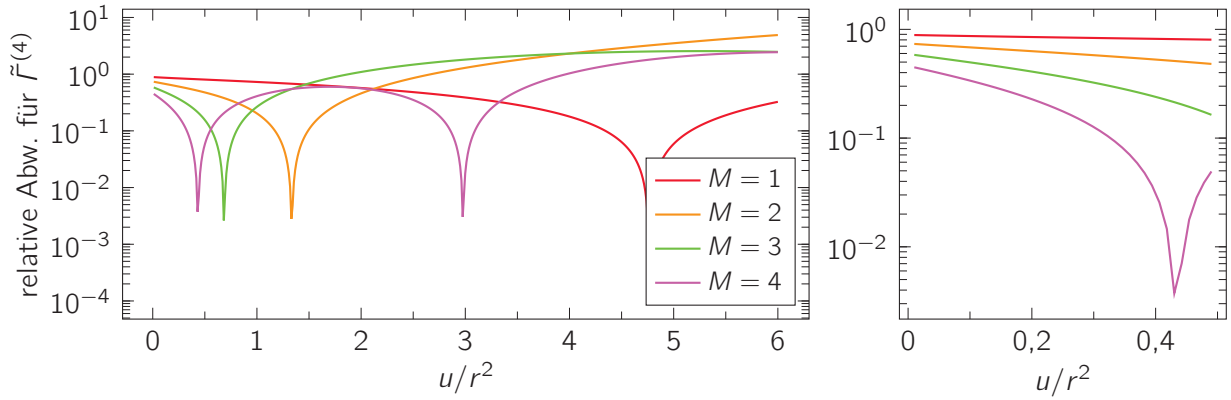


Abb. 4.23: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -0,5$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

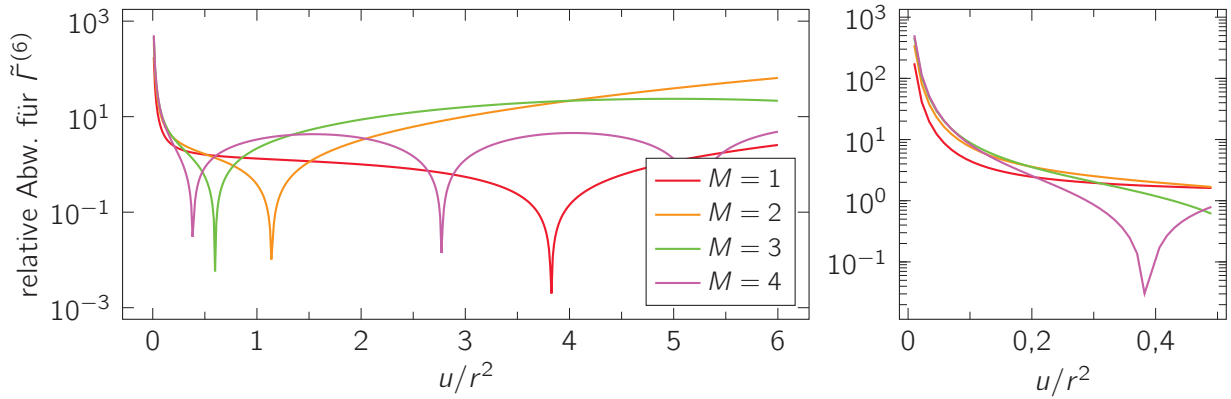


Abb. 4.24: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(6)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -0,5$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

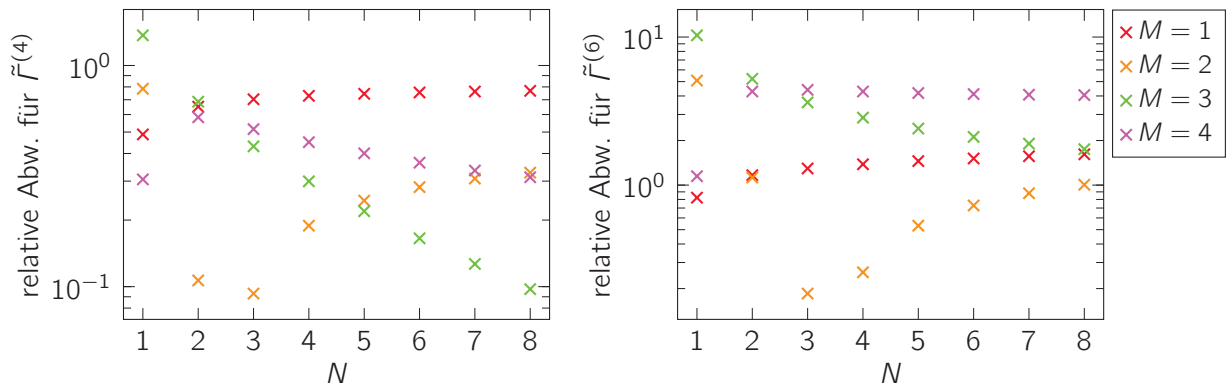


Abb. 4.25: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ (links) und $\tilde{f}^{(6)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -0,5$ und den Anfangsbedingungen ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Dimension N und für verschiedene Werte des Grads M der Näherung. Es wurde als Kopplung jeweils $u/r^2 = 3/N$ gewählt.

