Universität Jena Physikalisch-Astronomische Fakultät

Bachelorarbeit

Klassisch-orientierte Behandlung metrisch-affiner Gravitationstheorien mit Materie

Minou Luger

Erstgutachter: Prof. Dr. Holger Gies
Zweitgutachter: M.Sc. Julian Schirrmeister
Eingereicht am 31. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine mögliche Vereinbarkeit von allgemeiner Relativitätstheorie mit der Quantenphysik zu erreichen, ist ein zentrales Problem der modernen Physik. Um dieses anzugehen, gibt es verschiedene Ansätze zur Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie oder zur Entwicklung einer neuen Gravitationstheorie.
In dieser Arbeit wird eine Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie über einen Zusammenhang betrachtet, der Torsion und Nichtmetrizität der Raumzeit nicht ausschließt. Ziel ist es, die Raumzeit mit und ohne Materie unter klassischer Rechnung auf Torsion und Nichtmetrizität zu untersuchen.
Dafür wird zunächst die Struktur der Raumzeit anhand ihrer Bestandteile erläutert, um im Verlauf die konzeptionellen Möglichkeiten einer Erweiterung herauszuarbeiten und Unterschiede zur allgemeinen Relativitätstheorie aufzuzeigen.
Ist die Struktur der Raumzeit festgelegt, ist der Ausgangspunkt zur Erweiterung der einsteinschen Gravitationstheorie die Einstein-Hilbert-Wirkung, deren Variation nach der Metrik zu den einsteinschen Feldgleichungen führt. Diese stellen eine mathematische Verbindung zwischen der Geometrie der Raumzeit und der durch den Energie-Impuls-Tensor ausgedrückten möglichen Anwesenheit von Materie her.
Im Mittelpunkt der Erweiterung steht die Verwendung eines nicht näher spezifizierten affinen Zusammenhangs im Unterschied zum ausgezeichneten Levi-Civita-Zusammenhang der einsteinschen Theorie. Außerdem werden die durch die Feldgleichungen mit dem Energie-Impuls-Tensor verknüpften geometrischen Phänomene Torsion, Nichtmetrizität und die durch die Metrik bestimmte Krümmung eingeführt. Bei der allgemeinen Relativitätstheorie umfasst die Geometrie hingegen lediglich den metrischen Teil der Krümmung.
Ferner wird die Herleitung der einsteinschen Feldgleichungen in der allgemeine Relativitätstheorie kurz beschrieben, um später den verallgemeinerten Fall der metrisch-affinen Gravitation plausibel zu machen. Da auch durch Materie herbeigeführte Effekte untersucht werden, reicht es dabei nicht aus, nur die Vakuum-Feldgleichungen zu betrachten. Für Wechselwirkungen mit Materie werden daher Beispiele einfachster Art diskutiert.
Mit Hilfe eines Differenzentensorfeldes kann die Wirkung in die bereits bekannte Einstein-Hilbert-Wirkung der allgemeinen Relativitätstheorie und in vom Differenzentensorfeld abhängige Zusatzterme aufgeteilt werden. Für dieses wird eine separate Bewegungsgleichung gefunden, welche zu allgemeineren Feldgleichungen für die Metrik führt. Die Informationen über Torsion und Nichtmetrizität werden zuletzt noch einmal in einer Rechnung mit Materie untersucht.

Konventionen: In dieser Arbeit wird

(a) innerhalb von Produkten über doppelte Indizes, wobei ein Index oben und einer unten steht, nach Einstein-Summen-Konvention summiert,

(b) ein Einheitensystem mit $c = 1$ angenommen,

(c) für metrische Tensorfelder g eine Lorentz-Signatur $\sigma(g_{\mu\nu}) = (-, +, +, +, ...)$ verwendet,

(d) zur Angabe von Koordinaten und Tensorfeldkomponenten zwischen lateinischen Indizes in einer beliebigen Anzahl raumzeitlicher Dimensionen und griechischen Indizes speziell in vier Dimensionen unterschieden,

(e) die Ableitung einer Funktion in einer Veränderlichen mit einem Strich markiert,

(f) bei bestimmten Integralen auf Integrationsgrenzen verzichtet, wenn über den gesamten zugrundeliegenden Bereich integriert werden soll,

(g) für das Kronecker-Symbol die Definition $\delta^{ij} = \delta^{i}{}_{j} = \delta_{ij}$ mit $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ verwendet, sowie das Dirac-Delta in d Dimensionen bei $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\delta^d(x)$ bezeichnet.

2 Struktur der Raumzeit

In dieser Arbeit wird die Raumzeit als ein Kontinuum an Ereignissen angenommen. Ihre Beschreibung erfolgt durch eine Menge an Punkten, lokal definiert durch reelle Zahlentupel (x^i) mit den Raumkoordinaten für $i = 1, 2, ..., d-1$ und einer Zeitkoordinate x^0. Darüberhinaus besitzt diese Menge eine Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsstruktur.

Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Krümmung der Raumzeit mit Gravitation identifiziert. Um unphysikalische Krümmung, resultierend aus einer Einbettung in ein von außen vorgegebenes Koordinatensystem, zu vermeiden, ist das Ziel eine intrinsische und damit insbesondere koordinatenfreie Beschreibung von Krümmung, ausgedrückt in dazu geeigneten mathematischen Objekten wie beispielsweise einem metrischen Tensorfeld. Für eine solche intrinsische Beschreibung werden die Methoden der modernen Differentialgeometrie verwendet, in deren Zentrum der Mannigfaltigkeitsbegriff steht.

2.1 Topologische Struktur

Ausgangspunkt für eine koordinatenunabhängige Beschreibung ist die Abstraktion metrischer Räume unter den Gesichtspunkten der Stetigkeit, der Konvergenz sowie der lokalen Euklidizität. [1]

Mittels einer Familie offener Mengen – einer Topologie – lassen sich die oben genannten Bestandteile definieren.

Für eine Menge M und ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist eine Familie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$ von Teilmengen von M genau dann eine **Topologie**, wenn sie

(T 1) $\emptyset, M \in \mathcal{T}$,

(T 2) $\forall U, V : \big(U, V \in \mathcal{T} \;\Rightarrow\; U \cap V \in \mathcal{T} \big)$,

(T 3) $\forall (U_\alpha)_{\alpha \in I} : \big((U_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{T} \;\Rightarrow\; \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T} \big)$

erfüllt, wobei mit $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Folge von Mengen aus $\mathcal{T}$, geordnet durch eine geeignete Indexmenge I, bezeichnet wird. [1–3]

Zusammen mit der Grundmenge M ergibt das Paar $(M, \mathcal{T})$ einen **topologischen Raum**, der auf grundlegendste Weise erlaubt, die Lage von Punkten zueinander durch einen Umgebungsbegriff zu charakterisieren, sowie Stetigkeit und Konvergenz zu untersuchen, ohne auf externe Information zurückzugreifen. [1, 2, 4]

Der entscheidende Schritt, um aus einem topologischen Raum schließlich eine topologische Mannigfaltigkeit zu erhalten, ist das Konzept von lokaler Euklidizität. Wenn es zu jedem

Punkt $p \in M$ einen Homöomorphismus φ von einer offenen Umgebung um p, also einer offenen Menge die p enthält, in eine bezüglich der entsprechenden Standardtopologie offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}_0$ gibt, heißt der topologische Raum **lokal euklidisch** zum $\mathbb{R}^d$. Die Standardtopologie ist hierbei die Topologie der offenen Bälle, gemessen durch die euklidische Norm. Schließlich stellt ein zum $\mathbb{R}^d$ lokal euklidischer topologischer Raum eine **d-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit** $\mathcal{M} = (M, \mathcal{T})$ dar. [2, 3]

Die homöomorphe Abbildung φ von einer offenen Umgebung U in eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ wird **Kartenabbildung** genannt. Das Paar (U, φ) ist eine **Karte**. Im $\mathbb{R}^d$ können wieder konventionelle Koordinatensysteme verwendet werden. Daher ist für Karten auch das Synonym „Koordinatensystem“ verbreitet. Ist eine Basis $\{e_i\}$ für den $\mathbb{R}^d$ gewählt, kann für alle $q \in U$ die Auswertung $\varphi(q)$ als Tupel $\varphi(q) = x^i(q)\, e_i = (x^0(q), \dots, x^{d-1}(q))$ mit den Komponenten $x^i(q) \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Diese Koordinaten heißen **lokale Koordinaten** $(U, \varphi) = (U, x^i)$. [2–4]

Alle Karten können in einer Familie $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \,|\, \alpha \in I\}$ zusammengefasst werden, welche den Namen **Atlas** bekommt, wobei I eine geeignete Indexmenge darstellt. Die vereinigten Kartengebiete $\{U_\alpha\}$ müssen dabei mindestens die gesamte Menge M der Mannigfaltigkeit bezüglich Inklusion abdecken. [2, 3, 5]

2.2 Glatte Mannigfaltigkeiten

Glatte topologische Mannigfaltigkeiten sind für eine vollständige analytische und physikalische Beschreibung über die Wahl einer geeigneten Topologie hinaus noch mit einer weiteren Struktur versehen, welche das Differenzieren auf und zwischen Mannigfaltigkeiten ermöglicht. Dies ist eine sogenannte glatte Struktur, deren wichtigstes Merkmal die Glattheit von Koordinatentransformationen ist. [3, 5]

Zunächst soll definiert werden, was unter einer Koordinatentransformation beziehungsweise einem Kartenwechsel zu verstehen ist. Dafür seien (U, φ_U) und (V, φ_V) mit $U \cap V \neq \emptyset$ zwei sich überlappende Karten in $\mathcal{M}$. Die **Kartenwechsel** bestimmen sich durch die Abbildungen

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}: \quad \mathbb{R}^d \supseteq \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^d, \tag{2.1}$$

$$\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}: \quad \mathbb{R}^d \supseteq \varphi_V(U \cap V) \to \varphi_U(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^d. \tag{2.2}$$

Die Karten heißen **glatt verträglich**, wenn die Kartenwechsel zwischen ihnen glatt, also beliebig oft differenzierbar sind. Werden die glatt verträglichen Karten in einem Atlas zusammengefasst, wird dieser zu einem glatten Atlas. Die bezüglich Inklusion eindeutig bestimmte maximale Kollektion an glatt verträglichen Karten in diesem Atlas wird **glatte Struktur** $\mathfrak{A}$ genannt. [2, 3, 5, 6]

Das Tripel $(M, \mathcal{T}, \mathfrak{A})$ ist eine **d-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit**. In den kommenden Betrachtungen wird von dieser kollektiven Struktur grundsätzlich ausgegangen und eine solche begrifflich als **Mannigfaltigkeit** $\mathcal{M}$ abgekürzt. [2]

Abschließend folgen wichtige Begriffserklärungen. Dafür sei f eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen einer m-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = (M, \mathcal{T}_M)$ und einer n-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit $\mathcal{N} = (N, \mathcal{T}_N)$.

Die **Koordinatendarstellung** von f ergibt sich für zwei jeweils gewählte Karten (U, φ_U) in $\mathcal{M}$ und (V, φ_V) in $\mathcal{N}$ mit $f(U) \subseteq V$ aus $\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \mathbb{R}^m \supseteq \varphi_U(U) \to \varphi_V(f(U)) \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Abbildung f heißt **differenzierbar**, wenn sie in allen Koordinatendarstellungen differenzierbar ist. Die Differenzierbarkeit von f ist unabhängig von der Wahl lokaler Koordinaten. [2, 3]

Sei f nun ein Homöomorphismus. Wenn das Inverse $\varphi_U \circ f^{-1} \circ \varphi_V^{-1}$ von $\varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}$ existiert und beide Abbildungen beliebig oft differenzierbar sind, dann wird f ein **Diffeomorphismus** genannt. Die Mannigfaltigkeiten zwischen denen f abbildet, können in diesem Fall glatt ineinander umgeformt werden; sie sind zueinander **diffeomorph**. Wenn $\mathcal{M}$ eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit mit glatter Struktur $\mathfrak{A}$ ist, so sind sämtliche Kartenabbildungen Diffeomorphismen. [3]

Als einfachster nicht-trivialer Fall ist beispielsweise der $\mathbb{R}^d$ selbst eine Mannigfaltigkeit, welche durch eine einzige globale Karte $(\mathbb{R}^d, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d})$ die sogenannte glatte Standardstruktur eindeutig bestimmt. Darüber hinaus ist jeder auf diese Weise erzeugte Kartenwechsel per Konstruktion ein Diffeomorphismus. [3, 5]

Glatte Funktionen sind beliebig oft differenzierbare Abbildungen der Form $M \to \mathbb{R}$. Der lineare Raum aller glatten Funktionen auf M ist mit $C^\infty(M)$ bezeichnet. Darüber hinaus heißen glatte Abbildungen von einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ nach M **glatte Kurven**. [2, 6]

2.3 Algebraische Strukturen auf Mannigfaltigkeiten

Zur Einführung vektorieller und tensorieller physikalischer Größen soll in diesem Abschnitt der bereits diskutierte mathematische Rahmen um zusätzliche algebraische Strukturen erweitert werden. Ihre Definitionen erfolgen zunächst nur punktuell, bevor sie im nächsten Abschnitt global fortgesetzt werden.

2.3.1 Vektoren

Auf Mannigfaltigkeiten werden Vektoren als Tangentialvektoren – oder kurz Tangenten – verstanden. Diese **Tangentialvektoren** sind Richtungsableitungen einer Funktion in Richtung einer Kurve.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $p \in M$ ein Punkt und $\gamma : I \to M$, $\lambda \mapsto \gamma(\lambda)$ eine glatte Kurve auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Die Kurve sei so gewählt, dass sie durch den Punkt p verläuft, es gibt also ein $\lambda_p \in I$ mit $\gamma(\lambda_p) = p$. Die **Richtungsableitung** einer glatten Funktion $f \in C^\infty(M)$ in Richtung γ bei p ist definiert durch die lineare Abbildung

$$V_{p,\gamma} : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto V_{p,\gamma}(f) := (f \circ \gamma)'(\lambda_p). \tag{2.3}$$

Erfüllt die Abbildung $V_{p,\gamma}$ die Leibnizregel, handelt es sich um eine sogenannte **Derivation**. Da für jede Derivation in einem Punkt eine Kurve gefunden werden kann, für welche die Derivation äquivalent zu einer Richtungsableitung ist, kann die Kurve auch weggelassen und V_p statt $V_{p,\gamma}$ geschrieben werden. [2, 3, 6]

Die Menge aller Derivationen an einem Punkt p kann auf kanonische Weise selbst zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ erhoben werden – dem mit T_pM bezeichneten **Tangentialraum**. Dieser hat die gleiche Dimension wie die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ selbst. Die Elemente von T_pM sind die **Tangentialvektoren**, die auch nur als Vektoren bezeichnet werden. [6, 7]

Durch einen Satz lokaler Koordinaten (U, x^i) um p wird stets eine **Koordinatenbasis** von T_pM induziert, deren Basiselemente durch $e_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ gegeben sind. Ein Vektor V_p kann dann in der Form $V_p = V_p^i\, e_i(p)$ durch seine **Komponenten** $V_p^i \in \mathbb{R}$ ausgedrückt werden. Zwischen Koordinaten kann mittels der Transformationsformel $\tilde{V}_p^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\big|_p V_p^j$ gewechselt werden. Zu beachten ist hierbei, dass Vektoren an sich kartenfreie Objekte sind, das heißt $V_p = V_p^i e_i(p) = \tilde{V}_p^i \tilde{e}_i(p) = \tilde{V}_p$. [3, 7]

2.3.2 Kovektoren

Der **Kotangentialraum** T_p^*M ist der Dualraum des Tangentialraums und kann somit für eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ an jedem Punkt p definiert werden. Seine Elemente sind die **Kovektoren**, also lineare Funktionen $w : T_pM \to \mathbb{R}$, die jedem Vektor bei p eine Zahl zuordnen.

