

Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Physikalisch-Astronomische Fakultät  
Theoretisch-Physikalisches Institut



# Quantenfeldtheoretisches Tunneln exotischer Teilchen in magnetischen Feldern

Diplomarbeit

zur Erlangung des  
akademischen Grades eines  
Diplom-Physikers (Dipl.-Phys.)

vorgelegt von Norman Neitz  
geboren am 09.08.1985 in Zeitz

Jena, 25. Juni 2010

1. *Gutachter*: Prof. Dr. Holger Gies
2. *Gutachter*: Dr. Andreas Ringwald

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1. Propagatoren und Polarisationsstensor . . . . .	5
2.2. „Tunneln 3. Art“ . . . . .	7
<b>3. Ableitung der Übergangswahrscheinlichkeit</b>	<b>13</b>
<b>4. Approximation für schwache Magnetfelder</b>	<b>21</b>
4.1. Grenzfall verschwindender Magnetfelder $B \rightarrow 0$ . . . . .	21
4.2. Schwaches Magnetfeld $B$ . . . . .	23
4.2.1. Grenzfall kleiner Frequenzen $\omega \ll 2m$ . . . . .	28
4.2.2. Grenzfall großer Frequenzen $\omega \gg 2m$ . . . . .	30
<b>5. Experimentelle Möglichkeiten</b>	<b>31</b>
<b>6. Zusammenfassung</b>	<b>33</b>
<b>A. Konventionen</b>	<b>35</b>
<b>B. Näherung für <math>\omega^2 \gg 2m^2</math></b>	<b>37</b>



# 1. Einleitung

*Phantasie ist wichtiger als Wissen,  
denn Wissen ist begrenzt.*

*Albert Einstein*

Seit jeher versuchen die Naturwissenschaften durch Beobachtung der Natur die grundlegenden Prinzipien, Ordnungen und Gesetze ebendieser zu erfassen. Dabei bedient sich die Physik mathematischer Modelle, die sich durch experimentelle Messungen bewähren müssen. Als erstrebenswertes Ziel gilt es daher, ein theoretisches Gesamtkonzept zu konstruieren, das es ermöglicht, jedwede Art von Wechselwirkungen oder Prozessen einheitlich zu beschreiben. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts glaubten viele Physiker, dieses Ziel beinahe erreicht zu haben. Philipp von Jolly sagte zu Max Planck, dass „*in dieser Wissenschaft schon fast alles erforscht sei*“.<sup>1</sup> Wie unzutreffend diese Vermutung war, zeigten die folgenden 50 Jahre, in denen gleich durch zwei physikalische Theorien das scheinbar erreichte Ziel wieder in weite Ferne gerückt wurde.

Die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik, welche sich als Erklärungskonzepte der Probleme älterer Experimente und Modelle erweisen sollten, widersprechen nicht nur den klassischen Theorien, sondern auch der alltäglichen Wahrnehmung. Eines der interessantesten Probleme ist dabei der Tunneleffekt, der zuerst von Robert Williams Wood [1] beobachtet wurde und erstmals 1926 quantenmechanisch erklärt werden konnte [2]. Der Tunneleffekt kann nur durch eine nicht-klassische Theorie beschrieben werden, die zum einen nur noch Wahrscheinlichkeitsaussagen trifft und zum anderen die Dualität zwischen Wellen- und Teilcheneigenschaften offenbart. Dass das mathematische Konzept und die Interpretation der Quantenmechanik umfassend ausgearbeitet wurde ist unter anderem Schrödinger, Heisenberg, Pauli und Dirac zu verdanken.

Eine wesentliche Erweiterung der Quantenmechanik stellt die sogenannte zweite Quantisierung dar, bei der die Felder, welche die Teilchen beschreiben, quantisiert werden. Dies ermöglicht zum Beispiel eine quantenfeldtheoretische Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung, was wiederum zu einer der erfolgreichsten Theorien der Physik führt: die Quantenelektrodynamik (QED). Diese im Wesentlichen auf die grundlegenden Arbeiten von Feynman, Schwinger und Tomonaga aufbauende Theorie erlaubt es beispielsweise, extrem präzise Aussagen, zum anomalen magnetischen Moment des Elektrons [3,4,5] zu treffen. Durch zahlreiche Experimente wurden diese hervorragend bestätigt [6]. Aufgrund von Quantefluktuationen ändert eine virtuelle Paarerzeugung von Elektronen und Positronen oder eine Emission und Absorption virtueller Photonen die Charakteristika physikalischer Größen ab. Diese Abänderung ist perturbativ berechenbar. So führt beispielsweise die Beachtung von Strahlungskorrekturen auf das

---

<sup>1</sup>Planck, Vom Relativen zum Absoluten, Naturwissenschaften Bd. 13, 1925

## 1. Einleitung

Uehling-Potential [7], eine Modifikation des Coulomb-Potentials, oder zu einer genaueren Beschreibung der Propagation von Photonen, insbesondere in äußeren Feldern. Vor allem in den letzten Jahren rückten die Effekte der QED wieder in den Fokus aktueller Forschung, da die Entwicklung von Lasern hoher Intensität Beobachtungen von bisher dem Experiment unzugänglichen Prozessen ermöglicht. Ein wesentlicher Punkt ist, dass sich die Rolle des Vakuums vom „Nichts“ zu einem Medium wandelte.

Neben der Entwicklung der QED ist es gelungen, mit dem Standardmodell (SM) der Teilchenphysik ein fundiertes Konzept zum Verständnis physikalischer Effekte auf subatomarer Ebene zu konstruieren. Allerdings ist dieses mit dem Mangel behaftet, dass es zum einen keine Erklärung für dunkle Materie liefert und zum anderen keine Verbindung mit gravitativen Wechselwirkungen zulässt. Daraus leiten sich zahlreiche Vorschläge zu einer Erweiterung des SM ab, wie zum Beispiel Supersymmetrie oder Stringtheorien. Ein Aspekt der Erweiterung ist, dass es Teilchen gibt, die sich bisher in keiner Messung nachweisen ließen. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass diese zunächst hypothetischen Teilchen nur sehr schwach mit der Umgebung wechselwirken, ähnlich zu den Neutrinos, und deshalb einen experimentellen Nachweis sehr schwierig machen. Für diese sogenannten WIMPs (“weakly interacting massive particles”) gibt es verschiedene Kandidaten, zum Beispiel Axionen und axionartige Teilchen oder minigeladene Teilchen (“minicharged particles”). Sie könnten eine Erklärung für das Phänomen der dunklen Materie liefern. Die Idee der minigeladenen Teilchen beruht darauf, dass es, neben der für die elektromagnetischen Wechselwirkungen im SM verantwortlichen  $U(1)$  Eichsymmetrie, eine weitere  $U'(1)$  Symmetrie gibt. Diese zusätzliche Eichsymmetrie wurde von Holdom [8] vorgeschlagen und stellt gewissermaßen eine natürliche Erweiterung des SM dar, wenn das Konzept der Eichsymmetrien als grundlegend angesehen wird. Diese  $U'(1)$  sorgt dafür, dass es eine Art zweites Elektron gibt, welches allerdings eine andere Ladung hat und insbesondere kein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung sein muss.

In der aktuellen Forschung wird versucht, WIMPs durch sogenannte „Licht durch die Wand“ Experimente [9-13] nachzuweisen, wobei der Tunneleffekt eine zentrale Rolle spielt. Als Erweiterung des normalen Tunneleffektes wird dabei in Betracht gezogen, dass sich Photonen in reale Teilchen, beispielsweise Axionen, umwandeln, welche dann durch die Barriere hindurchtunneln und sich wieder in Photonen umwandeln („Tunneln 2. Art“). Im Folgenden soll eine weitere Möglichkeit, „Tunneln 3. Art“, betrachtet werden, bei der die Photonen sich in virtuelle Teilchenpaare aufteilen, die danach eine Wand durchtunneln können [14].

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, diesen „neuartigen“ Tunneleffekt unter dem Einfluss eines äußeren magnetischen Feldes zu untersuchen. Im Besonderen wird betrachtet, ob der Effekt in Anwesenheit eines Magnetfeldes verstärkt oder abgeschwächt wird und in welcher Größenordnung diese Änderung ist. Es ist zu erwarten, dass sich eine Verstärkung durch Wechselwirkung von Magnetfeld und minigeladenen Teilchen ergibt. Diese Ergebnisse werden in Bezug auf eine experimentelle Nachweismöglichkeit diskutiert. In Kapitel 2 werden dazu die grundlegenden Eigenschaften des Polarisationsensors mit und ohne äußeres Feld und in größerem Umfang die Rechnungen zum „Tunneln 3. Art“ ohne äußeres Feld zusammengefasst. In Kapitel 3 wird ein Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit innerhalb des Szenarios mit einem konstanten magnetischen Feld ab-

geleitet, der im 4. Kapitel für ein schwaches Magnetfeld in verschiedenen Regimen (große Massen - kleine Frequenzen, kleine Massen - große Frequenzen) ausgewertet wird. Diese Ergebnisse werden dann in Kapitel 5 für die experimentell relevanten Parameter ausgewertet.

Wenn man die heutige Situation der Teilchenphysik mit der Situation des ausgehenden 19. Jahrhunderts vergleicht, so erscheint es überaus lohnenswert, unter Beachtungen der vielfältigen physikalischen Neuerungen seitdem, auch die „phantasievolleren“ Wege zu beschreiten.





## 2. Grundlagen

### 2.1. Propagatoren und Polarisationsstensor

Durch die Beachtung von Quantenfluktuationen werden die Propagatoren von Elektronen und Photonen abgeändert. Diese Korrekturen lassen sich bekanntermaßen störungstheoretisch behandeln, indem man die möglichen Feynmangraphen der entsprechenden Ordnung generiert und deren Beiträge gemäß der Feynmanregeln berechnet.<sup>1</sup> In der 1-Loop-Korrektur, der ersten Ordnung Störungstheorie des Photonpropagators  $D_{\mu\nu}$  wird eine Aufspaltung des Photons in ein virtuelles Elektron-Positron-Paar betrachtet. Dies lässt sich ebenso auf die im Weiteren relevanten minigeladenen Teilchen übertragen, wobei lediglich zu beachten ist, dass sich die Größen der Masse und der Ladung ändern. Daraus ergibt sich als modifizierter Photonpropagator  $D'_{\mu\nu}$ :

$$iD'_{\mu\nu}(k) = iD_{\mu\nu}(k) + iD_{\mu\alpha}(k) i\Pi^{\alpha\beta}(k) iD_{\beta\nu}(k) \quad (2.1)$$

$$D'_{\mu\nu}(k) = \text{Feynman graph: } \text{---} + \text{Feynman graph: } \text{---}$$

Abbildung 2.1.: Der einfache Photonpropagator und die 1-Loop-Korrektur: Die Wellenlinie symbolisiert das Photon mit Impuls  $k$  und die geraden Linien das Elektron-Positron-Paar in der Fermionschleife. Diese tragen die Impulse  $p$  und  $k - p$ .

Dabei ist  $k$  der Photonimpuls und  $\Pi^{\alpha\beta}$  der Polarisationsstensor, oder auch Photon-Selbstenergie. Der generelle Vorfaktor  $i$  ist lediglich Konvention. Der Polarisationsstensor lässt sich mit

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(k) &= -ie^2 \text{tr}_\gamma \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma_\mu g(p) \gamma_\nu g(p - k) \\ g(p) &= \frac{i}{\not{p} - m}, \quad \not{p} = \gamma_\mu p^\mu \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Eine ausführliche Herleitung und Diskussion dieser Regeln, der Propagatoren und des Polarisationsstensors sind in den Lehrbüchern zur Quantenfeldtheorie und QED enthalten. Siehe beispielsweise: S. Weinberg, "The Quantum Theorie of Fields Vol. I: Foundations", Cambridge University Press (1995)

## 2. Grundlagen

bestimmen. Hierbei stehen die  $\gamma$ 's für die bekannten Diracschen Gammamatrizen, über die die Spur gezogen wird. Außerdem steht  $g(p)$  für den Elektronpropagator, zunächst ohne äußeres Feld. Die in der Formel enthaltenen Größen  $m$  und  $e$  stehen für Masse und Ladung und müssen nicht mit den entsprechenden Werten des Elektrons übereinstimmen. Eine kurze Rechnung führt schließlich auf den bekannten Ausdruck [15]<sup>2</sup>:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \left( -\frac{\tilde{\alpha}}{3\pi} \right) k^2 \int_0^1 d\nu \frac{\nu^2(3-\nu^2)}{1-\nu^2} \frac{1}{k^2 + \frac{4m^2}{1-\nu^2} - i\epsilon} \quad (2.3)$$

Bei  $g_{\mu\nu}$  handelt es sich um den metrischen Tensor und bei  $\tilde{\alpha}$  um das Analogon zur Feinstrukturkonstante. Wenn nun ein äußeres magnetisches Feld  $B$  vorhanden ist, so wird diese Rechnung deutlich komplexer, da sich der Elektronpropagator verändert. In der Regel wählt man zu dessen Ableitung die Richtung des Magnetfeldes parallel zur 3-Richtung (z-Achse) und zerlegt den Viererimpuls in einen parallelen und einen senkrechten Anteil.

$$\vec{B} = B\vec{e}_3, \quad k = k_{\parallel} + k_{\perp}$$

$$k_{\parallel} := (k^0, 0, 0, k^3), \quad k_{\perp} := (0, k^1, k^2, 0)$$

Unter Verwendung der üblichen Abkürzungen  $\sigma_3 = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$  (siehe Anhang A) und  $z = eBs$  kann der Elektronpropagator konstruiert werden<sup>3</sup> und, daraus ergibt sich [15]:

→

Feynman graph: '                      Feynman graph: '

Abbildung 2.2.: Der im Magnetfeld abgeänderte Elektronpropagator, der durch eine Doppellinie gekennzeichnet wird, führt zu einer anderen 1-Loop-Korrektur des Photonpropagators.

$$g(k) = i \int_0^\infty ds \exp \left\{ -is \left[ m^2 - i\epsilon + k_{\parallel}^2 + \frac{\tan z}{z} k_{\perp}^2 \right] \right\}$$

$$\times \frac{e^{i\sigma_3 z}}{\cos z} \left( m - \gamma k_{\parallel} - \frac{e^{-i\sigma_3 z}}{\cos z} \gamma k_{\perp} \right) \quad (2.4)$$

<sup>2</sup>In einigen Lehrbüchern findet man eine andere äquivalente Darstellung, die sich durch die Funktion innerhalb des Integrals unterscheidet:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \left( -\frac{2\tilde{\alpha}}{\pi} \right) k^2 \int_0^1 d\nu \nu(1-\nu) \log \left( \frac{m^2}{m^2 - \nu(1-\nu)k^2} \right)$$

<sup>3</sup>Dabei ist  $z$  nicht zu verwechseln mit der 3-Richtung.

