

Vakuumpolarisation in räumlich inhomogenen Magnetfeldern

Diplomarbeit

Theoretisch-Physikalisches Institut
im Fachbereich Quantenfeldtheorie



seit 1558

vorgelegt von: Lars Rößler
Studienbereich: Physik
Matrikelnummer: 75423
Erstgutachter: Prof. Dr. Holger Gies
Zweitgutachter: Prof. Dr. Andreas Wipf

Diplomarbeit eingereicht am 9. November 2009
von Lars Rößler, geboren am 11.07.1984 in Altenburg

Vorwort

In dieser Arbeit wird der Vakuumpolarisationstensor der skalaren Quantenelektrodynamik (kurz: SQED) in skalaren äußeren Feldern betrachtet. Mit Hilfe des Weltlinienformalismus wird ein Algorithmus erstellt, mit dem dieser Tensor in beliebigen räumlich inhomogenen Feldern berechnet werden kann. Der Algorithmus soll dabei die Ward-Identität der Eichinvarianz auch im diskretisierten Fall exakt erfüllen und arbeitet mit minkowskiwertigen Größen. Nach erfolgreichen Tests für das Vakuum und homogene Magnetfelder, werden neue Resultate für die Lichtausbreitung (Brechungsindizes des Vakuums) in räumlich oszillierenden Magnetfeldern abgeleitet. Insbesondere der bisher unerforschte Bereich auf Skala der Comptonwellenlänge soll dabei aufgelöst werden. Im Limes stark veränderlicher Felder zeigt sich als wichtiges Ergebnis, dass der Brechungsindex dem des gemittelten Feldes entspricht.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| Abbildungsverzeichnis | III |
| Tabellenverzeichnis | V |
| Abkürzungsverzeichnis | VI |
| Symbolverzeichnis | VII |
| 1. Einleitung und Grundlagen | 1 |
| 1.1. Experimente zum Nachweis der Vakuumdoppelbrechung | 3 |
| 1.1.1. Das PVLAS-Experiment | 3 |
| 1.1.2. Polaris-Experiment | 5 |
| 1.2. Spezielle Relativitätstheorie und Lorentztransformation | 6 |
| 1.2.1. Der elektromagnetische Feldstärketensor | 8 |
| 1.3. Grundlagen der Quantenfeldtheorie | 10 |
| 1.3.1. Wirkung und die Bedeutung von Symmetrien | 10 |
| 1.3.2. Wicktheorem und Korrelationsfunktionen | 11 |
| 1.3.3. Pfadintegrale in der Quantenmechanik | 13 |
| 1.4. Weltliniennumerik | 15 |
| 1.5. Das elektromagnetische Feld im Rahmen der Weltliniennumerik | 18 |
| 1.5.1. Die Landau-Niveaus | 19 |
| 2. Das Vakuum | 20 |
| 2.1. Theoretische Grundlagen | 20 |
| 2.1.1. Die 2-Punkt Funktion im Ortsraum | 21 |
| 2.1.2. Die 2-Punkt Funktion im Impulsraum | 23 |
| 2.1.3. Analytische Berechnung von $\Pi^{\mu\nu}$ im Impulsraum | 24 |
| 2.1.4. Numerische Berechnung von $\Pi^{\mu\nu}$ im Impulsraum | 27 |
| 2.2. Ergebnisse der numerischen Simulation auf den Vakuum | 30 |
| 2.3. Stabilität des Algorithmus | 34 |
| 3. Konstantes Magnetfeld B | 40 |
| 3.1. Theoretische Grundlagen | 40 |
| 3.1.1. Analytische Lösung für $\Pi^{\mu\nu}$ mit konstantem Magnetfeld beliebiger Orientierung | 43 |
| 3.1.2. Numerische Berechnung von $\Pi^{\mu\nu}$ mit konstantem Magnetfeld B . . | 46 |
| 3.2. Ergebnisse der numerischen Simulation für konstante Magnetfelder B . . . | 47 |

| | |
|---|--------------|
| 3.3. Die Phasengeschwindigkeit im konstanten magnetischen Feld | 50 |
| 3.3.1. Analytische Berechnung der Phasengeschwindigkeit | 51 |
| 3.3.2. Bestimmung des Grenzfalls schwacher Felder | 54 |
| 3.3.3. Numerische Berechnung der Phasengeschwindigkeit | 56 |
| 3.3.4. Physikalische Interpretation | 58 |
| 4. Inhomogene Magnetfelder $\mathcal{B}(x)$ | 63 |
| 4.1. Numerische Berechnung der Phasengeschwindigkeit | 63 |
| 4.2. Numerische Ergebnisse für inhomogene Magnetfelder | 65 |
| 4.2.1. Wirkung der räumlichen Inhomogenität | 69 |
| 4.2.2. Rechenzeiten des numerischen Algorithmus | 70 |
| 5. Zusammenfassung und Ausblick | 75 |
| 5.1. Zusammenfassung | 75 |
| 5.2. Ausblick | 76 |
| Literaturverzeichnis | 77 |
| Eidesstattliche Erklärung | 80 |
| A. Effektive Wirkung und Legendre Transformation | ii |
| A.1. Legendre Transformation | ii |
| A.2. Effektive Wirkung | iii |
| B. Weltliniennumerik am Beispiel der ϕ^4-Theorie | v |
| B.1. Betrachtung der Normierung | vii |
| C. Berechnung des N-Punkt Korrelators auf den Vakuum | ix |
| C.1. Methode der Quadratischen Ergänzung | x |
| C.2. Greensche Funktion $G_{B_{ij}}$ auf den Vakuum | xi |
| C.3. Erweiterung der Greenschen Funktion auf konstante Felder | xii |
| C.4. Zerlegung der Greenschen Funktion in gerade und ungerade Anteile in der Eigenzeit | xiv |
| D. Nonlinear Least - Squares - Verfahren | xvi |
| E. Parallelisierung und Multithreading | xviii |
| E.1. Möglichkeiten der Parallelisierung | xviii |
| E.2. Parallelisierung mit Hilfe der <code>pthread</code> -Klasse | xviii |
| F. Einführung in die Programmanwendungen | xxii |
| F.1. Grundstruktur des Simulationsprogrammes | xxii |
| F.2. Grundstruktur der Klassen | xxiii |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|---|----|
| 1.1. | Schematische Darstellung der Doppelbrechung im Vakuum [1] | 2 |
| 1.2. | Schematische Darstellung des PVLAS - Experimentes [2] | 4 |
| 1.3. | Schematische Darstellung des PVLAS - Experiment und Blick auf die Magneten | 5 |
| 1.4. | Schematische Darstellung des Polaris - Experimentes [3] | 6 |
| 1.5. | Albert Einstein: Begründer der Relativitätstheorie [4] | 7 |
| 1.6. | Emmy Noether: Formuliert 1918 das Noether-Theorem, das eine neue Betrachtung von Erhaltungsgrößen ermöglicht. | 12 |
| 2.1. | Feynman Diagram der 2-Punkt Funktion auf den Vakuum | 24 |
| 2.2. | Spur des Integrationskernes für verschiedene statistische Ensembles mit einem Initialisierungswert (Seed) von 10. | 36 |
| 2.3. | $\delta\Gamma^{11}$ mit $k = (1, 1, 1, 1)^T$ für verschiedene statistische Ensemble mit einem Initialisierungswert (Seed) von 10. Man erkennt, dass mit Vergrößerung der Loopanzahl eine bessere Approximation an die analytischen Ergebnisse ermöglicht wird. | 37 |
| 2.4. | $\delta\Pi^{11}$ mit $k = (1, 1, 1, 1)^T$ für verschiedene Massenparameter m und einem Initialisierungswert (Seed) von 10. | 37 |
| 2.5. | 2-Punkt Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ für $k = (1, 1, 1, 1)^T$ mit einem Initialisierungswert (Seed) von 10. | 38 |
| 2.6. | Stabilitätstest für Π^{11}/e^2 mit einem Massenterm von $m = 1.0$ für 1000 Stützstellen pro Weltlinie. Die einzelnen Diagramme zeigen dabei die Streuung der numerischen Ergebnisse in Abhängigkeit vom gewählten statistischen Ensemble und ermöglichen somit eine optimale Wahl der Loopanzahl bei minimaler Abweichung vom analytisch zu erwartenden Ergebnis. . . . | 39 |
| 3.1. | Die Dichte der 22-Komponente $\delta\Pi^{22}/e^2$ für verschiedene Feldstärken eB . Man erkennt, dass mit zunehmender Feldstärke die Fläche unter der Kurve einen Null-Durchgang besitzt, was einen kritischen Bereich für die Integration darstellt. | 48 |
| 3.2. | Veränderung der Phasengeschwindigkeit v_{\parallel} für $eB = 0.1$ mit einem Ensemble von 40000 Loops und 1000 Stützstellen pro Loop (Seed = 10) bei Variation des Massenparameters. | 57 |
| 3.3. | Veränderung der Phasengeschwindigkeit v_{\perp} für $eB = 0.1$ mit einem Ensemble von 40000 Loops und 1000 Stützstellen pro Loop (Seed = 10) bei Variation des Massenparameters. | 58 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.4. | Verschiebung der Phasengeschwindigkeit für unterschiedliche Feldstärken eB bei konstanten kritischen Feld $m^2 = 1.0$ und $k = (0, 0.1, 0, 0.1)^T$. Es ist eine zunehmende Streuung der Messwerte bei Konvergenz der Feldstärke gegen den kritischen Wert zu erkennen, was unter anderem am Versagen der numerischen Integration liegen kann. | 60 |
| 3.5. | Stabilitätstest für $\frac{1}{2}\Pi_{\parallel}/k^2e^2$ (bzw. des Konvergenzfaktors von $\frac{1}{90}$) mit einem Massenterm von $m = 1.0$ für 1000 Stützstellen pro Weltlinie. Es ist in den Diagrammen eine Konvergenz und zunehmende Stabilisierung bei Erhöhung der Loopanzahl gegen den analytischen Wert zu erkennen. . . . | 61 |
| 3.6. | Stabilitätstest für $\frac{1}{2}\Pi_{\perp}/k^2e^2$ (bzw. des Konvergenzfaktors von $\frac{7}{90}$) mit einem Massenterm von $m = 1.0$ für 1000 Stützstellen pro Weltlinie. | 62 |
| 4.1. | Schematische Darstellung des räumlich inhomogenen Magnetfeldes. | 64 |
| 4.2. | Konstanter Feld Limes für große Frequenze λ_B und verschiedene Feldstärken B_0 und B_1 | 67 |
| 4.3. | Erhöhung der Auflösung für die Feldkombination $eB_0 = 0.2$ und $eB_1 = 0.1$. Es ist zu erkennen, dass es im Bereich kleiner Wellenlängen zur Ausprägung eines Minimas kommt, was einen ersten Hinweis auf den Einfluss der räumlichen Inhomogenität gibt. | 68 |
| 4.4. | Verschiebung der Phasengeschwindigkeit für verschiedene Phasenwinkel ϕ . Für den Grenzfall großer Wellenlängen ist der erwartete Effekt, dass die Verschiebung gegen den Wert eines konstanten Feldes der Stärke $B_0 + B_1$ konvergiert erfüllt. Für kleine Wellenlängen liefert diese Konstante-Feld-Näherung jedoch nur lokal das richtige Ergebnis. | 69 |
| 4.5. | Verschiebung der Phasengeschwindigkeit in einem Bereich $\phi \in [0, 2\pi]$. Beide Graphen zeigen eine Ausprägung von Extrema im Bereich großer Wellenlängen, ermöglichen jedoch keine Rückschlüsse auf die Effekte auf Skala der Comptonwellenlänge. | 72 |
| 4.6. | Vergrößerung der Wellenlängenaufösung λ_B von einer Schrittweite 0.1 \rightarrow 0.03. | 73 |
| 4.7. | Vergrößerte Darstellung des vorderen Wellenlängenbereiches bei einer Schrittweite von 0.03. Es ist im Wellenlängenbereich auf Skala der Comptonwellenlänge ebenfalls eine Ausprägung von Extrema zu erkennen, die genau um $\Delta\phi = \pi$ zu denen bei großen Wellenlängen verschoben sind. In der Abbildung erkennt man außerdem, dass der Effekt der räumlichen Inhomogenität wesentlich kleiner ist als der bei großen Wellenlängen. | 74 |
| E.1. | Schema zur Verdeutlichung des Multithreading Prinzips | xix |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|------|--|-----|
| 2.1. | Längendimensionen der einzelnen Parameter in der 2-Punkt Funktion. . . | 26 |
| 2.2. | Analytische Ergebnisse der Spur des Integrationskernes. | 31 |
| 2.3. | Numerische Ergebnisse der Spur des Integrationskernes. | 31 |
| 2.4. | Ergebnisse der Polynomapproximation für $k = (1, 1, 1, 1)^T$ und einen Initialisierungswert von 10 | 33 |
| 3.1. | 22-Komponente des Polarisationsensors für verschiedene Feldstärken. . . | 49 |
| 3.2. | Feldausrichtung im kartesischen Koordinatensystem. | 50 |
| 3.3. | Ergebnis der Entwicklung des Integrationskernes von $\Pi^{\mu\nu}$ unter Verwendung minkowskiwertiger Größen | 56 |
| 4.1. | Konstanter-Feld Limes für große Frequenzen λ_B | 66 |
| 4.2. | Durchschnittliche Rechenzeit zur Berechnung der Phasengeschwindigkeit. . | 71 |
| B.1. | Längendimensionen der einzelnen Parameter innerhalb der ϕ^4 -Theorie . . | vii |

Abkürzungsverzeichnis

| | |
|-------|------------------------------------|
| QED | Quantenelektrodynamik |
| SQED | skalare Quantenelektrodynamik |
| QCD | Quantenchromodynamik |
| QFT | Quantenfeldtheorie |
| LNL | Laboratori Nazional di Legnaro |
| PVLAS | Polarizzazione del Vuoto con Laser |
| TeV | Tera-Elektronenvolt |
| eV | Elektronenvolt |
| keV | kilo-Elektronenvolt |
| LHC | Large Hadron Collider |
| ELI | Extreme Light Infrastructure |