Jede Koordinatenbasis induziert auf eindeutige Weise eine **duale Basis** für T_p^*M mit Elementen $e^i(p) = \mathrm{d}_p x^i$ definiert durch $\mathrm{d}_p x^i(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p) := \delta^i{}_j$. Daher lautet die Komponentenschreibweise für Kovektoren $w_p = w_i(p)\, \mathrm{d}_p x^i$, wobei mittels $\tilde{w}_i(p) = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\big|_p w_j(p)$ zwischen unterschiedlichen lokalen Koordinaten transformiert werden kann. [3, 7]

2.3.3 Tensoren

Tensoren sind multilineare Abbildungen, die r Kopien des Kotangentialraums und s Kopien des Tangentialraums auf eine Zahl abbilden:

$$A_p{}^{(r,s)} : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad r, s \in \mathbb{N}_0. \tag{2.4}$$

Im Fall $r = 0 = s$ reduziert sich $A_p{}^{(r,s)} = A_p{}^{(0,0)} \in \mathbb{R}$ auf eine Zahl.

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller (r, s)-Tensoren an einem Punkt p wird (r, s)**-Tensorraum** $T_s^r(T_pM)$ genannt. Eine Basis des Tensorraums ergibt sich aus dem Tensorprodukt einer Vektorraumbasis $\{e_i(p)\}$ für T_pM und der dazugehörigen dualen Basis $\{e^i(p)\} \subseteq T_p^*M$. Mit den Komponenten $A_p{}^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}$ kann jeder (r, s)-Tensor mit Hilfe des Tensorprodukts $\otimes$ dargestellt werden:

$$A_p{}^{(r,s)} = A_p{}^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s}\, e_{i_1}(p) \otimes \cdots \otimes e_{i_r}(p) \otimes e^{j_1}(p) \otimes \cdots \otimes e^{j_s}(p). \tag{2.5}$$

Die Transformationsregel der Tensorkomponenten bestimmt sich aus den Regeln für Kovektoren und Vektoren zu [2, 7]:

$$\tilde{A}_p{}^{i_1 \ldots i_r}{}_{j_1 \ldots j_s} = \frac{\partial \tilde{x}^{i_1}}{\partial x^{m_1}} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^{i_r}}{\partial x^{m_r}} \frac{\partial x^{n_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{n_s}}{\partial \tilde{x}^{j_s}} A_p{}^{m_1 \ldots m_r}{}_{n_1 \ldots n_s}. \tag{2.6}$$

2.4 Vektorbündel auf Mannigfaltigkeiten

Vektorbündel ermöglichen eine Verbindung zwischen Vektorräumen an unterschiedlichen Punkten auf einer Mannigfaltigkeit. Diese Verbindung ist Ausgangspunkt für die Definition eines Zusammenhangs.

Die Konzeption von Vektorbündeln setzt zunächst die kanonische Konstruktion eines Vektorraums E_p an jedem Punkt p einer Mannigfaltigkeit voraus. Die Grundmenge für ein Vektorbündel auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist dabei die disjunkte Vereinigung aller Vektorräume E_p über $\mathcal{M}$. Mithilfe einer Projektionsabbildung ist es dabei stets möglich von den einzelnen Vektorräumen E_p zurück auf die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ abzubilden. Das Konstrukt aus Vektorräumen über $\mathcal{M}$, Projektionsabbildung und Basismannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist der Ausgangpunkt für die sogenannten Obermannigfaltigkeit $\mathcal{E}$ und ist überdies auf kanonische Weise ausgestattet mit einer glatten Struktur. [2, 6]

Ein **glattes Vektorbündel** der Dimension d besteht aus einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, einer Obermannigfaltigkeit $\mathcal{E}$ zur Grundmenge E, sowie einer glatten Abbildung $\pi : E \to M$ zwischen diesen. Diese Abbildung ist zumeist die Projektion auf die erste Komponente, $\pi(p, v_p) := p$ für $p \in M$ und $v_p \in E_p$, sofern E punktweise die Gestalt $\{p\} \times E_p$ vorweist. In Bezug auf eine Umgebung U um p sei zudem $\pi_U : U \times \mathbb{R}^d \to U$ die lokale Projektion auf die erste Komponente. Erfüllt die Abbildung folgende Eigenschaften:

(π 1) für jeden Punkt $p \in M$ ist das Urbild $\pi^{-1}(p) = E_p \subset E$ von der Struktur eines d-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums,

(π 2) für jeden Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung U um p und ein Diffeomorphismus $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^d$, sodass $\pi_U \circ \Phi = \pi$ auf $\pi^{-1}(U)$ gilt,

(π 3) für jedes $q \in U$ wird der Diffeomorphismus Φ zu einem linearen Isomorphismus von E_q nach $\{q\} \times \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$,

so ist das Tripel $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \pi)$ ein glattes Vektorbündel vom Rang d über $\mathcal{M}$. Die Vektorräume über jedem Punkt $p \in M$ werden aus anschaulichen Gründen auch **Fasern** genannt und der in (π 2) beschriebene Diffeomorphismus **lokale Trivialisierung**. [2, 6]

Die Projektionsabbildung π parametrisiert die Vektorräume über $\mathcal{M}$ mit den Punkten aus M. Da alle Vektoren einer Faser auf den Punkt, aus welchem sie entspringen, abgebildet werden, ist π surjektiv. Auf diese Weise entsteht eine Freiheit in der Zuordnung von Faserelementen zu jedem Punkt in M. Das motiviert eine Abbildung $s : M \to E$, die die Bedingung $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$ erfüllt, wobei id_M die Identität auf M sei. Sie wird in Analogie zu der Faservorstellung ein **Schnitt** genannt. Für eine glatte Abbildung s bekommt der Schnitt entsprechend die Bezeichnung glatter Schnitt. Der Vektorraum aller glatten Schnitte in E wird mit $\Gamma(E)$ notiert. Schnitte ordnen damit effektiv jedem Punkt $p \in M$ ein Element aus E_p zu und verallgemeinern auf diese Weise die in den vorherigen Abschnitten eingeführten Begriffe zu Vektoren, Kovektoren und Tensoren auf ihre entsprechenden Feldvarianten. [2, 8]

Demnach sind Vektorfelder die glatten Schnitte im Vektorbündel über den Tangentialräumen. Dieses Vektorbündel ist das **Tangentialbündel** $T\mathcal{M}$ über $\mathcal{M}$, das wichtigste Bündel für die folgenden Betrachtungen. Auf jeder Mannigfaltigkeit lässt sich das (Ko-)Tangentialbündel als Vektorbündel der (Ko-)Tangentialräume definieren. Folglich können daraus gemäß des Tensorprodukts die (r, s)-Tensorbündel konstruiert werden. [3, 6]

Der Ausgangspunkt für das Tangentialbündel ist die Grundmenge TM, gegeben durch die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume über $\mathcal{M}$:

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM = \bigcup_{p \in M} \{(p, V_p) \,|\, V_p \in T_pM\}\,. \tag{2.7}$$

Die Projektionsabbildung für das Tangentialbündel ist wie folgt definiert:

$$\pi : TM \to M,\ (p, V_p) \mapsto \pi(p, V_p) := p. \tag{2.8}$$

Die glatte Struktur auf der Basismannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ induziert mithilfe von π eine glatte Struktur auf TM. Damit wird TM schließlich selbst zu einer glatten Mannigfaltigkeit. [6]

Die zugrundeliegenden Vektorräume sind nun im speziellen Tangentialräume und erfüllen damit bereits (π 1). Die glatte Struktur von $\mathcal{M}$ induziert eine glatte Struktur auf der Menge TM. Für lokale Koordinaten (U, x^i) lässt sich jeder Punkt $p \in U$ und Vektor $V_p \in T_pM$ durch ihre Komponentenfunktionen, bestehend aus jeweils d reellen Zahlen erfassen. Kombiniert ergibt sich für jeden Punkt in TM eine lokale Darstellung als $2d$-Tupel der Form

$$(p, V_p) \mapsto \left(x^0(p), \ldots, x^{d-1}(p), V_p^0, \ldots, V_p^{d-1}\right). \tag{2.9}$$

Aus dem so induzierten Atlas ergibt sich schließlich die in (π 2) aufgeführte lokale Trivialisierung für alle $p \in M$. Abschließend ist (π 3) offenbar auch erfüllt, sodass das Tangentialbündel $(T\mathcal{M}, \mathcal{M}, \pi)$ tatsächlich ein glattes Vektorbündel der Dimension $2d$ beschreibt. [3, 6]

Aufgrund der besonderen Stellung wird die auf kanonische Weise zu einem $\mathbb{R}$-linearen Raum erweiterte Menge $\Gamma(TM)$ der glatten Schnitte im Tangentialbündel – auch **glatte Vektorfelder** genannt – üblicherweise durch $\mathfrak{X}(M)$ gekennzeichnet. Analog ist $\mathfrak{X}^*(M)$ als Raum der **glatten Kovektorfelder** zu verstehen. [3, 6]

2.5 Zusammenhänge auf Vektorbündeln

Vektorbündel und deren Schnitte erlauben es nun einen Zusammenhang zu definieren. Dieser liefert eine intrinsische Richtungsableitung von Vektorfeldern, die kovariante Ableitung. Die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes schafft die Möglichkeit, Krümmung intrinsisch zu beurteilen. Dieser spezielle Zusammenhang wird später genauer untersucht, aber soll hier als Motivation für das Konzept des Zusammenhangs im Allgemeinen dienen.

Sei $\pi : E \to M$ ein glattes Vektorbündel, $\Gamma(E)$ der Raum aller glatten Schnitte in E und $\mathfrak{X}(M)$ der Raum aller glatten Vektorfelder auf M. Elemente aus $\mathfrak{X}(M)$ werden mit U, V, W bezeichnet, während Elemente aus $\Gamma(E)$ mit X, Y, Z gekennzeichnet werden. Ein **Zusammenhang** in E ist eine Abbildung

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E), \quad (V, X) \mapsto \nabla(V, X) \equiv \nabla_V X, \tag{2.10}$$

mit den Eigenschaften [9]:

(∇ 1) $\mathbb{R}$-Linearität im zweiten Argument:

$$\nabla_V(a_1 X_1 + a_2 X_2) = a_1 \nabla_V X_1 + a_2 \nabla_V X_2 \tag{2.11}$$

für $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$; $X_1, X_2 \in \Gamma(E)$ und $V \in \mathfrak{X}(M)$,

(∇ 2) $C^\infty(M)$-Linearität im ersten Argument:

$$\nabla_{f_1V_1+f_2V_2}X = f_1\nabla_{V_1}X + f_2\nabla_{V_2}X \tag{2.12}$$

für $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$; $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}(M)$ und $X \in \Gamma(E)$,

(∇ 3) Produktregel für $f \in C^\infty(M)$:

$$\nabla_V(fX) = V(f)X + f\,\nabla_V X. \tag{2.13}$$

Hierbei meint $V(f)$ die glatte Funktion $p \mapsto V(f)(p) := V_p(f)$.

Sei (U, x^i) eine Karte auf $\mathcal{M}$. Für die lokale Darstellung des Zusammenhangs ist die Anwendung von ∇ auf die Basisvektorfelder $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, welche in jedem Punkt $p \in U$ eine Koordinatenbasis des jeweiligen Tangentialraums T_pM definieren, durch einen Satz von insgesamt d^3 glatten Funktionen $U \to \mathbb{R}$ definiert:

$$\nabla_i e_j \equiv \nabla_{e_i} e_j = e_\ell C^\ell{}_{ij} \tag{2.14}$$

Dabei sind die $C^\ell{}_{ij}$ die **Zusammenhangskoeffizienten**.

Die durch den Zusammenhang gegebene Ableitung $\nabla_V X$ wird **kovariante Ableitung von** X **in Richtung** V genannt. [3, 9]

2.6 Metrik

Zur Vollendung der Raumzeit wird die noch verbleibende Struktur auf Mannigfaltigkeiten definiert; die Metrik, die in der einsteinschen Theorie das klassische Gravitationsfeld ersetzt. Bisher wurde besonderes Augenmerk darauf gelegt, bei der Definition struktureller Objekte auf extrinsische Information, wie Winkel und Längen, zu verzichten. Für eine vollständige Beschreibung braucht es nun eine zusätzliche Struktur, um Abstände in der Raumzeit zu charakterisieren.

Aus dieser Notwendigkeit ergibt sich eine Intuition, was genau von der Metrik erwartet wird: Sie soll einen infinitesimalen, unter Koordinatentransformation invarianten, Quadratabstand liefern. Genauer soll die Metrik ein Skalarprodukt ermöglichen. [7]

Eine infinitesimale Raumzeit-Verschiebung mündet in dem Konzept von Tangentialvektoren. Dieser Gedanke, zusammen mit der Forderung nach einem Skalarprodukt, motiviert eine lineare Abbildung $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ und damit einen $(0,2)$-Tensor. [7]

Im $\mathbb{R}^d$ wird das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$ zweier Vektorfelder V, W definiert durch die Summe der Produkte ihrer Komponenten:

$$\langle V, W \rangle_{\mathbb{R}^d} = \sum_{i=1}^{d} V^i W^i. \tag{2.15}$$

Zur Verallgemeinerung auf eine Mannigfaltigkeit, wird für jeden Punkt das Skalarprodukt auf dem jeweiligen Tangentialraum definiert. Die Metrik nimmt an jedem Punkt zwei Elemente aus dem Tangentialraum und bildet sie bilinear auf eine Zahl ab. Lokal beschreibt die Metrik damit einen $(0, 2)$-Tensor und global ein $(0, 2)$-Tensorfeld. In lokalen Koordinaten ergibt sich die Darstellung:

$$g \equiv \mathrm{d}s^2 = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j. \tag{2.16}$$

Die Schreibweise $\mathrm{d}s^2$ ist inspiriert durch den Bezug zum infinitesimalen Abstand. In der physikalischen Literatur wird das Tensorprodukt der Basis üblicherweise nicht ausgeschrieben und die Koeffizienten g_{ij} werden oft selbst als Metrik bezeichnet. Das Inverse der Metrik wird als g^{ij} angegeben und meint die Komponenten der Inversen zur Matrix (g_{ij}). [3, 10]

Die Metrik ist symmetrisch, entsprechend gilt $g(V, W) = g(W, V)$ für alle Vektorfelder $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Zudem ist sie nicht entartet: Gilt für festes $W \in \mathfrak{X}(M)$ die Gleichung $g(V, W) = 0$ für alle Vektorfelder $V \in \mathfrak{X}(M)$, dann folgt stets $W = 0$. [3]

In dieser Arbeit wird für die Beschreibung der Raumzeit eine **Lorentzmetrik**, ausgezeichnet durch die Signatur $(-, +, +, +, \dots)$, verwendet. Eine positiv definite Metrik wird als Riemannmetrik bezeichnet und es lassen sich mit ihr Längen im anschaulichen Sinne definieren. [10]

Für das Skalarprodukt zweier Vektorfelder $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ ergibt sich:

$$\langle V, W \rangle_g := g_{ij}\, V^i W^j. \tag{2.17}$$

Die Metrik erzeugt einen Isomorphismus zwischen TM und T^*M, der Grundmenge des als Dualraum des Tangentialbündels verstandenen Kotangentialbündels $T^*\mathcal{M}$, sodass gilt [3]:

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^{\ j}, \qquad g^{ik} g_{kj} = \delta^i_{\ j}, \tag{2.18}$$

$$w_i = g_{ij} w^j, \qquad V^i = g^{ij} V_j. \tag{2.19}$$

Diese Relationen beschreiben das sogenannte Indexziehen, das als abstrakte Operation einen Übergang zwischen Vektor- und Kovektorfeldern und umgekehrt charakterisiert.