Wenn dieser zuletzt in die Gleichung (2.2) für den Polarisationsstensor eingesetzt wird, ergibt sich nach mehreren Rechenschritten:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(k) = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} \left\{ e^{-is\varphi_0} [(g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)N_0 \right. \\ & - (g_{\mu\nu}^\parallel k_\parallel^2 - k_{\parallel\mu} k_{\parallel\nu})N_1 + (g_{\mu\nu}^\perp k_\perp^2 - k_{\perp\mu} k_{\perp\nu})N_2] \\ & \left. - e^{-ism^2}(1 - \nu^2)(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dabei wurde der metrische Tensor analog zu den Vierervektoren aufgespalten. Der letzte Term ist der für die Renormierung notwendige Counter-Term. Die Abkürzungen  $\phi_0$  und  $N_i$  stehen für die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= m^2 + \frac{1 - \nu^2}{4} k_\parallel^2 + \frac{\cos(z\nu) - \cos z}{2z \sin z} k_\perp^2 \\ N_0 &= \frac{z}{\sin z} (\cos(z\nu) - \nu \cot z \sin(z\nu)) \\ N_1 &= -z \cot z \left( 1 - \nu^2 + \frac{\nu \sin(z\nu)}{\sin z} \right) + z \frac{\cos(z\nu)}{\sin z} \\ N_2 &= -\frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} + \frac{z\nu \cot z \sin(z\nu)}{\sin z} + \frac{2z(\cos(z\nu) - \cos z)}{\sin^3 z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Neben dieser Form gibt es darüberhinaus eine allgemeinere Darstellung des Polarisationsstensors in Anwesenheit beliebiger elektromagnetischer Felder [16]. Diese Darstellung lässt nicht triviale Lösungen der Licht-Kegel-Bedingung (“light cone condition”) zu und wird im 3. Kapitel zunächst für den Spezialfall eines konstanten magnetischen Hintergrundfeldes vereinfacht und bei den darauf folgenden Berechnungen benutzt.

## 2.2. „Tunneln 3. Art“

In diesem Abschnitt wird eine Zusammenstellung der Ideen und Ergebnisse von Gies und Jaeckel [14] bezüglich eines neuartigen Tunneleffektes dargestellt. „Tunneln 3. Art“ stellt eine Verallgemeinerung des Tunneleffektes dar, wobei ein einlaufendes Teilchen auf eine klassisch unüberwindbare Barriere trifft. Doch anstatt direkt hindurchzulaufen, was nach der Heisenbergschen Unschärferelation möglich ist, oder sich in ein anderes reales Teilchen umzuwandeln teilt es sich in ein virtuelles Antiteilchen-Teilchen-Paar auf. Dieses Paar kann diese Barriere mit einer definierten Wahrscheinlichkeit passieren und sich hinter dieser wieder in das ursprüngliche Teilchen zurücktransformieren. Im Weiteren soll dieser Effekt für die Aufspaltung eines Photons in minigeladene Teilchen betrachtet werden.<sup>4</sup> Bei minigeladenen Teilchen handelt es sich um hypothetische Teilchen, die

<sup>4</sup>Die Betrachtung einer Umwandlung anderer Art, z.B. in Neutrinos, ist ebenfalls möglich. Dieser Prozess ist jedoch sehr stark unterdrückt; siehe [14]

Feynman graph: ´

Abbildung 2.3.: „Tunneln 3. Art“: Ein Photon laufe entlang der  $z$ -Richtung ein. Das Photon teilt sich in ein virtuelles Teilchen-Antiteilchen-Paar auf, das durch eine Wand der Dicke  $d$  tunnelt und hinter dieser wieder zu einem Photon zerstrahlt.

im Wesentlichen dieselben Eigenschaften wie Elektronen und Positronen besitzen. Allerdings unterliegen sie nicht derselben  $U(1)$  Eichsymmetrie, was erlaubt, dass minigeladene Teilchen eine Ladung haben können, die nicht der Elementarladung  $e$  entspricht, sondern nur einem Bruchteil dieser. Dies führt auch zu einer anderen Kopplungskonstante (Feinstrukturkonstante)  $\tilde{\alpha} = \epsilon^2 \alpha$ , wobei  $\epsilon$  angibt, wie viel kleiner die Ladung, in Bezug auf ein Elektron, ist. Für minigeladene Teilchen ist  $\epsilon \ll 1$ . Dies ermöglicht überhaupt erst, dass der Effekt auftreten kann, da bei einer normalen Barriere (z.B. ein Spiegel oder eine einfache Wand) der Wirkungsquerschnitt der Elektronen viel zu groß wäre und die Elektronen, aufgrund der starken Interaktion mit der Wand, gestoppt würden. Um nun die Übergangsamplitude und die daraus resultierende Übergangswahrscheinlichkeit zu berechnen, folgt man dem in der QED üblichen Weg und betrachtet die effektive Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  für ein Photonfeld  $A_\mu$ :

$$\mathcal{L}[A] = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \int dx' A_\mu(x)\Pi^{\mu\nu}(x, x')A_\nu(x') \quad (2.7)$$

Hierbei ist  $F_{\mu\nu}$  der Feldstärketensor und  $\Pi^{\mu\nu}$  der bereits eingeführte Polarisationsensor. Der erste Anteil resultiert aus der klassischen Elektrodynamik und der zweite aus den Quantenkorrekturen. In diesem speziellen Aufbau kommen für das Photon noch Randbedingungen hinzu, die durch die Wand hervorgerufen werden, da diese für die Photonen undurchlässig sein soll. Darüber hinaus soll die Wechselwirkung der minigeladenen Teilchen mit der Wand so gering sein, dass für die Quantenfluktuationen weiterhin die Translationsinvarianz gültig ist. Damit, und mit der Ward-Identität folgt, dass sich der Polarisationsensor folgendermaßen schreiben lässt.<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>Es ist darauf zu achten, dass in dieser Definition, im Vergleich zu (2.3), ein zusätzlicher Faktor  $p^2$  in die Definition von  $\Pi(p)$  eingeht.

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = P_{T,\mu\nu}(p)\Pi(p), \quad P_{T,\mu\nu}(p) = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (2.8)$$

$P_{T,\mu\nu}(p)$  ist ein transversaler Projektor und in der gewählten Metrik gilt, dass  $p^2 = -\omega^2 + \mathbf{p}^2$ . Mittels des Projektors lassen sich nun auch die Transversalmoden des Photonfeldes betrachten<sup>6</sup> und die aus der Langrangedichte folgende Bewegungsgleichung für diese aufstellen. Dabei werden im Folgenden die Lorentzindizes fallen gelassen.

$$(p^2 + \Pi(p))A_T(p) = 0, \quad A_{T,\mu} = P_{T,\mu\nu}A^\nu \quad (2.9)$$

Da für das Photonfeld durch die Wand, die parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene steht, die Translationsinvarianz gebrochen ist, ist es sinnvoll, eine partielle Fouriertransformation vorzunehmen (hier in  $z$ -Richtung) und den Photonimpuls in zwei Teile aufzutrennen:  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_\perp + p_z$ . Damit wird die Bewegungsgleichung zu:

$$0 = (-\omega^2 + \mathbf{p}_\perp^2 - \partial_z^2)A_T(z, \mathbf{p}_\perp, \omega) + \underbrace{\int dz' \Pi(z - z', \mathbf{p}_\perp, \omega)A_T(z', \mathbf{p}_\perp, \omega)}_{=j(z, \mathbf{p}_\perp, \omega)} \quad (2.10)$$

Hier steht  $j$  für den durch die Fluktuationen erzeugten Strom. Als nächstes werden nun die Randbedingungen der Wand beachtet. Zur Vereinfachung wird die linke Seite der Wand auf die Position  $z = 0$  und die rechte auf  $z = d$  gesetzt, wobei  $d$  gerade die Dicke der Wand ist. Für eine perfekt leitende Wand erfüllt die Transversalmode die Dirichlet-Randbedingungen ( $\mathbf{p}_\perp = 0$ ). Damit kann im linken Halbraum ( $z < 0$ ) für ein Wellenpaket  $a(\omega)$  die Lösung  $A_T(z, \omega) = a(\omega) \sin(\omega z)$  gefunden werden. Dies induziert im rechten Halbraum den Strom:

$$j(z > 0, \omega) = \int_{-\infty}^0 dz' \Pi(z - z', \omega) a(\omega) \sin(\omega z') \quad (2.11)$$

Mit der Methode der Greenschen Funktion kann man damit das induzierte auslaufende Photonfeld berechnen. Dieses ergibt sich im Fernfeld ( $z \gg d$ ) zu:

$$A_{ind}(z \gg d, \omega) = i \int_d^\infty dz' \frac{e^{i\omega(z-z')}}{2\omega} j(z', \omega) \quad (2.12)$$

Schließlich lässt sich daraus noch die Übergangswahrscheinlichkeit  $P_{\gamma \rightarrow \gamma}$  ableiten.

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{ind}(z, \omega)}{a(\omega)} \right|^2 = \frac{1}{4\omega^2} \left| \int_d^\infty dz' \int_{-\infty}^0 dz'' \Pi(z' - z'', \omega) \sin(\omega z'') \exp(-i\omega z') \right|^2 \quad (2.13)$$

<sup>6</sup>Die Transversalmoden reichen aus, da das Photon keine Longitudinalmoden besitzt.

## 2. Grundlagen

Wenn man nun den unter (2.3) eingeführten Polarisationsstensor verwendet, so kann man das  $p_z$ -Integral für die partielle Fouriertransformation mithilfe des Residuensatzes auswerten. Dabei ist zu beachten, dass sich für unterschiedliche Verhältnisse von Masse und Frequenz eine andere Polstruktur ergibt. Setzt man daraufhin, gemäß den Randbedingungen  $\mathbf{p}_\perp = 0$ , so erhält man:<sup>7</sup>

$$\Pi(z, \omega) = -i \frac{\tilde{\alpha}}{3\pi} \int_0^1 d\nu \frac{\nu^2(3-\nu^2)}{1-\nu^2} \left( \frac{4m^2}{1-\nu^2} \right)^2 \begin{cases} \frac{1}{2\omega\lambda} e^{iz\omega\lambda} & , \omega^2 > \frac{4m^2}{1-\nu^2} \\ \frac{1}{2i\omega\kappa} e^{z\omega\kappa} & , \omega^2 < \frac{4m^2}{1-\nu^2} \end{cases} \quad (2.14)$$

Dabei wurden die wichtigen Abkürzungen

$$\kappa = \sqrt{\frac{4m^2}{\omega^2(1-\nu^2)} - 1}, \quad \lambda = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2(1-\nu^2)}} \quad (2.15)$$

eingeführt. Letztendlich kann man durch einen Wechsel der Integrationsvariable  $\nu$  zu den Variablen  $\kappa$  und  $\lambda$  sowie durch eine Aufspaltung des verbliebenen Integrals einen Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit erhalten.