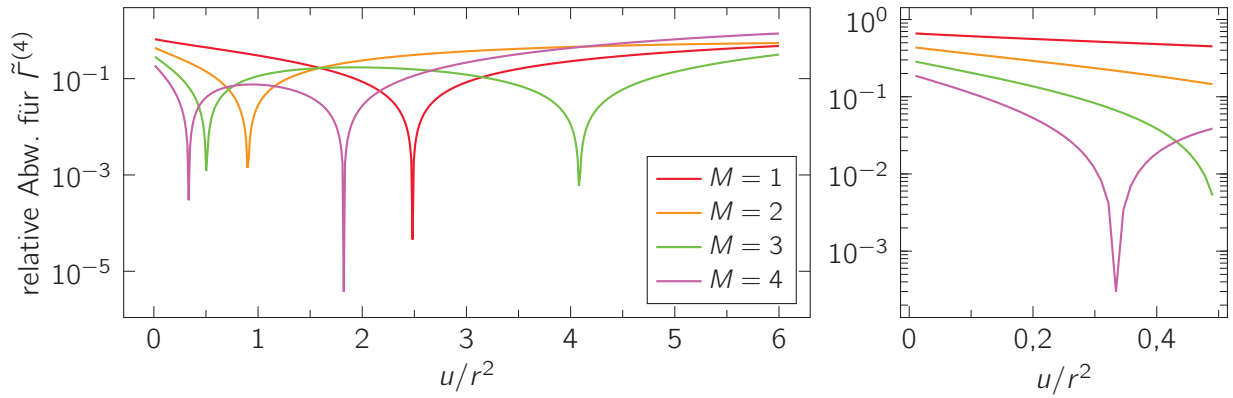


Abb. 4.26: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -0,5$, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

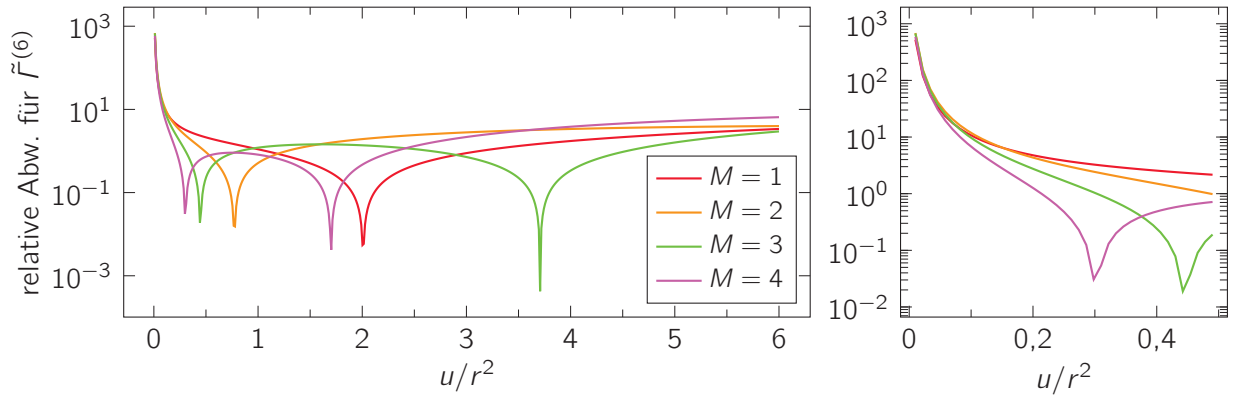


Abb. 4.27: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(6)}$ mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -0,5$, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Kopplung u/r^2 für verschiedene Werte des Grads M der Näherung und bei $N = 2$. Rechts befindet sich eine vergrößerte Darstellung für den Bereich $u/r^2 \leq 0,5$.

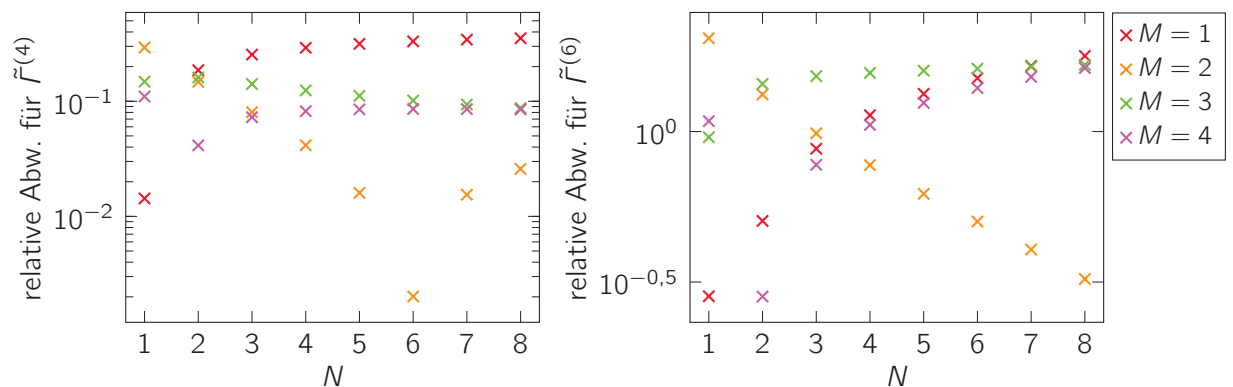


Abb. 4.28: Vergleich der exakten Lösung für $\tilde{f}^{(4)}$ (links) und $\tilde{f}^{(6)}$ (rechts) mit den Näherungslösungen, die mittels des Ansatzes rationaler Funktionen für $b = -0,5$, den Anfangsbedingungen und der Randbedingung ermittelt wurden, in Abhängigkeit von der Dimension N und für verschiedene Werte des Grads M der Näherung. Es wurde als Kopplung jeweils $u/r^2 = 3/N$ gewählt.