3 Metrisch-Affine Gravitationstheorie

Eine metrisch-affine Gravitationstheorie ist eine Beschreibung der Raumzeit, ausgestattet mit einem beliebigen Zusammenhang im Tangentialbündel. Die allgemeine Relativitätstheorie ist aufgebaut auf dem Spezialfall eines torsionsfreien und metrischen Zusammenhangs, dem Levi-Civita-Zusammenhang. Eine Raumzeit, gegeben durch die bereits diskutierten Elemente Menge, Topologie, glatte Struktur und Metrik, zusammen mit dem durch die Metrik eindeutig festgelegtem Levi-Civita-Zusammenhang, lässt als einzige Variable die Metrik übrig – im Gegensatz zur metrisch-affinen Gravitationstheorie, in der die Metrik und der Zusammenhang als unabhängige Veränderliche aufgefasst werden. Die Verwendung eines arbiträren Zusammenhangs erlaubt eine Untersuchung der Torsion sowie der Nichtmetrizität der Raumzeit. Es wird die daraus notwendige Erweiterung der einsteinschen Feldgleichungen hergeleitet, indem die metrisch-affine Version der Einstein-Hilbert-Wirkung eingeführt und nach der inversen Metrik variiert wird. An drei Beispielen wird der Effekt von Materiefreiheitsgraden nachvollzogen. Dem vorangehend werden zunächst der affine Zusammenhang definiert sowie die damit verknüpften natürlichen Größen Krümmung, Torsion und Nichtmetrizität auf Mannigfaltigkeiten erläutert.

3.1 Affiner Zusammenhang

Ein affiner Zusammenhang ist eine Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ mit folgenden Eigenschaften [10]:

$$(\nabla\ 1) \qquad \nabla_U(V+W) = \nabla_U V + \nabla_U W, \tag{3.1}$$
$$(\nabla\ 2) \qquad \nabla_{(U+V)} W = \nabla_U W + \nabla_V W, \tag{3.2}$$
$$(\nabla\ 3) \qquad \nabla_{(fU)} V = f \nabla_U V, \tag{3.3}$$
$$(\nabla\ 4) \qquad \nabla_U(fV) = U(f)V + f\nabla_U V. \tag{3.4}$$

Dabei sind $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M)$.

In Koordinatenschreibweise für eine Karte (U, x^i) ergibt sich

$$\nabla_i e_j = e_k {\Gamma^k}_{ij} \tag{3.5}$$

mit der Koordinatenbasis $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ und den Zusammenhangskoeffizienten, die jetzt speziell für Zusammenhänge im Tangentialbündel ${\Gamma^k}_{ij}$ anstatt ${C^k}_{ij}$ heißen. [10]

Die kovariante Ableitung bezüglich eines affinen Zusammenhangs ist eine Ableitung von Tangentialvektorfeldern, deren Ergebnis wieder Element des Raumes der glatten Vektorfelder ist. Für beliebige Vektorfelder $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ ergibt sich [3]:

$$\nabla_V W = V^i \nabla_i (W^j e_j) = V^i \left(\frac{\partial W^k}{\partial x^i} + W^j \Gamma^k{}_{ij} \right) e_k. \tag{3.6}$$

Die kovariante Ableitung lässt sich wie folgt auf Tensorfelder erweitern [3]:

$$\begin{aligned} \nabla_i T^{k_1 \dots k_r}{}_{j_1 \dots j_s} &= \partial_i T^{k_1 \dots k_r}{}_{j_1 \dots j_s} \\ &+ \Gamma^{k_1}{}_{il} T^{l\, k_2 \dots k_r}{}_{j_1 \dots j_s} + \dots + \Gamma^{k_r}{}_{il} T^{k_1 \dots k_{r-1}\, l}{}_{j_1 \dots j_s} \\ &- \Gamma^l{}_{ij_1} T^{k_1 \dots k_r}{}_{l\, j_2 \dots j_s} - \dots - \Gamma^l{}_{ij_s} T^{k_1 \dots k_r}{}_{j_1 \dots j_{s-1}\, l}\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Werden darüber hinaus die später genauer erläuterten Forderungen nach metrischer Kompatibilität $\nabla_k g_{ij} = 0$ und Torsionsfreiheit $\Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji} = 0$ erfüllt, so ist ∇ der durch g bestimmte Levi-Civita-Zusammenhang $\mathring{\nabla}$ und die abstrakten Zusammenhangskoeffizienten können lokal konkret durch

$$\mathring{\Gamma}^k{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \tag{3.8}$$

angegeben werden. Sie werden als **Christoffel-Symbole** bezeichnet. [3]

3.2 Krümmung

Die Krümmung einer Kurve quantifiziert, wie weit diese von einer Geraden abweicht. Im euklidischen Raum zeichnen sich Geraden dadurch aus, dass der Paralleltransport eines Tangentialvektors diesen unverändert lässt. Zudem kann eine Parametrisierung gefunden werden, sodass die zweite Ableitung der Geraden verschwindet.

Da Kurven auf Mannigfaltigkeiten deren möglicher Krümmung folgen müssen, können Kurven nicht mehr in Bezug auf Geraden beurteilt werden, sondern in Bezug auf Geodäten, die verallgemeinerten Geraden in gekrümmten Räumen. Dadurch wird der Paralleltransport eines Vektors zwischen zwei Punkten auf einer gekrümmten Mannigfaltigkeit abhängig von der Wahl der Kurve.

Ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ wird entlang einer glatten Kurve $\gamma : I \to M$, $\lambda \mapsto \gamma(\lambda)$ **parallel transportiert**, wenn es keine Änderung in Bezug auf das Tangentialvektorfeld $\dot{\gamma}$ der Kurve aufweist, wobei für eine Karte (U, φ) und der Projektion auf die i-te Komponente $\pi^i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit lokalen Koordinaten $x^i = \pi^i \circ \varphi$ die Relation $\dot{\gamma}(\lambda) := (x^i \circ \gamma)'(\lambda) \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\gamma(\lambda)} = \gamma^{i\,\prime} \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\gamma(\lambda)}$ für alle $\lambda \in I$ gilt. Mittels eines affinen Zusammenhangs ∇ wird eine kovariante Ableitung formuliert, die durch die Bedingung

$$\nabla_{\dot{\gamma}} V = 0 \tag{3.9}$$

einen Paralleltransport auf einer Mannigfaltigkeit definiert. [3]

Sei (U, x^i) eine Karte auf $\mathcal{M}$, dann ist die Komponentenschreibweise für den Paralleltransport eines glatten Vektorfelds V entlang einer Kurve $[a,b] \ni \lambda \mapsto \gamma(\lambda)$ gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}V^k}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^k{}_{ij}\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}\lambda}V^j = 0 \tag{3.10}$$

zur Anfangsbedingung $V(a) = V_0 \in T_{\gamma(a)}M$.

Wird für $I = [a,b]$ der Tangentialvektor $\dot\gamma(a) \in T_{\gamma(a)}M$ selbst entlang der Kurve γ paralleltransportiert, also gilt

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0, \tag{3.11}$$

dann ist γ eine Geodäte. Da die erste Ableitung einer Kurve γ an einem Punkt $p = \gamma(a)$ durch den Tangentialvektor $\dot\gamma(a) \in T_pM$ ausgedrückt wird, entspricht (3.11) auch der zweiten Anschauung über verschwindende Krümmung: Die zweite Ableitung, hier durch die kovariante Ableitung nach dem Tangentialfeld der Kurve gegeben, verschwindet. [2, 3]

Die gesamte Information über intrinsische Krümmung auf Mannigfaltigkeiten wird durch einen sogenannten **Krümmungsendomorphismus** formalisiert:

$$\begin{aligned} &R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M); \\ &R(U,V)W := \nabla_U(\nabla_V W) - \nabla_V(\nabla_U W) - \nabla_{[U,V]}W, \end{aligned} \tag{3.12}$$

wobei $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ und $[U,V]$ die Kommutator-Lie-Klammer darstellt. [2, 10]

Lokal ergibt sich ein (1,3)-Tensorfeld

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^l{}_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l} \tag{3.13}$$

mit den Komponenten

$$R^l{}_{ijk} = \partial_i\Gamma^l{}_{jk} - \partial_j\Gamma^l{}_{ik} + \Gamma^q{}_{jk}\Gamma^l{}_{iq} - \Gamma^q{}_{ik}\Gamma^l{}_{jq}. \tag{3.14}$$

Die Koeffizienten $R^l{}_{ijk}$ definieren den Krümmungsendomorphismus vollständig. Er ist ein (1,3)-Tensorfeld und transformiert sich gemäß (2.6). Er repräsentiert die globale Krümmung der Mannigfaltigkeit. Wird ein Vektor auf einer geschlossenen Kurve parallel transportiert, so ist die Änderung entlang dieser Kurve proportional zu den Komponenten des Krümmungsendomorphismus $R^l{}_{ijk}$. Die Spurbildung von $R^l{}_{ijk}$ durch Kontraktion der Indizes,

$$R_{ik} := R^l{}_{ilk}, \tag{3.15}$$

ergibt ein (0,2)-Tensorfeld, den **Krümmungstensor**, welcher die Informationen des komplizierten Krümmungsendomorphismus auf wenige Komponenten kondensiert. [3, 9]

3.3 Torsion und Nichtmetrizität

Während Abweichungen im Paralleltransport die Krümmung der Mannigfaltigkeit beurteilen, trifft die Torsion, definiert durch den Kommutator der kovarianten Ableitung eines Gradientenfeldes, eine Aussage über die Unebenheit einer von Tangentialvektoren $V_p, W_p \in T_pM$ aufgespannten Fläche. [2]

Sei ∇ ein affiner Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Wirken zwei kovariante Ableitungen auf ein glattes Skalarfeld ϕ, so misst der Torsionstensor mit Komponenten $T^k{}_{ij}$, wie stark die zweite kovariante Ableitung angewandt auf ϕ vom Kommutieren abweicht [11]:

$$\nabla_i(\partial_j\phi) - \nabla_j(\partial_i\phi) = T^k{}_{ij}(\partial_k\phi)\,. \tag{3.16}$$

Für Vektorfelder ergibt sich das Torsionstensorfeld bezüglich ∇ für eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ aus [3]

$$T\,:\,\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M);\quad (V,W)\mapsto T(V,W) := \nabla_V W - \nabla_W V - [V,W]\,, \tag{3.17}$$

mit den Torsionskoeffizienten $T^k{}_{ij}$ gegeben durch:

$$T^k{}_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\,,\,\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = (\Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{3.18}$$

Der Ausdruck $\nabla_V W - \nabla_W V$ charakterisiert den Unterschied der Änderung der Tangentialvektorfelder in Richtung des jeweilig anderen Vektorfeldes und damit die Änderung der von den Tangentialvektoren aufgespannten Fläche. Da Vektorfelder im Allgemeinen nicht kommutieren, kommt aus dem Kommutator der zweiten kovarianten Ableitung die Lie-Klammer $[V,W]$ der ausgewählten Vektorfelder hinzu:

$$\begin{aligned}\nabla_V W - \nabla_W V &= V^iW^j(\Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji}) + \left(V^i\frac{\partial W^j}{\partial x^i} - W^i\frac{\partial V^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\\ &= V^iW^j(\Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji}) + [V,W].\end{aligned} \tag{3.19}$$

Die Torsion soll, wie auch die Krümmung, ausschließlich das Erzeugnis der durch den affinen Zusammenhang induzierten Geometrie sein. Da die Lie-Klammer $[V,W]$ aus der Wahl der Tangentialvektorfelder folgt, wird sie in (3.17) abgezogen. [2]

Die letzte Größe, um alle geometrischen Abweichungen von der flachen Raumzeit zu vervollständigen, ist das als Nichtmetrizität bezeichnete Tensorfeld $Q(U,V,W) := (\nabla_U g)(V,W)$ für

$U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ mit den Koeffizienten $Q_{ijk} = Q(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k})$. Ein Zusammenhang ist genau dann mit der Metrik kompatibel, wenn gilt:

$$Q_{ijk} \equiv \nabla_i g_{jk} = 0. \tag{3.20}$$

Ist das nicht der Fall, spricht man von Nichtmetrizität. Dabei gibt $Q(\Gamma, g)$ wieder, wie sich die durch g ermittelte Länge eines parallel transportierten Vektors ändert. [12, 13]

3.4 Metrisch-Affine Version der Einstein-Hilbert-Wirkung

Die Struktur der Raumzeit wurde in ihren Bestandteilen ausformuliert und die auf ihr definierte Krümmung soll nun durch die einsteinschen Feldgleichungen mit der Gravitation in Verbindung gesetzt werden.

Für eine Beschreibung der Raumzeit über die einsteinschen Feldgleichungen wird eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit Lorentzmetrik g und Levi-Civita-Zusammenhang $\mathring{\nabla}$ vorausgesetzt. Lokal wird die Metrik g durch ihre Komponentenmatrix $(g_{\mu\nu})$ und der Levi-Civita-Zusammenhang durch die Christoffel-Symbole $\mathring{\Gamma}^k{}_{ij}$ repräsentiert.