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{36\pi^2} |f_> + f_<|^2$$

$$f_>(\omega/m, \omega d) = \int_0^{\text{Re}\sqrt{1-\frac{4m^2}{\omega^2}}} \frac{d\lambda}{1-\lambda} \frac{\sqrt{1-\lambda^2-\frac{4m^2}{\omega^2}}}{\sqrt{1-\lambda^2}} \frac{\left(1-\lambda^2+\frac{2m^2}{\omega^2}\right)}{1-\lambda^2} e^{i\omega d\lambda} \quad (2.16)$$

$$f_<(\omega/m, \omega d) = \int_{\text{Re}\sqrt{\frac{4m^2}{\omega^2}-1}}^\infty \frac{d\kappa}{i+\kappa} \frac{\sqrt{1+\kappa^2-\frac{4m^2}{\omega^2}}}{\sqrt{1+\kappa^2}} \frac{\left(1+\kappa^2+\frac{2m^2}{\omega^2}\right)}{1+\kappa^2} e^{-\omega d\kappa}$$

Da sich das letzte Integral nicht analytisch lösen lässt, bietet es sich an, einige Grenzfälle zu betrachten und für diese Näherungslösungen zu berechnen. Für den Fall sehr kleiner Frequenzen,  $\omega \ll 2m$ , trägt lediglich die Funktion  $f_<$  zur Übergangswahrscheinlichkeit bei. Wenn nun die Comptonwellenlänge viel kleiner ist als die Wanddicke, also  $md \gg 1$ , so kann mittels einer Sattelpunktsapproximation ein Näherungswert für die Übergangswahrscheinlichkeit berechnet werden, der einen zu dem für den Tunneleffekt typischen exponentiellen Dämpfungsterm ähnlichen Term  $\exp(-4md)$  enthält. Im Gegensatz dazu gelangt man für  $md \ll 1$  zu einem Integral, das logarithmisch divergiert, was zu der logarithmisch laufenden Eichkopplung bei hohen Impulsskalen passt. Die beiden Näherungswerte ergeben damit:

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma}(md \gg 1, \omega \ll 2m) \simeq \frac{\tilde{\alpha}^2}{256\pi} \frac{e^{-4md}}{(md)^3} \quad (2.17)$$

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma}(md \ll 1, \omega \ll 2m) \simeq \frac{\tilde{\alpha}^2}{36\pi^2} \ln^2(2md)$$

---

<sup>7</sup>Es ist zu beachten, dass hier, wie im Original [14], ein zusätzlicher Faktor  $p^2$  auftaucht, aufgrund einer anderen Definition des transversalen Projektors.

Betrachtet man zudem den Limes großer Frequenzen,  $\omega \gg 2m$ , so tragen beide Funktionen  $f_>$  und  $f_<$  bei. Auch hier lassen sich für dicke und dünne Wände Näherungswerte errechnen. Für sehr dicke Wände,  $\frac{2m}{\omega}md \gg 1$ , bekommt man durch die Entwicklung der oberen Grenze von  $f_>$  den dominierenden Term und einen daraus resultierenden Näherungswert. Sowohl für  $\omega \gtrsim 2m$  und  $\omega d \ll 1$  als auch für  $\omega \gg 2m$  und  $\omega d \sim \mathcal{O}(1)$  ergeben sich wiederum logarithmisch divergierende Terme, die man durch numerische Entwicklung erreichen kann. Damit erhält man für diesen Frequenzbereich folgende Näherungen:

$$\begin{aligned}
 P_{\gamma \rightarrow \gamma}(\frac{2m}{\omega}md \gg 1) &\simeq \frac{\tilde{\alpha}^2 \omega^3}{512\pi m^3 (dm)^3} \\
 P_{\gamma \rightarrow \gamma}(\omega \gtrsim 2m, \omega d \ll 1) &\simeq \frac{\tilde{\alpha}^2}{36\pi^2} \ln^2\left(\frac{1}{\omega d}\right) \\
 P_{\gamma \rightarrow \gamma}(\omega \gg 2m, \omega d \sim \mathcal{O}(1)) &\simeq \frac{\tilde{\alpha}^2}{36\pi^2} a^2 \ln^2\left(\frac{\omega}{2m}\right), \quad a \simeq 2
 \end{aligned} \tag{2.18}$$





### 3. Ableitung der Übergangswahrscheinlichkeit

In analoger Weise sollen nun die in Kapitel 2.3 verkürzt dargestellten Rechnungen für den Fall eines äußeren magnetischen Feldes erweitert werden. Dazu wird ein konstantes Feld entlang der z-Achse und die Einlaufrichtung des Photons entlang der x-Achse gewählt. In [16] wird eine allgemeingültige Form des Polarisationsensors für beliebige elektromagnetische Felder hergeleitet. Diese setzt sich ähnlich zu (2.5) aus mehreren Komponenten zusammen. Für die weiteren Betrachtungen spielen hier nur der parallele  $\Pi_{\parallel}$  und der senkrechte  $\Pi_{\perp}$  Anteil eine Rolle. Dies liegt zum einen wieder daran, dass es keine longitudinalen Photonen gibt und zum anderen daran, dass ein Mischterm für den Fall eines reinen magnetischen Anteils verschwindet. Dadurch entkoppeln die Bewegungsgleichungen der beiden zu betrachtenden Moden und können getrennt voneinander gelöst werden. Es folgt also:

$$k^2 + \Pi_{\parallel} = 0, \quad k^2 + \Pi_{\perp} = 0 \quad (3.1)$$


Feynman graph: 

Abbildung 3.1.: „Tunneln 3. Art“ im konstanten magnetischen Feld: Wie in Abb. 2.3 teilt sich ein Photon in ein virtuelles Teilchen-Antiteilchen-Paar, dessen Propagator in diesem Fall durch das äußere Feld modifiziert wird.

Daraus folgt, dass sich dasselbe Verfahren, wie oben beschrieben, anwenden lässt. Die beiden relevanten Anteile sind im Allgemeinen gegeben durch:

### 3. Ableitung der Übergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\Pi_{\parallel} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} e^{-is\phi_0} \frac{eas ebs}{\sin(eas) \sinh(ebs)} (N_0 v_{\perp}^2 - \tilde{N}_1 v_{\parallel}^2) \\ \Pi_{\perp} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} e^{-is\phi_0} \frac{eas ebs}{\sin(eas) \sinh(ebs)} (\tilde{N}_2 v_{\perp}^2 - N_0 v_{\parallel}^2)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Im Spezialfall eines reinen Magnetfeldes ist die Konstante  $b = 0$  und die Konstante  $a$  gerade die Stärke des Feldes  $B$ , wobei  $a$  und  $b$  Kombinationen aus den Lorentzinvarianten  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  und  $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$  sind. Die Phasengeschwindigkeiten  $v_{\perp}$  und  $v_{\parallel}$  ergeben sich aus dem Betrag des Impulses  $k = |\mathbf{k}|$  und dem Winkel  $\theta$  zwischen Magnetfeld und Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  gemäß:

$$v_{\parallel}^2 = k^2[\sin^2 \theta - (1 - v^2)], \quad v_{\perp}^2 = k^2 \sin^2 \theta\tag{3.3}$$

Darüberhinaus sind in diesem Fall die verbleibenden Funktionen unter Einführung der üblichen Abkürzung  $z = \tilde{e}Bs$  wobei  $\tilde{e}$  für die Ladung der minigeladenen Teilchen steht, gegeben durch:

$$\begin{aligned}N_0 &= \cos(\nu z) - \nu \sin(\nu z) \cot z \\ \tilde{N}_1 &= (1 - \nu^2) \cos z \\ \tilde{N}_2 &= 2 \frac{\cos(\nu z) - \cos z}{\sin^2 z} \\ \phi_0 &= m^2 - k^2 \left[ (\sin^2 \theta - (1 - v^2)) \frac{1 - \nu^2}{4} - \frac{\sin^2 \theta \cos(\nu z) - \cos z}{2 z \sin z} \right]\end{aligned}\tag{3.4}$$

Als Nächstes soll nun eine partielle Fouriertransform entlang der Ausbreitungsrichtung des Photons, also der x-Richtung, vorgenommen werden. Daraus folgt mit den Einsetzungen zunächst für  $\Pi_{\parallel}$

$$\begin{aligned}\Pi_{\parallel}(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) &= \frac{\tilde{\alpha}}{2\pi} \int \frac{dk_x}{2\pi} e^{ixk_x} (k_x^2 + k_{\perp}^2) \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} e^{-ism^2} \\ &\times \exp \left\{ is(k_x^2 + k_{\perp}^2) \left[ (\sin^2 \theta - (1 - v^2)) \frac{1 - \nu^2}{4} - \frac{\sin^2 \theta \cos(\nu z) - \cos z}{2 z \sin z} \right] \right\} \\ &\times \left[ \sin^2 \theta \left( \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} - \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z} - (1 - \nu^2)z \cot z \right) + (1 - v^2)z \cot z(1 - \nu^2) \right]\end{aligned}\tag{3.5}$$

Benutzt man  $v^2 = \frac{\omega^2}{k_x^2 + k_{\perp}^2}$  und führt die Variablen

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= s \left[ \sin^2 \theta \frac{1 - \nu^2}{4} - \frac{1 - \nu^2}{4} - \frac{\sin^2 \theta \cos(\nu z) - \cos z}{2 z \sin z} \right] \\
\mathcal{B} &= \sin^2 \theta \left( \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} - \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z} - (1 - \nu^2)z \cot z \right) + z \cot z(1 - \nu^2)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

ein, so kann  $\Pi_{\parallel}$  geschrieben werden als:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\parallel}(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) &= \frac{\tilde{\alpha}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} \exp \left\{ -ism^2 + ik_{\perp}^2 \mathcal{A} + is\omega^2 \frac{1 - \nu^2}{4} \right\} \\
&\int \frac{dk_x}{2\pi} \exp \{ ik_x x + ik_x^2 \mathcal{A} \} [(k_x^2 + k_{\perp}^2) \mathcal{B} - \omega^2 z \cot z(1 - \nu^2)]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Es ist erkennbar, dass  $\Pi_{\perp}$  durch Ersetzung von  $\mathcal{B}$  durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \sin^2 \theta \left[ \frac{2z(\cos(z\nu) - \cos z)}{\sin^3 z} - \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} + \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z} \right] \\
&+ \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} - \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

erhalten werden kann. Deshalb werden die folgenden Rechnungen mit  $\Pi_{\parallel}$  vorgenommen. Schlussendlich wird geklärt, welche Ersetzungen vorzunehmen sind, um zu  $\Pi_{\perp}$  zu gelangen. Das  $k_x$ -Integral hat eine gaußartige Struktur und kann mit den bekannten Regeln ausgeführt werden. Damit werden die relevanten Integrale zu

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{iAk_x^2} e^{ixk_x} &= e^{-\frac{ix^2}{4A}} \sqrt{\frac{\pi}{-iA}} \\
\int_{-\infty}^{\infty} dk_x k_x^2 e^{iAk_x^2} e^{ixk_x} &= e^{-\frac{ix^2}{4A}} \left[ \frac{x^2}{4A^2} \sqrt{\frac{\pi}{-iA}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{1}{-iA} \right)^{\frac{3}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Womit sich für die Fouriertransformation des Polarisationsstensor Folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\parallel}(x, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) &= \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} \exp \left\{ -ism^2 + ik_{\perp}^2 \mathcal{A} + is\omega^2 \frac{1 - \nu^2}{4} \right\} \\
&\sqrt{\frac{\pi}{-iA}} e^{-\frac{ix^2}{4A}} \left[ \mathcal{B} k_{\perp}^2 - \omega^2 z \cot z(1 - \nu^2) + \mathcal{B} \frac{x^2}{4A^2} + \frac{\mathcal{B}}{-2iA} \right]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Da die beiden Bewegungsgleichungen mit den Komponenten des Polarisationsstensors entkoppeln, darf dieser Ausdruck in (2.13) eingesetzt werden.

### 3. Ableitung der Übergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
P_{\gamma \rightarrow \gamma}^{\parallel} &= \frac{1}{4\omega^2} \left| \int_d^{\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dx'' \sin(\omega x'') e^{-i\omega x'} \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} \right. \\
&\quad \left. \sqrt{\frac{\pi}{-i\mathcal{A}}} e^{-\frac{i(x'-x'')^2}{4\mathcal{A}}} \exp \left\{ -ism^2 + ik_{\perp}^2 \mathcal{A} + is\omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right\} \right. \\
&\quad \left. \left[ \mathcal{B} \left( k_{\perp}^2 + \frac{(x'-x'')^2}{4\mathcal{A}^2} + \frac{1}{-2i\mathcal{A}} \right) - \omega^2 z \cot z (1-\nu^2) \right] \right|^2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Das Integral über die Variable  $x''$  soll nun ausgewertet werden. Dabei gibt es mehrere Terme, bei denen  $x''$  lediglich in der Exponentialfunktion auftaucht, aber auch den in (3.11) unterstrichenen, bei dem es einen zusätzlichen Faktor gibt, der von  $x''$  abhängt. Für die Ersteren erhält man:

$$\begin{aligned}
&\int_d^{\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dx'' \sin(\omega x'') e^{-i\omega x'} e^{-\frac{i(x'-x'')^2}{4\mathcal{A}}} \\
&= \int_d^{\infty} dx' e^{-i\omega x'} \int_{-\infty}^0 dx'' \frac{1}{2i} (e^{i\omega x''} - e^{-i\omega x''}) \exp \left\{ -\frac{(x'^2 - 2x'x'' + x''^2)}{4\mathcal{A}} \right\}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Die beiden Integrale bezüglich  $x''$  lassen sich mit einer Koordinatentransformation berechnen, wobei dies in einem Schritt ausgeführt wird und  $\mp$  bzw.  $\pm$  auf die beiden unterschiedlichen Anteile hinweist.