4.3.3 Bewertung und Fehleranalyse

Die Näherung für $\tilde{f}^{(2)}$ durch eine rationale Funktion in der Form in Formel (4.11) bietet gegenüber dem Polynomansatz eine höhere Genauigkeit. Dennoch bleibt der Fehler deutlich zu groß, weshalb auch diese Näherung dem Standard-Verfahren aus Kapitel 3 mit Abstand unterlegen bleibt. Die Variation der Entwicklungsstelle b führt zu einer Skalierung der Abweichungen bezüglich der Kopplung u/r^2 , für die beiden betrachteten Stellen jedoch zu keiner weiteren quantitativen oder qualitativen Veränderung.

Das Erhöhen von M bietet nur für kleine Werte der Kopplung u/r^2 einen Mehrwert. Die Genauigkeitsordnung scheint sich für größere Werte beliebig zu verändern. Ähnlich wie bei den Polynomen ist der Abstand zwischen der Entwicklungsstelle b bzw. der Anfangsstelle $\kappa = 0$ und der interessanten Stelle $\kappa = 1$ groß, sodass vor allem ohne die Fixierung des Randwerts $\tilde{f}^{(2)}$ hohe Abweichungen in den Näherungen auftreten können. Auch pflanzen sich die Fehler fort, die bereits bei $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ auftreten, sodass die Abweichungen für $\tilde{f}_\kappa^{(4)}$, $\tilde{f}_\kappa^{(6)}$ etc. besonders groß werden.

Ferner ist auffällig, dass die Abweichungen im Gegensatz zum Polynomansatz und dem Standard-Verfahren für $u/r^2 \rightarrow 0$ nicht gegen null gehen. Dies könnte daran liegen, dass $\tilde{f}_\kappa^{(2)}$ für sehr kleine Werte der Kopplung u/r^2 näherungsweise linear verläuft und die gewählte Näherung dies nicht gut abbilden kann.

Im Gegensatz zum Polynomansatz sind die Koeffizienten a_m nicht von M unabhängig. Daher kann das Gleichungssystem zu deren Bestimmung nicht sukzessive gelöst werden, wie es beim Polynomansatz der Fall ist. Dies gilt aufgrund der Struktur des Ansatzes für alle möglichen Entwicklungsstellen. Allerdings entsteht dadurch im Unterschied zu den Polynomen die Möglichkeit, den Ansatz zu erweitern, ohne dass diese ohnehin nicht vorhandene Eigenschaft verloren geht, indem die Entwicklungsstellen für jeden Summanden in Formel (4.11) verschieden gewählt werden. Damit erhöht sich zwar die Parameteranzahl, möglicherweise erhält man damit aber bessere Ergebnisse. Diese Erweiterung des Ansatzes soll hier nicht weiter untersucht werden.

5 Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurde mittels der Literatur zunächst ein grundlegendes Verständnis über den Ansatz der funktionalen Renormierungsgruppe zur Bestimmung der effektiven Wirkung Γ sowie des damit verbundenen erzeugenden Funktional Z erworben. Hierzu diente ein Beispiel für ein erzeugendes Funktional im \mathbb{R}^N , vgl. Formel (2.1), das ein gewöhnliches Integral darstellt und für welches die exakte Lösung bekannt ist. Im Zentrum der Bestimmung der Größen Z und Γ stehen ihre Entwicklungskoeffizienten, d. h. die sogenannten Korrelationsfunktionen $G^{(2m)}$ sowie die eigentlichen Vertizes $\Gamma^{(2m)}$.

Zur Ermittlung der effektiven Wirkung wird zwischen der gegebenen Wirkung als Anfangswert und der effektiven Wirkung mittels der effektiven Mittelwert-Wirkung Γ_k interpoliert. Hierbei wird ein sogenannter Regulator-Term eingeführt, der diese Interpolation genau beschreibt. Für Γ_k ist ferner die Wetterich-Flussgleichung zentral. Mit ihr kann ein unendliches Differenzialgleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten $\Gamma_k^{(2m)}$ der effektiven Mittelwert-Wirkung aufgestellt werden, das im Standard-Lösungsverfahren von der Wirkung zur effektiven Wirkung näherungsweise integriert wird, vgl. Kapitel 3.

Es stellte sich für den hier betrachteten Regulator heraus, dass das Gleichungssystem skaliert werden kann. Damit wurde klar, dass statt der beiden gegebenen Parameter r und u nur das Verhältnis u/r^2 , die Kopplung, für das Ergebnis relevant ist, und man vom Interpolationsparameter k und den Größen $\Gamma_k^{(2m)}$ zu einem anderen Parameter κ sowie $\tilde{\Gamma}_\kappa^{(2m)}$ übergehen kann.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wurde eine alternative Lösungsstrategie untersucht. Das in Kapitel 4 beschriebene Verfahren basiert auf der speziellen Struktur der Gleichungen im Differenzialgleichungssystem, das sich aus der Wetterich-Flussgleichung ergibt. Mit einer Näherung für $\tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}$ startend werden hierbei die Koeffizienten $\tilde{\Gamma}_\kappa^{(2m+2)}$ sukzessive aus den einzelnen Gleichungen errechnet. Da diese Gleichungen im hier betrachteten Beispiel rein skalar sind, ist es einfach, diese nach den $\tilde{\Gamma}_\kappa^{(2m+2)}$ umzustellen. Im Allgemeinen ist dies aber eine komplexere Aufgabe, die bspw. in [Zie21] angegangen wird.