Zur Herleitung der einsteinschen Feldgleichungen wird die Einstein-Hilbert-Wirkung [10],

$$S_{\mathrm{EH}}[g] = \frac{1}{16\pi G} \int (\mathring{R} - 2\Lambda) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x, \tag{3.21}$$

nach der inversen Metrik $(g^{\mu\nu})$ variiert:

$$\begin{aligned} \delta_{g^{-1}} S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int \Big\{ &(\delta g^{\mu\nu}) \mathring{R}_{\mu\nu} \sqrt{-g} + g^{\mu\nu} (\delta_{g^{-1}} \mathring{R}_{\mu\nu}) \sqrt{-g} \\ &+ (\mathring{R} - 2\Lambda)(\delta_{g^{-1}} \sqrt{-g}) \Big\} \, \mathrm{d}^4 x. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dabei ist das Integrationsmaß durch $\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4 x$, zusammengesetzt aus der Dichte $\sqrt{-g}$ und dem differentiellen Lebesgue-Maß $\mathrm{d}^4 x$ auf dem $\mathbb{R}^4$, gegeben. Ferner ist G die Newtonsche Gravitationskonstante, Λ die kosmologische Konstante, $\mathring{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor und $g^{\mu\nu} \mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}$ der Ricci-Skalar. [10, 14]

Unter Annahme einer Mannigfaltigkeit ohne topologischen Rand und zur Hilfenahme von [10]

$$\delta_{g^{-1}} \mathring{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = \mathring{\nabla}_\lambda \delta_{g^{-1}} \mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_\nu \delta_{g^{-1}} \mathring{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\lambda}, \tag{3.23}$$

$$\delta_{g^{-1}} \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{3.24}$$

folgt dann:

$$\delta_{g^{-1}} S_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int \Big\{ \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\mathring{R} - 2\Lambda) \Big\} \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu}\, \mathrm{d}^4 x. \tag{3.25}$$

Nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung $\delta_{g^{-1}} S_{\mathrm{EH}} = 0$ ergeben sich die Vakuum-Feldgleichungen:

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\mathring{R} - 2\Lambda) = 0. \tag{3.26}$$

In Anwesenheit von Materie wird die daraus folgende Quelle der Gravitation durch den Energie-Impuls-Tensor mit den Komponenten $T_{\mu\nu}$ ausgedrückt. Dieser ergibt sich aus der Variation der Wirkung erweitert um eine Lagrangedichte, welche die Materie beschreibt. Für die Feldgleichungen folgt

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\mathring{R} - 2\Lambda) = 8\pi G\, T_{\mu\nu}, \tag{3.27}$$

wobei für $8\pi G$ auch die Bezeichnung κ verwendet wird. [7, 14]

Im verallgemeinerten Fall metrisch-affiner Gravitation werden die Metrik und der Zusammenhang als unabhängige Veränderliche verstanden. Die einfachste Erweiterung der metrischen Einstein-Hilbert-Theorie folgt formal durch den Austausch des Ricci-Skalars in (3.21) mit einer allein durch den affinen Zusammenhang bestimmten Skalarkrümmung:

$$S_{\mathrm{affin}}[g, \Gamma] := \frac{1}{2\kappa} \int \Big(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma) - 2\Lambda \Big) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x. \tag{3.28}$$

Die Wirkung kann nach Zusammenhang und Metrik unabhängig variiert werden und reduziert sich unter Wahl des Levi-Civita-Zusammenhangs auf die bekannte Einstein-Hilbert-Wirkung.

3.5 Materie

Materie wird in der klassischen Feldtheorie durch Felder Φ beschrieben. Mathematisch sind diese durch Schnitte in den dazugehörigen Bündeln charakterisiert. Um Materiefelder zu untersuchen, werden deren Wirkungen

$$S_{\mathrm{Materie}}[\Phi] = \int \mathcal{L}_{\mathrm{M}}(\Phi, \partial_\mu \Phi)\, \mathrm{d}^4 x \tag{3.29}$$

eingeführt. Im Speziellen werden Standardbeispiele für Lagrangedichten von Skalarfeldern, Spinorfeldern und Vektorfeldern betrachtet, die in dieser Reihenfolge ihren kinetischen Termen nach keine, lineare und quadratische Kopplungen mit den Zusammenhangskoeffizienten aufweisen. [15]

Feldtheorien werden nach Symmetrien klassifiziert. Die erste Symmetrie zur Konstruktion der Lagrangedichten ist jene Symmetrie, die die freie Wahl von Koordinaten sichert. In der flachen Raumzeit ist das die Lorentzsymmetrie, das heißt die Invarianz unter Lorentztransformationen. Übertragen in die gekrümmte Raumzeit soll Invarianz unter den diffeomorphen Kartenwechseln erfüllt sein. Für den Übergang in eine gekrümmte Raumzeit wird zudem die Minkowski-Metrik ($\eta_{\mu\nu}$) durch die Lorentz-Metrik ($g_{\mu\nu}$) sowie die partielle Ableitung durch die aus einem Zusammenhang folgende kovariante Ableitung ersetzt. [15]

Als Erstes werden **Skalarfelder** mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \mathcal{L}_{\mathrm{Skalar}} := \frac{1}{2}\Big((\nabla^\mu \phi)\ (\nabla_\mu \phi) - m^2\phi^2\Big) = \frac{1}{2}\Big((\partial^\mu \phi)\ (\partial_\mu \phi) - m^2\phi^2\Big) \tag{3.30}$$

betrachtet, wobei ∇ ein affiner Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist, m die Masse beschreibt und unter ϕ das Skalarpotential zu verstehen ist. Das Skalarpotential ist eine glatte Funktion $\phi \in C^\infty(M)$, welche jedem Punkt $p \in M$ der Raumzeit eine Zahl aus $\mathbb{R}$ zuordnet. Es ist trivial invariant unter Koordinatentransformationen und insbesondere reduziert sich die kovariante Ableitung ∇_μ auf ∂_μ. [15]

Die einfachste unter Kartenwechsel invariante Theorie, welche lediglich den kinetischen Teil umfasst, lautet:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Skalar,\,kin}} := \frac{1}{2}\,(\partial^\mu \phi)\,(\partial_\mu \phi)\,. \tag{3.31}$$

Dabei ist anzumerken, dass es sich bei ∂^μ um eine Schreibweise für $g^{\mu\nu}\partial_\nu$ handelt.

Zudem sind Skalarfeldtheorien denkbar, die eine Verknüpfung mit den Zusammenhangskoeffizienten, beispielsweise durch höhere Ableitungsterme wie $\nabla(\partial\phi)$, aufweisen. Jedoch wird in dieser Arbeit nur der einfachste, oben genannte Fall betrachtet.

Im Gegensatz zu Skalarfeldern transformieren sich die Komponenten von **Vektorfeldern** nicht-trivial unter einem Kartenwechsel. Die einfachste unter Kartenwechsel invariante Lagrangedichte für ein Vektorfeld stammt aus der Elektrodynamik, die Lagrangedichte für die Maxwellgleichungen [15]

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Vektor}} := -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu, \tag{3.32}$$

mit dem Vektorpotential A_μ, dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu} := \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ und der Viererstromdichte J^μ. Der kinetische Term lautet:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Vektor,\,kin}} := -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.33}$$

Genau genommen bräuchte es hierbei Zusatzterme, denn Vektorfelder im metrisch-affinen Kontext brechen die Eichsymmetrie $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu f$, mit einer Eichfunktion $f \in C^\infty(M)$, explizit [16].

Als letztes werden **Dirac-Spinorfelder** betrachtet. Dirac-Spinorfelder sind als Felder ebenfalls glatte Schnitte eines sogenannten Spinorbündels, auf dessen Details [17] hier aber verzichtet wird. Ein wichtiges Beispiel für Dirac-Spinorfelder ist die Dirac-Lagrangedichte für $N \in \mathbb{N}$ fermionische Spezies [15]

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Dirac}} = \bar{\psi}^n \left(\mathrm{i}\not{\nabla}^{(s)} - m\right)\psi_n, \tag{3.34}$$

wobei n von 1 bis N laufe, während i die imaginäre Einheit, $\bar{\psi}^n$ das Dirac-adjungierte Dirac-Spinorfeld und $\nabla\!\!\!\!/^{(s)}$ eine Abkürzung für $\gamma^\mu \nabla_\mu^{(s)}$ mit den Dirac-Matrizen $\gamma^0, \ldots, \gamma^3$ bezeichnet. Ohne an dieser Stelle auf die Details einzugehen, wird die kovariante Ableitung $\nabla_\mu^{(s)}$ hierbei mittels des Spinorzusammenhangs $\nabla^{(s)}$ erklärt, der durch den affinen Zusammenhang ∇ auf kanonische Weise induziert ist [17, 18].

Für die formale Formulierung von fermionischen Theorien, in flacher wie in gekrümmter Raumzeit, braucht es eine algebraische Struktur, die auch als Dirac-Algebra bekannte Clifford-Algebra $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$, ausgezeichnet durch die Antikommutatorbedingung [19]

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\, \mathbb{1}, \tag{3.35}$$

mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ in vier Dimensionen, der inversen Metrik $(g^{\mu\nu})$ und den Dirac-Matrizen $\{\gamma^\mu\}$. Somit kann der kinetische Teil der Lagrangedichte geschrieben werden als:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac, kin}} := \bar{\psi}^n \mathrm{i} \gamma^\mu \nabla_\mu^{(s)} \psi_n. \tag{3.36}$$

Für $\nabla_\mu^{(s)}$ wird im Rahmen dieser Arbeit eine einfache Darstellung [20] verwendet, die eingesetzt in (3.36) auf

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac, kin}} = \bar{\psi}^n \mathrm{i} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - \frac{1}{8} [\nabla_\mu \gamma^\nu, \gamma_\nu] \right) \psi_n \tag{3.37}$$

führt. Hierbei wird zur Auswertung von $\nabla_\mu \gamma^\nu$ die Dirac-Matrix γ^ν wie die Komponente eines Vektorfelds behandelt. Für Spinoren gilt wieder eine Invarianz unter Kartenwechsel. Zusätzlich besteht die sogenannte Spinbasis-Invarianz, das heißt (3.37) ist invariant unter Ähnlichkeitstransformationen der Dirac-Algebra und gleichzeitiger Transformation der Spinoren. Diese Transformationen stammen hierbei aus der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{SL}(4, \mathbb{C})$. [19, 20]

4 Metrisch-Affine Materiemodelle

Infolge der Einführung der Struktur der Raumzeit und möglicher Materie soll eine Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie betrachtet werden, welche Raumzeit und Materie ohne Ausschluss von Torsion und Nichtmetrizität behandelt; die metrisch-affine Gravitationstheorie. Die einsteinschen Feldgleichungen und damit der Levi-Civita-Zusammenhang bleiben dabei als Spezialfall enthalten. Ziel ist es, unter Einführung eines Differenzentensorfeldes [21], die strukturelle Erweiterung dieser Gleichungen in entsprechenden Zusatztermen auszudrücken. Das Differenzentensorfeld spiegelt dabei den Vergleich eines allgemeinen affinen Zusammenhangs mit dem Levi-Civita-Zusammenhang wider und enthält somit exklusiv Information über Nichtmetrizität und Torsion. Durch die Variation der metrisch-affinen Wirkung wird eine Bewegungsgleichung für das Differenzentensorfeld gefunden und dadurch der Effekt von Nichtmetrizität und Torsion unter klassischen Rechnungen mit und ohne Materie untersucht.

4.1 Entkopplung des Levi-Civita-Zusammenhangs

Um auf der einsteinschen Gravitationstheorie aufzubauen, wird aus der in (3.28) verwendeten metrisch-affinen Formulierung der Wirkung ohne Betrachtung der kosmologischen Konstante,

$$S_{\text{affin}}[g,\Gamma] \equiv S_{\text{affin}}[g,\Gamma]\Big|_{\Lambda=0} = \frac{1}{2\kappa}\int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{4.1}$$

der Levi-Civita-Zusammenhang entkoppelt.

Sei ∇ ein beliebiger affiner Zusammenhang im Tangentialbündel $\mathcal{TM}$ einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ und $\mathring{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang bezüglich einer auf $\mathcal{M}$ vorgegebenen Metrik $(g_{\mu\nu})$. Ein (1,2)-Differenzentensorfeld D ist eine $C^\infty(M)$-bilineare Abbildung, welche die punktweise definierte Differenz der Zusammenhänge klassifiziert:

$$D := \nabla - \mathring{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M). \tag{4.2}$$

Die Komponenten des Tensorfeldes D ergeben sich aus den Zusammenhangskoeffizienten der Zusammenhänge ∇ und $\mathring{\nabla}$:

$$D^{\mu}{}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} - \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho}. \tag{4.3}$$

Die metrisch-affine Wirkung (4.1) ist abhängig von den Koeffizienten eines allgemeinen metrisch-affinen Zusammenhangs $\Gamma = \{\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\}$. Die Menge der Komponenten des Levi-Civita-Zusammenhangs wird mit $\mathring{\Gamma}$ gekennzeichnet. So kann durch

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = D^{\mu}{}_{\nu\rho} + \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} \tag{4.4}$$

der allgemeine Zusammenhang, repräsentiert durch Γ, ersetzt werden. Als Resultat wird der $\mathring{\Gamma}$-abhängige Teil als eigenständiger Term separiert. [21]

Um dies nun in (4.1) umzusetzen, wird (4.4) in die Spur des Krümmungsendomorphismus aus Gleichung (3.15) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
g^{\mu\rho}R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\rho} &= g^{\mu\rho}\{\partial_\mu(D^{\lambda}{}_{\lambda\rho}+\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\rho})-\partial_\lambda(D^{\lambda}{}_{\mu\rho}+\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\rho}) \\
&\qquad +(D^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}+\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\lambda\rho})(D^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}+\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}) \\
&\qquad -(D^{\vartheta}{}_{\mu\rho}+\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\mu\rho})(D^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}+\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta})\} \\
&= g^{\mu\rho}\{\partial_\mu D^{\lambda}{}_{\lambda\rho}+\partial_\mu\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\rho}-\partial_\lambda D^{\lambda}{}_{\mu\rho}-\partial_\lambda\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\rho} \\
&\qquad +D^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}D^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}+D^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}+\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}D^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}+\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\vartheta} \\
&\qquad -D^{\vartheta}{}_{\mu\rho}D^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}-D^{\vartheta}{}_{\mu\rho}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}-\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\mu\rho}D^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}-\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\mu\rho}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}\}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Über die kovariante Ableitung (3.7) ergeben sich:

$$\nabla_\mu D^{\lambda}{}_{\lambda\rho} = \partial_\mu D^{\lambda}{}_{\lambda\rho}-\Gamma^{\vartheta}{}_{\mu\rho}D^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}, \tag{4.6}$$

$$\nabla_\lambda D^{\lambda}{}_{\mu\rho} = \partial_\lambda D^{\lambda}{}_{\mu\rho}+\Gamma^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}D^{\vartheta}{}_{\mu\rho}-\Gamma^{\vartheta}{}_{\lambda\mu}D^{\lambda}{}_{\vartheta\rho}-\Gamma^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}D^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}. \tag{4.7}$$

Wird für den Zusammenhang ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang $\mathring{\nabla}$ verwendet, so gilt die Symmetrie der Christoffel-Symbole in den unteren Indizes. Die resultierende Differenz

$$\mathring{\nabla}_\mu D^{\lambda}{}_{\lambda\rho}-\mathring{\nabla}_\lambda D^{\lambda}{}_{\mu\rho} = \partial_\mu D^{\lambda}{}_{\lambda\rho}+\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}D^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}-\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\mu\rho}D^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}-\partial_\lambda D^{\lambda}{}_{\mu\rho}-\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}D^{\vartheta}{}_{\mu\rho}+\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}D^{\lambda}{}_{\mu\vartheta} \tag{4.8}$$

dient der Vereinfachung von (4.5):

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\rho}\{\partial_\mu\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\rho}-\partial_\lambda\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\rho}+\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}-\mathring{\Gamma}^{\vartheta}{}_{\mu\rho}\mathring{\Gamma}^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}+\mathring{\nabla}_\mu D^{\lambda}{}_{\lambda\rho}-\mathring{\nabla}_\lambda D^{\lambda}{}_{\mu\rho} \\
&\qquad +D^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}D^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}-D^{\vartheta}{}_{\mu\rho}D^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}\} \\
&= g^{\mu\rho}\{\mathring{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\rho}+\mathring{\nabla}_\mu D^{\lambda}{}_{\lambda\rho}-\mathring{\nabla}_\lambda D^{\lambda}{}_{\mu\rho}+D^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}D^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}-D^{\vartheta}{}_{\mu\rho}D^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}\}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Daraus kann eine Wirkung gewonnen werden, die abhängig von der Metrik sowie von dem Differenzentensorfeld ist. Sie setzt sich aus der Einstein-Hilbert-Wirkung und von D abhängigen Zusatztermen zusammen:

$$\begin{aligned}
S_{\text{affin}}[g,D] \equiv S_{\text{affin}}[g,\Gamma]\Big|_{\Gamma=D+\mathring{\Gamma}} = \frac{1}{2\kappa}\int g^{\mu\rho}\Big\{&\mathring{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\rho}+\mathring{\nabla}_\mu D^{\lambda}{}_{\lambda\rho}-\mathring{\nabla}_\lambda D^{\lambda}{}_{\mu\rho} \\
&+D^{\vartheta}{}_{\lambda\rho}D^{\lambda}{}_{\mu\vartheta}-D^{\vartheta}{}_{\mu\rho}D^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta}\Big\}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