$$\begin{aligned}
&e^{-\frac{ix'^2}{4\mathcal{A}}} \int_{-\infty}^0 dx'' \exp \left\{ -\frac{i}{4\mathcal{A}} \underbrace{(x'' - x' \mp 2\omega\mathcal{A})^2}_{=: \tilde{x}^2} \right\} \exp \left\{ \frac{i}{4\mathcal{A}} (x' \pm 2\omega\mathcal{A})^2 \right\} \\
&= e^{-\frac{ix'^2}{4\mathcal{A}}} \exp \left\{ \frac{i}{4\mathcal{A}} (x' \pm 2\omega\mathcal{A})^2 \right\} \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} \int_{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}}(x' \pm 2\omega\mathcal{A})}^{\infty} d\tilde{x} e^{-\tilde{x}^2} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} e^{-\frac{ix'^2}{4\mathcal{A}}} \exp \left\{ \frac{i}{4\mathcal{A}} (x' \pm 2\omega\mathcal{A})^2 \right\} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (x' \pm 2\omega\mathcal{A}) \right]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Zusammengefasst liefern diese beiden Terme den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\pi}}{4i} \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} \int_d^{\infty} dx' e^{-i\omega x'} e^{-\frac{ix'^2}{4\mathcal{A}}} \left[ \exp \left\{ \frac{i}{4\mathcal{A}} (x' + 2\omega\mathcal{A})^2 \right\} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (x' + 2\omega\mathcal{A}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \exp \left\{ \frac{i}{4\mathcal{A}} (x' - 2\omega\mathcal{A})^2 \right\} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (x' - 2\omega\mathcal{A}) \right] \right]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Schließlich wird der Term mit der zusätzlichen Abhängigkeit von  $x''$  betrachtet

$$\int_d^\infty dx' \int_{-\infty}^0 dx'' \sin(\omega x'') e^{-i\omega x'} e^{-\frac{i(x'-x'')^2}{4\mathcal{A}}} (x' - x'')^2 \quad (3.15)$$

Wenn man wieder den Sinus in Exponentialfunktionen aufspaltet und die Koordinatentransform  $\tilde{x} = x'' - x' - 2\omega\mathcal{A}$  durchführt, so erhält man analog zu (3.13):

$$\begin{aligned} & \int_d^\infty dx' e^{-i\omega x'} e^{-\frac{ix'^2}{4\mathcal{A}}} \frac{1}{2i} \left[ \exp \left\{ \frac{i}{4\mathcal{A}} (x' + 2\omega\mathcal{A})^2 \right\} \int_{-\infty}^{-x'-2\omega\mathcal{A}} d\tilde{x} e^{-\frac{i\tilde{x}^2}{4\mathcal{A}}} (\tilde{x} + 2\omega\mathcal{A})^2 \right. \\ & \left. - \exp \left\{ \frac{i}{4\mathcal{A}} (x' - 2\omega\mathcal{A})^2 \right\} \int_{-\infty}^{-x'+2\omega\mathcal{A}} d\tilde{x} e^{-\frac{i\tilde{x}^2}{4\mathcal{A}}} (\tilde{x} - 2\omega\mathcal{A})^2 \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die Integrale über  $\tilde{x}$  werden jetzt mit einer weiteren Koordinatentransformation,  $\hat{x}^2 = \frac{i\tilde{x}^2}{4\mathcal{A}}$ , und der eingeführten Kurzschreibweise mit doppelten Vorzeichen zusammenfassend aufgeschrieben werden.

$$\sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}(-x' \mp 2\omega\mathcal{A})}} d\hat{x} e^{-\hat{x}^2} \left[ \frac{4\mathcal{A}}{i} \hat{x}^2 \pm 4\omega\mathcal{A} \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} \hat{x} + (2\omega\mathcal{A})^2 \right] \quad (3.17)$$

Dieses verbleibende Integral zerfällt wiederum in 3 Teile. Ein Teil hängt nur exponentiell von  $\hat{x}$  ab und ist bereits mit (3.13) gelöst. Darüberhinaus gibt es einen Teil der zusätzlich noch linear und einen der quadratisch von  $\hat{x}$  abhängt. Zum einen ergibt sich für den linearen Anteil:

$$\begin{aligned} & \pm \frac{16\omega\mathcal{A}^2}{i} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}(-x' \mp 2\omega\mathcal{A})}} d\hat{x} \hat{x} e^{-\hat{x}^2} = \pm 8i\omega\mathcal{A}^2 \left[ e^{-\hat{x}^2} \right]_{-\infty}^{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}(-x' \mp 2\omega\mathcal{A})}} \\ & = \pm 8i\omega\mathcal{A}^2 \left[ e^{-\frac{i}{4\mathcal{A}}(-x' \pm 2\omega\mathcal{A})^2} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Zum anderen für den quadratischen Anteil:

### 3. Ableitung der Übergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4\mathcal{A}}{i}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}(-x' \mp 2\omega\mathcal{A})}} d\hat{x} \hat{x}^2 e^{-\hat{x}^2} \\
&= \left(\frac{4\mathcal{A}}{i}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \hat{x} e^{-\hat{x}^2} \Big|_{-\infty}^{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}(-x' \mp 2\omega\mathcal{A})}} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}(-x' \mp 2\omega\mathcal{A})}} d\hat{x} e^{-\hat{x}^2} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{4\mathcal{A}}{i}\right)^{\frac{3}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}}(x' \pm 2\omega\mathcal{A}) e^{-\frac{i}{4\mathcal{A}}(x' \pm 2\omega\mathcal{A})^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}}(x' \pm 2\omega\mathcal{A}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Werden im nächsten Schritt die Terme, die durch (3.17) entstehen und (3.13) mit den vorerst vernachlässigten Vorfaktoren zusammenfasst, gelangt man schließlich zu:

$$\begin{aligned}
& \int_d^\infty dx' \omega \mathcal{B} \exp \left\{ -\frac{ix'^2}{4\mathcal{A}} - i\omega x' \right\} + \int_d^\infty dx' \exp \left\{ -i\omega x' + i\omega^2 \mathcal{A} \right\} \\
& \times \left[ e^{i\omega x'} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}}(x' + 2\omega\mathcal{A}) \right] - e^{-i\omega x'} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}}(x' - 2\omega\mathcal{A}) \right] \right] \\
& \times \left\{ \frac{\mathcal{B}}{8i\mathcal{A}^2} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{4\mathcal{A}}{i}\right)^{\frac{3}{2}} + 2\omega^2 \mathcal{A}^2 \sqrt{\frac{4\pi\mathcal{A}}{i}} \right] \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{\pi}}{4i} \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} \left[ \mathcal{B} k_\perp^2 - \omega^2 z(1 - \nu^2) \cot z - \frac{\mathcal{B}}{2i\mathcal{A}} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Dabei heben sich die unterstrichenen Terme gerade auf. Es sind wiederum drei verschiedene Integrale entstanden, die sich unter Benutzung der Errorfunktion kompakter schreiben lassen. Für das erste Integral folgt somit:

$$\begin{aligned}
& \omega \mathcal{B} \int_d^\infty dx' \exp \left\{ -\frac{ix'^2}{4\mathcal{A}} - i\omega x' \right\} = \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} \omega \mathcal{B} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \int_{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}}(d+2\omega\mathcal{A})}^\infty d\tilde{x} e^{-\tilde{x}^2} \\
& = \sqrt{\frac{\pi\mathcal{A}}{i}} \omega \mathcal{B} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}}(d + 2\omega\mathcal{A}) \right]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Benutzt man jetzt die Integralformel,

$$\int dx \operatorname{Erfc}[x] = x \operatorname{Erfc}[x] - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \tag{3.22}$$

so kann das 2. Integral, folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\int_d^\infty dx' e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (x' + 2\omega \mathcal{A}) \right] &= \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \int_{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}}(d+2\omega \mathcal{A})}^\infty d\tilde{x} \operatorname{Erfc}[\tilde{x}] \\
&= \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \left[ \frac{\exp \left\{ -\frac{i}{4\mathcal{A}} (d + 2\omega \mathcal{A})^2 \right\}}{\sqrt{\pi}} \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] \right]
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Mit der Formel

$$\int_d^\infty dx e^{-ax} \operatorname{Erfc}[x] = \frac{1}{a} \left( e^{-ad} \operatorname{Erfc}[d] - e^{\frac{a^2}{4}} \operatorname{Erfc} \left[ \frac{a}{2} + d \right] \right) \tag{3.24}$$

lässt sich dann auch noch das 3. Integral vereinfachen.

$$\begin{aligned}
&- e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \int_d^\infty dx' \exp \{ -2i\omega x' \} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (x' - 2\omega \mathcal{A}) \right] \\
&= -\sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i}} e^{-3i\omega^2 \mathcal{A}} \int_{\sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}}(d-2\omega \mathcal{A})}^\infty d\tilde{x} \exp \{ -4\omega \sqrt{i\mathcal{A}} \tilde{x} \} \operatorname{Erfc}[\tilde{x}] \\
&= \frac{i}{2\omega} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \left\{ e^{-2i\omega d} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d - 2\omega \mathcal{A}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{Erfc} \left[ 2\omega \sqrt{i\mathcal{A}} + \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d - 2\omega \mathcal{A}) \right] \right\} \\
&= \frac{i}{2\omega} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \left\{ e^{-2i\omega d} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d - 2\omega \mathcal{A}) \right] - \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Wenn man alle Terme zusammenfasst und  $\mathbf{k}_\perp = 0$  setzt, um die Randbedingungen an der Wand zu erfüllen, ergibt sich so für die Übergangsamplitude:

### 3. Ableitung der Übergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
P_{\gamma \rightarrow \gamma}^{\parallel} = & \frac{1}{4\omega^2} \left| \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right] \right\} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \overbrace{\sqrt{\frac{\pi \mathcal{A}}{i}} \sqrt{\frac{\pi}{-i \mathcal{A}}}}^{=\pi} \right. \\
& \left\{ \omega \mathcal{B} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] + \left[ \frac{\omega^2 \mathcal{B}}{2i} - \frac{\omega^2 z \cot z (1-\nu^2)}{2i} \right] \right. \\
& \times \left[ \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i\pi}} \exp \left\{ -\frac{i}{4\mathcal{A}} (d + 2\omega \mathcal{A})^2 \right\} - (d + 2\omega \mathcal{A}) \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{i}{2\omega} e^{-2i\omega d} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d - 2\omega \mathcal{A}) \right] - \frac{i}{2\omega} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] \right] \right] \right\}^2
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Analog gelangt man durch die zwei einfachen Ersetzungen zu  $P_{\gamma \rightarrow \gamma}^{\perp}$ :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \\
-\omega^2 z \cot z (1-\nu^2) & \rightarrow -\omega^2 \left[ \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} - \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z} \right]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
P_{\gamma \rightarrow \gamma}^{\perp} = & \frac{1}{4\omega^2} \left| \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right] \right\} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \right. \\
& \left\{ \omega \mathcal{C} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] + \left[ \frac{\omega^2 \mathcal{C}}{2i} - \frac{\omega^2 \left[ \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} - \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z} \right]}{2i} \right] \right. \\
& \times \left[ \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i\pi}} \exp \left\{ -\frac{i}{4\mathcal{A}} (d + 2\omega \mathcal{A})^2 \right\} - (d + 2\omega \mathcal{A}) \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{i}{2\omega} e^{-2i\omega d} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d - 2\omega \mathcal{A}) \right] - \frac{i}{2\omega} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] \right] \right] \right\}^2
\end{aligned} \tag{3.28}$$



# 4. Approximation für schwache Magnetfelder

## 4.1. Grenzfall verschwindender Magnetfelder $B \rightarrow 0$

Betrachtet man den Grenzfall  $B \rightarrow 0$  für  $P_{\gamma \rightarrow \gamma}^{\parallel}$  und  $P_{\gamma \rightarrow \gamma}^{\perp}$ , so sollte sich für beide der in (2.16) angegebene Ausdruck ergeben. Dazu benötigt man zunächst die Grenzwerte von  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  für  $B \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \lim_{B \rightarrow 0} \mathcal{A} &= \lim_{B \rightarrow 0} \left\{ s \left[ \sin^2 \theta \frac{1 - \nu^2}{4} - \frac{1 - \nu^2}{4} - \frac{\sin^2 \theta \cos(\nu z) - \cos z}{2 z \sin z} \right] \right\} \\
 &= -s \frac{1 - \nu^2}{4} \\
 \lim_{B \rightarrow 0} \mathcal{B} &= \lim_{B \rightarrow 0} \left\{ \sin^2 \theta \left[ \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} - \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z} - (1 - \nu^2) z \cot z \right] \right. \\
 &\quad \left. + z \cot z (1 - \nu^2) \right\} \\
 &= 1 - \nu^2 \\
 \lim_{B \rightarrow 0} \mathcal{C} &= \lim_{B \rightarrow 0} \left\{ \sin^2 \theta \left[ \frac{2z(\cos(z\nu) - \cos z)}{\sin^3 z} - \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} + \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} - \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z} \right\} \\
 &= 1 - \nu^2
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Damit ist ersichtlich, dass sich die Terme in eckigen Klammern in beiden Übergangswahrscheinlichkeiten (siehe (3.26) und (3.28)) aufheben, was zu erwarten war, da es im feldfreien Fall keine Aufteilung in senkrechte und parallele Komponenten des Polarisationsensors gibt. Daraus ergibt sich für beide derselbe Ausdruck, wobei sich auch die Terme im Exponenten zusammenfassen lassen.

$$\begin{aligned}
 P_{\gamma \rightarrow \gamma} &= \frac{1}{4\omega^2} \left| \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_0^1 d\nu e^{-ism^2} (1 - \nu^2) \omega \pi \right. \\
 &\quad \left. \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{s(\nu^2 - 1)}} \left( d - 2 \frac{\omega s (1 - \nu^2)}{4} \right) \right] \right|^2
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