Symbolverzeichnis

| | |
|-------------------------------|--|
| W | Arbeit |
| e | Elementarladung $1.602 \cdot 10^{-19} C$ |
| m | Massenparameter |
| m_e | Ruhemasse des Elektrons $9.109 \cdot 10^{-31} kg$ |
| c | Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $2.99792 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ |
| λ | Wellenlänge |
| λ_C | Comptonwellenlänge |
| λ_B | Wellenlänge des Inhomogenen Feldes |
| \hbar | reduziertes Planck'sches Wirkungsquantum $1.0546 \cdot 10^{-34} Js$ |
| E_c | kritische Feldstärke des elektrischen Feldes |
| B_c | kritische Feldstärke des magnetischen Feldes |
| I_c | kritische Intensität |
| B_0 | mittlere Feldstärke |
| B_1 | Amplitudenfeldstärke des inhomogenen Feldes |
| \mathcal{B} | Magnetfeldvektor |
| ϵ_c | Elliptizität des Signals |
| z | mittlere Weglänge |
| k | 4 dimensionaler Impulsvektor des einfallenden Photons |
| \mathbf{k} | räumlicher Impulsvektor des einfallenden Photons |
| θ | Winkel zwischen Impuls- und Magnetfeldvektor |
| I_{signal} | Signalintensität |
| ω | Frequenz des Photons |
| ω_m | Rotationsfrequenz der Magneten des PVLAS - Experiments |
| ω_s | bekannte Frequenz des elektro-optischen Modulators beim PVLAS - Experiment |
| ds^2 | Linielement |
| $g^{\mu\nu}$ | Metrik zur Beschreibung der Raum-Zeit-Geometrie |
| x^μ | 4-dimensionaler Raumzeit-Vektor |
| t | Zeitparameter |
| Λ_ν^μ | Transformationsmatrix |
| $F^{\mu\nu}$ | Feldstärketensor im Minkowskiraum \rightarrow Subskript E signalisiert euklidischen Tensor |
| $\tilde{F}^{\mu\nu}$ | dualer Feldstärketensor im Minkowskiraum |
| $A^{\mu\nu}, \alpha^{\mu\nu}$ | Vektorpotential, Eichpotential, Eichfeld |
| Φ | skalares Feld der Eichtransformation |
| $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ | Pseudotensor |

| | |
|--|---|
| $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ | Ableitung nach x^μ |
| D_μ | kovariante Ableitung |
| $G(x, y)$ | Greensche Funktion |
| G_B | Greensche Funktion auf den Vakuum |
| \mathcal{G}_B | Greensche Funktion des konstanten Feldes |
| \mathcal{S}_B | gerader Anteil der Greensche Funktion des konstanten Feldes |
| \mathcal{A}_B | ungerader Anteil der Greensche Funktion des konstanten Feldes |
| ϕ, η | Quantenfelder zur Beschreibung von Bosonen und Fermionen |
| J | Quellenfeld |
| Z | allgemeines erzeugendes Funktional |
| Z_0 | erzeugendes Funktional der freien Theorie |
| L | Lagrangefunktion |
| \mathcal{L} | Lagrangedichte |
| L_W | Lagrangefunktion der Weltliniennumerik |
| H | Hamiltonfunktion |
| \mathcal{H} | Hamiltondichte |
| H_W | Hamiltonfunktion der Weltliniennumerik |
| S | Wirkung |
| Γ | effektive Wirkung |
| Γ^1 | Korrekturterm erster Ordnung zur effektiven Wirkung |
| $\Pi^{\mu\nu}$ | 2-Punkt Funktion, Polarisationsensor, 2-Punkt Korrelator |
| $\delta\Pi^{\mu\nu}$ | Dichte der 2-Punkt Funktion |
| τ, T | Parameter der Eigenzeit |
| $P_{\dots}^{\mu\nu}$ | Projektionsoperatoren, Projektoren |
| v_{ph} | Phasengeschwindigkeit |
| v_{gr} | Gruppengeschwindigkeit |
| n_{\dots} | Brechungsindex |

1. Einleitung und Grundlagen

„Wir müssen unbedingt Raum für Zweifel lassen, sonst gibt es keinen Fortschritt, kein Dazulernen. Man kann nichts Neues herausfinden, wenn man nicht vorher eine Frage stellt. Und um zu fragen, bedarf es des Zweifels.“

(Richard Feynman)

Die Möglichkeit Experimente bei großen Energien durchzuführen, ermöglicht es heute nach neuen Teilchen beziehungsweise neuen Phänomenen in der Physik zu suchen, in Bereichen die, noch vor ein paar Jahrzehnten unvorstellbar gewesen wären. Verschiedene Großprojekte, die durch internationale Zusammenarbeit ermöglicht werden, erweitern die Kenntnisse im Bereich des Standardmodells der Elementarteilchen oder im Verständnis der einzelnen Kräfte zunehmend. Ein Ansatz zur Erforschung des Mikrokosmos stellt dabei im Bereich der Teilchenbeschleuniger der im Jahre 2010 in Betrieb gehende LHC am Cern dar. Mit Hilfe dieses Beschleunigers werden Teilchen, in diesem Fall Protonen oder später auch Ionen, mit einer Energie von bis zu 7 TeV beschleunigt und aufeinander geschossen. Die daraus resultierende Kollision mit einer Energie von 14 TeV soll vor allem das Bild vom Standardmodell erweitern und einzelnen Theorien bestätigen. Eine dieser Theorien ist das von Peter Higgs im Jahre 1964 postulierte Wechselwirkungsteilchen des so genannten Higgs-Bosons. Eine andere Möglichkeit der Erforschung neuer Bereiche der Physik stellt die Lasertechnik dar. Schon heute ist es möglich mit Hilfe von Femtosekundenlasern Leistungen im Petawatt - Bereich zu erzeugen. Ein Beispiel hierfür ist der an der Universität Jena [3] entwickelte Polaris Laser, der eine Intensität von $10^{21} \frac{W}{cm^2}$ bei einer Pulsdauer von 150 fs realisieren kann. Im Folgenden wird gezeigt, auf welche Weise die kritischen Feldstärken E_c und B_c zu bestimmen sind:

$$\begin{aligned} W &\sim eE_c \frac{\lambda}{2\pi} = eE_c \frac{\hbar}{m_e c} = m_e c^2 \rightarrow E_c = \frac{m_e^2 c^3}{e \hbar} \\ E_c &= 1.33 \cdot 10^{18} \frac{V}{m} \quad B_c = 4.42 \cdot 10^9 T \quad \text{SI - Einheiten} \quad (1.1) \\ E_c &= \frac{m^2}{e} \equiv B_c \quad \text{natürliche Einheiten } (\hbar = c = 1). \end{aligned}$$

Mit dieser Intensität liegt der Laser somit nur noch wenige Größenordnungen unterhalb der kritischen Intensität $I_C = 4.7 \cdot 10^{29} \frac{W}{cm^2}$. In [1] werden weitere Projekte, unter anderem ELI angesprochen, mit denen es möglich sein wird noch höhere Intensitäten zu erreichen

und das bestehende Energie-Gap bis zur kritischen Feldstärke weiter zu schließen. Ein interessanter physikalischer Effekt in diesem energetischen Bereich ist die spontane Erzeugung eines Elektron - Positron Paares aufgrund der Vakuumpolarisation. Dieser Effekt wurde schon zu Anfang der 30er Jahre des vergangenen Jahrhunderts [5] postuliert, konnte jedoch aufgrund der bisher nur sehr geringen Feldstärken nicht direkt nachgewiesen werden. Auch mit Hilfe des Polaris - Lasers wird es nicht möglich sein diese spontane Paarbildung zu beobachten, jedoch kommt es leicht unterhalb der kritischen Feldstärke zu einem Effekt, welchen man als *Vacuum birefringence* oder auch Doppelbrechung im Vakuum bezeichnet [1], und der im direkten Zusammenhang mit der Paarbildung zu sehen ist. Die Entstehung eines Elektron - Positron - Paares in starken Magnetfeldern wurde dabei erstmals von Toll [6] und Robl im Jahre 1952 untersucht. In Abbildung 1.1

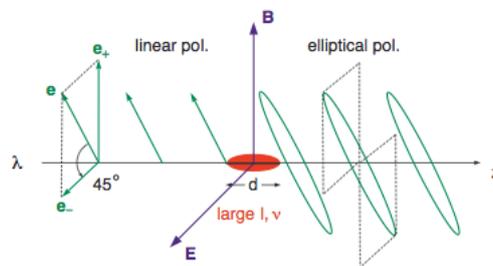


Abbildung 1.1.: Schematische Darstellung der Doppelbrechung im Vakuum [1]

wird dies schematisch dargestellt. Das Grundprinzip besteht darin, dass ein Photon mit einer bestimmten Polarisation in das Laserfeld eingestrahlt wird, worauf es aufgrund der Vakuumpolarisation und deren Wechselwirkung mit dem hochenergetischen elektromagnetischen Feld zu einer Veränderung der Phasengeschwindigkeit des Photons kommt. Dabei wird die Komponente der Phasengeschwindigkeit in Richtung des Feldes auf andere Weise beeinflusst wie die Komponente senkrecht zum Feld. In physikalischer Hinsicht bedeutet dies, dass ein zuvor linear polarisiertes Photon nach durchlaufen des Laserfeldes eine elliptische Polarisation aufweist. Im Rahmen des Experimentes sind dabei verschiedene Faktoren wichtig, die in einem späteren Kapitel behandelt werden. Neben den in 1.1 vorgestellten Experimenten wird ein weiterer vielversprechender Ansatz zur Erhöhung der Laserintensität in [7] angesprochen, in dem die Ausnutzung von höheren harmonischen Ordnungen bei Hochintensitätslasern vorgeschlagen wird. Dies könnte die Laserintensität im Rahmen des Experimentes noch einmal um 2 bis 3 Größenordnungen erhöhen.

1.1. Experimente zum Nachweis der Vakuumdoppelbrechung

Der experimentelle Nachweis von Quanteneffekten ist zumeist nur sehr schwierig zu realisieren und erfordert ein Vielzahl neuer Ideen diese sichtbar zu machen. In den Folgenden Abschnitten sollen zwei Experimente beschrieben werden, mit denen die Physik bei hohen Laserintensitäten erforscht werden soll und die dabei vollständig unterschiedliche Wege gehen. Das Hauptaugenmerk soll dabei auf dem Effekt der Vakuumdoppelbrechung liegen.

1.1.1. Das PVLAS-Experiment

Ein erstes Experiment, zur Untersuchung der Quanteneffekte des Vakuums, ist das PVLAS - Experiment am LNL¹ in Padova, Italien. Ziel dieses Projektes ist neben der Messung der Vakuumdoppelbrechung [8] auch mehr Erkenntnisse über die Physik der dunklen Materie [9] zu gewinnen. Die Signalempfindlichkeit, die sich direkt proportional zur Eliptizität ϵ_s des dazu verwendeten Polarimeters verhält, liegt bei etwa $10^{-7} \frac{\text{rad}}{\sqrt{\text{Hz}}}$. Zu den theoretisch vorhergesagten Effekten gehört unter anderem auch ein durch das Vakuum induzierter Dichroismus, welcher durch Spin - 0 - Bosonen mit einer Ruhemasse von ungefähr $10^{-3} eV$ (Elektron $\sim 511 keV$) erzeugt wird. Ein Nachweis dieses Phänomens würde zeigen, dass es zu einer Wechselwirkung zwischen den Photonen des Laserfeldes und den virtuellen Photonen des Magnetfeldes kommt. In Abbildung 1.2 ist der schematische Aufbau des Experimentes dargestellt. Das konstante Magnetfeld B_0 besitzt eine Feldstärke von $5.5 T$ und ist somit wesentlich kleiner als die kritische Feldstärke E_c . Die Erzeugung des Feldes wird mit Hilfe von supraleitenden Magneten, die drehbar auf einer Achse senkrecht zum eigentlichen Feld gelagert sind und eine Länge von $1 m$ besitzen (Abbildung 1.3a), erreicht.

$$\epsilon_s \sim \frac{B_0^2 z}{m^2} \quad (1.2)$$

Ausgehend von der Stärke des verwendeten Feldes ist der gesuchte Effekt, aufgrund $B_0 \ll B_{cr}$, nicht nachzuweisen. Jedoch hängt nach Gleichung (1.2) aus [10] dessen Signalstärke noch mit dem Weg z der Laserphotonen durch das Magnetfeld zusammen, welcher mit Hilfe von Spiegeln (L1 und L2²) vergrößert werden kann. Das heißt tritt ein Laserphoton durch den Spiegel L1 in die Apparatur 1.2 ein, so wird dieses mit einer Häufigkeit von etwa 10^5 zwischen L1 und L2 hin und her reflektiert und verlässt daraufhin das System durch L2 in Richtung des Analysators. Ein solches System von Spiegeln wurde 1897 vom den französischen Physikern Charles Fabry und Alfred Pérot entwickelt und als Interferometer eingesetzt. Die Eigenschaften des Systems werden dabei von der

¹LNL = Laboratori Nazional di Legnaro

²FP cavity mirror

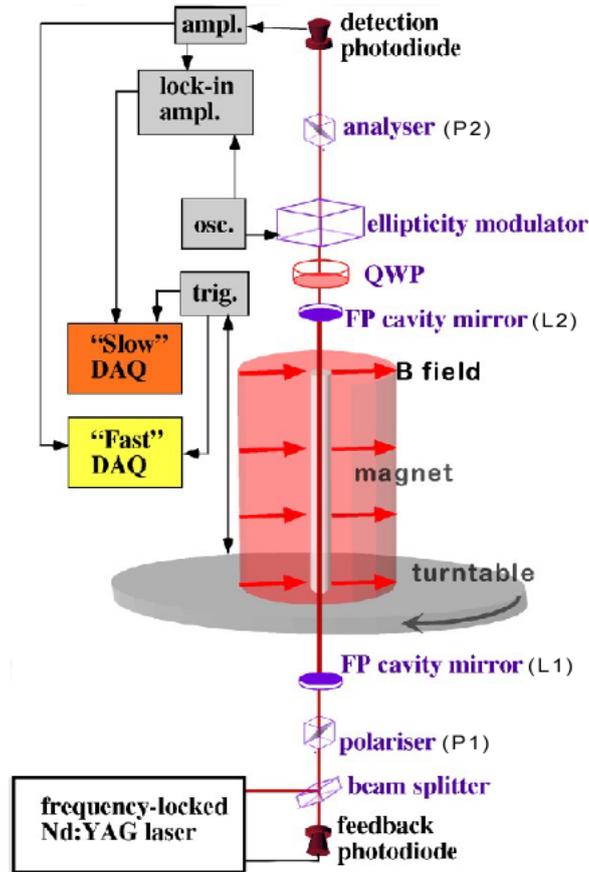


Abbildung 1.2.: Schematische Darstellung des PVLAS - Experimentes [2]