4.2 Bewegungsgleichung des Differenzentensorfeldes

Um eine Bewegungsgleichung für D zu erhalten, wird die allgemeine metrisch-affine Wirkung, wie in Gleichung (4.10) in Abhängigkeit von D ausgedrückt, nach D variiert:

$$\begin{aligned}\delta_D S_{\text{affin}} = \delta_D \Bigg(\frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\rho} \Big\{ & \mathring{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\rho} + \mathring{\nabla}_\mu D^\lambda{}_{\lambda\rho} - \mathring{\nabla}_\lambda D^\lambda{}_{\mu\rho} \\ & + D^\vartheta{}_{\lambda\rho} D^\lambda{}_{\mu\vartheta} - D^\vartheta{}_{\mu\rho} D^\lambda{}_{\lambda\vartheta} \Big\} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x \Bigg).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dabei gilt für die Variation von D:

$$\frac{\delta D^\mu{}_{\nu\rho}(x)}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}(y)} = \delta^\mu{}_\alpha \delta^\beta{}_\nu \delta^\gamma{}_\rho \, \delta^4(x-y). \tag{4.12}$$

Aus der Annahme einer Mannigfaltigkeit ohne topologischen Rand verschwindet, nach Anwendung des Gaußschen Satzes, das Integral über $g^{\mu\rho}(\mathring{\nabla}_\mu D^\lambda{}_{\lambda\rho} - \mathring{\nabla}_\lambda D^\lambda{}_{\mu\rho})$, sodass dieser Term im Folgenden nicht weiter berücksichtigt wird. Die Ableitung nach D betreffend verschwindet der Integrand $\mathring{R}$ aufgrund seiner Unabhängigkeit von D, sodass lediglich die D^2-Terme betrachtet werden. Mit $\delta_D = \int \delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}(x) \, \frac{\delta}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}(x)} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x$ folgt für die Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_{\text{affin}}}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}} = \frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\rho} \Bigg\{ & \frac{\delta D^\vartheta{}_{\lambda\rho}}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}} D^\lambda{}_{\mu\vartheta} + \frac{\delta D^\lambda{}_{\mu\vartheta}}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}} D^\vartheta{}_{\lambda\rho} \\ & - \frac{\delta D^\vartheta{}_{\mu\rho}}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}} D^\lambda{}_{\lambda\vartheta} - \frac{\delta D^\lambda{}_{\lambda\vartheta}}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}} D^\vartheta{}_{\mu\rho} \Bigg\} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung gilt auf dem Level der klassischen Bewegungsgleichungen $\delta S_{\text{affin}} / \delta D^\alpha{}_{\beta\gamma} = 0$ und es folgt:

$$0 = \frac{\delta D^\vartheta{}_{\lambda\rho}}{\delta D^a{}_{bc}} D^\lambda{}_{\mu\vartheta} + \frac{\delta D^\lambda{}_{\mu\vartheta}}{\delta D^a{}_{bc}} D^\vartheta{}_{\lambda\rho} - \frac{\delta D^\vartheta{}_{\mu\rho}}{\delta D^a{}_{bc}} D^\lambda{}_{\lambda\vartheta} - \frac{\delta D^\lambda{}_{\lambda\vartheta}}{\delta D^a{}_{bc}} D^\vartheta{}_{\mu\rho}. \tag{4.14}$$

Aus (4.12) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\mu\rho} \left(\delta^\vartheta{}_\alpha \delta^\beta{}_\lambda \delta^\gamma{}_\rho D^\lambda{}_{\mu\vartheta} + \delta^\lambda{}_\alpha \delta^\beta{}_\mu \delta^\gamma{}_\vartheta D^\vartheta{}_{\lambda\rho} - \delta^\vartheta{}_\alpha \delta^\beta{}_\mu \delta^\gamma{}_\rho D^\lambda{}_{\lambda\vartheta} - \delta^\lambda{}_\alpha \delta^\beta{}_\lambda \delta^\gamma{}_\vartheta D^\vartheta{}_{\mu\rho} \right) \\ &= g^{\beta\rho} D^\gamma{}_{\alpha\rho} + g^{\mu\gamma} D^\beta{}_{\mu\alpha} - g^{\beta\gamma} D^\lambda{}_{\lambda\alpha} - \delta_\alpha{}^\beta D^{\gamma\rho}{}_\rho. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die Gleichung (4.15) wird nun mit $g_{\nu\beta}$ und $g_{\rho\gamma}$ multipliziert und α in μ umbenannt, daraus resultiert:

$$0 = D_{\rho\mu\nu} + D_{\nu\rho\mu} - g_{\nu\rho} D^\vartheta{}_{\vartheta\mu} - g_{\nu\mu} D_\rho{}^\vartheta{}_\vartheta. \tag{4.16}$$

Dies ist die klassische Bewegungsgleichung des Differenzentensorfeldes, die das dynamische Verhalten der metrisch-affinen Freiheitsgrade steuert.

Da sich Gleichung (4.16) als rein algebraisch entpuppt, lässt sich mit elementaren Manipulationen eine Lösung konstruieren, die im Folgenden erläutert werden sollen. Zuerst wird dazu die Indexreihenfolge in Gleichung (4.16) zyklisch permutiert und die daraus resultierenden Gleichungen werden anschließend derart addiert, dass $D_{\alpha\beta\gamma}$ isoliert wird. Die erste Permutation ist gegeben durch:

$$0 = D_{\mu\nu\rho} + D_{\rho\mu\nu} - g_{\rho\mu} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\nu} - g_{\rho\nu} D_{\mu}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta}. \tag{4.17}$$

Die zweite Permutation lautet:

$$0 = D_{\nu\rho\mu} + D_{\mu\nu\rho} - g_{\mu\nu} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\rho} - g_{\mu\rho} D_{\nu}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta}. \tag{4.18}$$

Von der Summe aus den Permutationen (4.17) und (4.18) wird nun die Ausgangsgleichung (4.16) abgezogen und es folgt

$$0 = g_{\beta\gamma} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\alpha} + g_{\beta\alpha} D_{\gamma}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} - g_{\gamma\alpha} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} - g_{\gamma\beta} D_{\alpha}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} - g_{\gamma\alpha} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} - g_{\gamma\beta} D_{\alpha}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} + 2D_{\alpha\beta\gamma}, \tag{4.19}$$

sodass nur noch eine Komponente $D_{\alpha\beta\gamma}$ des Differenzentensorfeldes neben zwei seiner Spuren übrig bleibt. Für weitere Vereinfachungen werden metrische Spuren über die Ausgangsgleichung (4.16) gezogen. Die erste Spur berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 = g^{\mu\rho} \left(\frac{\delta S_{\text{affin}}}{\delta D^{\mu}{}_{\nu\rho}} \right) &= g^{\rho\mu} \left\{ D_{\rho\mu\nu} + D_{\nu\rho\mu} - g_{\nu\rho} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - g_{\nu\mu} D_{\rho}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} \right\} \\ &= D^{\mu}{}_{\mu\nu} + D_{\nu}{}^{\mu}{}_{\mu} - \delta^{\mu}{}_{\nu} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - \delta^{\rho}{}_{\nu} D_{\rho}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} \\ &= D^{\vartheta}{}_{\vartheta\nu} + D_{\nu}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} - D^{\vartheta}{}_{\vartheta\nu} - D_{\nu}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Die zweite Spur ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} 0 = g^{\mu\nu} \left(\frac{\delta S_{\text{affin}}}{\delta D^{\mu}{}_{\nu\rho}} \right) &= g^{\mu\nu} \left\{ D_{\rho\mu\nu} + D_{\nu\rho\mu} - g_{\nu\rho} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - g_{\nu\mu} D_{\rho}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} \right\} \\ &= D_{\rho}{}^{\nu}{}_{\nu} + D^{\mu}{}_{\rho\mu} - \delta^{\mu}{}_{\rho} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - \delta^{\mu}{}_{\mu} D_{\rho}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} \\ &= D_{\rho}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} + D^{\vartheta}{}_{\rho\vartheta} - D^{\vartheta}{}_{\vartheta\rho} - 4D_{\rho}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Die dritte Spur lautet:

$$\begin{aligned} 0 = g^{\nu\rho} \left(\frac{\delta S_{\text{affin}}}{\delta D^{\mu}{}_{\nu\rho}} \right) &= g^{\nu\rho} \left\{ D_{\rho\mu\nu} + D_{\nu\rho\mu} - g_{\nu\rho} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - g_{\nu\mu} D_{\rho}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} \right\} \\ &= D^{\nu}{}_{\mu\nu} + D^{\rho}{}_{\rho\mu} - \delta^{\nu}{}_{\nu} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - \delta^{\rho}{}_{\mu} D_{\rho}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} \\ &= D^{\vartheta}{}_{\mu\vartheta} + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - 4D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - D_{\mu}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die erste Spur (4.20) liefert eine triviale Lösung und damit keine weiteren Informationen. Aus der Gleichsetzung der Spuren zwei (4.21) und drei (4.22) folgt

$$D^{\vartheta}{}_{\vartheta\rho} = D_{\rho}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta}, \tag{4.23}$$

für alle $\rho = 0, \ldots, 3$. Die Information aus dem Gleichsetzen der Spuren (4.23) wird in die aus den Permutationen folgende Gleichung (4.19) eingesetzt. Das wiederum resultiert in der gesuchten Lösung

$$D_{\mu\nu\rho} = g_{\rho\mu} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\nu}, \tag{4.24}$$

beziehungsweise für die vollen Zusammenhangskoeffizienten:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} + \delta^{\mu}{}_{\rho} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\nu}. \tag{4.25}$$

Der Zusammenhang ∇ ist damit also lokal über D eindeutig bis auf eine Spur von D bestimmt. Auf diese Weise wird eine auf $\mathbb{R}$ vierparametrige Klasse von Lösungszusammenhängen etabliert, welche durch Translationen der Christoffel-Symbole mit Komponenten der Form $\delta^{\mu}{}_{\rho} A_{\nu}$ für beliebige Kovektorfelder $A \in \mathfrak{X}^*(M)$ charakterisiert sind. Dies stimmt mit dem aufgeführten Resultat in [21] überein.

Nun soll dieses Ergebnis noch überprüft werden. Dafür wird die Bewegungsgleichung für D (4.24) in die permutierte Ausgangsgleichung (4.17) eingesetzt:

$$0 = g_{\rho\mu} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\nu} + g_{\nu\rho} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - g_{\rho\mu} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\nu} - g_{\rho\mu} D_{\mu}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta}. \tag{4.26}$$

Durch Verwendung von (4.23) ergibt sich:

$$0 = g_{\rho\mu} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\nu} + g_{\nu\rho} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - g_{\rho\mu} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\nu} - g_{\nu\rho} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} = 0. \tag{4.27}$$

Damit ist gezeigt, dass der in (4.25) gefundene Audruck die Bewegungsgleichung (4.16) tatsächlich löst.

Nun soll die affine Wirkung (4.10) nach der inversen Metrik variiert werden, um die gewonnene Lösung der Bewegungsgleichung (4.24) einzusetzen und daraus die gesuchten, aus der affinen Erweiterung folgenden, Zusatzterme für die einsteinschen Feldgleichungen zu bestimmen. Die ∇D-Terme verschwinden unter Annahme einer Mannigfaltigkeit ohne Rand erneut:

$$S_{\text{affin}}[g, D] = \frac{1}{2\kappa} \int \mathring{R} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x + \frac{1}{2\kappa} \int g^{\mu\rho} \underbrace{\left(D^{\vartheta}{}_{\lambda\rho} D^{\lambda}{}_{\mu\vartheta} - D^{\vartheta}{}_{\mu\rho} D^{\lambda}{}_{\lambda\vartheta} \right)}_{=:\, \Delta_{\mu\rho}} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x. \tag{4.28}$$

Die Variation des ersten Integrals liefert die bekannten einsteinschen Feldgleichungen. Für das zweite Integral, abgekürzt durch S_D, ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta S_\mathrm{D}}{\delta g^{\alpha\beta}} &= \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}\left(\frac{1}{2\kappa}\int g^{\mu\rho}\Delta_{\mu\rho}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\right) \\
&= \frac{1}{2\kappa}\left\{\int\left(\Delta_{\mu\rho}\delta^{\mu}{}_{\alpha}\delta^{\rho}{}_{\beta} - g^{\mu\rho}\Delta_{\mu\rho}\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\right\} \\
&= \frac{1}{2\kappa}\left\{\int\left(\Delta_{\alpha\beta} - g^{\mu\rho}\Delta_{\mu\rho}\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Aus $\delta_{g^{-1}}S_\text{affin} = 0$ folgen, sofern die Metrik die einsteinsche Feldgleichung erfüllt, Zusatzterme für die Vakuum-Feldgleichung:

$$
0 = \Delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\Delta_{\mu\rho}g_{\alpha\beta}. \tag{4.30}
$$

Aus dem Vergleich mit (3.27) lassen sich die durch Torsion und Nichtmetrizität induzierten Zusatzterme als Energie-Impuls-Tensor auffassen:

$$
T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\kappa}\left(\Delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\Delta_{\mu\rho}\,g_{\alpha\beta}\right). \tag{4.31}
$$

Die Lösung für D (4.24) eingesetzt in $T_{\alpha\beta}$ (4.31) liefert allerdings:

$$
\begin{aligned}
T_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{\kappa}\Big\{(D^{\eta}{}_{\lambda\beta}D^{\lambda}{}_{\alpha\eta} - D^{\eta}{}_{\alpha\beta}D^{\lambda}{}_{\lambda\eta}) - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(D^{\eta}{}_{\lambda\rho}D^{\lambda}{}_{\mu\eta} - D^{\eta}{}_{\mu\rho}D^{\lambda}{}_{\lambda\eta})g_{\alpha\beta}\Big\} \\
&= -\frac{1}{\kappa}\Big\{\delta^{\eta}{}_{\beta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\lambda}\delta^{\lambda}{}_{\eta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\alpha} - \delta^{\eta}{}_{\beta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\alpha}\delta^{\lambda}{}_{\eta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\lambda} \\
&\qquad - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\delta^{\eta}{}_{\rho}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\lambda}\delta^{\lambda}{}_{\eta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - \delta^{\eta}{}_{\rho}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu}\delta^{\lambda}{}_{\eta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\lambda})g_{\alpha\beta}\Big\} \\
&= -\frac{1}{\kappa}\Big\{(\delta^{\lambda}{}_{\beta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\lambda}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\alpha} - \delta^{\lambda}{}_{\beta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\lambda}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\alpha}) \\
&\qquad - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\delta^{\lambda}{}_{\rho}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\lambda}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu} - \delta^{\lambda}{}_{\rho}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\lambda}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\mu})g_{\alpha\beta}\Big\} \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

Die Zusatzterme und damit der induzierte Energie-Impuls-Tensor verschwinden also nach Einsetzen dieser Lösung. Dies war für die Vakuum-Feldgleichungen gewissermaßen zu erwarten, denn wenn die Raumzeit ohne Materie schon auf makroskopischen Skalen Effekte der Torsion und Nichtmetrizität aufzeigen würde, stünde die damit verbundene Theorie in direktem Vergleich mit der immerhin sehr erfolgreichen einsteinschen Gravitationstheorie, die ohne die zusätzlichen Freiheitsgrade auskommt. Folglich wird davon ausgegangen, dass es sich bei den Phänomenen der Torsion und Nichtmetrizität, sofern sie existieren, um Quanteneffekte handelt, die unter der klassisch durchgeführten Rechnung verschwinden.