Die Beobachtungen im Kapitel 4 verdeutlichen, dass das Verfahren sehr sensibel gegenüber großen Abweichungen der Näherung für $\tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}$ von der exakten Lösung ist. Trotz des Fixierens des Randwerts für $\tilde{\Gamma}_\kappa^{(2)}$ bei $\kappa = 1$ können sehr große Fehler entstehen, da in die Berechnung

der $\tilde{f}_{\kappa}^{(2m+2)}$ neben $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ selbst auch die Ableitungen von $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ eingehen. Die Qualität der Näherung ist also besonders wichtig, um gute Resultate erzielen zu können. Wenngleich die Anfangsbedingungen für $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ bei $\kappa = 0$ meist gegeben sind, ist die Angabe des Randwerts oder der Ableitungen bei $\kappa = 1$ nicht immer möglich. Das macht es schwierig, die Qualität der Näherung sicherzustellen.

Das Beispiel der Näherung mittels spezieller rationaler Funktionen aus Abschnitt 4.3 zeigt, dass die Wahl des Entwicklungspunktes einen Einfluss auf die Größe der Fehler hat. Im Polynom-Beispiel in Abschnitt 4.2 sieht man, dass die Bestimmung der Koeffizienten mittels der Anfangsbedingung auch nacheinander möglich ist, sofern bestimmte Koeffizienten in der Ableitung von $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ an der Stelle $\kappa = 0$ nicht auftreten. Das vereinfacht die Berechnungen etwas. Es stellte sich allerdings auch heraus, dass einige der Flussgleichungen bei bestimmten Formen von Ansätzen redundant sind, vgl. bspw. Abschnitt 4.2.1.

Die hier betrachteten Näherungen können dem Standard-Verfahren bislang nur für kleine Werte der Kopplung u/r^2 Konkurrenz machen. Das Standard-Verfahren bietet den Vorteil, dass bei der Integration des Differenzialgleichungssystems alle gekoppelten Gleichungen simultan betrachtet werden und $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ somit erst beim Lösen des Systems entsteht. Dem gegenüber wird im hier untersuchten Verfahren erst die Näherung von $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ festgelegt, woraus sich über das System dann die $\tilde{f}_{\kappa}^{(2m+2)}$ ergeben. Dies unterstreicht noch einmal, dass für $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ eine möglichst gute Näherung gegeben sein muss, um mit dem Verfahren zufriedenstellende Ergebnisse erhalten zu können.

In weiteren Untersuchungen könnte das Verfahren zunächst mit weiteren Ansätzen für Näherungen durchgeführt werden. Man könnte nach Kriterien suchen, die eine hinreichende Qualität der Näherung für $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ sicherstellen. Auch ist es sinnvoll, das Verfahren für andere Regulatoren und weitere Beispiele für erzeugende Funktionale zu testen. Sofern sich das Verfahren dann als zielführend herausstellt, kann es auf allgemeinere Problemstellungen fernab des \mathbb{R}^N angewendet und daran untersucht werden.

Es muss allerdings angemerkt werden, dass in der Praxis die exakte Lösung für $\tilde{f}_{\kappa}^{(2)}$ nicht bekannt ist – sonst könnte man das Verfahren mit dieser Lösung durchführen und erhielte exakte Lösungen für die $\tilde{f}_{\kappa}^{(2m+2)}$. Daher ist die Abschätzung des Fehlers, zu dem das Verfahren führt, im Allgemeinen schwierig. Nichtsdestotrotz wurden zu anderen konkreten Problemstellungen exakte Lösungen mit der Wetterich-Gleichung gefunden, vgl. [BW13; CDW16]. Diese können für weitere Tests herangezogen werden

Anhang A

Programme

Hier sind die Quellcodes für die automatische Herleitung der Beziehungen der Koeffizienten und der Flussgleichungen dargestellt. In der PDF-Version dieser Arbeit sind die Codes mit farblicher Hervorhebung zu finden. Die verwendete Software ist Python 3.12.3 mit SymPy 1.12.1.

A.1 Herleitung der Beziehungen zwischen den Korrelationsfunktionen und den eigentlichen Vertizes