Reflektivität R der einzelnen Spiegel und dem Abstand der Spiegel (PVLAS ~ 6.4 m) bestimmt. Die Polarisation des einfallenden Photons wird mit Hilfe eines Polarisators P1 kontrolliert, der sich vor L1 befindet. Der Polarisator selbst ist im Gegensatz zu den Magneten fest und kann in seiner Ausrichtung nicht verändert werden. Wie in späteren Rechnungen gezeigt wird, hängt die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit des Lichtes und damit die Variation der Brechzahl, von der Größe θ ab, die den Winkel zwischen den Polarisationsvektor k des Photons und den Magnetfeldvektor \mathcal{B} beschreibt. Dieser Parameter ist insofern wichtig, da er, nach Gleichung (1.3), für das zu erwartende Messsignal von zentraler Bedeutung ist,

$$I_{signal} \sim \sin 2\theta. \quad (1.3)$$

Nach (1.3) kommt es nämlich in Abhängigkeit von θ zu Minima und Maxima der Signalintensität I_{signal} , welche über eine Veränderung der Lage des Magnetfeldes variiert werden kann. Hinter den Spiegel L2 befindet sich wiederum ein Polarisator (P2), wel-

cher orthogonal zu P1 orientiert ist. Durch eine drehbare Lagerung der Magneten ist es möglich, dass Messsignal besser vom vorhandenen Hindergrundrauschen zu isolieren. Um dies zu erreichen wird hinter P2 einem SOM³ geschaltet, der mit einer bekannten Frequenz ω_S über ein Pulsgenerator angesteuert wird. Die Magneten hingegen werden mit der Frequenz ω_M in Rotation versetzt. Das resultierende Messsignal besitzt somit eine Modulation von $\omega_S \pm 2\omega_M$.

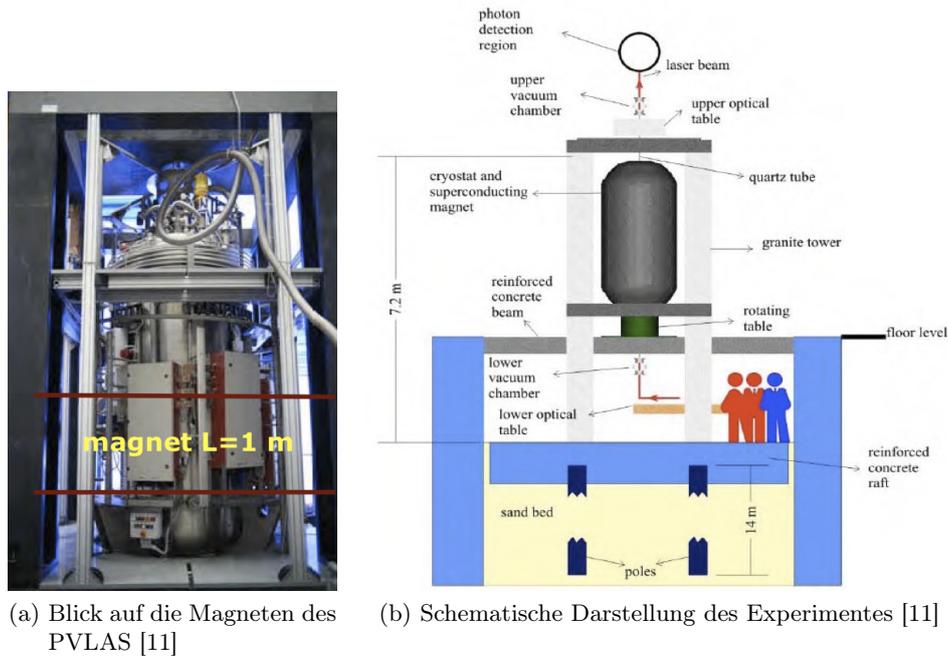


Abbildung 1.3.: Schematische Darstellung des PVLAS - Experiment und Blick auf die Magneten

1.1.2. Polaris-Experiment

Im Gegensatz zum PVLAS - Experiment, bei dem nur sehr geringen Feldstärken von etwa $5.5 T$ verwendet werden, ist es das Ziel des Polaris - Experiments mit Hilfe eines Hochintensitätslasers Feldstärken in der Nähe der kritischen Feldstärke E_c zu erzeugen. Der Vorschlag, die Vakuumdoppelbrechung mit dieser Methode nachzuweisen, wurde erstmals von Thomas Heinzl, Andreas Wipf und weiteren in [3] veröffentlicht und wird zur Zeit an der Friedrich Schiller Universität in Jena umgesetzt. In Abbildung 1.4 ist eine schematische Darstellung des Experiments gezeigt. Man erkennt, dass das Röntgenphoton durch einen Polarisator in die Anordnung eintritt, in der es im Fokusbereich (fokale

³elektro-optischer Modulator

Ebene) des Laser zum gesuchten Effekt kommen sollte. Ziel ist es die Elliptizität eines

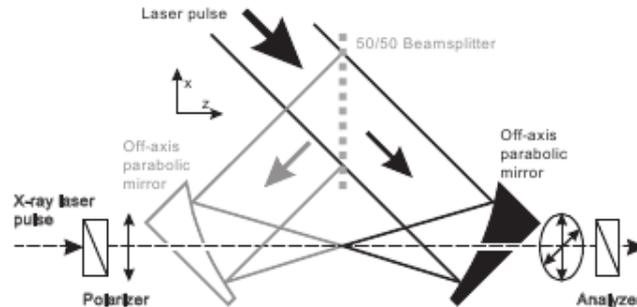


Abbildung 1.4.: Schematische Darstellung des Polaris - Experimentes [3]

Röntgenphotons danach mit Hilfe eines Polarimeters zu bestimmen, das sich hinter dem Analysator befindet wird. Die Intensität des Laserpulses innerhalb der fokalen Ebene beträgt dabei $\sim 10^{22} \frac{W}{cm^2}$ und liegt somit nur noch wenige Größenordnungen unterhalb der kritischen Feldstärke. Diese hohen Intensitäten sind dabei nach (1.2) notwendig, da bei dem verwendeten Versuchsaufbau die mittlere Weglänge als gering angesehen werden muss. Die gesamte Versuchsanordnung befindet sich dabei im Ultrahochvakuum.

1.2. Spezielle Relativitätstheorie und Lorentztransformation

Vor der Einführung der Relativitätstheorie [12] wurden die physikalische Probleme im Rahmen der klassischen Mechanik oder Äthertheorie behandelt. Vor allem mit Hilfe des Äthers ist versucht worden die zu dieser Zeit übliche Ansicht von der Varianz der Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Inertialsystemen zu erklären. Jedoch führte genau diese Vorstellung bei der Interpretation verschiedenster experimenteller Ergebnisse zu Schwierigkeiten. Eines der bedeutendsten Experimente in diesem Zusammenhang ist das im Jahre 1881 von Michelson durchgeführte *Michelson* - Experiment mit dessen Hilfe genau die erwartete Varianz der Lichtgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Eigenbewegung der Erde gemessen werden sollte. Die Ergebnisse zeigten aber, dass keine Varianz der Lichtgeschwindigkeit im Rahmen der Messgenauigkeit festzustellen war. Erst durch die Einführung der speziellen Relativitätstheorie im Jahre 1905 durch Albert Einstein, in der Raum und Zeit als neue Einheit in der **Raumzeit** zusammengefasst und die Lichtgeschwindigkeit als universelle Konstante eingeführt wurde, konnte das Ergebnis dieser Experimente auch theoretisch erklärt werden. In der speziellen Relativitätstheorie wird von einer flachen Raumzeit ausgegangen, welche mit Hilfe einer Metrik $g^{\mu\nu}$ beschrieben

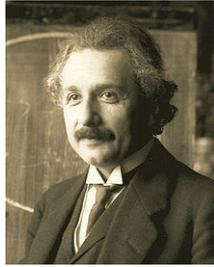


Abbildung 1.5.: Albert Einstein: Begründer der Relativitätstheorie [4]

werden kann. Eine Erweiterung auf andere Raum-Zeit Geometrien führte Einstein im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie durch, die als Verallgemeinerung der speziellen Relativitätstheorie angesehen werden kann. Ausgehend von der Metrik $g^{\mu\nu}$ ist die wichtige Größe des Linienelementes ds^2 über

$$ds^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (1.4)$$

definiert, und stellt neben der Lichtgeschwindigkeit eine invariante Größe dar. Im Gegensatz zur klassischen, newtonschen Beschreibung von Raum und Zeit handelt es sich bei den einzelnen Vektoren um 4-dimensionale Größen die sowohl Informationen über den Raum, als auch über die Zeit enthalten. Mit Hilfe der Metrik des Minkowskiraums wird das Skalarprodukt zwischen solchen Vektoren analog zu Gleichung (1.5) definiert.

$$\bar{a}\bar{b} = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu = \sum_{i=1}^3 a_i b_i - a_0 b_0 \quad (1.5)$$

Dabei stellt das Minuszeichen innerhalb dieser Gleichung eine Eigenschaft dieses Raumes dar. Die Metrik lässt sich somit als $g^{\mu\nu} = (-, +, +, +)$ definieren in welcher die Zeitdimension mit den Index 0 bezeichnet werden soll.

$$\bar{x} = (ct, \mathbf{x}) \rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^3 x_i^2 - c^2 t^2 \equiv x^i x_i - c^2 t^2 \quad (1.6)$$

In Gleichung (1.6) ist das Skalarprodukt am Beispiel des 4 - dimensionalen Ortsvektors im Minkowskiraum dargestellt. Durch die Einsteinschen Summenkonvention wird eine Notation eingeführt, die besagt, dass über gleiche Indizes summiert werden kann. Des weiteren sollen bei der Verwendung von griechischen Buchstaben bei den einzelnen Indizes darauf verwiesen werden, dass diese die Werte 1 bis 4 annehmen können, wohingegen bei Nomenklatur mit römischen Buchstaben die Summation nur über die Ortsanteile (1...3) ausgeführt wird.

In der klassischen Physik wird der Übergang zwischen zwei Inertialsystemen mit der **Galilei-Transformation** realisiert, was bedeutet, dass die Zeit in allen Bezugssystemen

den selben Wert annimmt ($t = \tilde{t}$). Wird zum Beispiel der Übergang vom ruhenden Inertialsystem Σ auf ein sich mit der Geschwindigkeit v fortbewegenden Inertialsystem $\tilde{\Sigma}$ betrachtet, so gilt für die Galilei - Transformation:

$$t = \tilde{t}, \quad x = \tilde{x} + vt, \quad y = \tilde{y}, \quad z = \tilde{z}. \quad (1.7)$$

Was in einer allgemeineren Schreibweise auch durch $x = \Lambda \tilde{x}$ ausgedrückt werden kann. Die Matrix Λ wird auch als Transformationsmatrix bezeichnet. In der speziellen Relativitätstheorie wird der Übergang zwischen zwei Inertialsystemen mit Hilfe der **Lorentz-Transformation** beschrieben. Als invariante Größe wird dabei das Linienelement ds^2 und die Lichtgeschwindigkeit c betrachtet und nicht wie im Fall der Galilei-Transformation die Zeit t . Für das Beispiel eines ruhenden Inertialsystems, das auf ein sich bewegendes Inertialsystem abgebildet werden soll, gilt somit:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 = d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2 - c^2 d\tilde{t}^2 = d\tilde{s}^2 \\ &\rightarrow dt^2 = d\tilde{t}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann ebenfalls mit Hilfe einer Transformationsmatrix Λ beschrieben werden. Für die allgemeine Beschreibung dieser Transformation folgen somit mit Hilfe von $x^\mu = \Lambda_\nu^\mu \tilde{x}^\nu$ und

$$\begin{aligned} ds^2 &= g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\phi d\tilde{x}_\sigma d\tilde{x}_\phi \equiv g^{\sigma\phi} d\tilde{x}_\sigma d\tilde{x}_\phi \\ &\rightarrow g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\phi = g^{\sigma\phi} \rightarrow \Lambda^T g \Lambda = g \end{aligned}$$

die Transformationsregeln

- $x^\mu = \Lambda_\nu^\mu \tilde{x}^\nu$ (4er - Vektor)
- $g = \Lambda^T g \Lambda$ (Metrik)
- $ds^2 = d\tilde{s}^2$ (Linienelement).