#### 4. Approximation für schwache Magnetfelder

Mit der Transformation  $\tilde{s} = \frac{s(1-\nu^2)}{4}$  erhält man dann:

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{1}{4\omega^2} \left| \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\tilde{s}}{\tilde{s}} \int_0^1 d\nu \exp \left\{ -i\tilde{s} \left( \frac{4m^2}{1-\nu^2} \right) \right\} \right. \\ \left. \omega(1-\nu^2) \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{-i}{4\tilde{s}}} (d - 2\omega\tilde{s}) \right] \right|^2 \quad (4.3)$$

Dies wird durch partielle Integration zu

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{64\pi^2} \left| \int_0^\infty d\tilde{s} \int_0^1 d\nu \exp \left\{ -i\tilde{s} \left( \frac{4m^2}{1-\nu^2} \right) \right\} \frac{8im^2\nu}{(1-\nu^2)^2} \right. \\ \left. \frac{\nu(3-\nu^2)}{3} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{-i}{4\tilde{s}}} (d - 2\omega\tilde{s}) \right] \right|^2 \quad (4.4)$$

und mit der Ersetzung der Integraldarstellung der Errorfunktion

$$\operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{-i}{4\tilde{s}}} (d - 2\omega\tilde{s}) \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_d^\infty dt \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{4i\tilde{s}}(t - 2\omega\tilde{s})^2 \right\}}{\sqrt{4i\tilde{s}}} \quad (4.5)$$

gelangt man zu

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{64\pi^2} \left| \int_0^\infty d\tilde{s} \int_0^1 d\nu \int_d^\infty dt \frac{8im^2\nu}{(1-\nu^2)^2} \frac{\nu(3-\nu^2)}{3} \frac{2}{\sqrt{4i\pi\tilde{s}}} \right. \\ \left. \exp \left\{ -i\tilde{s} \frac{4m^2}{1-\nu^2} - \frac{t^2}{4i\tilde{s}} - i\omega t + i\tilde{s}\omega^2 \right\} \right|^2 \quad (4.6)$$

Nun lässt sich das  $\tilde{s}$ -Integral mit einer bekannten Formel ausführen.

$$\int_0^\infty d\tilde{s} \frac{\exp \left\{ a\tilde{s} + \frac{b}{\tilde{s}} \right\}}{\sqrt{\tilde{s}}} = \frac{\sqrt{\pi} \exp \left\{ -2\sqrt{-a}\sqrt{-b} \right\}}{\sqrt{-a}} \quad (4.7)$$

In diesem speziellen Fall sind die Faktoren  $a = -i \left( \frac{4m^2}{1-\nu^2} - \omega^2 \right)$  und  $b = \frac{it^2}{4}$  und es ergibt sich daraus

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{64\pi^2} \left| \int_0^1 d\nu \int_d^\infty dt e^{-i\omega t} \frac{8im^2\nu^2(3-\nu^2)}{3(1-\nu^2)^2} \frac{\exp \left\{ -t\sqrt{\frac{4m^2}{1-\nu^2} - \omega^2} \right\}}{i\sqrt{\frac{4m^2}{1-\nu^2} - \omega^2}} \right|^2 \quad (4.8)$$

Danach kann schließlich das  $t$ -Integral ausgeführt werden

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{\pi^2} \left| \int_0^1 d\nu \frac{m^2 \nu^2 (3 - \nu^2)}{3(1 - \nu^2)^2} \frac{\exp \left\{ -d \left( \sqrt{\frac{4m^2}{1 - \nu^2} - \omega^2} + i\omega \right) \right\}}{\sqrt{\frac{4m^2}{1 - \nu^2} - \omega^2} \left( \sqrt{\frac{4m^2}{1 - \nu^2} - \omega^2} + i\omega \right)} \right|^2 \quad (4.9)$$

Führt man letztendlich die aus (2.15) bekannten Umbenennungen

$$\kappa = \sqrt{\frac{4m^2}{\omega^2(1 - \nu^2)} - 1}, \quad \lambda = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2(1 - \nu^2)}} \quad (4.10)$$

ein, dann erhält man nach Transformation der Integrationsvariable und nach Aufspaltung des Integrals die in (2.16) angegebene Formel für die Übergangswahrscheinlichkeit

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{36\pi^2} |f_{>} + f_{<}|^2$$

$$f_{>}(\omega/m, \omega d) = \int_0^{\text{Re}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{\omega^2}}} \frac{d\lambda}{1 - \lambda} \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 - \frac{4m^2}{\omega^2}}}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \frac{\left(1 - \lambda^2 + \frac{2m^2}{\omega^2}\right)}{1 - \lambda^2} e^{i\omega d \lambda} \quad (4.11)$$

$$f_{<}(\omega/m, \omega d) = \int_{\text{Re}\sqrt{\frac{4m^2}{\omega^2} - 1}}^{\infty} \frac{d\kappa}{i + \kappa} \frac{\sqrt{1 + \kappa^2 - \frac{4m^2}{\omega^2}}}{\sqrt{1 + \kappa^2}} \frac{\left(1 + \kappa^2 + \frac{2m^2}{\omega^2}\right)}{1 + \kappa^2} e^{-\omega d \kappa}$$

## 4.2. Schwaches Magnetfeld $B$

Im Folgenden sollen Näherungen für den Fall kleiner Feldstärken bis zur quadratischen Ordnung in  $B$  abgeleitet werden. Danach wird diese Situation in den Grenzfällen  $\omega \gg 2m$  und  $2m \gg \omega$  näher betrachtet. Die experimentelle Relevanz der Grenzfälle wird dann in Kapitel 5 ausführlich diskutiert. Zunächst aber nur für  $P_{\gamma \rightarrow \gamma}^{\parallel}$ , da sich für  $P_{\gamma \rightarrow \gamma}^{\perp}$  im Wesentlichen wieder dieselben Terme ergeben.

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma}^{\parallel} = \frac{1}{4\omega^2} \left| \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{-1}^1 \frac{d\nu}{2} \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1 - \nu^2}{4} \right] \right\} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \right.$$

$$\left. \left\{ \omega \mathcal{B} \text{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] + \left[ \frac{\omega^2 \mathcal{B}}{2i} - \frac{\omega^2 z \cot z (1 - \nu^2)}{2i} \right] \right. \right. \quad (4.12)$$

$$\times \left[ \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i\pi}} \exp \left\{ -\frac{i}{4\mathcal{A}} (d + 2\omega \mathcal{A})^2 \right\} + \frac{i}{2\omega} e^{-2i\omega d} \text{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d - 2\omega \mathcal{A}) \right] \right.$$

$$\left. \left. \left. - (d + 2\omega \mathcal{A} + \frac{i}{2\omega}) \text{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] \right] \right\} \right|^2$$

#### 4. Approximation für schwache Magnetfelder

Um die Näherungen durchzuführen, liegt es nahe, die Errorfunktion wieder in ihre Integraldarstellung zu überführen. Bei der Entwicklung bezüglich  $B$  treten keine linearen Terme auf. Insbesondere verschwindet für den Term

$\frac{\omega^2 \mathcal{B}}{2i} - \frac{\omega^2 z \cot z (1-\nu^2)}{2i}$  auch die nullte Ordnung, weshalb man sich bei den weiteren multiplikativ verbundenen Termen auf deren nullte Ordnung beschränken kann, um maximal Terme der quadratischen Ordnung zu erhalten. Betrachtet wird als erstes der Term ohne diesen Vorfaktor.

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_d^\infty dt \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right] \right\} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{-4i\mathcal{A}}} \exp \left\{ -\frac{i}{4\mathcal{A}} (t + 2\omega \mathcal{A})^2 \right\} \\
&= \int_0^\infty ds \int_d^\infty dt \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right] - \frac{it^2}{s(\nu^2-1)} - i\omega t \right\} \left[ \frac{-i\sqrt{is(1-\nu^2)}}{s^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{i\tilde{e}^2 B^2 \sqrt{is(1-\nu^2)}}{24s} (2i \sin^2 \theta t^2 + \underline{s(8 + \sin^2 \theta (3\nu^2 - 11))}) \right] + \mathcal{O}(B^4)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Es ist zu beachten, dass vorübergehend nicht nur das  $\nu$ -Integral, sondern auch der Faktor  $\frac{\tilde{\alpha}\omega}{2\pi^{3/2}}$ , der unter anderem aus der Integraldarstellung der Errorfunktion resultiert, fallengelassen wird. Der unterstrichene Term ändert sich, wenn man den senkrechten Anteil betrachtet und wird dort zu  $-s(4 - 4\nu^2 + \sin^2 \theta(5 + 3\nu^2))$ . Der erste Term ergibt für den Fall  $B \rightarrow 0$  den bereits behandelten Term. Deswegen wird er im Folgenden weggelassen. Das Integral über  $s$  kann nun mit den beiden Formeln

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty ds \frac{\exp \left[ -as - \frac{b}{s} \right]}{\sqrt{s}} = \frac{\exp[-2\sqrt{ab}] \sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \\
& \int_0^\infty ds \exp \left[ -as - \frac{b}{s} \right] \sqrt{s} = \frac{(1 + 2\sqrt{ab}) \exp[-2\sqrt{ab}] \sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ausgeführt werden. Mit der in (2.15) eingeführten Variable  $\kappa$  gelangt man zu:

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right\}_1 &= \int_d^\infty dt \exp \{ -t\omega\kappa - i\omega t \} \frac{i\tilde{e}^2 B^2 \sqrt{i(1-\nu^2)} \sqrt{\pi}}{12\omega\kappa \sqrt{i(1-\nu^2)}} \\
&\quad \left[ 2i \sin^2 \theta t^2 + \left\{ \begin{array}{l} (8 + \sin^2 \theta (3\nu^2 - 11)) \\ -(4 - 4\nu^2 + \sin^2 \theta (5 + 3\nu^2)) \end{array} \right\} \frac{2(1 + t\omega\kappa)}{i\omega^2 \kappa^2 (1-\nu^2)} \right]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Hierbei wurde eine symbolische Zusammenstellung der parallelen und senkrechten Anteile, die die gleichartige Struktur verdeutlichen soll, eingeführt. Dabei soll der Index

1 darauf hinweisen, dass es sich um den ersten zu behandelnden Term handelt. Als nächstes wird das verbliebene  $t$ -Integral ausgeführt.

$$\left. \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right\}_1 = e^{-\omega d(\kappa+i)} \frac{i\tilde{e}^2 B^2 \sqrt{\pi}}{6\omega^2 \kappa(\kappa+i)} \left[ i \sin^2 \theta \frac{2 + \omega d(\kappa+i)(2 + \omega d(\kappa+i))}{\omega^2(\kappa+i)^2} \right. \\ \left. + \left\{ \frac{8 + \sin^2 \theta(3\nu^2 - 11)}{4\nu^2 - 4 - \sin^2 \theta(5 + 3\nu^2)} \right\} \frac{1}{i\omega^2 \kappa^2(1 - \nu^2)} \left( 1 + \frac{\kappa(1 + \omega d(\kappa+i))}{(\kappa+i)} \right) \right] \quad (4.16)$$

Jetzt soll der zweite Term aus Gleichung (4.12) bearbeitet werden, wobei für die senkrechte und parallele Komponente nur der Vorfaktor unterschiedlich ist. Zunächst wird die Entwicklung dieses Vorfaktors dargestellt.

$$\frac{\omega^2 \mathcal{B}}{2i} - \frac{\omega^2 z \cot z(1 - \nu^2)}{2i} = \frac{\omega^2 s^2 \tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta}{2i} \frac{3 - 4\nu^2 + \nu^4}{6} + \mathcal{O}(B^3) \\ \frac{\omega^2}{2i} \left[ \mathcal{C} - \left[ \frac{z \cos(z\nu)}{\sin z} - \frac{z\nu \sin(z\nu) \cos z}{\sin^2 z} \right] \right] = \frac{\omega^2 s^2 \tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta}{2i} \frac{3 - 2\nu^2 - \nu^4}{12} + \mathcal{O}(B^3) \quad (4.17)$$

Daraufhin wird der Rest des zweiten Terms bis zur nullten Ordnung in  $B$  entwickelt. Anschließend werden das  $s$ -Integral und das in der Errorfunktion implizite  $t$ -Integral ausgewertet, wobei es notwendig ist  $s^2$  aus dem Vorfaktor aus (4.17) bei der Integration zu beachten. Der erste Teil dieses Terms enthält keine Errorfunktion und deshalb auch kein auszuwertendes  $t$ -Integral. Die Näherung von  $\mathcal{A}$  aus Gleichung (4.1) ergibt dann den ersten Anteil  $Q_1$

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1 - \nu^2}{4} \right] \right\} e^{i\omega^2 \mathcal{A} s^2} \sqrt{\frac{4\mathcal{A}}{i\pi}} \exp \left\{ -\frac{i}{4\mathcal{A}} (d + 2\omega\mathcal{A})^2 \right\} \\ \approx \int_0^\infty ds s \sqrt{\frac{is(1 - \nu^2)}{\pi}} \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1 - \nu^2}{4} \right] - id\omega - \frac{id^2}{s(\nu^2 - 1)} \right\} \quad (4.18) \\ = e^{-d\omega(\kappa+i)} \sqrt{\frac{i(1 - \nu^2)}{\pi}} \frac{32\sqrt{\pi}}{4\omega^5 \kappa^5 \sqrt{i(1 - \nu^2)} (i(1 - \nu^2))^2} (3 + 3d\omega\kappa + d^2\omega^2\kappa^2) \\ = -\frac{8 e^{-d\omega(\kappa+i)}}{\omega^5 \kappa^5 (1 - \nu^2)^2} (3 + 3d\omega\kappa + d^2\omega^2\kappa^2) =: Q_1$$

Als nächstes werden die Anteile mit einem „+“ in der Errorfunktion berechnet.