Im Fall von anwesender Materie gibt es jedoch auch Theorien und Untersuchungen, die beispielsweise Torsion nicht nur auf den mikroskopischen Effekt des Spins zurückführen, sondern auch auf den Drehimpuls makroskopischer Körper [22]. Im nächsten Schritt sollen die bereits eingeführten Beispiele, repräsentativ für Materie, zur Analyse des Nicht-Vakuum-Falls dienen. Dabei wird untersucht, inwiefern sich dieses Ergebnis ändert. Ähnliche Diskussionen finden sich in [23].

4.3 Materiemodelle

Die in Kapitel 3.5 eingeführten Materiefelder weisen eine Abhängigkeit bis zur zweiten Ordnung von Γ auf. Dies wird zum Anlass genommen, die allgemeine Lagrangedichte $\mathcal{L}_M(g,\Gamma,\chi)$ für Materie χ um $\mathring{\Gamma}$ bezüglich Γ bis zur zweiten Ordnung zu entwickeln:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_M(g,\Gamma,\chi) &\approx \mathcal{L}_M(g,\mathring{\Gamma},\chi) + \left.\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}}\right|_{\Gamma=\mathring{\Gamma}} D^\lambda{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\mathcal{L}_M}{\partial\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\partial\Gamma^\varphi{}_{\rho\sigma}}\right|_{\Gamma=\mathring{\Gamma}} D^\lambda{}_{\mu\nu}D^\varphi{}_{\rho\sigma} \\ &=: \mathcal{L}_M(g,\mathring{\Gamma},\chi) + \overset{(1)}{M}{}_\lambda{}^{\mu\nu}(g,\chi)\, D^\lambda{}_{\mu\nu} + \overset{(2)}{M}{}_\lambda{}^{\mu\nu}{}_\varphi{}^{\rho\sigma}(g,\chi)\, D^\lambda{}_{\mu\nu}D^\varphi{}_{\rho\sigma},\end{aligned} \tag{4.33}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $D = \Gamma - \mathring{\Gamma}$. Für die Materieterme aus Kapitel 3.5 werden repräsentativ $\overset{(1)}{M}$ und $\overset{(2)}{M}$ verwendet. Die sich daraus ergebende Wirkung kann in einen Materie- und einen Korrekturterm getrennt werden: $S_{\text{Materie}}[g,\Gamma,\chi] = S_{\text{M}}[g,\mathring{\Gamma},\chi] + S_{\text{Korr}}[g,D,\chi]$. Mit der Taylorentwicklung (4.33) lässt sich die gesamte metrisch-affine Wirkung mit Materie dann symbolisch aufspalten in:

$$\begin{aligned}S[g,D,\chi] &= S_{\text{affin}}[g,D] + S_{\text{Korr}}[g,D,\chi] + S_{\text{M}}[g,\mathring{\Gamma},\chi] \\ &= \frac{1}{2\kappa}\int \left(\mathring{R} + \mathring{\nabla} D + D^2\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &\quad + \int \left(\overset{(1)}{M} D + \overset{(2)}{M} D^2\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x + \int \mathcal{L}_M(g,\mathring{\Gamma},\chi)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Die D-Variation von S_{affin} ist bekannt und $S_{\text{M}}[g,\mathring{\Gamma},\chi]$ ist unabhängig von D. Um also für den Materiefall erneut eine Lösung für D zu bekommen, wird zunächst nur S_{Korr} nach D variiert:

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_{\text{Korr}}}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}} &= \frac{\delta}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}}\int \left(\overset{(1)}{M}{}_\lambda{}^{\mu\nu} D^\lambda{}_{\mu\nu} + \overset{(2)}{M}{}_\lambda{}^{\mu\nu}{}_\phi{}^{\rho\sigma} D^\phi{}_{\rho\sigma} D^\lambda{}_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &= \int \Big(\overset{(1)}{M}{}_\lambda{}^{\mu\nu}\delta^\lambda{}_\alpha\delta^\beta{}_\mu\delta^\gamma{}_\nu + \overset{(2)}{M}{}_\lambda{}^{\mu\nu}{}_\phi{}^{\rho\sigma}\delta^\lambda{}_\alpha\delta^\beta{}_\mu\delta^\gamma{}_\nu D^\phi{}_{\rho\sigma} \\ &\qquad + \overset{(2)}{M}{}_\lambda{}^{\mu\nu}{}_\phi{}^{\rho\sigma}\delta^\phi{}_\alpha\delta^\beta{}_\rho\delta^\gamma{}_\sigma D^\lambda{}_{\mu\nu}\Big)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &= \int \left(\overset{(1)}{M}{}_\alpha{}^{\beta\gamma} + \overset{(2)}{M}{}_\alpha{}^{\beta\gamma}{}_\phi{}^{\rho\sigma} D^\phi{}_{\rho\sigma} + \overset{(2)}{M}{}_\lambda{}^{\mu\nu}{}_\alpha{}^{\beta\gamma} D^\lambda{}_{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Unter der Verwendung der Symmetrie $M_\lambda{}^{\mu\nu}{}_\phi{}^{\rho\sigma} = M_\phi{}^{\rho\sigma}{}_\lambda{}^{\mu\nu}$ können die $\overset{(2)}{M}$ nach Umbenennung der Indizes zusammengefasst werden. Für die aus (4.15) bekannte Variation von S_{affin} ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{affin}}}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}} &= \frac{1}{2\kappa} \frac{\delta}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}} \int g^{\mu\nu} \Big(\mathring{R}^\vartheta{}_{\mu\vartheta\nu} + \mathring{\nabla}_\vartheta D^\vartheta{}_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_\nu D^\vartheta{}_{\mu\vartheta} \\ &\qquad + D^\eta{}_{\mu\nu} D^\vartheta{}_{\vartheta\eta} - D^\eta{}_{\mu\vartheta} D^\vartheta{}_{\eta\nu} \Big) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int \Big(g^{\beta\eta} D^\gamma{}_{\alpha\eta} + g^{\vartheta\gamma} D^\beta{}_{\vartheta\alpha} - g^{\beta\gamma} D^\vartheta{}_{\vartheta\alpha} - \delta^\beta{}_\vartheta\, D^{\gamma\eta}{}_\eta \Big) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Die gesamte D-Variation setzt sich damit zusammen aus:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta D^\alpha{}_{\beta\gamma}} &= 2\kappa \big(\overset{(1)}{M}{}_\alpha{}^{\beta\gamma} + 2 \overset{(2)}{M}{}_\alpha{}^{\beta\gamma}{}_\phi{}^{\rho\sigma} D^\phi{}_{\rho\sigma} \big) \\ &\quad + \big(g^{\beta\eta} D^\gamma{}_{\alpha\eta} + g^{\vartheta\gamma} D^\beta{}_{\vartheta\alpha} - g^{\beta\gamma} D^\vartheta{}_{\vartheta\alpha} - \delta^\beta{}_\vartheta\, D^{\gamma\eta}{}_\eta \big). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Über die Metrik kann man zu einer Schreibweise mit ausschließlich unteren Indizes gelangen:

$$0 = 2\kappa \big(\overset{(1)}{M}{}_{\alpha\beta\gamma} + 2 \overset{(2)}{M}{}_{\alpha\beta\gamma\phi}{}^{\rho\sigma} D^\phi{}_{\rho\sigma} \big) - g_{\beta\gamma} D^\vartheta{}_{\vartheta\alpha} - g_{\beta\alpha} D_\gamma{}^\vartheta{}_\vartheta + D_{\gamma\alpha\beta} + D_{\beta\gamma\alpha}. \tag{4.38}$$

Wie im Vakuum-Fall wird die Ausgangsgleichung (4.38) permutiert, um daraufhin $D_{\alpha\beta\gamma}$ zu isolieren. Die erste Permutation ergibt

$$0 = 2\kappa \big(\overset{(1)}{M}{}_{\beta\gamma\alpha} + 2 \overset{(2)}{M}{}_{\beta\gamma\alpha\phi}{}^{\rho\sigma} D^\phi{}_{\rho\sigma} \big) - g_{\gamma\alpha} D^\vartheta{}_{\vartheta\beta} - g_{\gamma\beta} D_\alpha{}^\vartheta{}_\vartheta + D_{\alpha\beta\gamma} + D_{\gamma\alpha\beta} \tag{4.39}$$

und die zweite Permutation

$$0 = 2\kappa \big(\overset{(1)}{M}{}_{\gamma\alpha\beta} + 2 \overset{(2)}{M}{}_{\gamma\alpha\beta\phi}{}^{\rho\sigma} D^\phi{}_{\rho\sigma} \big) - g_{\alpha\beta} D^\vartheta{}_{\vartheta\gamma} - g_{\alpha\gamma} D_\beta{}^\vartheta{}_\vartheta + D_{\beta\gamma\alpha} + D_{\alpha\beta\gamma}. \tag{4.40}$$

Von der aus (4.39) und (4.40) gebildete Summe, wird (4.38) abgezogen. Dies führt zu:

$$\begin{aligned} 0 = &- 2\kappa \big(\overset{(1)}{M}{}_{\alpha\beta\gamma} - \overset{(1)}{M}{}_{\beta\gamma\alpha} - \overset{(1)}{M}{}_{\gamma\alpha\beta} + 2 \overset{(2)}{M}{}_{\alpha\beta\gamma\phi}{}^{\rho\sigma} D^\phi{}_{\rho\sigma} \\ &- 2 \overset{(2)}{M}{}_{\beta\gamma\alpha\phi}{}^{\rho\sigma} D^\phi{}_{\rho\sigma} - 2 \overset{(2)}{M}{}_{\gamma\alpha\beta\phi}{}^{\rho\sigma} D^\phi{}_{\rho\sigma} \big) \\ &+ g_{\beta\gamma} D^\vartheta{}_{\vartheta\alpha} - g_{\gamma\beta} D_\alpha{}^\vartheta{}_\vartheta + g_{\beta\alpha} D_\gamma{}^\vartheta{}_\vartheta - g_{\alpha\beta} D^\vartheta{}_{\vartheta\gamma} - g_{\gamma\alpha} D^\vartheta{}_{\vartheta\beta} - g_{\alpha\gamma} D_\beta{}^\vartheta{}_\vartheta + 2 D_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Für Vereinfachungen werden wieder Spuren über die Ausgangsgleichung (4.38) gebildet. Die Spur $g^{\alpha\gamma}(\frac{\delta S}{\delta D^{\alpha}{}_{\beta\gamma}})$ lieferte ohne zusätzliche Materieterme eine triviale Lösung (4.20), was mit der Umbenennung $\beta \to \varepsilon$ für die hier übrig bleibenden Materieterme bedeutet:

$$\overset{(1)}{M}_{\vartheta\varepsilon}{}^{\vartheta} = -2\overset{(2)}{M}_{\vartheta\varepsilon}{}^{\vartheta}{}_{\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} \tag{4.42}$$

oder auch

$$\overset{(1)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\varepsilon\vartheta} = -2\overset{(2)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\varepsilon\vartheta\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}. \tag{4.43}$$

Die zweite Spur liefert

$$g^{\alpha\beta}\left(\frac{\delta S}{\delta D^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}\right) \overset{\gamma\to\varepsilon}{=} 0 = 2\kappa(\overset{(1)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta\epsilon} + 2\overset{(2)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta\epsilon\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}) - D^{\vartheta}{}_{\vartheta\epsilon} - 3D_{\epsilon}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} + D^{\vartheta}{}_{\epsilon\vartheta} \tag{4.44}$$

und die dritte Spur

$$g^{\beta\gamma}\left(\frac{\delta S}{\delta D^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}\right) \overset{\alpha\to\varepsilon}{=} 0 = 2\kappa(\overset{(1)}{M}_{\epsilon}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} + 2\overset{(2)}{M}_{\epsilon}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}) - 3D^{\vartheta}{}_{\vartheta\epsilon} - D_{\epsilon}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} + D^{\vartheta}{}_{\epsilon\vartheta}. \tag{4.45}$$

Das Abziehen der dritten Spur (4.45) von der zweiten Spur (4.44) resultiert in:

$$D^{\vartheta}{}_{\vartheta\epsilon} - D_{\epsilon}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} = \kappa \underbrace{(\overset{(1)}{M}_{\epsilon}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} - \overset{(1)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta\epsilon})}_{=:\, \overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\varepsilon}} + 2\kappa \underbrace{(\overset{(2)}{M}_{\epsilon}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} - \overset{(2)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta\epsilon\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma})}_{=:\, (\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\varepsilon})_{\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}}. \tag{4.46}$$

Damit kann

$$D_{\epsilon}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} = -\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\varepsilon} - 2\kappa(\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\varepsilon})_{\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\epsilon} \tag{4.47}$$

in Gleichung (4.41) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
0 = &- 2\kappa(\overset{(1)}{M}_{\alpha\beta\gamma} - \overset{(1)}{M}_{\beta\gamma\alpha} - \overset{(1)}{M}_{\gamma\alpha\beta} + 2\overset{(2)}{M}_{\alpha\beta\gamma\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} \\
&- 2\overset{(2)}{M}_{\beta\gamma\alpha\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} - 2\overset{(2)}{M}_{\gamma\alpha\beta\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}) \\
&+ g_{\beta\gamma}(D^{\vartheta}{}_{\vartheta\alpha} - (-\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\alpha} - 2\kappa\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\alpha\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\alpha})) \\
&+ g_{\beta\alpha}(-D^{\vartheta}{}_{\vartheta\gamma} + (-\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\gamma} - 2\kappa\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\gamma\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\gamma})) \\
&- g_{\gamma\alpha}(D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} + (-\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} - 2\kappa\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\beta\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta})) + 2D_{\alpha\beta\gamma}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Durch Ausmultiplizieren folgt:

$$
\begin{aligned}
0 = &-2\kappa(\overset{(1)}{M}_{\alpha\beta\gamma} - \overset{(1)}{M}_{\beta\gamma\alpha} - \overset{(1)}{M}_{\gamma\alpha\beta} + 2\overset{(2)}{M}_{\alpha\beta\gamma\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} \\
&- 2\overset{(2)}{M}_{\beta\gamma\alpha\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} - 2\overset{(2)}{M}_{\gamma\alpha\beta\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}) \\
&+ g_{\beta\gamma}(D^{\vartheta}{}_{\vartheta\alpha} + \kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\alpha} + 2\kappa\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\alpha\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} - D^{\vartheta}{}_{\vartheta\alpha}) \\
&+ g_{\beta\alpha}(-\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\gamma} - 2\kappa\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\gamma\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\gamma} - D^{\vartheta}{}_{\vartheta\gamma}) \\
&- g_{\gamma\alpha}(D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} - \kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} - 2\kappa\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\beta\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta}) + 2D_{\alpha\beta\gamma}.
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