1.2.1. Der elektromagnetische Feldstärketensor

Beim Übergang von einer klassischen Theorie wie der klassischen Mechanik zu allgemeineren Theorien müssen für eine Beschreibung von relativistischen oder quantenmechanischen Effekten spezielle Transformationsregeln beachtet werden. Das bedeutet, wird ein typisches klassisches Problem wie zum Beispiel der harmonische Oszillator im Rahmen einer Quantentheorie betrachtet, müssen mit Hilfe des **Korrespondenzprinzipes** die bestehenden klassischen Gleichungen in die neue Theorie übertragen werden. In diesen speziellen Fall heißt das, dass die physikalischen Größen der klassischen Physik in Operatoren übergehen. Die Elektrodynamik und damit die Maxwellgleichungen haben den Vorteil, dass sie schon in einer für die spezielle Relativitätstheorie korrekten Formulierung vorliegen. Im Gegensatz zu den Grundgleichungen der klassischen Mechanik

erfüllen die Maxwellgleichungen automatisch die Lorentztransformation. Im Rahmen der kovarianten Formulierung werden diese Gleichungen in einer neuen Größe, dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, zusammengefasst, der unter Annahme einer Metrik $g^{\mu\nu} = (-, +, +, +)$ im Minkowskiraum die Form aus Gleichung (1.8) annimmt. Wählt man eine andere Darstellung der Minkowskimetrik, so ist bei der Formulierung dieses Tensors auf die Lage des Minuszeichens zu achten,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Beim Übergang in den euklidischen Raum bezeichnet im Gegensatz zur Minkowskideklaration der Index 4 die Zeitdimension. Die Transformation vom Minkowskiraum zum Euklidischen Raum geschieht mathematisch durch eine Drehung der Zeitachse in der komplexen Ebene. Das heißt, es erfolgt ein Übergang von einer realen Zeit t zu einer imaginären Zeit $\tau = it$, durch eine Drehung um $\delta = \frac{\pi}{2}$. Für den Impuls bedeutet dies, dass $k_4 = -ik_0$ gilt, da der Zusammenhang zwischen Impuls- und Ortsraum über $\omega \sim \frac{1}{t}$ definiert werden kann. Für den euklidischen Feldstärketensor $F_E^{\mu\nu}$ ergibt sich nach Ausführung dieser Transformation (1.9),

$$F_E^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & iE_3 \\ -iE_1 & -iE_2 & -iE_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Ein weitere wichtige mathematische Operation im Zusammenhang mit den Feldstärketensor, ist die Eichtransformation (1.10). Schon im Rahmen der klassischen Elektrodynamik konnten die einzelnen Maxwellgleichungen durch die Einführung von Potentialen gelöst werden. In diesem Fall soll auf gleich Weise vorgegangen werden, indem das Vektorpotential A^μ eingeführt wird. Die Definition eines solchen Potentials ist dabei durch einen zusätzlichen Freiheitsgrad in Form eines skalaren Feldes bestimmt,

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Phi. \quad (1.10)$$

Im Zusammenhang mit der Formulierung von invarianten Größen bietet sich die Definition eines dualen Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ([13]) mit

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

an, was jedoch im Weiteren nicht näher besprochen werden soll. Bei der späteren Formulierung der Lagrangefunktion der SQED und der damit verbundenen Forderung nach Lorentz- und Eichinvarianz wird ein Übergang zur kovarianten Ableitung D_μ notwendig

sein, wobei die Wirkung eine Invariante darstellt,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu.$$

1.3. Grundlagen der Quantenfeldtheorie

In diesem Kapitel soll eine kurze Einführung in die Quantenfeldtheorie (QFT) gegeben werden, die sich auf Methoden beschränkt, die für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel wichtig sind. Die erste Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt ist: Was ist eigentlich Quantenfeldtheorie? Grundlegend definiert diese Theorie eine Vereinheitlichung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie in $D = d+1$ Dimensionen. Der Parameter d gibt dabei die Anzahl der zu betrachtenden Raumdimensionen an. Für die meisten physikalisch relevanten Probleme gilt somit $D = 4$. Der Begriff der Quantenfeldtheorie beschreibt dabei nicht eine einzelne Theorie, sondern steht als Oberbegriff für eine Gruppe von Feldtheorien, die sich im einzelnen mit verschiedenen grundlegenden physikalischen Problemen beschäftigen. In dieser Arbeit ist die QED von primärer Bedeutung, da sich diese Theorie mit der feldtheoretischen Erweiterung des Elektromagnetismus beschäftigt. Weitere Theorien sind zum Beispiel die Quantenchromodynamik (QCD), die sich mit der Wechselwirkung zwischen Nukleonen und Quarks beschäftigt (starke Wechselwirkung), sowie die Theorie der schwachen Wechselwirkung zur Erklärung des β - Zerfalls.

1.3.1. Wirkung und die Bedeutung von Symmetrien

Eine der wichtigsten Größen innerhalb der Feldtheorie ist die Wirkung $S[\phi]$, die von einem Quantenfeld ϕ in skalarer oder vektorieller Form abhängt. Im allgemeinen Fall werden 2 Arten von Feldern unterschieden. Zum einen bosonische Felder ϕ und zum anderen fermionische Felder η . Diese Einführung beschränkt sich dabei auf bosonische Felder, da im Rahmen dieser Arbeit Fermionen keine Rolle spielen werden. Als Bosonen bezeichnet man Elementarteilchen wie Photonen, oder Gluonen die dadurch gekennzeichnet sind, dass mehrere Teilchen das selbe energetische Niveau annehmen können und damit in allen Quantenzahlen übereinstimmen. Die Wirkung bestimmt sich, nach Gleichung (1.11) [13] für bosonische Felder, aus der Lagrangedichte \mathcal{L} , welche den Charakter und die Art der jeweiligen Theorie bestimmt,

$$S[\phi] = \int d^D x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu). \quad (1.11)$$

Im Fall eines reellen skalaren Feldes ϕ ohne Wechselwirkung ist die Lagrangedichte in (1.12) dargestellt. Ein Beispiel für eine Lagrangedichte mit Wechselwirkung ist im An-

hang B zu finden.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (1.12)$$

Die QED ist eine Theorie die sich, wie schon erwähnt, mit der feldtheoretischen Erweiterung der Elektrodynamik befasst. Eine vereinfachte Darstellung dieser Theorie ist die skalare QED oder kurz SQED. Im Gegensatz zur vollständigen Theorie der QED berücksichtigt man im Rahmen der SQED nur bosonische Felder. Dabei muss es sich jedoch nicht, wie in Gleichung (1.12) und im Anhang B, um reelle Felder handeln, sondern kann im allgemeinen auf komplexwertige Felder, für welche die entsprechende Lagrangedichte in 1.13 dargestellt ist, erweitert werden.

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)(D^\mu \phi)^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

Die Information über die Wechselwirkung der SQED wird dabei vom elektromagnetischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ getragen, welcher in 1.2.1 vorgestellt wurde. Eine grundlegende Aufgabe bei der Behandlung von Feldtheorie ist die Suche nach existierenden Symmetrien und damit verbundene invariante Größen. Mit Hilfe dieser Symmetrien ist man zumeist in der Lage die Betrachtung physikalischer Systeme stark zu vereinfachen, beziehungsweise neue Effekte zu entdecken. Ein Beispiel für die Verwendung einer bestehenden Symmetrie ist die postulierte Existenz von Antiteilchen, die sich durch ihre Ladung von den jeweiligen Teilchen unterscheiden und ansonsten in allen anderen Eigenschaften übereinstimmen. Die theoretische Grundlage stellt in diesem Zusammenhang das Noether-Theorem dar, zu dem unter anderem in [13] eine gute Einführung zu finden ist. Das Noethertheorem wurde im Jahre 1918 von der deutschen Mathematikerin Emmy Noether formuliert, mit dem sie einen Grundstein in der Betrachtung von Erhaltungsgrößen legte.

Noether - Theorem [14]: Zu jeder stetigen Symmetrietransformation $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ mit $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$ existiert ein 4er - Strom $J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - K^\mu$ der erhalten ist, falls ϕ die Bewegungsgleichungen erfüllt.

Vor allem bei der Definition der kovarianten Ableitung D^μ , mit der die Eichinvarianz der Wirkung in der QED (SQED) sichergestellt wird, findet dieses Theorem eine Anwendung.

1.3.2. Wicktheorem und Korrelationsfunktionen

Ein weiteres grundlegendes Theorem innerhalb der Quantenfeldtheorie ist das Wicktheorem. Dieses wurde im Jahre 1950 vom italienischen Physiker Gian-Carlo Wick eingeführt und ermöglicht eine elegante Berechnung von Korrelationsfunktionen, indem es einen Zusammenhang zwischen normal⁴ - und zeitgeordnetem⁵ Produkt aufzeigt und auf diese

⁴Alle Vernichtungsoperatoren a stehen rechts der Erzeugungsoperatoren $\rightarrow a^+ N[a^+ a a^+] = a^+ a^+ a$.

⁵Operatoren werden nach Ihrer zeitlichen Abfolge sortiert $\rightarrow T[a(t_1)a^+(t_2)] = a^+(t_2)a(t_1)$, $t_2 > t_1$.



Abbildung 1.6.: Emmy Noether: Formulierte 1918 das Noether-Theorem, das eine neue Betrachtung von Erhaltungsgrößen ermöglicht.

Weise eine Rückführung von N -Punkt Korrelationsfunktionen auf die 2-Punkt Korrelationsfunktion ermöglicht. Die Anwendung von Ordnungsprinzipien realisiert dabei das Sortieren von Operatoren ohne Beachtung von Vertauschungsrelationen. Korrelationsfunktionen stellen eine grundlegende Größe der Quantenfeldtheorie dar, mit deren Hilfe es möglich ist physikalische Systeme feldtheoretisch zu beschreiben. Diese Funktionen werden auch als erweiterte Greensche Funktion betrachtet, die die vollständigen Informationen über das zu behandelnde System enthalten. In der klassischen Physik werden entsprechende Funktionen zum Beispiel zur Lösung der Elektrodynamik oder wie im unteren Beispiel zur Lösung der Laplacegleichung der Elektrostatik verwendet.

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(r) &= -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \\ \epsilon_0\Delta G(r - \tilde{r}) &= -\delta(r - \tilde{r})\end{aligned}$$

Die Grundstruktur der Lösung ist dabei immer die selbe und wird auch als Methode der Greenschen Funktion bezeichnet. Am Anfang steht somit eine, vom betrachteten Problem abhängige, Differentialgleichung, die mit Hilfe dieser Funktion gelöst werden soll. In Gleichung (1.14) ist eine analoge Differentialgleichung aus der Quantenfeldtheorie für das freie Teilchen ohne Wechselwirkung dargestellt,

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)G(x, y) = -\delta^D(x, y). \quad (1.14)$$

Mit Hilfe des Pfadintegralalgorithmus, der im folgenden Abschnitt kurz eingeführt wird, existiert in der Quantenfeldtheorie eine elegante Möglichkeit die einzelnen Greenschen

Funktionen zu berechnen. Hierzu wird als erstes ein erzeugendes Funktional $Z[J]$, das auch als Schwingerfunktional bezeichnet wird, definiert,

$$\begin{aligned}
 Z_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, e^{-i \int d^D x \, \frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi + i \int d^D x \, J \phi} \\
 &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, e^{-i \int d^D x \, \left\{ \frac{1}{2} (\phi - \Delta_F J) \Delta_F^{-1} (\phi - \Delta_F J) - \frac{1}{2} \int J \Delta_F J \right\}} \quad \Delta_F^{-1} = \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \\
 &= \tilde{\mathcal{N}} \, e^{i \frac{1}{2} \iint J \Delta_F J}.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Im Fall des freien Teilchens ergibt sich somit für Z_0 Gleichung (1.15), die mit Hilfe des Gaußschen Integrals und der quadratischen Ergänzung noch etwas umgeformt werden kann. Ausgehend vom erzeugenden Funktional ergibt sich die jeweilige N-Punkt Korrelationsfunktion über die N-fache Anwendung der Funktionalableitung nach dem Quellenfeld J und der anschließenden Einsetzung $J = 0$. Im Fall des freien Teilchens (Z_0 : Erzeugende der freien Theorie) bestimmt sich auf diese Weise die 2-Punkt Korrelationsfunktion, welche äquivalent zum Feynman-Propagator Δ_F ist.

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \frac{\delta}{\delta J(y)} Z_0[J] |_{J=0} \\
 &= i \Delta_F = i (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)^{-1}
 \end{aligned}$$

Die Kenntnis der 2-Punkt Funktion ist nun von grundlegender Bedeutung für die Berechnung höherwertiger Korrelationsfunktionen, da diese nach dem Wick-Theorem immer auf die 2-Punkt Funktion zurückgeführt werden können. Vor allem bei der Untersuchung von wechselwirkenden Theorien ist diese Tatsache von entscheidendem Vorteil. In der Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelte der US - amerikanische Physiker Richard Feynman eine Möglichkeit, diese zum Teil äußerst komplexen Ausdrücke der Korrelationsfunktionen graphisch zu untersuchen. Solche als Feynman-Diagramme bezeichneten Darstellungen lassen eine anschauliche Interpretation der mathematischen Ausdrücke zu, was in späteren Kapiteln dieser Arbeit noch angewendet werden soll. Ein Beispiel für ein solches Diagramm ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

1.3.3. Pfadintegrale in der Quantenmechanik

Im Rahmen der Quantenmechanik ist eine Betrachtung der zeitlichen Propagation von Zuständen in verschiedenen Bildern möglich. Dabei werden im allgemeinen 3 Formulierungen unterschieden, bei denen die zeitliche Abhängigkeit jeweils durch die Zustände oder Operatoren getragen wird. Das Heisenberg-Bild zeichnet sich zum Beispiel dadurch aus, dass die Zustände zeitunabhängig, während im Schrödinger Bild diese zeitabhängig sind. Der Übergang von einem Bild zu einem anderen wird mit Hilfe einer unitären Transformation realisiert, bei der der Transformationsoperator U die Bedingung $U^{-1} = U^\dagger$

erfüllt.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_f &= U(t_f, t_i)|\psi\rangle_i & \psi(q, t) &= \langle q|\psi\rangle_t \\ \psi(t_f, q_f) &= \langle q_f|U(t_f, t_i)|\psi\rangle_i = \int dq_i K(q_f, t_f, q_i, t_i)\psi(t_i, q_i) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Um das Pfadintegral einzuführen wird genau eine solche zeitliche Propagation von Zuständen, wie sie in Gleichung (1.16) von einem Anfangszustand (i) zu einem Endzustand (f) dargestellt ist, betrachtet. Dabei wird ein Raum-Zeit-Schritt vorgenommen, um von einem Zustand zu einem anderen Zielzustand zu gelangen. Im allgemeinen ist es notwendig diese Schrittweite durch Einführung von Zwischenzuständen zu verfeinern, womit aus Gleichung (1.16), Gleichung (1.17) für N Zwischenzustände folgt.

$$\psi(t_f, q_f) = \int \cdots \int dq_N \cdots dq_i \{K(q_N, t_N, q_{N-1}, t_{N-1}) \cdots K(q_1, t_1, q_i, t_i)\} \psi(t_i, q_i) \quad (1.17)$$