Nachfolgend ist das Programm zur Herleitung der Beziehungen zwischen den Korrelationsfunktionen und den eigentlichen Vertizes dargestellt, vgl. Abschnitt 2.2.2. Die Variable `m_max` (hier mit Wert 5) bestimmt die höchste zu berechnende Beziehung.

```
import sympy as sp

def gc_to_gamma(m: int) -> sp.Eq:
    """Wandelt  $G_c^{(2m)}$  in  $\Gamma^{(2m)}$  um."""

    if m == 1:
        return sp.Eq(sp.Symbol(" $\Gamma^{(2)}$ "), 1 / sp.Symbol(" $G_c^{(2)}$ "))
    else:
        j = sp.Symbol("J")
        w = sp.Function("W")(j)
        w_2_inv = 1 / w.diff(j, 2)

        gamma_diff_2m = w_2_inv # gamma_diff_2
        for i in range(2 * m - 2):
            gamma_diff_2m = w_2_inv * gamma_diff_2m.diff(j)
```

```

    # alle geraden Ableitungen ersetzen
    # alle ungeraden Ableitungen null
    gamma_diff_2m = gamma_diff_2m.subs(w.diff(j, 2 * m),
                                         sp.Symbol(f"Gc^{2 * m}"))

    for i in range(2 * m - 1, 1, -2):
        gamma_diff_2m = gamma_diff_2m.subs(w.diff(j, i), 0)
        gamma_diff_2m = gamma_diff_2m.subs(w.diff(j, i - 1),
                                             sp.Symbol(f"Gc^{i - 1}"))

    return sp.Eq(sp.Symbol(f"Γ^{2 * m}"), gamma_diff_2m.expand())

def g_to_gc(m: int) -> sp.Eq:
    """Wandelt  $G^{(2m)}$  in  $Gc^{(2m)}$  um."""

    if m == 1:
        return sp.Eq(sp.Symbol("Gc^(2)"), sp.Symbol("G^(2)"))
    else:
        gc_2m = sp.Symbol(f"Gc^{2 * m}")
        j = sp.Symbol("J")
        z = sp.Function("Z")(j)

        w_diff_2m = sp.log(z).diff(j, 2 * m)

        # alle geraden Ableitungen ersetzen
        # alle ungeraden Ableitungen null
        for i in range(2 * m, 1, -2):
            w_diff_2m = w_diff_2m.subs(z.diff(j, i), sp.Symbol(f"G^{i}") * z)
            w_diff_2m = w_diff_2m.subs(z.diff(j, i - 1), 0)

        return sp.Eq(gc_2m, w_diff_2m.expand())

if __name__ == "__main__":
    sp.init_printing()

    # höchste zu berechnende Beziehung:
    m_max = 5

    for m in range(1, m_max + 1):
        eq = gc_to_gamma(m)
        for i in range(m, 0, -1):
            g_gc = g_to_gc(i)
            eq = eq.subs(g_gc.lhs, g_gc.rhs)

```

```
eq = eq.expand()
sp.pprint(eq)
```

A.2 Herleitung der Flussgleichungen

Nachfolgend ist das Programm zur Herleitung der Flussgleichungen dargestellt. Die Flussgleichungen werden in der allgemeinen Form aus Abschnitt 3.3.2 sowie in der konkreten Form aus Abschnitt 3.4.1 ausgegeben. Die Variable `m_max` (hier mit Wert 4) bestimmt die höchste zu berechnende Gleichung.

```
from math import factorial
from itertools import combinations_with_replacement

import sympy as sp

def double_list(alpha: list[int]) -> list[int]:
    """
    Doubles the list ``alpha`` element-wise.
    :param alpha: multi-index
    :return: doubled multi-index
    """
    return [2 * a for a in alpha]

def multi_index_factorial(alpha):
    """Calculates the factorial of the multi-index ``alpha``."""
    # Set the initial value for the partial product.
    prod = 1
    for k in range(len(alpha)):
        prod = prod * factorial(alpha[k])
    return prod

def multi_index_sum(f, m_, n_, **kwargs):
    """
    Calculates the sum over ``f(alpha, **kwargs)`` for all multi-indices
    ``alpha`` of length ``n`` with sum ``m``.
    ``**kwargs`` could be, for example, r or u.
    """
```

```

"""
# Set the initial value for the partial sum.
sum_ = 0
# Iterate over all combinations of 0, ..., n-1 of length m with
# replacement.
# Each tuple of the set of combinations stands for one multi-index.
# This is achieved by first creating a prototype multi-index and
# then successively adding 1 to the prototype multi-index's entries
# given by the combination tuple.
# After that, the summand is added to the partial sum variable.
# By iterating over the combinations this gives the sum.
for it in combinations_with_replacement(range(n_), m_):
    # Create prototype multi-index.
    alpha = n_ * [0]
    # Add 1 to the entries indexed by `it`.
    for i_ in range(m_):
        alpha[it[i_]] = alpha[it[i_]] + 1
    # Add the summand `f(alpha)` to the partial sum `sum_`
    sum_ = sum_ + f(alpha, **kwargs)
return sum_

def summand_diagonal_matrix_trace(alpha: list[int],
                                   gamma_k_list: list[sp.Function],
                                   regulator: sp.Function,
                                   simplify: bool = True) -> sp.Expr:
    """
    Calculates the summand for the multi-indexed sum.
    :param alpha: multi index
    :param gamma_k_list: ordered list of  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$ , ...,  $\Gamma^{(2m+2)}$  as
    ↪ functions
    :param regulator: regulator as a function
    :param simplify: whether to simplify
    :return: summand
    """

    product_1 = sp.Integer(1)
    product_2 = sp.Integer(1)
    for a in alpha:
        product_1 = product_1 / (2 * sp.Integer(a) + 1)
        if a == 0:
            product_2 = product_2 * (gamma_k_list[0] + regulator)
        else:
            product_2 = product_2 * gamma_k_list[a]

```



```

product = (((n - 1) * product_1 + 1) * product_2
           / sp.Integer(multi_index_factorial(double_list(alpha))))

if simplify:
    product = product.simplify()

return product

def flow_equation(m: int, simplify: bool = True) -> tuple[sp.Eq, sp.Eq]:
    """
    Calculates the ``m``-th flow equation.
    :param m: number of flow equation, positive integer
    :param simplify: whether to simplify the equation
    :return: the ``m``-th flow equation
    """

    m2 = 2 * m

    # Get Symbols.
    r = sp.Symbol("r", positive = True)
    regulator = sp.Function("R")(k)
    gamma_k_list = generate_gamma_k_list(m)
    sigma = sp.Function("Σ")(k)
    k_sigma_1 = k * sigma + 1
    x = sp.Symbol("x")

    outer_sum = 0
    for j in range(1, m2 + 1):
        inner_sum = multi_index_sum(summand_diagonal_matrix_trace,
                                    m,
                                    j,
                                    gamma_k_list = gamma_k_list,
                                    regulator = regulator,
                                    simplify = simplify)

        if simplify:
            inner_sum = inner_sum.simplify()
        factor = (sp.binomial(m2 + 1, j + 1)
                  * (gamma_k_list[0] + regulator) ** (m - j))
        if j % 2 == 1:
            factor = -factor
        outer_sum = outer_sum + factor * inner_sum