#### 4. Approximation für schwache Magnetfelder

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right] \right\} e^{i\omega^2 \mathcal{A} s^2} \left( d + 2\omega \mathcal{A} + \frac{i}{2\omega} \right) \\
& \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d + 2\omega \mathcal{A}) \right] \\
& = - \int_0^\infty ds \int_d^\infty dt \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right] \right\} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \left( d + 2\omega \mathcal{A} + \frac{i}{2\omega} \right) \\
& \frac{2s}{\sqrt{-4i\mathcal{A}\pi}} \exp \left\{ -\frac{i}{4\mathcal{A}} (t + 2\omega \mathcal{A})^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Aus der Näherung für  $\mathcal{A}$  ergibt sich Folgendes:

$$\begin{aligned}
& \approx - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ds \int_d^\infty dt \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right] - i\omega t - \frac{it^2}{(\nu^2 - 1)s} \right\} \\
& \left[ \left( d + \frac{i}{2\omega} \right) \sqrt{\frac{s}{i(1-\nu^2)}} + \frac{i s \omega}{2} \sqrt{is(1-\nu^2)} \right]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Dies liefert nach Ausführung des  $t$ -Integrals den zweiten Anteil  $Q_2$ :

$$\begin{aligned}
& - \int_d^\infty dt e^{-t\omega(\kappa+i)} \frac{2}{i\omega\kappa(1-\nu^2)} \\
& \left[ \left( d + \frac{i}{2\omega} \right) \frac{4(1+t\omega\kappa)}{i\omega^2\kappa^2(1-\nu^2)} + \frac{4(3+3t\omega\kappa+t^2\omega^2\kappa^2)}{\omega^3\kappa^4(1-\nu^2)} \right] \\
& = \frac{2e^{-d\omega(\kappa+i)}}{i\omega^5\kappa^5(\kappa+i)^3(1-\nu^2)^2} [2(6-\kappa(3i+\kappa))(6+\kappa(-3i+2\kappa)) \\
& - d\omega\kappa(i+\kappa)(6i+\kappa(12+\kappa(-3i+\kappa))) + 2id^2\kappa^2\omega^2(i+\kappa)^3] =: Q_2
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Es verbleibt noch der Anteil mit einem „-“ in der Errorfunktion. Analog zur obigen Rechnung wird die Integraldarstellung der Errorfunktion eingesetzt:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right] \right\} \frac{is^2}{2\omega} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} e^{-2i\omega d} \operatorname{Erfc} \left[ \sqrt{\frac{i}{4\mathcal{A}}} (d - 2\omega \mathcal{A}) \right] \\
& = \int_0^\infty ds \int_d^\infty dt \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1-\nu^2}{4} \right] \right\} \frac{is}{\omega\sqrt{-4i\mathcal{A}\pi}} \\
& e^{-2i\omega d} e^{i\omega^2 \mathcal{A}} \exp \left\{ -\frac{i}{4\mathcal{A}} (t - 2\omega \mathcal{A})^2 \right\}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ebenso wird dann die Näherung von  $\mathcal{A}$  eingesetzt.

$$\approx \int_0^\infty ds \int_d^\infty dt \exp \left\{ -is \left[ m^2 - \omega^2 \frac{1 - \nu^2}{4} \right] + i\omega t - \frac{it^2}{s(\nu^2 - 1)} \right\} \frac{is}{\omega \sqrt{is(1 - \nu^2)\pi}} e^{-2i\omega d} \quad (4.23)$$

Die Berechnung des  $t$ -Integrals führt dann auf den dritten Anteil  $Q_3$

$$\begin{aligned} &= \int_d^\infty dt e^{-t\omega(\kappa - i)} \frac{4(1 + t\omega\kappa)}{i\omega^4 \kappa^3 (1 - \nu^2)^2} e^{-2i\omega d} \\ &= e^{-d\omega(\kappa + i)} \frac{4\kappa(2 + d\omega(\kappa - i)) - 4i}{i\omega^5 \kappa^3 (\kappa - i)^2 (1 - \nu^2)^2} =: Q_3 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Schließlich können ebendiese Teile zusammengefasst werden zu

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = \frac{16i [1 + \kappa(4\kappa - i + d\omega(1 + \kappa^2))]}{\kappa^3 (\kappa - i)^2 (\kappa + i)^3 (-1 + \nu^2)^2 \omega^5} e^{-d\omega(\kappa + i)} \quad (4.25)$$

Somit kann der komplette zweite Term dargestellt werden als:

$$\left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right\}_2 = \frac{8\tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta [1 + \kappa(4\kappa - i + d\omega(1 + \kappa^2))]}{\kappa^3 (\kappa - i)^2 (\kappa + i)^3 (-1 + \nu^2)^2 \omega^3} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3-4\nu^2+\nu^4}{3-2\nu^2-\nu^4} \\ \frac{6}{12} \end{array} \right\} e^{-d\omega(\kappa + i)} \quad (4.26)$$

Daraufhin lässt sich auch die Summe bilden. Wobei zu beachten ist, dass für den ersten Term bisher der Faktor  $\frac{\tilde{\alpha}\omega}{2\pi^{3/2}}$  und für den zweiten Term der Faktor  $\frac{\tilde{\alpha}}{4\pi}$  ausgelassen wurde.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\alpha}\omega}{2\pi^{3/2}} \left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right\}_1 + \frac{\tilde{\alpha}}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \parallel \\ \perp \end{array} \right\}_2 &= \frac{\tilde{\alpha}\tilde{e}^2 B^2}{12\pi\kappa^3 (i + \kappa)^3 \omega^3} [-\kappa^2 \sin^2 \theta (2 + d\omega(i + \kappa))(2 + (i + \kappa)d\omega)] \\ &+ \frac{2 \sin^2 \theta (1 + \kappa(4\kappa - i + (1 + \kappa^2)d\omega))}{(\kappa - i)^2} \left\{ \begin{array}{l} (2 + (1 + \kappa^2)\frac{\omega^2}{m^2}) \\ ((1 + \kappa^2)\frac{\omega^2}{m^2} - 1) \end{array} \right\} \\ &- (i + \kappa)(i + 2\kappa + \kappa(i + \kappa)d\omega) \left\{ \begin{array}{l} (3 \sin^2 \theta + 2(1 + \kappa^2)(\sin^2 \theta - 1)\frac{\omega^2}{m^2}) \\ ((4 - 3 \sin^2 \theta) + 2(1 + \kappa^2) \sin^2 \theta \frac{\omega^2}{m^2}) \end{array} \right\} \Bigg\} e^{-d\omega(\kappa + i)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Im Weiteren muss noch die Integrationsvariable  $\nu$  in die Variablen  $\kappa$  und  $\lambda$  überführt werden, vgl. (2.15). Dabei ist darauf zu achten, dass es im Fall  $\omega > 2m$  aufgrund des entstehenden Imaginärteils notwendig ist, das Integral in zwei Teile aufzutrennen. Dafür wird analog zum bereits bekannten Resultat die im abgeleiteten Ergebnis vorhandene Integrationsvariable  $\kappa$  und die ebenfalls in (2.15) definierte Integrationsvariable  $\lambda$  benutzt. Der Übergang ist durch  $\kappa \rightarrow -i\lambda$  gegeben, wobei durch das Vertauschen der

#### 4. Approximation für schwache Magnetfelder

Integrationsgrenzen ein zusätzliches Minuszeichen entsteht. Es folgt also für die beiden Integralanteile:

$$\begin{aligned} d\nu &\rightarrow d\kappa \frac{4m^2\kappa}{\omega^2(\kappa^2+1)^{3/2}\sqrt{\kappa^2+1-\frac{4m^2}{\omega^2}}} \\ d\nu &\rightarrow -d\lambda \frac{4m^2\lambda}{\omega^2(1-\lambda^2)^{3/2}\sqrt{1-\lambda^2-\frac{4m^2}{\omega^2}}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

##### 4.2.1. Grenzfall kleiner Frequenzen $\omega \ll 2m$

Zunächst soll nun der Grenzfall großer Massen, also  $\omega \ll 2m$ , betrachtet werden. In diesem Fall trägt lediglich das Integral über  $\kappa$  bei, während die Integration über  $\lambda$  verschwindet. Da sich diese Integration jedoch nicht analytisch ausführen lässt, ist es angebracht, die Variable  $\kappa$  so zu normieren, dass die untere Grenze 1 ist. Wenn man dies durchführt und beachtet, dass man sich im Regime großer Massen bewegt, resultiert daraus

$$\kappa \rightarrow \kappa' = \frac{\kappa}{\sqrt{\frac{4m^2}{\omega^2} - 1}} \approx \frac{\omega\kappa}{2m} \quad (4.29)$$

Augenscheinlich dominieren innerhalb der Summen in Gleichung (4.27) die jeweils höchsten Potenzen in  $\kappa$ , da diese mit dem Faktor  $2m/\omega \gg 1$  gekoppelt sind. Deshalb werden nur diese im Folgenden untersucht. Schließlich ergibt sich für den Term, der die Korrekturen zur Ordnung  $B^2$  enthält,

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty \frac{d\kappa'}{\kappa'^2\sqrt{\kappa'^2-1}} \frac{\tilde{\alpha}\tilde{e}^2 B^2 e^{-2m\kappa'-i\omega d}}{12\pi\omega^3\kappa'^6 \left(\frac{2m}{\omega}\right)^6} \left[ 4\sin^2\theta dm\kappa' \left\{ \begin{array}{l} 2+4\kappa'^2 \\ 4\kappa'^2-1 \end{array} \right\} \right. \\ &\quad \left. -4\sin^2\theta d^2m^2 \left(\frac{2m}{\omega}\right)^2 \kappa'^4 - 2dm \left(\frac{2m}{\omega}\right)^2 \kappa'^3 \left\{ \begin{array}{l} 3\sin^2\theta + 8\kappa'^2(\sin^2\theta-1) \\ 4-3\sin^2\theta + 8\kappa'^2\sin^2\theta \end{array} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Es fällt auf, dass die beiden letzten Terme in der eckigen Klammer mit dem sehr großen Faktor  $\left(\frac{2m}{\omega}\right)^2$  gewichtet sind und deshalb die führenden Anteile darstellen. Betrachtet man darüber hinaus den Grenzfall sehr dicker Wände,  $md \gg 1$ , so dominiert der zweite Term in der eckigen Klammer, der für beide Anteile gleich ist. Um einen Näherungswert zu erhalten, muss das verbliebene Integral berechnet werden, was durch eine partielle Integration und eine anschließende Sattelpunktsapproximation geschehen kann.

$$\int_1^\infty d\kappa' \frac{e^{-2m\kappa'}}{\kappa'^4\sqrt{\kappa'^2-1}} \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{8m^3d^3}} e^{-2md} \quad (4.31)$$



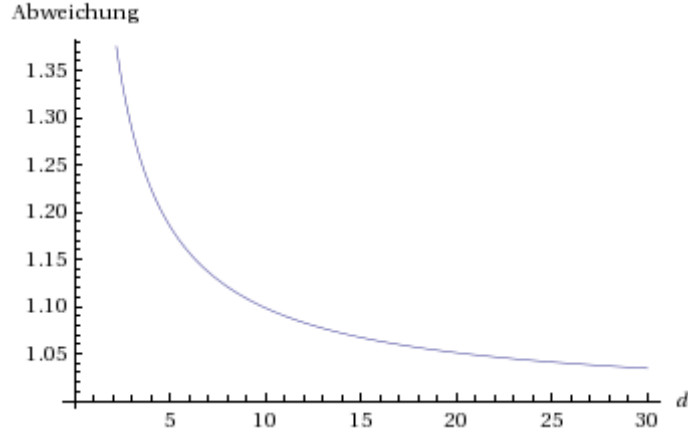


Abbildung 4.1.: Die Grafik zeigt das Verhältnis des genäherten Wertes zu dem exakten numerischen Ergebnis des Integrals aus (4.31) an. Dabei wurde  $m = 1$  gesetzt.

In Abbildung 4.1 ist erkennbar, dass diese Approximation für Wanddicken von  $md \gtrsim 10$  verhältnismäßig gut ist und eine Abweichung von unter 10% liefert. Um den vollständigen Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit erhalten zu können, muss man noch die Vorfaktoren einbeziehen und insbesondere den Term, der aus dem Fall eines verschwindenden Magnetfeldes herauskommt. Letzterer ist dem ersten Teil von (2.17) zu entnehmen, wodurch sich sowohl für den senkrechten als auch für den parallelen Anteil das gleiche Resultat ergibt. Der Term  $e^{-i\omega d}$  taucht auch in der nullten Ordnung auf und fällt deshalb heraus:

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2 e^{-4dm}}{256\pi (md)^3} \left| 1 - \frac{\tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta (dm)^3}{12m^4} \right|^2 \quad (4.32)$$

Deutlich erkennbar ist, dass die Korrektur in  $B^2$  das typische exponentielle Abfallverhalten zeigt und dass die dominierende Korrektur mit einem negativen Vorzeichen versehen ist. Wenn man den gesamten Ausdruck in (3.26) numerisch auswertet, so zeigt sich, dass bei großen Massen tatsächlich bei Erhöhung der Feldstärke  $B$  die Übergangswahrscheinlichkeit abnimmt. Dies führt zu interessanten Konsequenzen, die in Kapitel 5 diskutiert werden.