Aufgabe wird es im Folgenden sein, die Funktion $K(q_j, t_j, q_i, t_i)$ explizit zu bestimmen. Hierzu wird noch einmal die zeitliche Propagation aus Gleichung (1.16) etwas genauer betrachtet. Aus der Quantenmechanik ist bekannt, dass sich der unitäre Operator für den Fall, dass der Hamiltonoperator nicht explizit zeitabhängig ist, durch $U(t, 0) = e^{-iHt}$ ausdrücken lässt. Damit ergibt sich für die Funktion $K(\dots)$:

$$K(q_j, t_j, q_i, t_i) = \langle q_j|U(t_j, t_i)|q_i\rangle = \langle q_j|e^{-iH\tau}|q_i\rangle \quad \tau = t_j - t_i.$$

Da die Schrittweite zwischen den einzelnen Zeiten als sehr klein angenommen werden kann, ist eine Entwicklung der Exponentialfunktion um 0 möglich, die nach der 1. Ordnung abgebrochen wird.

$$\langle q_j|e^{-iH\tau}|q_i\rangle = \langle q_j|1 - iH\tau + \mathcal{O}(\tau^2)|q_i\rangle$$

Der 0. Entwicklungsterm wird infolge, dass die Vektoren $\{|q_i\rangle\}_{i=1}^N$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, mit Hilfe der δ -Funktion ausgedrückt. Die eigentliche Schwierigkeit liegt somit in der Berechnung des 1. Entwicklungsterms, da in diesem Fall der Hamiltonoperator eingesetzt werden muss.

$$\begin{aligned} \langle q_j|H\tau|q_i\rangle &= \langle q_j|\left(\frac{p^2}{2m} + V(q)\right)\tau|q_i\rangle \\ &= \iint dp_l dp \langle q_j|p_l\rangle \langle p_l|\frac{p^2}{2m}\tau|p\rangle \langle p|q_i\rangle + \langle q_j|q_i\rangle V\left(\frac{q_j + q_i}{2}\right)\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp \left\{ \frac{p^2}{2m} + V\left(\frac{q_j + q_i}{2}\right) \right\} \tau e^{ip(q_j - q_i)} \end{aligned}$$

Somit folgt für die gesuchte Funktion Gleichung (1.18), in der eine zusätzliche Integration über den Impuls ausgeführt wird.

$$K(q_j, t_j, q_i, t_i) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{-i \left\{ \frac{p^2}{2m} + V \left(\frac{q_j + q_i}{2} \right) \right\} \tau + ip(q_j - q_i)} \quad (1.18)$$

Für die Propagation von einem Zustand (i) zu einem Zustand (f) in N Schritten, ergibt sich ein Produkt von Impuls- und Ortsintegralen, das nun explizit gelöst werden soll.

$$\psi(t_f, q_f) = \int \prod_{l=1}^N dq_l \prod_{k=0}^N \frac{dp_k}{2\pi} e^{i \sum_{j=0}^N \left\{ -\frac{p_j^2}{2m} \tau + V \left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2} \right) \tau + p(q_j - q_{j-1}) \right\}} \psi(t_i, q_i) \quad (1.19)$$

Um die eigentliche Darstellung des Pfadintegrals zu erhalten, ist es notwendig den Grenzwert für $N \rightarrow \infty$ zu betrachten, was aus einer diskreten Darstellung eine kontinuierliche macht. Für die Summen in der Exponentialfunktion bedeutet das den Übergang in Integrale über die Zeit. Bevor jedoch dieser Grenzfall betrachtet wird, ist es ratsam mit Hilfe des Gaußschen Integrals und der Methode der quadratischen Ergänzung, die im Anhang C.1 vorgestellt wird, die Integrationen über den Impuls auszuführen. Dies ist aber nur möglich, wenn das Potential in der Hamiltonfunktion als impulsunabhängig angenommen werden kann. Für das Pfadintegral in der Quantenmechanik erhält man auf diese Weise die Darstellung in Gleichung (1.20), in der die Terme der Impulsintegration im Normierungsfaktor \mathcal{N} zusammengefasst wurden.

$$I = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt L} \quad (1.20)$$

Mit Hilfe des Pfadintegrals wird also eine Propagation von einem bestimmten Anfangszustand, der durch einen Anfangsort q_i und einer Anfangszeit t_i definiert wird, zu einem Endzustand beschrieben. Hierbei werden alle möglichen Wege zwischen diesen beiden Zuständen berücksichtigt. Bei der Erweiterung des Integrals auf die Quantenfeldtheorie betrachtet man an Stelle der dynamischen Variablen Felder ϕ , die im einzelnen durch 4-dimensionale Vektoren charakterisiert sind. Dies bedeutet, dass die Integration über die Zeit in eine 4-dimensionale (im allgemeinen D -dimensionale) Integration in der Raumzeit übergeht.

1.4. Die Weltliniennumerik

In den vorangegangenen Abschnitten zur Einführung in die Quantenfeldtheorie, wurde die Bedeutung der Korrelationsfunktionen und deren Zusammenhang zu Pfadintegralen aufgezeigt. Eine Problematik der Pfadintegrale ist, dass eine Betrachtung von physikalischen Problemen in diesem Formalismus nur sehr schwer durchzuführen ist. Vor allem für wechselwirkende Theorien, welche eine Wechselwirkung im Bereich der QED oder auch QCD behandeln, ist eine analytische Auswertung dieser Integrale nur schwer zu

realisieren. Mit der Hilfe von Computersimulationen ist es jedoch möglich diese Integrale näherungsweise zu betrachten. Dabei existieren mehrere Varianten der numerischen Behandlung, wobei die beiden wichtigsten Methoden Gitter- und Weltliniennumerik darstellen. Bei der Gittertheorie werden die einzelnen Pfadintegrale auf ein D - dimensionales Raumzeitgitter diskretisiert, welches bestimmte Randbedingungen erfüllt. Die Genauigkeit der Approximation hängt dabei mit der Feinheit des Gitters, das heißt der Raumzeit-Schrittweite, zusammen. Dabei werden die einzelnen Gitterpunkte mit Hilfe von Monte-Carlo Methoden, wie zum Beispiel dem Metropolis-Algorithmus erzeugt. Mit Hilfe dieses numerischen Verfahrens werden die Pfadintegrale voll und nicht perturbativ behandelt, wobei in den meisten Fällen ein triviales Hintergrundfeld berücksichtigt wird. Für nicht triviale Hintergründe bietet das Verfahren der Weltliniennumerik eine bessere Möglichkeit solche Pfadintegrale numerisch zu lösen, dabei handelt es sich im Gegensatz zur Gittertheorie zumeist um ein perturbatives Verfahren, welches ursprünglich aus der Stringtheorie stammt ([15], [16], [17]). Bei dieser Methode werden mit Hilfe von Zufallsalgorithmen geschlossene Raumzeitpfade, die im weiteren als Loops bezeichnet werden, generiert. Die einzelnen Loops müssen dabei die Forderungen des zu betrachteten Pfadintegrals erfüllen. Die Genauigkeit des Algorithmus hängt dabei von der Anzahl der verwendeten Loops sowie den Stützstellen pro Loop ab. Als Ausgangspunkt zur Anwendung der Weltliniennumerik dient an dieser Stelle die effektive Wirkung Γ , die sich über eine Legendre Transformation aus der Schwingerfunktion $W[J]$ (Gleichung (1.21)) ergibt.

$$W[J] = \ln \mathcal{Z} \quad \text{mit} \quad \mathcal{Z} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathcal{D}\Phi e^{iS[\phi] + i \int \phi J} \quad (1.21)$$

J bezeichnet dabei einen Quellterm, der von Schwinger⁶ 1969 eingeführt wurde. Um eine numerische Betrachtung des Pfadintegrals durchführen zu können ist die in Gleichung (1.21) dargestellte Form aufgrund des oszillatorischen Verhaltens der e -Funktion ungeeignet. Aus diesem Grund erfolgt ein Übergang der Betrachtung vom Minkowski-Raum zum euklidischen Raum, der durch die Transformation $x_0 \rightarrow -ix_4$ realisiert wird (Gleichung (1.22)) (vgl. 1.2.1). Zu Anwendung der resultierenden numerischen Lösungen auf physikalische Probleme, ist eine Rücktransformation zu einem reellen Zeitparameter notwendig.

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S_E[\phi] + \int J\phi} = e^{W[J]} \quad (1.22)$$

⁶Julian Seymour Schwinger: US-amerikanischer Physiker, der 1965 für seine Leistungen im Bereich der Quantenelektrodynamik den Nobelpreis in Physik erhielt.

Die Anwendung der Legendre-Transformation auf Gleichung (1.22), mit der Einführung eines neuen Parameters $\phi_{cl} = \frac{\delta W}{\delta J}$, führt zu Gleichung (1.23) für die effektive Wirkung.

$$\Gamma \approx S[\phi_{cl}] + \frac{1}{2} \ln \det H_W \quad (1.23)$$

Eine kurze Einführung in die Legendre - Transformation und die detaillierte Rechnung, um zur Gleichung (1.23) zu gelangen, sind im Anhang A.2 dargestellt. Der für die numerische Berechnung interessante Teil der effektiven Wirkung ist der Entwicklungsterm erster Ordnung, in dem $H_W = \frac{\delta^2 S}{\delta \Phi \delta \Phi}$ ist. Mit einer speziellen Darstellung für den Logarithmus ergibt sich somit eine Gleichung, welche als Grundlage für die weiteren Betrachtungen innerhalb der Weltliniennumerik dient.

$$\Gamma^1 = \frac{1}{2} \ln \det \frac{H_W}{H_0} = -\frac{1}{2} Tr \left[\int_0^\infty \frac{dT}{T} (e^{-H_W T} - e^{-H_0 T}) \right] \quad (1.24)$$

Der Ausdruck H_0 soll dabei die Normierung von Γ^1 bzw. des Pfadintegrals erfüllen. Der in der Normierung des Pfadintegrals verwendete Hamiltonoperator beschreibt dabei ein freies Teilchen ohne Wechselwirkungsanteile. Wird in Gleichung (1.24) Spurbildung und Integration vertauscht, so weist der resultierende Ausdruck unter dem Integral Ähnlichkeiten zum Zeitentwicklungsoperator eines Zustandes in der Quantenmechanik auf.

$$Tr [e^{-H_W T}] = \int d^D x \langle x | e^{-H T} | x \rangle$$

In dieser Theorie wird die zeitliche Propagation eines Zustandes $|q\rangle$ zur Zeit t_1 zum Zustand $|\tilde{q}\rangle$ zur Zeit t_2 im Schrödinger - Bild über $|\tilde{q}\rangle = e^{-iH(t_2-t_1)}|q\rangle$ definiert. Dabei gilt für den Hamiltonoperator H , dass dieser zeitunabhängig, d.h. das betrachtete System stationär ist. Die Spur kann somit als zeitliche Propagation zwischen 2 Zuständen vom Zeitpunkt $t_1 = 0$ zu $t_2 = T$ angesehen werden, bei der Anfangs- und Endzustand identisch sind. Eine Anwendung der Weltliniennumerik auf den Fall der Paarproduktion ist in [18] aufgeführt. Innerhalb der Diplomarbeit wird die Bildung eines virtuellen Elektron-Positron Paares im konstantem Magnetfeld \mathcal{B} für den Fall eines Skalar- und Spinorfeldes betrachtet. In der folgenden Gleichung wurde das Pfadintegral dargestellt, das direkt aus der Spur resultiert. Die Langrangefunktion der Weltliniennumerik L_W folgt dabei aus der zugehörigen Hamiltonfunktion H_W durch Anwendung der Legendretransformation.

$$\begin{aligned} Tr [e^{-H_W T}] &= \int d^D x \langle x | e^{-iH(-iT)} | x \rangle \\ &= \int d^D x \int_{x(0)=x(-iT)} \mathcal{D}x e^{i \int_0^{-iT} dt L_W} \end{aligned}$$

1.5. Das elektromagnetische Feld im Rahmen der Weltliniennumerik

Zur Behandlung des elektromagnetischen Feldes im Rahmen der Weltliniennumerik ist das Verständnis bestimmter analytischer Lösungen nützlich. Wie in späteren Kapiteln gezeigt wird, werden die einzelnen analytischen und auch numerischen Terme durch bestimmte Ausdrücke normiert, die eine Betrachtung von

$$\text{Tr } e^{-HT} \sim \text{Tr } e^{-(-D^2)T}$$

nötig machen. Mit Hilfe der Landau - Niveaus aus der quantenmechanischen Behandlung von Ladung im konstanten Magnetfeld lässt sich diese Gleichung schreiben als (1.25). Dabei wurde der Hamiltonoperator in verschiedene Anteile zerlegt, wobei das Feld nur in einem dieser beiden Anteile zu finden ist und auf eine Lösung ähnlich des harmonischen Oszillators führt. Im Gegensatz zur Quantenmechanik handelt es sich bei den einzelnen Vektoren der QFT um 4-dimensionale Größen, die eine separate Behandlung der Zeitkomponente (0-Komponente) erfordern.

$$\text{Tr } e^{-(-D^2)T} = \text{Tr } e^{-(p_0^2 + p_z^2 + eB_0(2n+1))T} \quad (1.25)$$

Die Spur der einzelnen Komponenten lässt sich nun mit dem Gaußschen Integral und der Geometrischen Reihe lösen und führt auf Gleichung (1.26). Der Term $(4\pi T)^{D/2}$ resultiert aus der Vakuumnormierung, die in B.1 am Beispiel der ϕ^4 - Theorie berechnet wurde.

$$\begin{aligned} \text{Tr } e^{-(-D^2)T} &\sim \int dp_0 e^{-p_0^2 T} \int dp_z e^{-p_z^2 T} e^{eB_0 T} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{eB_0}{2\pi} \right) e^{-2neB_0 T} \\ &\sim \frac{\pi}{T} \frac{e^{eB_0 T}}{1 - e^{-2eB_0 T}} \sim \frac{eB_0 T}{\sinh eB_0 T} \\ \Gamma^1 &\sim \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} \frac{1}{(4\pi T)^{D/2}} \frac{eB_0 T}{\sinh eB_0 T} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Zur Lösung des resultierenden Integrals ist eine Renormierung der Ladung und Feldstärke notwendig, um die auftretenden Divergenzen zu beseitigen ([19], [18]). Diese Renormierung der einzelnen physikalischen Größen wird durch eine Betrachtung von Gleichung (1.26) für kleine Parameter T erreicht. Mit Hilfe der Landau Niveaus und der berechneten effektiven Wirkung im Rahmen der Weltliniennumerik folgt ein effektiver Lagrangian der von Heisenberg und Euler ([20]) eingeführt worden ist und auch als Heisenberg-Euler-Lagrangian bezeichnet wird.