```

```

rhs_1 = sp.Rational(factorial(m2), 2) * outer_sum
if simplify:
    rhs_1 = rhs_1.simplify()
rhs_1 = rhs_1.subs(gamma_k_list[0] + regulator, 1 / x)
rhs_1 = rhs_1 * x ** (m + 1)
if simplify:
    rhs_1 = rhs_1.expand(x)
    for gamma_k in gamma_k_list:
        rhs_1 = rhs_1.collect(gamma_k)
    rhs_1 = rhs_1.collect(x)
rhs_1 = rhs_1.subs(1 / x, gamma_k_list[0] + regulator)

rhs_2 = rhs_1.subs([(regulator, 1 / k - r),
                    (gamma_k_list[0], sigma + r)])
rhs_2 = -rhs_2 / k ** 2
if simplify:
    rhs_2 = rhs_2.simplify()
rhs_2 = rhs_2.subs(k_sigma_1, 1 / x)
if simplify:
    rhs_2 = rhs_2.expand(x)
    for gamma_k in gamma_k_list:
        rhs_2 = rhs_2.collect(gamma_k)
    rhs_2 = rhs_2.collect(x)
    rhs_2 = rhs_2.collect(k)
rhs_2 = rhs_2.subs(x, 1 / k_sigma_1)

lhs_2 = gamma_k_list[-2].diff(k)
lhs_1 = lhs_2 / regulator.diff(k)

eq_1 = sp.Eq(lhs_1, rhs_1)

# Skalierung.
gamma_kappa_list = [gamma_2m_k.subs(k, kappa)
                    for gamma_2m_k in gamma_k_list]

rhs_3 = rhs_2.subs([(gamma_k_list[i], gamma_kappa_list[i])
                    for i in range(1, len(gamma_k_list))])
rhs_3 = rhs_3.subs(sigma, gamma_kappa_list[0])
rhs_3 = rhs_3.subs(k, kappa)

lhs_3 = gamma_kappa_list[-2].diff(kappa)

eq_3 = sp.Eq(lhs_3, rhs_3)

```

```

return eq_1, eq_3

def generate_gamma_k_list(m: int) -> list[sp.Function]:
    """
    Generates an ordered list of  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$ , ...,  $\Gamma^{(2m+2)}$  as functions of
     $\hookrightarrow k$ 
    :param m:
    :param k: interpolation parameter, the  $\Gamma^{(2l)}$  are functions of
    :return: list of  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma^{(4)}$ , ...,  $\Gamma^{(2m+2)}$  as functions of  $k$ 
    """

    gamma_k_list = []
    for i in range(2, 2 * m + 3, 2):
        gamma_k_list.append(sp.Function(f" $\Gamma^{({i})}$ ")(k))

    return gamma_k_list

k = sp.Symbol("k")
kappa = sp.Symbol("κ")
n = sp.Symbol("N", integer = True, positive = True)

if __name__ == "__main__":
    sp.init_printing()

    # höchste zu berechnende Flussgleichung:
    m_max = 4

    for m in range(1, m_max + 1):
        eq, eq_scal = flow_equation(m)

        sp.pprint(eq)
        sp.pprint(eq_scal)

```

Anhang B

Koeffizienten für die Näherung mittels spezieller rationaler Funktionen

In diesem Anhang werden die Koeffizienten aufgelistet, die sich mit der Näherung in Abschnitt 4.3 ergeben.

B.1 Entwicklungspunkt $b = -1$

Hier werden die Koeffizienten für den Fall $b = -1$ aufgeführt.

B.1.1 Betrachtung der Anfangswerte

Werden nur die Anfangswerte zur Bestimmung der Koeffizienten herangezogen, ergeben sich die folgenden Koeffizienten. Für $M = 1$ findet man

$$a_0 = -a_1 = \frac{N+2}{6} \frac{u}{r^2},$$

für $M = 2$

$$\frac{a_0}{2} = -\frac{a_1}{3} = a_2 = \frac{N+2}{6} \frac{u}{r^2},$$

für $M = 3$

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{N+2}{2} \frac{u}{r^2} - \frac{(N+2)(N+4)}{36} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \\ a_1 &= -(N+2) \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{12} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \\ a_2 &= -\frac{2(N+2)}{3} \frac{u}{r^2} - \frac{(N+2)(N+4)}{12} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$a_3 = -\frac{N+2}{6} \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{36} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2$$

und für $M = 4$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2(N+2)}{3} \frac{u}{r^2} - \frac{(N+2)(N+4)}{9} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \\ a_1 &= -\frac{5(N+2)}{3} \frac{u}{r^2} + \frac{5(N+2)(N+4)}{12} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \\ a_2 &= \frac{5(N+2)}{3} \frac{u}{r^2} - \frac{7(N+2)(N+4)}{12} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \\ a_3 &= -\frac{5(N+2)}{6} \frac{u}{r^2} + \frac{13(N+2)(N+4)}{36} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \\ a_4 &= \frac{N+2}{6} \frac{u}{r^2} - \frac{(N+2)(N+4)}{12} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2. \end{aligned}$$