Für den Limes sehr dünner Wände,  $md \ll 1$ , ist der letzte Term in (4.30) dominierend. In diesem Fall gibt es keine so starke exponentielle Dämpfung und es tragen auch höhere  $\kappa'$  zum Wert des Integrals bei. Deshalb kann  $\sqrt{\kappa'^2 - 1} \approx \kappa'$  gesetzt werden, womit sich das Integral ausführen lässt. Vernachlässigt man von diesem Ergebnis alle Terme, die  $\mathcal{O}(d^2 m^2)$  sind, erhält man als Korrekturterm:

$$-\frac{\tilde{\alpha}^2 \tilde{e}^2 B^2 \omega d}{96m^3} e^{-2md - i\omega d} \left\{ \frac{49 \sin^2 \theta - 40}{15} \right. \\ \left. \frac{12 + 31 \sin^2 \theta}{15} \right\} \quad (4.33)$$

#### 4. Approximation für schwache Magnetfelder

Der führende Term nullter Ordnung aus (2.17) ist hier logarithmisch divergent, während die Korrektur für  $\omega d \rightarrow 0$  endlich ist und gegen Null strebt.

##### 4.2.2. Grenzfall großer Frequenzen $\omega \gg 2m$

Für den Grenzfall großer Frequenzen,  $\omega \gg 2m$ , wird die Berechnung ein wenig aufwendiger, da nun beide Integrale aus (2.16) beitragen. Wenn man zunächst nur die dominierenden Terme innerhalb dieser Näherung mitnimmt, erhält man für den Korrekturterm:

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\alpha} 4m^2 \tilde{e}^2 B^2}{12\pi\kappa^2(i+\kappa)^3(1+\kappa^2)^2\omega^5} \left[ -\kappa^2 \sin^2 \theta (2 + d\omega(i+\kappa)(2 + (i+\kappa)d\omega)) \right. \\ & + \frac{2 \sin^2 \theta (1 + \kappa(4\kappa - i + (1 + \kappa^2)d\omega))}{(\kappa - i)^2} \left\{ (1 + \kappa^2) \frac{\omega^2}{m^2} \right\} \\ & \left. - (i + \kappa)(i + 2\kappa + \kappa(i + \kappa)d\omega) 2(1 + \kappa^2) \frac{\omega^2}{m^2} \left\{ \frac{\sin^2 \theta - 1}{\sin^2 \theta} \right\} \right] e^{-d\omega(\kappa+i)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Aufteilung des Integrals erfolgt durch die Ersetzung  $\kappa \rightarrow -i\lambda$ . Zur Auswertung der Integrale ist es hilfreich eine Partialbruchzerlegung vorzunehmen. Dabei wird augenscheinlich, dass es für den parallelen Anteil eine scheinbare Divergenz gibt, wenn die jeweilige Integrationsvariable gegen den Wert Null strebt. Wenn man aber die Integration nicht direkt bei Null, sondern bei einem infinitesimal kleinen  $\epsilon$  beginnen lässt, wird ersichtlich, dass sich die divergenten Anteile der Integrale gerade aufheben. Die Werte der ausgeführten Integrale können dann bis zur Ordnung  $\mathcal{O}\left[\left(\frac{4m^2}{\omega^2}\right)^2\right]$  entwickelt werden. Eine Anzahl der wesentlichen Rechenschritte sind ausführlicher im Anhang B erklärt. Das Ergebnis für diese Approximation ist gemäß (B.3):

$$\frac{19 \tilde{\alpha} \tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta \omega^3 e^{-i\omega d}}{1152 \pi m^6} \quad (4.35)$$

Zusammen mit den entsprechenden Näherungswerten für den Fall verschwindender Feldstärke ergibt sich für Wände mit  $\omega d \sim \mathcal{O}(1)$ , wobei analog zu (4.32)  $e^{-i\omega d}$  nicht beiträgt:

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{36\pi^2} \left| a \ln \left( \frac{\omega}{2m} \right) + \frac{19 \tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta}{96m^4} \frac{\omega^2}{4m^2} \right|^2, \quad a \simeq 2 \quad (4.36)$$

Und analog für sehr dünne Wände,  $d\omega \ll 1$ , gilt:

$$P_{\gamma \rightarrow \gamma} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{36\pi^2} \left| \ln \left( \frac{1}{\omega d} \right) + \frac{19 \tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta}{96m^4} \frac{\omega^2}{4m^2} \right|^2 \quad (4.37)$$

# 5. Experimentelle Möglichkeiten

Das in den vorherigen Kapiteln dargestellte „Tunneln 3. Art“ wird bei sogenannten „Licht durch die Wand“ Experimenten untersucht. Für diese Versuche ergeben sich, insbesondere im Hinblick auf die obigen Rechnungen, einige Schwierigkeiten. Ein wesentliches Problem besteht in der Wand, die man benutzt. Diese darf zum einen nicht zu dick sein, da der Prozess, wie bereits beschrieben, exponentiell mit der Dicke der Wand abfällt. Andererseits darf die Wand auch nicht zu dünn sein, um auszuschließen, dass die eingestrahelten Photonen die Barriere durch gewöhnliche Transmission passieren. Dies würde sonst zu einer Detektion von Ereignissen führen, die nicht auf die Existenz schwachwechselwirkender Teilchen schließen lässt. Das führt dazu, dass ein Reflexionsgrad von nahezu 100% für die eingestrahelte Laserfrequenz notwendig ist. Des Weiteren wurde zur Vereinfachung des Problems angenommen, dass  $\mathbf{k}_\perp$  an der Oberfläche der Wand verschwindet und das konstante magnetische Hintergrundfeld nicht mit der Wand wechselwirkt oder in diese eindringt. Beide Annahmen sind im Experiment schwierig realisierbar. Darüberhinaus führen extrem kleine Massen zu einer Compton-Wellenlänge, die größer ist als die räumliche Ausdehnung innerhalb des Versuchsaufbaus, was den Ansatz einfallender, ebener Wellen unzuverlässig werden lässt.

Von besonderem Interesse ist der Grenzfall sehr kleiner Massen und moderater Wanddicken,  $\omega d \sim \mathcal{O}(1)$ , da minigeladene Teilchen in diesem Bereich vermutet werden und diese Wanddicken dem Experiment zugänglich sind. Gemäß der Formel aus (4.36) erhöht sich die Übergangswahrscheinlichkeit beim Anlegen eines konstanten Magnetfeldes. Um eine Abschätzung für die dadurch im Experiment erreichbaren Werte für  $\epsilon$  zu erhalten, werden die aktuellen Experimentaldaten der ALPS-Kollaboration [9] verwendet. Für diesen experimentellen Aufbau ergeben sich  $\omega = 2,33\text{eV}$  und  $B = 5T$ . Geht man darüberhinaus von einer einstrahlenden Photonzahldichte im Bereich  $n_{in} \sim \mathcal{O}(10^{20} \dots 10^{25})/s$  aus und setzt voraus, dass zumindest ein Ereignis pro Stunde nachweisbar ist, so ergibt sich für eine hundertprozentige Detektierbarkeit die in Abbildung 5.1 dargestellte Grenze (blaue Kurve). Daran lässt sich beispielsweise im Bereich  $m \simeq 10^{-2}\text{eV}$  eine fraktionelle Ladung von  $\epsilon \sim 10^{-7}$  erkennen. Im Gegensatz dazu ergab sich für die Untersuchung des Effektes ohne magnetisches Feld eine Grenze von  $\epsilon \sim 10^{-6}$  [14]. Allerdings ist darauf zu achten, dass das in (4.36) angegebene Ergebnis aus der Näherung kleiner magnetischer Feldstärken  $B$  gegenüber der kritischen Feldstärken  $B_{cr} = \frac{m^2}{e\epsilon}$  entstanden ist. Deshalb ergibt sich für einen Massenbereich eine obere Schranke für  $\epsilon$ , um sicherzustellen, dass die Näherungsvoraussetzungen erfüllt bleiben. In Abbildung 5.1 ist diese Schranke, für die die kritische Feldstärke erreicht wird, durch die rote Kurve dargestellt. Daran wird deutlich, dass insbesondere für Massen  $m \lesssim 0,5 \times 10^{-3}\text{eV}$  diese Näherung nicht uneingeschränkt gültig ist. Insgesamt ergeben sich daraus die aktuell im Experiment

## 5. Experimentelle Möglichkeiten

nachgewiesenen Ausschlussgrenzen für die fraktionelle Ladung.<sup>1</sup>

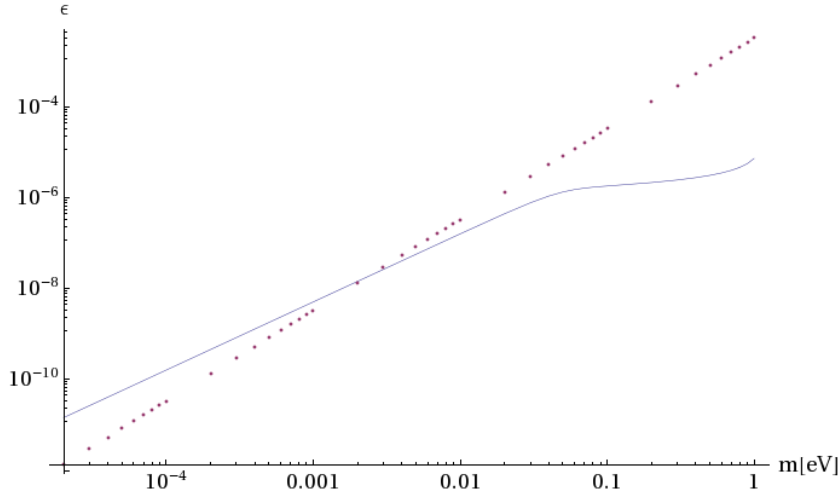


Abbildung 5.1.: Die Grafik zeigt die experimentell erreichbaren Werte für  $\epsilon$  in Abhängigkeit von  $m$  (blaue Kurve) an sowie die Werte, bei denen das Magnetfeld  $B$  gleich der kritischen Feldstärke  $B_{cr}$  ist (rote, gepunktete Kurve). Dabei werden in Anlehnung an die aktuellen Experimente der ALPS-Kollaboration [9] die Parameter  $\omega = 2,33eV$  und  $B = 5T$  gewählt

Darüberhinaus wurde in Abschnitt 4.2.1 gezeigt, dass für den Fall großer Massen in Bezug auf die Frequenz die Übergangswahrscheinlichkeit bei Erhöhung der magnetischen Feldstärke abnimmt. Wenn man im Experiment nicht immer dieselbe Frequenz  $\omega$  einstrahlt, sondern diese variiert, so kann man in den verschiedenen Grenzfällen Messungen vornehmen. Darüberhinaus ist ein Austausch der Wand, bzw. des Spiegels notwendig, damit die annähernd hundertprozentige Reflektivität erhalten bleibt. Ließe sich dies realisieren, könnte eine Abschätzung der Masse von minigeladenen Teilchen erreicht werden. Denn im Grenzfall hoher Frequenzen würde eine Verstärkung des Effektes bei Erhöhung der Feldstärke beobachtet werden, während im anderen Grenzfall genau das Gegenteil der Fall wäre. Wird dem entsprechend die Stärke des Magnetfeldes geändert, kann die sonst dem Experiment nicht zugängliche Masse in einem bestimmten Bereich eingegrenzt werden.

<sup>1</sup>Aus astronomischen Messungen lassen sich stärkere Ausschlussgrenzen ableiten:  $\epsilon \simeq 10^{-14}$  [17]. Diese können in manchen Modellen jedoch umgangen werden [18].

## 6. Zusammenfassung

*Denken ist interessanter als Wissen,  
aber nicht als Anschauen.*

*Johann Wolfgang von Goethe,  
Maximen und Reflexionen*

In der vorliegenden Arbeit wurde die Idee des „Tunneln 3. Art“ für den Fall eines äußeren magnetischen Feldes untersucht. Hierzu wurde der in der Literatur für diese Situation gegebene Polarisations-Tensor [16] in den von Gies und Jaeckel bearbeiteten Formalismus [14] eingefügt. Die daraus resultierenden beiden Komponenten der Übergangswahrscheinlichkeit wurden daraufhin so weit wie möglich analytisch ausgewertet. Schließlich verblieben für den parallelen und senkrechten Anteil zwei Integrale, die nicht weiter zu vereinfachen waren. Dies entsprach durchaus der Erwartung, da dies bereits bei dem einfacheren Problem ohne Magnetfeld nicht möglich gewesen war. Der abgeleitete Ausdruck konnte danach für den Limes  $B \rightarrow 0$  in das bereits bekannte Ergebnis überführt werden.