1.5.1. Die Landau-Niveaus

Ausgangspunkt zur Bestimmung der Landau - Niveaus ist die zeitunabhängige Schrödingergleichung (1.27), für ein geladenes Teilchen der Ladung e in einen konstanten Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$.

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_j + eA_j)^2 \psi = E\psi \quad \mathbf{A} = (0, B_0x, 0)^T \quad (1.27)$$

Eine genauere Betrachtung dieser Gleichung zeigt, dass diese auf die Schrödingergleichung eines harmonischen Oszillators zurückgeführt werden kann, indem man den Ansatz $\psi = \tau e^{i(k_z z + k_y y)}$ verwendet, in dem τ eine Funktion des Parameters x darstellt.

$$\begin{aligned} 0 &= \left((-i\hbar\partial_j + eA_j)^2 - 2mE \right) \psi \\ &= \left(\partial_x^2 + \partial_z^2 + \left(\partial_y + \frac{ieB_0x}{\hbar} \right)^2 + \frac{2m}{\hbar^2} E \right) \psi \\ &= \left(\partial_x^2 - \left(\frac{eB_0\tilde{x}}{\hbar} \right)^2 + \frac{2m}{\hbar^2} \tilde{E} \right) \tau \\ &\rightarrow \tilde{E} = E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad \tilde{x} = x + \frac{\hbar k_y}{eB_0} \end{aligned}$$

Die dabei ausgeführte Operation zerlegt den Hamiltonoperator in zwei Anteile von denen der erste Teil durch ebene Wellen und der zweite mit Hilfe des harmonischen Oszillators gelöst werden kann. Das konstante Feld B_0 bestimmt somit die Eigenfrequenz ω_0 des Oszillators und führt auf die Landauniveaus, die zur Bestimmung der Normierung im konstanten Magnetfeld und der Berechnung des Heisenberg - Euler - Lagrangian benötigt werden.

$$E_n = \hbar \frac{eB_0}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = E_{\perp}(n) + E_{\parallel} \quad (1.28)$$

2. Die 2-Punkt Funktion auf den Vakuum

„Nur scheinbar hat ein Ding eine Farbe,
nur scheinbar ist es süß oder bitter; in
Wirklichkeit gibt es nur Atome und
leeren Raum.“

(Demokrit)

Bei bisheriger Anwendung des Weltlinienformalismus im Rahmen der Quantenfeldtheorie wurden ausschließlich Größen wie die effektive Wirkung Γ oder die Energie behandelt, jedoch niemals eine Korrelationsfunktion wie die 2-Punkt Funktion $\Pi^{\mu\nu}$. In diesem Kapitel soll nun versucht werden mit Hilfe der Methodik der Weltliniennumerik das Pfadintegral zur Berechnung der 2-Punkt Funktion auf dem Vakuum zu lösen. Dabei sollen vorerst weder elektrische noch magnetische Felder eine Rolle spielen und erst im Späteren hinzu geschaltet werden. Mit Hilfe der Betrachtung auf dem Vakuum geht es dabei nicht um die Untersuchung einzelner physikalischer Phänomene, sondern um die Frage ob eine Behandlung des Problems im Rahmen der Weltliniennumerik möglich ist.

2.1. Theoretische Grundlagen zur Berechnung der 2-Punkt Funktion

Die Grundlage zur Betrachtung des Vakuums stellt die Lagrangedichte der skalaren Quantenelektrodynamik (SQED) beziehungsweise unter Berücksichtigung des Spins die vollständige Lagrangedichte der QED dar. Da die Behandlung des Vakuums in erster Linie jedoch dazu dienen soll, die Anwendbarkeit der Weltliniennumerik auf dieses Problem zu überprüfen, wird auf eine explizite Berücksichtigung von Spinorfelder vorerst verzichtet. Ausgangspunkt ist an dieser Stelle der Korrekturterm erster Ordnung der effektiven Wirkung Γ in Weltliniendarstellung. Hierzu wird Γ^1 in Ortsdarstellung (oder Impulsdarstellung) in einer Taylorreihe um $A^\mu(x^i)$ mit $i = 1 \dots N$ entwickelt, was zu Gleichung (2.1) führt. Diese Entwicklung der effektiven Wirkung wurde erstmals von Christian Schubert in [21] und [22] publiziert und sowohl für den skalaren als auch für den Fall mit Spinorfeldern berechnet.

$$\Gamma = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int \dots \int \frac{\delta^N \Gamma}{\delta A^{\mu_1} \dots \delta A^{\mu_N}} A^{\mu_1} \dots A^{\mu_N} dx^1 \dots dx^N \quad (2.1)$$

A^μ beschreibt darin das Eichfeld, das eine explizite Abhängigkeit von der Raumzeitkoordinate x^μ aufweist. Der Ausdruck $\frac{\delta^N \Gamma}{\delta A^{\mu_1} \dots \delta A^{\mu_N}}$ kann auch als N -Punkt Funktion der Entwicklung um die einzelnen Raumzeit-Punkte bezeichnet werden und ist im allgemeinen über $\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_N}$ dargestellt. Zur Berechnung der 2-Punkt Funktion wird die Reihenentwicklung nach der 2. Ordnung abgebrochen und eine anschließende Betrachtung der ersten Terme der Entwicklung durchgeführt.

$$\Gamma \approx \int \Gamma^\mu A_\mu dx_1 + \frac{1}{2} \iint A_\mu \Gamma^{\mu\nu} A_\nu dx_1 dx_2 \quad (2.2)$$

Der Entwicklungsterm erster Ordnung soll dabei vorerst keine Rolle spielen und wird somit bei der Betrachtung der 2-Punkt Funktion vernachlässigt. Dieser Term muss jedoch bei weiterführende Rechnungen berücksichtigt werden.

2.1.1. Die 2-Punkt Funktion im Ortsraum

Analog zu dem Beispiel im Anhang B und der Rechnung in [18] ist es notwendig eine Darstellung für die Lagrangefunktion L_W in der Weltliniennumerik zu finden. Da die Betrachtung ohne die Berücksichtigung von Spinorfeldern durchgeführt werden soll, ist der Ausgangspunkt die Lagrangedichte der SQED im euklidischen Raum. Ausgehend von dieser Dichte und mit Hilfe des Dummy-Feldes ψ wird im Folgenden eine Gleichung für H_W abgeleitet.

$$\begin{aligned} H_W \psi(z) &= \frac{\delta^2}{\delta \phi_z^* \delta \phi_x} \iint \left\{ D_\mu \phi (D^\mu \phi)^* + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \psi(z) \\ &= \frac{\delta^2}{\delta \phi_z^* \delta \phi_x} \iint \left\{ (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi_y (\partial^\mu - ieA^\mu) \phi_y^* + m^2 \phi_y \phi_y^* + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \psi(z) \\ &= \frac{\delta}{\delta \phi_z^*} \int \left\{ -\partial^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \phi_x^* + ieA^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi_x^* + m^2 \phi_x^* \right\} \psi(x) \\ &= \left\{ -\partial^\mu \partial_\mu - 2ieA_\mu \partial^\mu + e^2 A^\mu A_\mu + m^2 \right\} \psi(z) \\ &= - \left\{ (\partial_\mu + ieA_\mu)^2 - m^2 \right\} \psi(z) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Über den aus der klassischen Mechanik bekannten Zusammenhang zwischen Lagrange- und Hamiltonfunktion $\dot{x} = \frac{dH}{dp}$ ergibt sich (2.4). In dieser Gleichung muss eine Transformation von der Minkowskizeit t zum euklidischen Zeitparameter τ durchgeführt werden, was schon in der Einführung 1.2.1 über $\tau \rightarrow it$ vorgenommen worden ist.

$$\begin{aligned} H_W &= - \left\{ (\partial_\mu + ieA_\mu)^2 - m^2 \right\} = \left\{ (p_\mu + eA_\mu)^2 + m^2 \right\} \\ &\rightarrow p_\mu = \frac{1}{2} \dot{x}_\mu - eA_\mu \\ L_W &= p_\mu \dot{x}^\mu - H_W = \frac{1}{4} \dot{x}_t^2 - eA_\mu \dot{x}_t^\mu - m^2 = -\frac{1}{4} \dot{x}_\tau^2 - ieA_\mu \dot{x}_\tau^\mu - m^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ausgehend von dem Ergebnis in Gleichung (2.4) lässt sich der Korrekturterm erster Ordnung zur effektiven Wirkung analog zum Beispiel der ϕ^4 - Theorie bestimmen.

$$\Gamma^1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x e^{-ie \int_0^T d\tau A_\mu \dot{x}^\mu} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2}$$

Die Funktion für Γ^1 ist jedoch noch nicht die für das zu behandelnde Problem erforderliche 2-Punkt Funktion. In der Einführung wurde der Begriff des N -Punkt Korrelators und dessen Bildung durch N -fache funktionale Ableitung des erzeugenden Funktionals $Z[J]$ nach den Quellenfeld $J(x)$ beschrieben. In diesem Fall erfolgt die Berechnung der 2-Punkt Funktion auf eine ähnliche Weise, indem die Funktion $\Gamma^1[A]$, die explizit von dem Eichfeld $A^\mu(x)$ abhängt, 2-fach funktional abgeleitet und anschließend $A^\mu = 0$ gesetzt wird. Durch diese Vorgehensweise werden zwei Deltafunktionen¹ gebildet, die dafür sorgen, dass die einzelnen Loops zur Berechnung dieses Ausdruckes im Ortstraum, durch die beiden Punkte $x_{\tau_1} = x_1$ und $x_{\tau_2} = x_2$ charakterisiert werden (Gleichung (2.5)). Eine numerischen Lösung erfordert dem zufolge ein Ensemble von Weltlinien, bei dem die einzelnen Loops durch 2 Punkte charakterisiert sind.

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu}[x_1, x_2] &= \frac{\delta^2 \Gamma^1}{\delta A_{x_1}^\mu \delta A_{x_2}^\nu} \\ &= \frac{(-ie)^2}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \int_0^T \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad \{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu \delta^D(x_1 - x_{\tau_1}) \dot{x}_{\tau_2}^\nu \delta^D(x_2 - x_{\tau_2}) \} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Eine technische Schwierigkeit bei der numerischen Betrachtung dieses Problems im Ortsraum ist hierbei die Normierung des Pfadintegrals, die im Anhang B berechnet worden ist. Innerhalb von Gleichung (2.5) wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit auf explizite Angabe des vollständigen Ausdruckes verzichtet und sich auf den physikalisch relevanten Anteil beschränkt. Tatsächlich jedoch beschreibt (2.5) eine Funktion, die aufgrund der Normierung noch durch:

$$\int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2}$$

geteilt werden muss. Dieses Integral erzwingt aber nicht die Forderung, dass die einzelnen Weltlinien durch die beiden Punkte x_1 und x_2 verlaufen müssen, was bei der numerischen Bestimmung mit Hilfe des *d-Line* Algorithmus zu Schwierigkeiten führt. Man müsste im Rahmen eines numerischen Verfahren für die Normierung somit ein anderes Ensemble von Weltlinien verwenden, als für das eigentlich zu betrachtende Integral. Eine Lösung dieses

¹ $\frac{\delta}{\delta A(x_1)} e^{-ie \int d\tau A(x_\tau) \dot{x}_\tau} = \int d\tau \dot{x}_\tau \delta(x_\tau - x_1)$ mit $x_\tau = x(\tau), \dots$

Problems besteht im Übergang in den Impulsraum, da auf solche Weise die Deltafunktionen in eine Exponentialdarstellung übergehen und die Forderung nach Festhaltung bestimmter Punkte entfällt.

2.1.2. Die 2-Punkt Funktion im Impulsraum

Der Übergang vom Ortsraum in den Impulsraum geschieht, ausgehend von (2.5), mit Hilfe des mathematischen Verfahrens der Fouriertransformation, dass vom französischen Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier im Jahre 1822 entwickelt worden ist. Die Transformation selbst beschreibt dabei nicht eine bestimmte Art, sondern eine Gruppe von Transformationen für diskrete Funktionen wie Reihen bis hin zu Integraltransformationen. In diesem Fall soll eine integrale Form der Fouriertransformation verwendet werden, bei der sich die Deltafunktionen wie folgt in den Impulsraum übersetzen lassen

$$\delta^D(x - x_i) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik(x-x_i)}$$

woraus für die 2-Punkt Funktion $\Gamma^{\mu\nu}[k_1, k_2]$ Gleichung (2.6) folgt. Die Wahl der Normierung mit $\frac{1}{(2\pi)^D}$ ist nur eine Möglichkeit und kann durchaus auch auf andere Weise gewählt werden.

$$\begin{aligned} \{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu \delta^D(x_1 - x_{\tau_1}) \dot{x}_{\tau_2}^\nu \delta^D(x_2 - x_{\tau_2}) \} &= \iint \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{-ik_1(x_1-x_{\tau_1})} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{-ik_2(x_2-x_{\tau_2})} \\ \Gamma^{\mu\nu}[x_1, x_2] &= \iint \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Gamma}^{\mu\nu}[k_1, k_2] e^{-ik_1 x_1} e^{-ik_2 x_2} \\ \tilde{\Gamma}^{\mu\nu}[k_1, k_2] &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ik_1 x_{\tau_1}} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{ik_2 x_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Bei einem Pfadintegral handelt es sich im mathematisch strengen Sinn um ein Produkt aus unendlich vielen einzelnen D-dimensionalen Integralen, die jeweils eine Integration zwischen 2 Punkten eines an dieser Stelle mit $D = 4$ gewählten 4-dimensionalen Raumzeitpfades betrachten. Hier ist es nun sinnvoll das Ensemble aus unendlich vielen möglichen Pfaden an einem Punkt zu fixieren. Die Art des Punktes, der zur Fixierung gewählt wird, ist dabei beliebig. Der für diesen Algorithmus gewählte Fixierungspunkt soll der Schwerpunkt x_{CM} des Systems aus Weltlinien sein, der selbst wiederum frei wählbar ist. Ausgehend von Gleichung (2.6) realisiert dies die Koordinatentransformation $x^\mu \rightarrow x^\mu + x_{\text{CM}}^\mu$, womit anstelle von $\Gamma^{\mu\nu}$ die Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ betrachtet wird, die im

weiteren Verlauf dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielt.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}^{\mu\nu} &\sim \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \dots \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ik_1 x_{\tau_1}} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{ik_2 x_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \\
 &= \int d^D x_{\text{CM}} \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \dots \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ik_1(x_{\tau_1} + x_{\text{CM}})} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{ik_2(x_{\tau_2} + x_{\text{CM}})} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \\
 &= (2\pi)^D \delta^D(k_1 + k_2) \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \dots \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ik_1 x_{\tau_1}} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{ik_2 x_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \\
 \rightarrow \tilde{\Gamma}^{\mu\nu} &= (2\pi)^D \delta^D(k_1 + k_2) \Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2]
 \end{aligned}$$