Infolge dessen lässt sich nach $D_{\alpha\beta\gamma}$ umstellen:

$$
\begin{aligned}
D_{\alpha\beta\gamma} = &\,\kappa(\overset{(1)}{M}_{\alpha\beta\gamma} - \overset{(1)}{M}_{\beta\gamma\alpha} - \overset{(1)}{M}_{\gamma\alpha\beta} + 2\overset{(2)}{M}_{\alpha\beta\gamma\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} \\
&- 2\overset{(2)}{M}_{\beta\gamma\alpha\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma} - 2\overset{(2)}{M}_{\gamma\alpha\beta\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}) \\
&- g_{\beta\gamma}(\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\alpha} + \kappa\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\alpha\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}) \\
&- g_{\beta\alpha}(-\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\gamma} - \kappa\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\gamma\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}) \\
&+ g_{\gamma\alpha}(D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} - \frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} - \kappa\overset{(2)}{M}_{\leftrightarrow\beta\phi}{}^{\rho\sigma} D^{\phi}{}_{\rho\sigma}).
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Es wird ersichtlich, dass durch die Anwesenheit der Komponenten $D^{\phi}{}_{\rho\sigma}$ auf der rechten Seite von (4.50) ein kompliziertes, wenn auch lineares, Gleichungssystem übrig bleibt. Um eine explizite Lösung zu erlangen, wird in der folgenden Betrachtung der Fokus auf Materietheorien gelegt, die $\overset{(2)}{M} = 0$ erfüllen, wie das in Kapitel 3.5 eingeführte Beispiel der Dirac-Spinoren. Mit dieser Bedingung folgt für die Lösung von D:

$$
D_{\alpha\beta\gamma} = \kappa(\overset{(1)}{M}_{\alpha\beta\gamma} - \overset{(1)}{M}_{\beta\gamma\alpha} - \overset{(1)}{M}_{\gamma\alpha\beta}) - g_{\beta\gamma}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\alpha} + g_{\beta\alpha}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\gamma} + g_{\gamma\alpha}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} - g_{\gamma\alpha}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta}. \tag{4.51}
$$

Für die Probe dieser Lösung wird die Lösung selbst und die permutierte Variante

$$
D_{\beta\gamma\alpha} = \kappa(\overset{(1)}{M}_{\beta\gamma\alpha} - \overset{(1)}{M}_{\gamma\alpha\beta} - \overset{(1)}{M}_{\alpha\beta\gamma}) - g_{\gamma\alpha}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} + g_{\gamma\beta}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\alpha} + g_{\alpha\beta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\gamma} - g_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\gamma} \tag{4.52}
$$

sowie die Spur $D_{\beta}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta}$ in die passende Permutation der Ausgangsgleichung (4.40) eingesetzt. Die Spur wird ermittelt, indem $g^{\alpha\beta}$ mit $D_{\alpha\beta\gamma}$ multipliziert wird. Hieraus ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
D_{\beta}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} &= \kappa(\overset{(1)}{M}_{\beta}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta} - \overset{(1)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} - \overset{(1)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\beta\vartheta}) - 2\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow}\beta + \frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} - \frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} \\
&= \kappa(-\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} - \overset{(1)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\beta\vartheta}) + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta}.
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Einsetzen von (4.53) in (4.40) führt zu:

$$\begin{aligned}
0 &= 2\kappa M_{\gamma\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} D^{\vartheta}{}_{\vartheta\gamma} - g_{\alpha\gamma}(\kappa(-\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} - \overset{(1)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\beta\vartheta}) + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta}) \\
&\quad + \kappa(\overset{(1)}{M}_{\beta\gamma\alpha} - \overset{(1)}{M}_{\gamma\alpha\beta} - \overset{(1)}{M}_{\alpha\beta\gamma}) - g_{\gamma\alpha}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} + g_{\gamma\beta}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\alpha} + g_{\alpha\beta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\gamma} - g_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\gamma} \\
&\quad + \kappa(\overset{(1)}{M}_{\alpha\beta\gamma} - \overset{(1)}{M}_{\beta\gamma\alpha} - \overset{(1)}{M}_{\gamma\alpha\beta}) - g_{\beta\gamma}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\alpha} + g_{\beta\alpha}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\gamma} + g_{\gamma\alpha}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} - g_{\gamma\alpha}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} \\
&= 2\kappa M_{\gamma\alpha\beta} + \kappa(M_{\beta\gamma\alpha} - M_{\gamma\alpha\beta} - M_{\alpha\beta\gamma}) + \kappa(\overset{(1)}{M}_{\alpha\beta\gamma} - \overset{(1)}{M}_{\beta\gamma\alpha} - \overset{(1)}{M}_{\gamma\alpha\beta}) \\
&\quad - g_{\alpha\beta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\gamma} + g_{\alpha\beta}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\gamma} \\
&\quad - g_{\gamma\alpha}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} - g_{\gamma\alpha}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} \\
&\quad + g_{\gamma\beta}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\alpha} - g_{\beta\gamma}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\alpha} \\
&\quad - g_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\gamma} + g_{\beta\alpha}\frac{1}{2}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\gamma} \\
&\quad - g_{\alpha\gamma}(\kappa(-\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} - \overset{(1)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\beta\vartheta}) + D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta}) + g_{\gamma\alpha}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} \\
&= -g_{\gamma\alpha}\kappa\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} + g_{\alpha\gamma}\kappa(\overset{(1)}{M}_{\leftrightarrow\beta} - M^{\vartheta}{}_{\beta\vartheta}) - g_{\gamma\alpha}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta} + g_{\gamma\alpha}D^{\vartheta}{}_{\vartheta\beta}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Nach (4.43) entfällt $\overset{(1)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\beta\vartheta}$ unter der Annahme $\overset{(2)}{M}{}^{\vartheta}{}_{\varepsilon\vartheta\phi}{}^{\rho\sigma}D^{\phi}{}_{\rho\sigma} = 0$, sodass (4.54) eine wahre Aussage liefert und die Lösung (4.51) die Probe erfüllt.

Damit für diese Lösung konkrete Materiefelder eingesetzt werden können, werden die in Kapitel 3.5 genannten Beispiele nach Γ entwickelt. Die skalare Feldtheorie weist in ihrer eingeführten, einfachsten Variante keine Abhängig von Γ auf:

$$\mathcal{L}_{\text{Skalar}}(g,\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \underbrace{\left.\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Skalar}}}{\partial\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}}\right|_{\Gamma=\mathring{\Gamma}}}_{=0}. \tag{4.55}$$

Die Materieterme $\overset{(1)}{M}$ und $\overset{(2)}{M}$ verschwinden demnach für diese Variante der Skalarfelder. Auf der anderen Seite ist die betrachtete Vektorfeldtheorie (3.33) bis zur zweiten Ordnung von Γ abhängig, sodass erst überprüft werden müsste, ob der gewählte Fall $\overset{(2)}{M} = 0$ erfüllt ist.

Für die Spinorfelder lassen sich die gewünschten Korrekturterme ermitteln:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}(g,\Gamma,\psi_n,\bar{\psi}^n) = \bar{\psi}^n \mathrm{i}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - \frac{1}{8}\big[\partial_\mu\gamma^\nu + \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\mu\lambda},\gamma_\nu\big]\Big)\psi_n + \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Dirac}}}{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}\bigg|_{\Gamma=\mathring{\Gamma}}(\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma}). \tag{4.56}$$

Die Ableitung $\partial\mathcal{L}_{\text{Dirac}}/\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ berechnet sich gemäß:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}\bigg|_{\Gamma=\mathring{\Gamma}} &= \bar{\psi}^n\mathrm{i}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}\Big(-\frac{1}{8}\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}[\gamma^\lambda,\gamma_\nu]\Big)\psi_n(\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} - \mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\beta\gamma})\\ &= \bar{\psi}^n\mathrm{i}\gamma^\mu\Big(-\frac{1}{8}\delta^\nu{}_\alpha\delta^\beta{}_\mu\delta^\gamma{}_\lambda[\gamma^\lambda,\gamma_\nu]\Big)\psi_n D^\alpha{}_{\beta\gamma}\\ &= -\bar{\psi}^n\mathrm{i}\frac{1}{8}\gamma^\beta[\gamma^\gamma,\gamma_\alpha]\psi_n D^\alpha{}_{\beta\gamma}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Daraus kann $\overset{(1)}{M}$ abgelesen werden:

$$\overset{(1)}{M}{}_\lambda{}^{\mu\nu} = -\bar{\psi}^n\mathrm{i}\frac{1}{8}\gamma^\mu[\gamma^\nu,\gamma_\lambda]\psi_n\,. \tag{4.58}$$

Insgesamt resultiert die konkrete Rechnung der Taylorentwicklung (4.33) für den Spinorfall in den Werten:

$$\mathcal{L}_{\text{M}} = \bar{\psi}^n\mathrm{i}\gamma^\mu\Big(\partial_\mu - \frac{1}{8}\big[\partial_\mu\gamma^\nu + \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\mu\lambda},\gamma_\nu\big]\Big)\psi_n \tag{4.59}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Korr}} = -\bar{\psi}^n\mathrm{i}\frac{1}{8}\gamma^\mu[\gamma^\nu,\gamma_\lambda]\psi_n D^\lambda{}_{\mu\nu}\,. \tag{4.60}$$

Das Ergebnis für $\overset{(1)}{M}$ kann durch die Umformungen

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{M}{}_\alpha{}^\vartheta{}_\vartheta = g_{\gamma\beta}\overset{(1)}{M}{}_\alpha{}^{\beta\gamma} &= -g_{\gamma\beta}\Big(\bar{\psi}^n\mathrm{i}\frac{1}{8}\gamma^\beta[\gamma^\gamma,\gamma_\alpha]\psi_n\Big)\\ &= -\bar{\psi}^n\mathrm{i}\frac{1}{8}\gamma^\vartheta[\gamma_\vartheta,\gamma_\alpha]\psi_n,\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{M}{}_{\alpha\beta\gamma} = g_{\beta\zeta}g_{\gamma\xi}\overset{(1)}{M}{}_\alpha{}^{\zeta\xi} &= -g_{\beta\zeta}g_{\gamma\xi}\Big(\bar{\psi}^n\mathrm{i}\frac{1}{8}\gamma^\zeta[\gamma^\xi,\gamma_\alpha]\psi_n\Big)\\ &= -\bar{\psi}^n\mathrm{i}\frac{1}{8}\gamma_\beta[\gamma_\gamma,\gamma_\alpha]\psi_n,\end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{M}{}^\vartheta{}_{\vartheta\gamma} = g^{\beta\alpha}\overset{(1)}{M}{}_{\alpha\beta\gamma} &= -g^{\beta\alpha}\Big(\bar{\psi}^n\mathrm{i}\frac{1}{8}\gamma_\beta[\gamma_\gamma,\gamma_\alpha]\psi_n\Big)\\ &= -\bar{\psi}^n\mathrm{i}\frac{1}{8}\gamma^\vartheta[\gamma_\gamma,\gamma_\vartheta]\psi_n\end{aligned} \tag{4.63}$$

in die Lösung für D (4.51) eingesetzt werden. Dafür wird in (4.63) γ zu α umbenannt. Es entsteht folgender Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
D_{\alpha\beta\gamma} = &- \kappa\frac{1}{8}(\bar{\psi}^n \mathrm{i}(\gamma_\beta[\gamma_\gamma,\gamma_\alpha])\psi_n - \bar{\psi}^n \mathrm{i}(\gamma_\gamma[\gamma_\alpha,\gamma_\beta])\psi_n - \bar{\psi}^n \mathrm{i}\gamma_\alpha[\gamma_\beta,\gamma_\gamma]\psi_n) \\
&+ \frac{1}{16}\kappa g_{\beta\gamma}(\bar{\psi}^n \mathrm{i}\gamma^\vartheta[\gamma_\vartheta,\gamma_\alpha]\psi_n - \bar{\psi}^n \mathrm{i}\gamma^\vartheta[\gamma_\alpha,\gamma_\vartheta]\psi_n) \\
&- \frac{1}{16}\kappa g_{\beta\alpha}(\bar{\psi}^n \mathrm{i}\gamma^\vartheta[\gamma_\vartheta,\gamma_\gamma]\psi_n - \bar{\psi}^n \mathrm{i}\gamma^\vartheta[\gamma_\gamma,\gamma_\vartheta])\psi_n) \\
&+ \frac{1}{16}\kappa g_{\gamma\alpha}(\bar{\psi} \mathrm{i}\gamma^\vartheta[\gamma_\vartheta,\gamma_\beta])\psi_n - \bar{\psi}^n \mathrm{i}\gamma^\vartheta[\gamma_\beta,\gamma_\vartheta]\psi_n) \\
&+ g_{\gamma\alpha}D^\vartheta{}_{\vartheta\beta}
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

Mit

$$
\gamma^\vartheta\gamma_\vartheta = 4 \quad \text{und} \quad \gamma^\rho[\gamma_\sigma,\gamma_\tau] = -\gamma^\rho[\gamma_\tau,\gamma_\sigma] \quad \text{sowie} \quad \gamma^\rho\gamma_\sigma = 2\,\delta^\rho{}_\sigma\, I - \gamma_\sigma\gamma^\rho \tag{4.65}
$$

ergibt sich ferner

$$
\gamma^\vartheta[\gamma_\vartheta,\gamma_\varepsilon] = \gamma^\vartheta\gamma_\vartheta\gamma_\varepsilon - \gamma^\vartheta\gamma_\varepsilon\gamma_\vartheta = 4\gamma_\varepsilon - (2\,\delta^\vartheta{}_\varepsilon\, I - \gamma_\varepsilon\gamma^\vartheta)\gamma_\vartheta = 6\gamma_\varepsilon. \tag{4.66}
$$

Eingesetzt in (4.64) führt dies zu folgender Vereinfachung:

$$
\begin{aligned}
D_{\alpha\beta\gamma} = &- \frac{1}{8}\kappa\bar{\psi}^n \mathrm{i}(\gamma_\beta[\gamma_\gamma,\gamma_\alpha]) - \gamma_\gamma[\gamma_\alpha,\gamma_\beta] - \gamma_\alpha[\gamma_\beta,\gamma_\gamma])\psi_n \\
&+ \frac{3}{8}\kappa\bar{\psi}^n \mathrm{i}(g_{\beta\gamma}\gamma_\alpha - g_{\beta\alpha}\gamma_\gamma + g_{\gamma\alpha}\gamma_\beta)\psi_n + g_{\gamma\alpha}D^\vartheta{}_{\vartheta\beta}\,.
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

Um das Ergebnis weiter zu untersuchen, müsste als Nächstes die erneute Variation der Wirkung der Spinor-Materieterme nach der inversen Metrik erfolgen, um die neue Lösung für das Differenzentensorfeld (4.67) einzusetzen und mit den einsteinschen Feldgleichungen zu vergleichen. Erste Schritte dieser Rechnung befinden sich im Anhang.

Im Vergleich zur Vakuumlösung (4.24) kann allerdings schon jetzt erwartet werden, dass die Dirac-Spinoren zur Anpassung der einsteinschen Feldgleichungen in Form von Zusatztermen auf der rechten Seite führen. Wie genau diese Änderung aussieht, müsste noch untersucht werden. Eine Abweichung würde bedeuten, dass Dirac-Spinoren unter klassischer Rechnung mögliche Beiträge von Nichtmetrizität und/oder Torsion hervorrufen und damit in der metrisch-affinen Theorie eine Quelle für das Differenzentensorfeld darstellen.