Weiterhin wurde für den Fall eines nicht verschwindenden kleinen Magnetfeldes eine Näherung bis zur quadratischen Ordnung in ebendiesem vorgenommen. Da auch der dadurch gewonnene Ausdruck sich nicht vollkommen analytisch behandeln ließ, wurde er nochmals für verschiedene Grenzfälle approximiert. Es zeigte sich für den Grenzfall sehr geringer Masse eine Zunahme des Effektes bei Verstärkung des äußeren Feldes. Dies ist ein positives Ergebnis, da man sich durch „Licht durch die Wand“-Experimente, welche diesen Effekt ausnutzen, eine Entdeckung sehr schwach wechselwirkender und sehr leichter Teilchen, insbesondere der minigeladenen Teilchen, erhofft. Dadurch wird es möglich, die sehr geringen Übergangswahrscheinlichkeiten zu vergrößern und somit eine eventuelle Entdeckung zu erleichtern. Es wurde gezeigt, dass sich die älteren Grenzen für die fraktionelle Ladung durch Verwendung eines Magnetfeldes um mindestens eine Größenordnung verbessern lassen. Dabei ist jedoch zu beachten, dass in die Näherung verschiedene Annahmen eingingen. Eine Problematik ist die Stärke des magnetischen Feldes, die einerseits hinreichend groß sein muss, um eine effektive Verstärkung zu erzielen, andererseits für den abgeleiteten Ausdruck nicht beliebig groß werden darf, da sonst die Näherung nicht länger gerechtfertigt ist. Vor allem musste im betrachteten Limes eine Einschränkung für die fraktionelle Ladung vorgenommen werden, um im Gültigkeitsbereich der Approximation zu bleiben. Dieses Problem ließe sich durch weiterführende Berechnungen für starke Felder lösen, insbesondere die Erweiterung auf hochintensive Laserfelder, die orts- und zeitabhängig sind, ist deshalb von Interesse.

Für die Annahme großer Massen ergab sich entgegen der Erwartungen, dass eine Verstärkung des äußeren Feldes eine Abnahme des Effektes nach sich zieht. Dies könnte bei

## 6. Zusammenfassung

der Detektion von minigeladenen Teilchen eine Abschätzung für deren Masse erlauben, die sonst diesem Experiment nicht zugänglich wäre. Durch eine Modifikation der experimentellen Anordnung wäre dadurch nicht nur der Nachweis von minigeladenen Teilchen möglich, sondern auch die Bestimmung eines der wesentlichen Charakteristika dieser Teilchen. Letztendlich kann sich nur im Experiment zeigen, ob es sich bei minigeladenen Teilchen nur um scheinbar sinnvolle Erweiterungen des Standardmodells handelt oder um real existierende Teilchen.

# A. Konventionen

Es werden ausschließlich natürlich Einheiten verwendet, also  $\hbar = c = 1$  gesetzt. Für die Metrik wird die folgende Signatur gewählt:

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Die  $\gamma$ -Matrizen werden in der üblichen Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma_i\} \equiv \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

benutzt und erfüllen die Antikommutationsregeln:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

Dabei steht  $\sigma$  für die Pauli-Matrizen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Darüberhinaus wird der Kommutator der  $\gamma$ -Matrizen eingeführt:

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{A.5})$$

Diese Definition führt zu den Matrizen:

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \quad (i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch}) \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (\text{A.7})$$

Die im Text unter der Abkürzung  $\sigma_3$  verwendete Matrix sich ergibt daher zu:

$$\sigma^{12} = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

## A. Konventionen

Für die partiellen Fouriertransformationen wurde

$$A(z, \mathbf{p}_\perp, \omega) = \int \frac{dp_z}{2\pi} e^{izp_z} A(p) \quad (\text{A.9})$$

gewählt.



## B. Näherung für $\omega^2 \gg 2m^2$

Führt man für die Gleichung (4.34) eine Partialbruchzerlegung durch und vernachlässigt die Terme, die mit  $m^2$  anstatt  $\omega^2$  gekoppelt sind, findet man für die beiden Anteile:

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{\alpha} e^{-\omega d(\kappa+i)}}{4\pi} \left[ \frac{2\tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta m^2}{3\omega^5(i+\kappa)^5} + \frac{\tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta}{3(\kappa-i)^3 \omega^3} - \left\{ \begin{array}{c} \frac{8i\tilde{e}^2 B^2}{3\omega^3 \kappa^2} + \frac{8i\tilde{e}^2 B^2 d}{3\kappa\omega^2} \\ 0 \end{array} \right\} \right. \\
& - \frac{4i\tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta \omega^2}{3\omega^5(i+\kappa)^4} + \frac{4\omega^2 \tilde{e}^2 B^2 \left( \sin^2 \theta(id\omega - 1) + \left\{ \begin{array}{c} 6 + 4id\omega \\ 0 \end{array} \right\} \right)}{24\omega^5(\kappa-i)} \\
& - \frac{2\tilde{e}^2 B^2 \omega^2 \left( \sin^2 \theta(1 + 2id\omega) + \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right\} \right)}{6\omega^5(i+\kappa)^3} + \frac{i\omega^2 \tilde{e}^2 B^2 \left( \sin^2 \theta + \left\{ \begin{array}{c} 4 + 8id\omega \\ 0 \end{array} \right\} \right)}{6\omega^5(\kappa+i)^2} \\
& \left. + \frac{2\tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta \omega^2 (i + 2d\omega)}{12\omega^5(\kappa-i)^2} + \frac{4\omega^2 \tilde{e}^2 B^2 \left( \sin^2 \theta(1 - id\omega) + \left\{ \begin{array}{c} 12id\omega - 6 \\ 0 \end{array} \right\} \right)}{24\omega^5(\kappa+i)} \right] \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

Besonders auffällig ist die scheinbare Divergenz des parallelen Anteils für  $\kappa \rightarrow 0$ . Allerdings muss nicht nur das Integral über diesen Ausdruck ausgeführt werden, sondern auch das Integral über  $\lambda$ . Der Übergang geschieht mit  $\kappa \rightarrow -i\lambda$ . Wählt man nun die untere Integralgrenze nicht genau Null, sondern mit einem infinitesimalen  $\epsilon$ , so lassen sich beide Integrale ausführen und man erkennt, dass sich der Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  ausführen lässt. Dabei heben sich diese scheinbar divergenten Anteile genau auf. Exemplarisch bedeutet das:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\epsilon}^{\infty} d\kappa \frac{e^{-\omega d\kappa}}{\kappa} - \int_{i\epsilon}^{\text{Re}\sqrt{1-\frac{4m^2}{\omega^2}}} d\lambda \frac{e^{i\omega d\lambda}}{\lambda} \right) \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \Gamma(0, d\epsilon\omega) - \ln(d\omega) + \ln(\omega\epsilon d) - \Gamma(0, d\epsilon\omega) + \Gamma \left( 0, -i\omega d \text{Re}\sqrt{1-\frac{4m^2}{\omega^2}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \ln(d\epsilon\omega) + \ln \left( -i\omega d \text{Re}\sqrt{1-\frac{4m^2}{\omega^2}} \right) \right) \quad (\text{B.2}) \\
& = \Gamma \left( 0, -i\omega d \text{Re}\sqrt{1-\frac{4m^2}{\omega^2}} \right) + \ln \left( -i \text{Re}\sqrt{1-\frac{4m^2}{\omega^2}} \right)
\end{aligned}$$

## B. Näherung für $\omega^2 \gg 2m^2$

Analog hebt sich auch die Divergenz für den Term mit  $\frac{1}{\kappa^2}$  auf und in gleicher Weise können alle anderen Terme ausintegriert werden. Dabei ist es sinnvoll, die Ergebnisse in  $\frac{4m^2}{\omega^2}$  zu entwickeln und alle Terme höherer Ordnung zu vernachlässigen. Dabei ist festzustellen, dass die Terme mit  $(\kappa + i)$  oder einer Potenz von diesem Ausdruck im Nenner dominierend sind. Denn die Anteile aus dem Integral über  $\lambda$  werden sehr groß, weil die obere Grenze auf einen Pol zuläuft. Diese führenden Terme haben nur die Abhängigkeit im Exponenten von der Wanddicke  $d$  und sind für den senkrechten und parallelen Anteil gleich. Weshalb sich sowohl für dicke, als auch für dünne Wände folgender Korrekturterm als dominierender Ausdruck herausstellt:

$$\frac{19 \tilde{\alpha} \tilde{e}^2 B^2 \sin^2 \theta \omega^3 e^{-i\omega d}}{1152 \pi m^6} \quad (\text{B.3})$$

# Literaturverzeichnis

- [1] R.W. Wood, Phys. Rev. **5**, 1 (1897)
- [2] G. Wentzel, Z. Phys. **38**, 518 (1926); H.A. Kramers, Z. Phys. **39**, 828 (1926); L. Brillouin, Comptes Rendus **183**, 24 (1926)
- [3] J. Schwinger, Phys. Rev. D **73** (1948) 4162
- [4] S. Laporta und E. Remiddi, “The Analytic Value Of  $G(E)$ -2 At Three Loops In QED,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **51C**, 142 (1996).
- [5] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, “Automated calculation of QED corrections to lepton  $g$ -2,” PoS **RADCOR2007**, 025 (2007).
- [6] B. C. Odom, D. Hanneke, B. D’Urso and G. Gabrielse, “New Measurement of the Electron Magnetic Moment Using a One-Electron Quantum Cyclotron,” Phys. Rev. Lett. **97**, 030801 (2006) [Erratum-ibid. **99**, 039902 (2007)].
- [7] E. A. Uehling, “Polarization effects in the positron theory,” Phys. Rev. **48**, 55 (1935).
- [8] B. Holdom, “Two  $U(1)$ ’S And Epsilon Charge Shifts,” Phys. Lett. B **166**, 196 (1986).
- [9] K. Ehret *et al.*, “New ALPS Results on Hidden-Sector Lightweights,” Phys. Lett. B **689**, 149 (2010) [arXiv:1004.1313 [hep-ex]].
- [10] C. Robilliard, R. Battesti, M. Fouche, J. Mauchain, A. M. Sautivet, F. Amiranoff and C. Rizzo, “No light shining through a wall,” Phys. Rev. Lett. **99**, 190403 (2007) [arXiv:0707.1296 [hep-ex]].
- [11] A. S. ... Chou *et al.* [GammeV (T-969) Collaboration], “Search for axion-like particles using a variable baseline photon regeneration technique,” Phys. Rev. Lett. **100**, 080402 (2008) [arXiv:0710.3783 [hep-ex]].
- [12] P. Pagnat *et al.* [OSQAR Collaboration], “First results from the OSQAR photon regeneration experiment: No light shining through a wall,” Phys. Rev. D **78**, 092003 (2008) [arXiv:0712.3362 [hep-ex]].
- [13] A. Afanasev *et al.*, “New Experimental limit on Optical Photon Coupling to Neutral, Scalar Bosons,” Phys. Rev. Lett. **101**, 120401 (2008) [arXiv:0806.2631 [hep-ex]].
- [14] H. Gies and J. Jaeckel, “Tunneling of the 3rd kind,” JHEP **0908**, 063 (2009) [arXiv:0904.0609 [hep-ph]].

## LITERATURVERZEICHNIS

- [15] W. Dittrich und M. Reuter, Lect. Notes Phys. **220** (1985) 1
- [16] W. Dittrich und H. Gies, “Probing the Quantum Vacuum”, Springer Verlag Berlin Heidelberg (2000)
- [17] S. Davidson, S. Hannestad and G. Raffelt, “Updated bounds on milli-charged particles,” JHEP **0005**, 003 (2000) [arXiv:hep-ph/0001179].
- [18] J. Jaeckel, E. Masso, J. Redondo, A. Ringwald and F. Takahashi, “The Need for Purely Laboratory-Based Axion-Like Particle Searches,” Phys. Rev. D **75**, 013004 (2007) [arXiv:hep-ph/0610203]; E. Masso and J. Redondo, “Compatibility of CAST search with axion-like interpretation of PVLAS results,” Phys. Rev. Lett. **97**, 151802 (2006) [arXiv:hep-ph/0606163]; R. N. Mohapatra and S. Nasri, “Reconciling the CAST and PVLAS Results,” Phys. Rev. Lett. **98**, 050402 (2007) [arXiv:hep-ph/0610068]; P. Brax, C. van de Bruck and A. C. Davis, “Compatibility of the chameleon-field model with fifth-force experiments, cosmology, and PVLAS and CAST results,” Phys. Rev. Lett. **99**, 121103 (2007) [arXiv:hep-ph/0703243].

# Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Prof. Holger Gies bedanken, der mit einer Vielzahl von Anregungen und Erläuterungen diese Arbeit wesentlich beförderte. Insbesondere möchte ich ihm dafür danken, dass er sich auch bei vielen Terminen immer ausreichend Zeit für meine Fragen und Probleme genommen hat.

Bei Babette Döbrich möchte ich mich ebenfalls bedanken, da sie mir mit zahlreichen Anmerkungen und Ideen, vor allem fachlicher Natur, in der Endphase der Ausarbeitung weiterhelfen konnte.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Rita Frohn, die sich als Fachfremde innerhalb kürzester Zeit durch diese Arbeit gekämpft hat. Es ist ihr Verdienst, dass eine immense Anzahl an Rechtschreibfehlern und unverständlichen Satzkonstruktionen eliminiert werden konnten.

Schließlich danke ich allen Freunden und meiner Familie, im Besonderen meinen Eltern, für die Unterstützung nicht nur während der Diplomphase, sondern während des gesamten Studiums.



# Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig erstellt und alle verwendeten Quellen angegeben habe.

Jena, 25. Juni 2010

Norman Neitz