Da die 2-Punkt Funktion in einer analogen Weise wie die Korrelationsfunktionen berechnet werden können, ist es auch möglich diese mit Hilfe eines entsprechenden Feynman-Diagramms graphisch darzustellen. Die Regeln zur Konstruktion einer graphischen Dar-

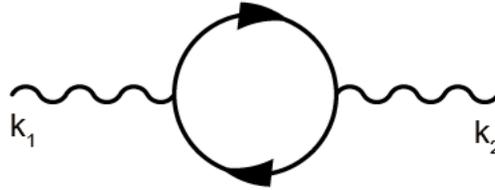


Abbildung 2.1.: Feynman Diagramm der 2-Punkt Funktion auf den Vakuum

stellung feldtheoretischer Gleichungen, wurden von Richard Feynman im Rahmen der perturbativen Quantenfeldtheorie eingeführt. Das resultierende Diagramm für die hier betrachtete Funktion im Impulsraum ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Nach Feynman wird ein solches Diagramm auch als Selbstenergie-Diagramm bezeichnet, da es nur einen Loop und 2 äußere Linien besitzt. Die äußeren Linien des Diagramms charakterisieren die ein- und auslaufenden Impulse k_1 und k_2 , welche über die beiden Vertizes an den Loop gekoppelt sind. An jedem Vertex gilt dabei Impulserhaltung.

2.1.3. Analytische Berechnung von $\Pi^{\mu\nu}$ im Impulsraum

Im Fall des Vakuums ist es möglich die Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ im Impulsraum explizit analytisch zu berechnen, was von Christian Schubert in [21] vollzogen worden ist. Dieses analytische Ergebnis ist hilfreich, da nur mit dessen Hilfe eine Auswertung der numerischen Ergebnisse möglich sein wird ohne sich allein auf Grenzfallbetrachtungen zu stützen und somit nur auf diese Weise überprüft werden kann, ob eine Behandlung des Problems im Rahmen der

Weltliniennumerik sinnvoll ist. Im späteren Fall von räumlich inhomogenen Feldern ist eine explizite analytische Lösung hingegen nicht mehr möglich. Dies wird eine Kontrolle der numerischen Ergebnisse im Bezug auf einzelne Punkte unmöglich machen und nur noch die Kontrolle über Grenzfälle zulassen oder über ein Vergleich mit experimentell ermittelten Werten. Jedoch wird es experimentelle Ergebnisse für die Problematik von inhomogenen Feldern in naher Zukunft leider nicht geben. Für die numerische Simulation bedeutet dies, dass der Algorithmus, vor einer Betrachtung von inhomogenen Felder, an einfacheren Problemen getestet werden muss. Außerdem ist es dadurch möglich die Grenzen des Algorithmus hinsichtlich der Eingabeparameter zu bestimmen. Ausgangspunkt zur Lösung des Problems ist Gleichung (2.6), die vom Eichfeld A^μ abhängig ist. Dieses Feld lässt sich nun durch ebene Wellen der Form

$$A^\mu(x) = \sum_{j=1}^N \epsilon_j^\mu e^{ik_j x}$$

ausdrücken. Die Information über den Polarisationscharakter der einzelnen Wellen wird dabei vom Parameter ϵ_j^μ getragen. Nach Fixierung der einzelnen Weltlinien am Schwerpunkt x_{CM} folgt wie im vorangegangenen Abschnitt für $\Pi^{\mu\nu}$ Gleichung (2.7).

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}[k_1, k_2] = & (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_{x(0)=x(T)}^{CM} \mathcal{D}x \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \\ & \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ik_1 x_{\tau_1}} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{ik_2 x_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Im Anhang C wird die analytische Lösung der N -Punkt Funktion mit Hilfe der Green-schen Funktion G_B und deren Ableitungen beschrieben und soll nun hier auf die 2-Punkt Funktion angewendet werden. Dazu folgt aus Gleichung (C.8) der N -Punkt Funktion, (2.8) für $N = 2$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{2P} = & (-ie)^2 (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \times \\ & \prod_{i=1}^2 \int_0^T d\tau_i e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 [\epsilon_i \epsilon_j \ddot{G}_{B_{ij}} + k_i k_j G_{B_{ij}} - 2ik_i \epsilon_j \dot{G}_{B_{ij}}]} \Big|_{lin(\epsilon_{i,j})} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bei der Lösung von Gleichung (2.8) ist zu beachten, dass unter den τ - Integralen nur Terme berücksichtigt werden müssen, die sowohl linear in ϵ_1 als auch ϵ_2 sind. Außerdem kann die δ -Funktion über die Impulse ausgenutzt werden, indem man $k_1 = k = -k_2$

setzt, was letztendlich auf Gleichung (2.9) führt.

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 [\epsilon_i \epsilon_j \ddot{G}_{B_{ij}} + k_i k_j G_{B_{ij}} - 2i k_i \epsilon_j \dot{G}_{B_{ij}}]} \Big|_{lin(\epsilon_{i,j})} &= e^{k_1 k_2 G_{B_{12}}} \left\{ \epsilon_1 \epsilon_2 \ddot{G}_{B_{12}} + k_1 \epsilon_2 k_2 \epsilon_1 \dot{G}_{B_{12}}^2 \right\} \\
 \rightarrow \text{partielle Integration des 1. Terms} \rightarrow &= e^{k_1 k_2 G_{B_{12}}} \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu} \dot{G}_{B_{12}}^2 \left\{ -g^{\mu\nu} k_1 k_2 + k_1^\nu k_2^\mu \right\} \\
 \rightarrow \text{Ausnutzung der Delta - Funktion} \rightarrow &= e^{-k^2 G_{B_{12}}} \epsilon_{1\mu} \epsilon_{2\nu} \dot{G}_{B_{12}}^2 \left\{ g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu \right\} \\
 \Pi^{\mu\nu}[k] &= -e^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^T d\tau_1 \int_0^T d\tau_2 e^{-k^2 G_{B_{12}}} \dot{G}_{B_{12}}^2 \left\{ g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu \right\} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Durch Verschiebung der Zeitvariablen in Gleichung (2.9), lässt sich diese weiter vereinfachen. Da jeder Loop des Ensembles durch zwei Zeitvariablen τ_1 und τ_2 charakterisiert wird, kann mit Hilfe der Substitutionen $\tau_i \rightarrow \frac{\tau_i}{T}$, $t = \tau_1 - \tau_2$ diese Abhängigkeit auf eine Variable und somit eine τ -Integration reduzieren werden.

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\mu\nu}[k] &= -e^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_{-\tau_2}^{T-\tau_2} dt \int_0^T d\tau_2 e^{-k^2 t(1-\frac{t}{T})} \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^2 \left\{ g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu \right\} \\
 &= -e^2 T^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_{-\tau_2}^{1-\tau_2} dt \int_0^1 d\tau_2 e^{-k^2 T t(1-t)} (1-2t)^2 \left\{ g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu \right\} \\
 &= -e^2 T^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_0^1 dt e^{-k^2 T t(1-t)} (1-2t)^2 \left\{ g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu \right\}
 \end{aligned}$$

Um später die einzelnen numerischen Resultate interpretieren zu können, ist es wichtig die Längendimension der einzelnen Parameter zu kennen. Für den Fall von D Raumzeit-Dimensionen sind die einzelnen relevanten Parameter dieser Theorie und die zugehörige Dimension in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

| Parameter | Längendimension [in D Dimensionen] |
|-------------------|--------------------------------------|
| m, k | L^{-1} |
| T | L^2 |
| t | 1 |
| $(-ie)$ | $L^{\frac{D}{2}-2}$ |
| $\Gamma^{\mu\nu}$ | L^{-2} |

Tabelle 2.1.: Längendimensionen der einzelnen Parameter in der 2-Punkt Funktion.

2.1.4. Numerische Berechnung von $\Pi^{\mu\nu}$ im Impulsraum

Zur numerischen Berechnung der 2-Punkt Funktion im Impulsraum soll Gleichung (2.7) genutzt werden, die im Abschnitt 2.1.3 zur analytischen Lösung behandelt worden ist. Dabei wird in folgender Weise vorgegangen:

1. Algorithmus zur Erzeugung von Loops entwickeln, welcher die vom Pfadintegral geforderten Bedingungen (geschlossene Weltlinien, x_{CM}) erfüllt
2. Diskretisierung von vorhandenen Integralen und Ableitungen
3. eventuell auftretende Divergenzen durch Renormierung beseitigen
4. Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den analytischen Resultaten und Stabilitätstests

Der Algorithmus zur Erzeugung der einzelnen Loops wurde in [23] im Rahmen des Casimireffektes entwickelt und erfolgreich angewendet. Die Grundidee des Verfahrens ist es, das bestehende Pfadintegral auf ein Gaussches Integral zurückzuführen und zu lösen. Die im Rahmen des *V-Loop* Algorithmus erzeugten Loops erfüllen dabei die geforderten Eigenschaften des Pfadintegrals im Impulsraum. Für eine Lösung des Integrals im Ortsraum ist dieser Algorithmus jedoch ungeeignet, da die Bedingungen der einzelnen δ -Funktionen nicht generiert werden. Hierzu wird ein anderes Verfahren benötigt, dessen Probleme in 2.1.1 kurz erläutert wurden. In der nachfolgenden Gleichung ist die gesuchte Funktion im Impulsraum dargestellt.

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}[k] = & (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_{x(0)=x(T)}^{CM} \mathcal{D}x \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \times \\ & \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ikx_{\tau_1}} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{-ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Eine wichtige Bedingung, welche von der Simulation der 2-Punkt Funktion im Hinblick auf die Reduzierung der numerischen Streuung exakt erfüllt werden soll, ist die *Ward*-Identität $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$. Sie wird durch die Anwendung der Projektoren $P_T^{\mu\nu}$ und $P_L^{\mu\nu}$ auf $\Pi^{\mu\nu}$ erreicht, welche eine Projektion der Funktion auf den transversalen Π_T und longitudinalen Anteil Π_L vornehmen sollen. Bei den Projektoren handelt es sich um Operatoren, die die folgenden Eigenschaften erfüllen müssen:

1. P ist Idempotent, das heißt $P^2 = P$
2. die Eigenwerte von P sind $\lambda_p = \pm 1$
3. P ist ein hermitescher Operator: $P^+ = P$
4. $P_i P_j = 0$ für $i \neq j$ und $\sum_i P_i = 1$

In der Quantenmechanik kann die Bedeutung der Projektionsoperatoren mit Hilfe von Blenden beschrieben werden, die eine anschauliche Erklärung des quantenmechanischen Messprozesses ermöglichen. Eine grundlegende Zusammenfassung der einzelnen Eigenschaften von Projektionsoperatoren und die dazugehörigen Beweise finden sich unter anderem in [24]. Mit Hilfe dieser Eigenschaften ist es nun möglich eine Darstellung für die gesuchten Operatoren $P_{L,T}^{\mu\nu}$ zu finden.

$$P_L^{\mu\nu} + P_T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad P_L^{\mu\nu} = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad \text{und} \quad P_T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \quad (2.11)$$

Um nun eine Gleichung zu erhalten, die die geforderten Bedingungen erfüllt, wurde der Projektor $P_L^{\mu\nu}$ speziell auf die 2-Punkt Funktion angewendet, was auf einen skalaren Ausdruck führt:

$$\begin{aligned} \Pi_L &= P_L^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu} \sim \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \int_0^T \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ikx_{\tau_1}} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{-ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2} \\ &\sim \frac{1}{k^2} \int_0^T \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \left\{ [k\dot{x}_{\tau_1}] e^{ikx_{\tau_1}} [k\dot{x}_{\tau_2}] e^{-ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2} \end{aligned}$$

Erst bei erneuter Anwendung des Projektors auf das Ergebnis Π_L folgt die gesuchte tensorwertige Größe $\Pi_L^{\mu\nu}$, was auch durch die Gleichung $\Pi_L^{\mu\nu} = P_L^{\mu\kappa} \Pi_{\kappa\rho} P_L^{\rho\nu}$ ausgedrückt wird. Aus der Bedingung $\Pi^{\mu\nu} = \Pi_T^{\mu\nu} + \Pi_L^{\mu\nu}$ ergibt sich nun Gleichung (2.12), die bei einer Kontraktion mit k_μ die geforderte Ward-Identität exakt erfüllt. Die auftretenden Mischterme ergeben sich innerhalb der Simulation, bei Übergang zum Kontinuumslimites zu 0 und können somit vernachlässigt werden.

$$\Pi_L^{\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu} = P_L^{\mu\kappa} \Pi_{\kappa\rho} P_L^{\rho\nu} \sim \frac{1}{k^4} \int_0^T \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \left\{ k^\mu [k\dot{x}_{\tau_1}] e^{ikx_{\tau_1}} k^\nu [k\dot{x}_{\tau_2}] e^{-ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2}$$

$$\begin{aligned} \Pi_T^{\mu\nu} &= \Pi^{\mu\nu} - \Pi_L^{\mu\nu} \\ &\sim \frac{1}{k^4} \int_0^T \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \left\{ [k^2 \dot{x}_{\tau_1}^\mu - k^\mu [k\dot{x}_{\tau_1}]] e^{ikx_{\tau_1}} [k^2 \dot{x}_{\tau_2}^\mu - k^\nu [k\dot{x}_{\tau_2}]] e^{-ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2} \\ &\quad + \text{Mischterme} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Wird an dieser Stelle noch der Normierungsterm berücksichtigt, so folgt für die 2-Punkt Funktion eine Darstellung (Gleichung (2.13)), die im Nachfolgenden mit Hilfe der Welt-

liniennumerik simuliert werden soll.