B.1.2 Betrachtung von Anfangswerten und einer Randbedingung

Wird neben den Anfangswerten auch die Randbedingung zur Bestimmung der Koeffizienten herangezogen, ergeben sich die folgenden Koeffizienten. Für $M = 1$ findet man

$$a_0 = -a_1 = 2\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)},$$

für $M = 2$

$$a_0 = -\frac{N+2}{6} \frac{u}{r^2} + 4\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)}, \quad a_1 = \frac{N+2}{2} \frac{u}{r^2} - 8\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} \quad \text{und} \quad a_2 = -\frac{N+2}{3} \frac{u}{r^2} + 4\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)},$$

für $M = 3$

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{2(N+2)}{3} \frac{u}{r^2} + 8\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)}, \\ a_1 &= \frac{5(N+2)}{2} \frac{u}{r^2} - 24\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)}, \\ a_2 &= -\frac{17(N+2)}{6} \frac{u}{r^2} + 24\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)}, \\ a_3 &= (N+2) \frac{u}{r^2} - 8\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} \end{aligned}$$

und $M = 4$

$$\begin{aligned} a_0 &= 16\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{11(N+2)}{6} \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{36} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \\ a_1 &= -64\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} + \frac{25(N+2)}{3} \frac{u}{r^2} - \frac{5(N+2)(N+4)}{36} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \\ a_2 &= 96\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{40(N+2)}{3} \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{4} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2, \end{aligned}$$

$$a_3 = -64\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} + \frac{55(N+2)}{6} \frac{u}{r^2} - \frac{7(N+2)(N+4)}{36} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2,$$

$$a_4 = 16\tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{7(N+2)}{3} \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{18} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2.$$

B.2 Entwicklungspunkt $b = -0,5$

Hier werden die Koeffizienten für den Fall $b = -0,5$ aufgeführt.

B.2.1 Betrachtung der Anfangswerte

Werden nur die Anfangswerte zur Bestimmung der Koeffizienten herangezogen, ergeben sich die folgenden Koeffizienten. Für $M = 1$ findet man

$$a_0 = -2a_1 = \frac{N+2}{12} \frac{u}{r^2}$$

für $M = 2$

$$a_0 = \frac{N+2}{6} \frac{u}{r^2}, \quad a_1 = \frac{N+2}{8} \frac{u}{r^2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{N+2}{48} \frac{u}{r^2},$$

für $M = 3$

$$a_0 = \frac{N+2}{4} \frac{u}{r^2} - \frac{(N+2)(N+4)}{288} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2,$$

$$a_1 = -\frac{N+2}{4} \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{192} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2,$$

$$a_2 = \frac{N+2}{12} \frac{u}{r^2} - \frac{(N+2)(N+4)}{384} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2,$$

$$a_3 = -\frac{N+2}{96} \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{2304} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2$$

und für $M = 4$

$$a_0 = \frac{N+2}{3} \frac{u}{r^2} - \frac{(N+2)(N+4)}{72} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2,$$

$$a_1 = -\frac{5(N+2)}{12} \frac{u}{r^2} + \frac{5(N+2)(N+4)}{192} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2,$$

$$a_2 = \frac{5(N+2)}{24} \frac{u}{r^2} - \frac{7(N+2)(N+4)}{384} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2,$$

$$a_3 = -\frac{5(N+2)}{96} \frac{u}{r^2} + \frac{13(N+2)(N+4)}{2304} \left(\frac{u}{r^2}\right)^2,$$

$$a_4 = \frac{N+2}{192} \frac{u}{r^2} - \frac{(N+2)(N+4)}{1536} \left(\frac{u}{r^2} \right)^2.$$

B.2.2 Betrachtung von Anfangswerten und einer Randbedingung

Wird neben den Anfangswerten auch die Randbedingung zur Bestimmung der Koeffizienten herangezogen, ergeben sich die folgenden Koeffizienten. Für $M = 1$ findet man

$$a_0 = -2a_1 = \frac{3}{2} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)},$$

für $M = 2$

$$a_0 = \frac{9}{4} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{N+2}{24} \frac{u}{r^2}, \quad a_1 = -\frac{9}{4} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} + \frac{N+2}{12} \frac{u}{r^2} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{9}{16} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{N+2}{32} \frac{u}{r^2},$$

für $M = 3$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{27}{8} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{7(N+2)}{48} \frac{u}{r^2}, \\ a_1 &= -\frac{81}{16} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} + \frac{11(N+2)}{32} \frac{u}{r^2}, \\ a_2 &= \frac{81}{32} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{41(N+2)}{192} \frac{u}{r^2}, \\ a_3 &= -\frac{27}{64} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} + \frac{5(N+2)}{128} \frac{u}{r^2} \end{aligned}$$