5 Fazit

Durch die Verwendung eines metrisch-affinen Zusammenhangs anstelle des Levi-Civita-Zusammenhangs konnten für die Einsteinschen Feldgleichungen Zusatzterme gefunden werden, die es erlauben, Torsion und Nichtmetrizität zu untersuchen. Um das zu erreichen, wurde ein Differenzentensorfeld eingeführt und eine Bewegungsgleichung für dieses gefunden. Das Einsetzen der gefundenen Lösung für den Vakuum-Fall in die variierte metrisch-affine Wirkung resultiert im Verschwinden jener Zusatzterme und die Gleichungen vereinfachen sich zu den einsteinschen Feldgleichungen.
Für die Bewegungsgleichung des Differenzentensorfeldes für Materie musste der Einschränkung getroffen werden, dass Materieterme, die in zweiter Ordnung an die Zusammenhangskoeffizienten gekoppelt sind, verschwinden. Für eine weitergehende Betrachtung von Vektorfeldtheorien könnten konkrete Fälle eingesetzt werden, um zu untersuchen, ob für bestimmte Materieterme eine Lösung gefunden werden kann.
Dirac-Spinoren erfüllen diese Einschränkung trivialerweise. Für sie konnte eine erneute Lösung für das Differenzentensorfeld gefunden werden, die darauf schließen lässt, dass die Anwesenheit der Dirac-Spinoren in der metrisch-affinen Theorie zu nicht verschwindenden Beiträgen abhängig vom Differenzentensorfeld führen. Dieses Ergebnis weist bereits explizit auf eine nicht-trivial erweiterte Dynamik metrisch-affiner Gravitationstheorien unter Einbezug von Materiefreiheitsgraden gegenüber der rein metrischen Gravitation hin.

A Anhang

Die Variation der metrisch-affinen Wirkung mit Materie teilt sich schematisch auf in:

$$\frac{\delta S}{\delta g} = \underbrace{\underbrace{\delta \mathring{R}}_{S_{\mathrm{EH}}} + \underbrace{\delta(\mathring{\nabla} D + D^2)}_{S_{\mathrm{D}}}}_{S_{\mathrm{affin}}} + \underbrace{\underbrace{\delta(\overset{(1)}{M} D + \overset{(2)}{M} D^2)}_{S_{\mathrm{Korr}}} + \underbrace{\delta(\mathcal{L}_M)}_{S_{\mathrm{M}}}}_{S_{\mathrm{Materie}}}. \tag{A.1}$$

Aus Kapitel 4 ist S_{affin} bekannt, daher werden die Bestandteile von S_{Materie} nach der inversen Metrik variiert. Für Dirac-Spinoren wird bei S_{Korr} lediglich $\overset{(1)}{M}$ benötigt. Mit dem bereits berechneten $\mathcal{L}_{\text{Korr}}$ (4.60) folgt dann

$$\delta S_{\text{Korr}} = 2\kappa\, \delta \int \left(-\bar{\phi}^n \mathrm{i} \frac{1}{8} \gamma^\mu [\gamma^\nu, \gamma_\lambda] \phi_n D^\lambda{}_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x \tag{A.2}$$

und mit $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ (4.59) noch

$$\delta S_{\mathrm{M}} = 2\kappa\, \delta \int \left(\bar{\phi}^n \mathrm{i} \gamma^\mu (\partial_\mu - \frac{1}{8} [\partial_\mu \gamma^\nu + \mathring{\Gamma}^\nu{}_{\mu\lambda}, \gamma_\nu]) \phi_n \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x. \tag{A.3}$$

Die Variation der Gamma-Matrizen ist gegeben [20] durch

$$\delta \gamma^\mu = \frac{1}{2} (\delta g^{\mu\varepsilon}) \gamma_\varepsilon + [\delta S_\gamma, \gamma^\mu], \tag{A.4}$$

wobei $\mathcal{S} \in SL(d_\gamma, \mathbb{C})$ die Darstellung einer Spinbasistransformation ist.

Mit Hilfe von Gleichung (A.4) lässt sich die Variation von S_{Korr} berechnen:

$$\begin{aligned}
\delta S_{\text{Korr}} &= 2\kappa\, \delta \int \left(-\bar{\phi}^n \mathrm{i} \frac{1}{8} \gamma^\mu [\gamma^\nu, \gamma_\lambda] \phi_n D^\lambda{}_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x \\
&= 2\kappa \int \left(-\bar{\phi}^n \mathrm{i} \frac{1}{8} \{ \delta\gamma^\mu [\gamma^\nu, \gamma_\lambda] + \gamma^\mu [\delta\gamma^\nu, \gamma_\lambda] + \gamma^\mu [\gamma^\nu, \delta\gamma_\lambda] \} \phi_n D^\lambda{}_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x \\
&= 2\kappa \int \Bigg(-\bar{\phi}^n \mathrm{i} \frac{1}{8} \Bigg\{ \left(\frac{1}{2} (\delta g^{\mu\varepsilon} \gamma_\varepsilon) + [\delta S_\gamma, \gamma^\mu] \right) [\gamma^\nu, \gamma_\lambda] \\
&\quad + \gamma^\mu \left[\frac{1}{2} (\delta g^{\nu\varepsilon}) \gamma_\varepsilon + [\delta S_\gamma, \gamma^\nu], \gamma_\lambda \right] \\
&\quad + \gamma^\mu \left[\gamma^\nu, \gamma_{\rho\lambda} \left(\frac{1}{2} (\delta g^{\rho\varepsilon}) \gamma_\varepsilon + [\delta S_\gamma, \gamma^\rho] \right) \right] \Bigg\} \phi_n D^\lambda{}_{\mu\nu} \Bigg) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Die Variation von S_M ergibt:

$$
\begin{aligned}
\delta S_\mathrm{M} = 2\kappa\,\delta \int \Bigg(\bar{\phi}^n \mathrm{i}\gamma^\mu \bigg(\partial_\mu - \frac{1}{8}\,[\partial_\mu\gamma^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\gamma^\lambda, \gamma_\nu]\bigg)\phi_n\Bigg)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\
= 2\kappa \int \Bigg(\bar{\phi}^n \mathrm{i}(\delta\gamma^\mu)\partial_\mu\phi_n - \bar{\phi}^n \mathrm{i}\frac{1}{8}\bigg\{\delta\gamma^\mu[(\partial_\mu\gamma^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\gamma^\lambda, \gamma_\nu] \\
+ \gamma^\mu[\partial_\mu(\delta\gamma^\nu) + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\delta\gamma^\lambda, \gamma_\nu] \\
+ \gamma^\mu[\partial_\mu\gamma^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\gamma^\lambda, g_{\rho\nu}\delta\gamma^\nu]\bigg\}\phi_n\Bigg)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\
= 2\kappa \int \Bigg(\bar{\phi}^n \mathrm{i}\bigg(\frac{1}{2}(\delta g^{\mu\varepsilon})\gamma_\varepsilon + [\delta S_\gamma, \gamma^\mu]\gamma^\mu\bigg)\partial_\mu\phi_n \\
- \bar{\phi}^n \mathrm{i}\frac{1}{8}\bigg\{\bigg(\frac{1}{2}(\delta g^{\mu\varepsilon})\gamma_\varepsilon + [\delta S_\gamma, \gamma^\mu]\bigg)\gamma^\mu[\partial_\mu\gamma^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\gamma^\lambda, \gamma_\nu]\bigg\}\phi_n \\
- \bar{\phi}^n \mathrm{i}\frac{1}{8}\bigg\{\gamma^\mu\bigg[\partial_\mu\bigg(\frac{1}{2}(\delta g^{\nu\varepsilon})\gamma_\varepsilon + [\delta S_\gamma, \gamma^\nu]\bigg) + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\bigg(\frac{1}{2}(\delta g^{\lambda\varepsilon})\gamma_\varepsilon + [\delta S_\gamma, \gamma^\lambda]\bigg), \gamma_\nu\bigg]\bigg\}\phi_n \\
- \bar{\phi}^n \mathrm{i}\frac{1}{8}\bigg\{\gamma^\mu\bigg[\partial_\mu\gamma^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}\gamma^\lambda, g_{\rho\nu}\bigg(\frac{1}{2}(\delta g^{\rho\varepsilon})\gamma_\varepsilon + [\delta S_\gamma, \gamma^\rho]\bigg)\bigg]\bigg\}\phi_n\Bigg)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \qquad \text{(A.6)}
\end{aligned}
$$

Literatur

[1] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. New York: Springer, 2000.

[2] Julian Schirrmeister. *Eine Einführung in die Metrisch-Affine Gravitationstheorie*. Nicht veröffentlichtes Manuskript. Friedrich-Schiller-Universität Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut, 2025.

[3] Mikio Nakahara. *Differentialgeometrie, Topologie und Physik*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2015.

[4] Fridtjof Toenniessen. *Topologie. Ein Lesebuch von den elementaren Grundlagen bis zur Homologie und Kohomologie*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2017.

[5] Thomas Wannerer. *Differentialgeometrie. Skript zur Vorlesung*. Friedrich-Schiller-Universität Jena, Institut für Mathematik, 2017.

[6] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*. 2. Aufl. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, 2013.

[7] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1984.

[8] Karlheinz Knapp. *Vektorbündel. Vom Möbius-Bündel bis zum J-Homomorphismus*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

[9] John M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*. 2. Aufl. Cham: Springer, 2018.

[10] Kirill Krasnov. *Formulations of general relativity. Gravity, spinors and differential forms*. Cambridge, New York, Port Melbourne, New Delhi, Singapore: Cambridge University Press, 2020.

[11] Alex Karpelson. *Matter and Space with Torsion*. 2024. arXiv: physics/9903027 [physics.gen-ph]. URL: https://arxiv.org/abs/physics/9903027.

[12] Helen Meskhidze und James Owen Weatherall. „Torsion in the Classical Spacetime Context“. In: *Philosophy of Science* 91.5 (Okt. 2023), S. 1262–1273. ISSN: 1539-767X. DOI: 10.1017/psa.2023.136. URL: http://dx.doi.org/10.1017/psa.2023.136.

[13] Jose Beltran Jimenez, Lavinia Heisenberg und Tomi S. Koivisto. *The Geometrical Trinity of Gravity*. 2019. arXiv: 1903.06830 [hep-th]. URL: https://arxiv.org/abs/1903.06830.

[14] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. 1997. arXiv: gr-qc/9712019 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019.

[15] Holger Gies. *Particles and Fields. Lecture Notes*. Friedrich-Schiller-Universität Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut, 2021.

[16] Alejandro Jiménez-Cano. *Metric-Affine Gauge theories of gravity: Foundations and new insights*. 2022. arXiv: 2201.12847 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/2201.12847.

[17] H. Blaine Lawson und Marie-Louise Michelsohn. *Spin geometry*. Princeton: Princeton Univ. Pres, 1989.

[18] Nikodem J. Poplawski. *Covariant differentiation of spinors for a general affine connection*. 2007. arXiv: 0710.3982 [gr-qc]. URL: https://arxiv.org/abs/0710.3982.

[19] Stefan Lippoldt. *Fermions in curved spacetimes*. Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 2016. URL: http://uri.gbv.de/document/gvk:ppn:862654467.

[20] Holger Gies und Stefan Lippoldt. „Fermions in gravity with local spin-base invariance". In: *Phys. Rev. D* 89 (6 März 2014), S. 064040. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.064040. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.89.064040.

[21] Naresh Dadhich und Josep M. Pons. „On the equivalence of the Einstein-Hilbert and the Einstein-Palatini formulations of general relativity for an arbitrary connection". In: *Gen. Rel. Grav.* 44 (2012), S. 2337–2352. DOI: 10.1007/s10714-012-1393-9. arXiv: 1010.0869 [gr-qc].

[22] Yi Mao u. a. „Constraining torsion with Gravity Probe B". In: *Phys. Rev. D* 76 (10 Nov. 2007), S. 104029. DOI: 10.1103/PhysRevD.76.104029. URL: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.104029.

[23] Dario Benedetti und Simone Speziale. „Perturbative quantum gravity with the Immirzi parameter". In: *JHEP* 06 (2011), S. 107. DOI: 10.1007/JHEP06(2011)107. arXiv: 1104.4028 [hep-th].

FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA

Eigenständigkeitserklärung

1. Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit - bei einer Gruppenarbeit die von mir zu verantwortenden und entsprechend gekennzeichneten Teile - selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.
   Ich trage die Verantwortung für die Qualität des Textes sowie die Auswahl aller Inhalte und habe sichergestellt, dass Informationen und Argumente mit geeigneten wissenschaftlichen Quellen belegt bzw. gestützt werden. Die aus fremden oder auch eigenen, älteren Quellen wörtlich oder sinngemäß übernommenen Textstellen, Gedankengänge, Konzepte, Grafiken etc. in meinen Ausführungen habe ich als solche eindeutig gekennzeichnet und mit vollständigen Verweisen auf die jeweilige Quelle versehen. Alle weiteren Inhalte dieser Arbeit ohne entsprechende Verweise stammen im urheberrechtlichen Sinn von mir.
2. Ich weiß, dass meine Eigenständigkeitserklärung sich auch auf nicht zitierfähige, generierende KI-Anwendungen (nachfolgend „generierende KI“) bezieht.
   Mir ist bewusst, dass die Verwendung von generierender KI unzulässig ist, sofern nicht deren Nutzung von der prüfenden Person ausdrücklich freigegeben wurde (Freigabeerklärung). Sofern eine Zulassung als Hilfsmittel erfolgt ist, versichere ich, dass ich mich generierender KI lediglich als Hilfsmittel bedient habe und in der vorliegenden Arbeit mein gestalterischer Einfluss deutlich überwiegt. Ich verantworte die Übernahme der von mir verwendeten maschinell generierten Passagen in meiner Arbeit vollumfänglich selbst.
   Für den Fall der Freigabe der Verwendung von generierender KI für die Erstellung der vorliegenden Arbeit wird eine Verwendung in einem gesonderten Anhang meiner Arbeit kenntlich gemacht. Dieser Anhang enthält eine Angabe oder eine detaillierte Dokumentation über die Verwendung generierender KI gemäß den Vorgaben in der Freigabeerklärung der prüfenden Person.
   Die Details zum Gebrauch generierender KI bei der Erstellung der vorliegenden Arbeit inklusive Art, Ziel und Umfang der Verwendung sowie die Art der Nachweispflicht habe ich der Freigabeerklärung der prüfenden Person entnommen.
3. Ich versichere des Weiteren, dass die vorliegende Arbeit bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt wurde oder in deutscher oder einer anderen Sprache als Veröffentlichung erschienen ist.
4. Mir ist bekannt, dass ein Verstoß gegen die vorbenannten Punkte prüfungsrechtliche Konsequenzen haben und insbesondere dazu führen kann, dass meine Prüfungsleistung als Täuschung und damit als mit „nicht bestanden“ bewertet werden kann. Bei mehrfachem oder schwerwiegendem Täuschungsversuch kann ich befristet oder sogar dauerhaft von der Erbringung weiterer Prüfungsleistungen in meinem Studiengang ausgeschlossen werden.

Jena, 31.03.2025

Ort und Datum

Unterschrift