und für $M = 4$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{81}{16} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{11(N+2)}{32} \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{576} \left(\frac{u}{r^2} \right)^2, \\ a_1 &= -\frac{81}{8} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} + \frac{15(N+2)}{16} \frac{u}{r^2} - \frac{(N+2)(N+4)}{192} \left(\frac{u}{r^2} \right)^2, \\ a_2 &= \frac{243}{32} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{155(N+2)}{192} \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{192} \left(\frac{u}{r^2} \right)^2, \\ a_3 &= -\frac{81}{32} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} + \frac{55(N+2)}{192} \frac{u}{r^2} - \frac{5(N+2)(N+4)}{2304} \left(\frac{u}{r^2} \right)^2, \\ a_4 &= \frac{81}{256} \tilde{f}_{\text{exakt}}^{(2)} - \frac{19(N+2)}{512} \frac{u}{r^2} + \frac{(N+2)(N+4)}{3072} \left(\frac{u}{r^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [BW13] Federico Benitez und Nicolás Wschebor. „Branching and annihilating random walks: Exact results at low branching rate“. In: *Physical Review E* 87.5 (Mai 2013), S. 052132. DOI: 10.1103/PhysRevE.87.052132.
- [BTW02] Jürgen Berges, Nikolaos Tetradis und Christof Wetterich. „Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics“. In: *Physics Reports* 363.4 (2002), S. 223–386. DOI: 10.1016/S0370-1573(01)00098-9.
- [Bra12] Jens Braun. „Fermion interactions and universal behavior in strongly interacting theories“. In: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 39.3 (Jan. 2012), S. 033001. DOI: 10.1088/0954-3899/39/3/033001.
- [CDW16] Léonie Canet, Bertrand Delamotte und Nicolás Wschebor. „Fully developed isotropic turbulence: Nonperturbative renormalization group formalism and fixed-point solution“. In: *Physical Review E* 93.6 (Juni 2016), S. 063101. DOI: 10.1103/PhysRevE.93.063101.
- [Dup+21] Nicolas Dupuis et al. „The nonperturbative functional renormalization group and its applications“. In: *Physics Reports* 910 (Jan. 2021), S. 1–114. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.01.001.
- [Gie12] Holger Gies. „Introduction to the Functional RG and Applications to Gauge Theories“. In: *Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems*. Hrsg. von Achim Schwenk und Janos Polonyi. Berlin und Heidelberg: Springer, 2012, S. 287–348. DOI: 10.1007/978-3-642-27320-9_6.
- [GS24] Holger Gies und Julian Schirrmeister. *Renormalization Flow of Nonlinear Electrodynamics*. Mai 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2405.06472. arXiv: 2405.06472v1.
- [GZ17] Holger Gies und Luca Zambelli. „Non-Abelian Higgs models: Paving the way for asymptotic freedom“. In: *Physical Review D* 96.2 (Juli 2017), S. 025003. DOI: 10.1103/PhysRevD.96.025003.
- [Gie+19] Holger Gies et al. „Asymptotic freedom in \mathbb{Z}_2 -Yukawa-QCD models“. In: *The European Physical Journal C* 79.101 (Jan. 2019). DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6604-z.

- [GR07] I. S. Gradshteyn und I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Hrsg. von Alan Jeffrey und Daniel Zwillinger. 7. Auflage. Amsterdam u. a.: Elsevier Academic Press, 2007.
- [KB12] Jan Keitel und Lorenz Bartosch. „The zero-dimensional $O(N)$ vector model as a benchmark for perturbation theory, the large- N expansion and the functional renormalisation group“. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45.10 (Feb. 2012), S. 105401. DOI: 10.1088/1751-8113/45/10/105401.
- [Wal17] Guido Walz. *Lexikon der Mathematik. Leibnizsche Regel*. 2017. URL: <https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/leibnizsche-regel/5886> (besucht am 03.06.2024).
- [Wet93] Christof Wetterich. „Exact evolution equation for the effective potential“. In: *Physics Letters B* 301.1 (Feb. 1993), S. 90–94. DOI: 10.1016/0370-2693(93)90726-x.
- [Zie21] Jobst Ziebell. „Existence and construction of exact functional-renormalization-group flows of a UV-interacting scalar field theory“. In: *Physical Review D* 103.2 (Jan. 2021), S. 025002. DOI: 10.1103/PhysRevD.103.025002.
- [Zin08] Jean Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. 4. Auflage. Oxford und New York: Clarendon Press und Oxford University Press, 2008.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich trage die Verantwortung für die Qualität des Textes sowie die Auswahl aller Inhalte und habe sichergestellt, dass Informationen und Argumente mit geeigneten wissenschaftlichen Quellen belegt bzw. gestützt werden. Die aus fremden oder auch eigenen, älteren Quellen wörtlich oder sinngemäß übernommenen Textstellen, Gedankengänge, Konzepte, Grafiken etc. in meinen Ausführungen habe ich als solche eindeutig gekennzeichnet und mit vollständigen Verweisen auf die jeweilige Quelle versehen. Alle weiteren Inhalte dieser Arbeit ohne entsprechende Verweise stammen im urheberrechtlichen Sinn von mir.

Ich weiß, dass meine Eigenständigkeitserklärung sich auch auf nicht zitierfähige, generierende KI-Anwendungen (nachfolgend „generierende KI“) bezieht. Mir ist bewusst, dass die Verwendung von generierender KI unzulässig ist. Die Nutzung generierender KI wurde von der prüfenden Person nicht ausdrücklich freigegeben. Ich verantworte die Übernahme der von mir verwendeten maschinell generierten Passagen in meiner Arbeit vollumfänglich selbst.

Ich versichere des Weiteren, dass die vorliegende Arbeit bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt wurde oder in deutscher oder einer anderen Sprache als Veröffentlichung erschienen ist.

Mir ist bekannt, dass ein Verstoß gegen die vorbenannten Punkte prüfungsrechtliche Konsequenzen haben und insbesondere dazu führen kann, dass meine Prüfungsleistung als Täuschung und damit als mit „nicht bestanden“ bewertet werden kann. Bei mehrfachem oder schwerwiegendem Täuschungsversuch kann ich befristet oder sogar dauerhaft von der Erbringung weiterer Prüfungsleistungen in meinem Studiengang ausgeschlossen werden.

Jena, 17. Juni 2024



Unterschrift