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\mu\nu}[k] &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \iint_0^T d\tau_1 d\tau_2 \\
 &\frac{\int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \left\{ [k^2 \dot{x}_{\tau_1}^\mu - k^\mu [k \dot{x}_{\tau_1}]] e^{ikx_{\tau_1}} [k^2 \dot{x}_{\tau_2}^\mu - k^\nu [k \dot{x}_{\tau_2}]] e^{-ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2}}{\int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2}} \\
 &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \left\langle \iint_0^T d\tau_1 d\tau_2 \chi_{\tau_1}^\mu e^{ikx_{\tau_1}} \chi_{\tau_2}^\nu e^{-ikx_{\tau_2}} \right\rangle \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

mit der Substitution $\rightarrow \chi_{\tau_i}^\mu = [k^2 \dot{x}_{\tau_i}^\mu - k^\mu [k \dot{x}_{\tau_i}]]$

Durch eine Diskretisierung des Integrationskernes $I_{Kern}^{\mu\nu}$ ergibt sich für diese Gleichung (2.14). Die Integrale wurden dabei durch Summen ersetzt, die einer Summation über die Stützstellen der einzelnen Weltlinien entsprechen.

$$\begin{aligned}
 I_{Kern}^{\mu\nu} &= \left\langle \iint_0^T d\tau_1 d\tau_2 [k^2 \dot{x}_{\tau_1}^\mu - k^\mu [k \dot{x}_{\tau_1}]] e^{ikx_{\tau_1}} [k^2 \dot{x}_{\tau_2}^\mu - k^\nu [k \dot{x}_{\tau_2}]] e^{-ikx_{\tau_2}} \right\rangle \\
 &\rightarrow \int_0^T d\tau_1 [k^2 \dot{x}_{\tau_1}^\mu - k^\mu [k \dot{x}_{\tau_1}]] e^{ikx_{\tau_1}} \\
 &= \int_0^1 d\tau_1 \sqrt{T} [k^2 \dot{y}_{\tau_1}^\mu - k^\mu [k \dot{y}_{\tau_1}]] e^{ik\sqrt{T}y_{\tau_1}} \\
 &\equiv \sum_{m=1}^N \sqrt{T} [k^2 (y_m - y_{m-1})^\mu - k^\mu [k(y_m - y_{m-1})]] e^{ik\sqrt{T}y_m} \\
 &= \sum_{m=1}^N \sqrt{T} [k^2 y_m^\mu - k^\mu [k y_m]] \left\{ e^{ik\sqrt{T}y_m} - e^{ik\sqrt{T}y_{m+1}} \right\} \\
 I_{Kern}^{\mu\nu} &= T \left\langle \sum_{m,n=1}^N \chi_m^\mu \left\{ e^{ik\sqrt{T}y_m} - e^{ik\sqrt{T}y_{m+1}} \right\} \chi_n^\nu \left\{ e^{-ik\sqrt{T}y_n} - e^{-ik\sqrt{T}y_{n+1}} \right\} \right\rangle \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

mit der Substitution $\rightarrow \chi_i^\mu = [k^2 y_i^\mu - k^\mu [k y_i]]$

Die Darstellung der Gleichung (2.14) erfüllt somit auch im diskreten Fall die geforderte Ward-Identität exakt und kann somit mit Hilfe des Weltlinienformalismus numerisch umgesetzt werden.

2.2. Ergebnisse der numerischen Simulation auf den Vakuum

Im ersten Teil sollen die Eigenschaften des Integrationskernes $I_{Kern}^{\mu\nu}$ überprüft werden. Hierzu wurde in der analytische Lösung die Dimension $D = 4$ gesetzt und zuerst die Spur $Tr[I_{Kern}]$ bestimmt. Der Vektor k des einfallenden Photons ist dabei eine reine euklidische Größe, was im Fall des Vakuums die einzige mögliche Wahl ist. Wird ein Minkowskiwertigen Vektor k auf den Vakuum betrachtet, so zeigt die analytische Lösung, dass sich alle Werte auf dem Lichtkegel, nach der Renormierung, zu null ergeben müssen, was eine Kontrolle der Anwendbarkeit des Verfahrens unmöglich macht. Es ist jedoch möglich nach Lösungen jenseits des Lichtkegels zu suchen, die jedoch im Rahmen dieser Arbeit keine Rolle spielen sollen. Die analytischen Ergebnisse sind für zwei ausgewählte Beispiele in Tabelle 2.2 zusammengefasst. In den nachfolgenden Gleichungen ist die Spur des Integrationskernes für die analytische Lösung dargestellt:

$$I_{Kern}^{\mu\nu} = T^2 \int_0^1 dt e^{-k^2 T t(1-t)} (1-2t)^2 \{g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu\}$$

$$I_{Kern,\mu}^\mu = 3T^2 k^2 \int_0^1 dt e^{-k^2 T t(1-t)} (1-2t)^2.$$

Des Weiteren soll das Grenzverhalten der Spur untersucht werden, das innerhalb der numerischen Simulation durch eine schrittweise Erhöhung von k_4 erreicht wird. Hierbei ist nach wie vor der Parameter T mit 1.0 festgesetzt.

$$\lim_{k^2 \rightarrow \infty} I_{Kern,\mu}^\mu[k^2] = 6.0$$

$$\lim_{k^2 \rightarrow 0} I_{Kern,\mu}^\mu[k^2] = 0.0$$

Innerhalb des numerischen Algorithmus wird der Fehler mit Hilfe der Fehlerrechnung aus einem statistischen Ensemble von Messpunkten bestimmt. Dabei stellt das Ergebnis für jeden Loop genau einen Messpunkt x_i dar, woraus zunächst das eigentliche numerische Ergebnis über

$$\bar{x} = \frac{1}{N_L} \sum_{l=1}^{N_L} x_l$$

bestimmt wird² und sich der numerische Fehler anschliessend mit Hilfe der Gleichung für die Standardabweichung

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N_L(N_L - 1)} \sum_{l=1}^{N_L} (x_l - \bar{x})^2}$$

² N_L = Anzahl der Loops

berechnet. Von den beiden Grenzfällen des Integrationskerns ist der für $k^2 \rightarrow 0$ vom

| k | T | $I_{Kern,\mu}^\mu$ |
|------------------|---|--------------------|
| $(0, 0, 0, 1)^T$ | 1 | 0.906763 |
| $(1, 1, 1, 1)^T$ | 1 | 2.77152 |

Tabelle 2.2.: Analytische Ergebnisse der Spur des Integrationskerns.

besonderen Interesse, da bei den späteren numerischen Simulationen unter Berücksichtigung elektromagnetischer Felder, für physikalisch relevante Ergebnisse ein Minkowskiwertiger Photonenvektor k angenommen werden muss. Das Skalarprodukt dieses Vektors ergibt sich aufgrund der Eigenschaften des Photons zu null. Das bedeutet, das Photon bewegt sich lichtartig ($v_{gr} = c$) fort, womit der zugehörige Vektor k auf dem Lichtkegel liegt. Dieser ist dabei ein geometrisches Objekt im 4-dimensionalen Raum, das die Grenze zwischen zeit- ($v_{gr} < c$) und raumartiger ($v_{gr} > c$) Bewegung markiert. Ausgehend

| statistisches Ensemble | | k | T | $I_{Kern,\mu}^\mu$ |
|------------------------|------|------------------|-----|--------------------------|
| Loops | PpL | | | |
| 1000 | 1000 | $(0, 0, 0, 1)^T$ | 1.0 | 0.909609 ± 0.0473371 |
| 5000 | 1000 | | | 0.896678 ± 0.0210095 |
| 20000 | 1000 | | | 0.905767 ± 0.0104099 |
| 1000 | 1000 | $(1, 1, 1, 1)^T$ | 1.0 | 2.77972 ± 0.118495 |
| 5000 | 1000 | | | 2.7486 ± 0.051515 |

Tabelle 2.3.: Numerische Ergebnisse der Spur des Integrationskerns.

von Abbildung 2.2 ist zu erkennen, dass die Simulation das analytisch erwartete Konvergenzverhalten aufweist. Im nächsten Schritt soll der eigentliche Polarisationsensor $\Pi^{\mu\nu}$ untersucht werden. Dabei ist es von Vorteil zunächst eine Simulation der 2-Punkt Funktionsdichte $\delta\Pi^{\mu\nu}$ durchzuführen, um festzustellen ob die numerischen Ergebnisse eine sinnvolle Approximation an die analytischen Werte liefern. Dass an dieser Stelle als erstes die numerischen Ergebnisse der Dichte des Polarisationsensors berechnet werden, also die Integration über den Parameter T noch nicht explizit numerisch ausgeführt wird, liegt vor allem an der Rechenzeit, die notwendig ist, um die letzte Integration numerisch zu lösen. Die Dichte hängt außerdem nach Gleichung (2.15) von drei Parametern ab.

$$\delta\Pi^{\mu\nu}[k, T, m] = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{e^{-m^2 T}}{T} \int_0^1 dt e^{-k^2 T t(1-t)} (1-2t)^2 \{g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu\} \quad (2.15)$$

Wie schon zuvor beim Integrationskern $I_{Kern}^{\mu\nu}$ liegt auch bei der Dichte eine Abhängigkeit vom Zeitparameter T und dem Impulsvektor des einfallenden Photons vor. Der dritte Parameter ist der Massenparameter m , der im Fall $D = 4$, von der Dimension L^{-1} ist und später ein Maß für die kritische Feldstärke darstellen wird. Im Grenzfall $T \rightarrow 0$ ist durch $\delta\Pi^{\mu\nu} \sim \frac{1}{T}$ zu erkennen, dass (2.15) divergiert, was eine Integration

dieser Gleichung für T im Bereich $[0, \infty)$ unmöglich macht. Somit ist eine Renormierung des Integrals erforderlich. Die Renormierung erfolgt dabei durch eine Verschiebung der einzelnen physikalischen Größen, was eine Einführung von Countertermen zur Folge hat. Die einzelnen Terme ergeben sich über eine Entwicklung des obigen Ausdrucks um $T = 0$ in einer Taylorreihe. Unter einer Verschiebung der physikalischen Parameter versteht man dabei zum Beispiel einen Übergang von dem Massenterm m hin zu einer renormierten Masse $m_R = m + \Delta m$, die mit der Ursprünglichen Massendefinition über den Term Δm zusammen hängt. Die Bestimmung der einzelnen Verschiebungen und der Grad der Divergenz, dessen Kenntnis für eine Betrachtung der Renormierung wichtig ist, erfolgt durch Einführung eines Cutoffs Λ innerhalb des Integrals.

$$\int_0^1 (1-2t)^2 e^{-k^2 T t(1-t)} dt = \frac{1}{3} - \frac{k^2}{30} T + \frac{k^4}{420} T^2 - \frac{k^6}{7560} T^3 + \mathcal{O}(T^4) \quad (2.16)$$

Die Schwierigkeit des Algorithmus besteht nun darin die benötigten Counterterme zuverlässig numerisch zu bestimmen um eine Renormierung des Integrals durchführen zu können. In der Simulation wird hierzu ein Ensemble von Messpunkten in einem Bereich $[T_{\text{MIN}}, T_{\text{MAX}}]$ erzeugt und anschließend mit Hilfe des **Nonlinear-Least-Squares**-Verfahren durch ein Polynom approximiert. Dieses Verfahren wurde gewählt, da es die Möglichkeit bietet bestimmte Parameter festzusetzen und direkt an die Routine zu übergeben. Im allgemeinen ist zur numerischen Analyse von Polynomen die **Least-Squares**-Methode ausreichend, jedoch bieten die verwendeten numerischen Algorithmen nicht die Möglichkeit zusätzliche Informationen über die Entwicklung in das Verfahren zu geben. Innerhalb der Simulation ist die Anzahl der Punkte und die Schrittweite zur Berechnung der 2-Punkt Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ mit 80 und 0.1 festgelegt, wobei die Routine die einzelnen Punkte mit einem Polynom 5. Grades der Art $f(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5$ approximiert. Für diese Approximation wurde die Kenntnis der $I_{\text{Kern}}^{\mu\nu}$ -Entwicklung vorausgesetzt und der Algorithmus am Wert $k^4/420$ kalibriert. Das heißt, innerhalb des Verfahrens, wird das Resultat für die numerischen Werte der Koeffizienten und damit der Counterterme genommen, bei dem die Abweichung beim T^4 -Term zwischen numerischem und analytischem Ergebnis minimal wird. Außerdem besteht die Möglichkeit, bei besonders starker Streuung der numerischen Werte, die ersten beiden Parameter (a, b) mit ihren analytischen Werten in die Routine zu geben.

$$\delta\Pi^{\mu\nu}[k, T, m] = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{e^{-m^2 T}}{T} \left[\int_0^1 dt e^{-k^2 T t(1-t)} (1-2t)^2 - \frac{1}{3} + \frac{k^2 T}{30} \right] \{g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu\} \quad (2.17)$$

In Tabelle 2.4 sind die Ergebnisse dieser Routine für den Impulsvektor $k = (1, 1, 1, 1)^T$ und der 11-Richtung des Polarisationsensors $\Pi^{\mu\nu}$ beispielhaft für verschiedene statistische Ensemble angegeben. In den ersten beiden Fällen wurde dabei, aufgrund der starken Streuung der einzelnen Messpunkte, der Wert für den Koeffizient a des Polynoms als bekannt vorausgesetzt. Das bedeutet in den Fällen, in denen der Fehler der einzelnen Koeffizienten null beträgt, werden die analytischen Werte der Entwicklung übernommen und somit nicht numerisch berechnet. Um das numerische Ergebnis für $\delta\Pi^{\mu\nu}$ oder später $\Pi^{\mu\nu}$

2. Das Vakuum

| statistisches Ensemble | | Parameter | | | |
|------------------------|------|-------------------------|---------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| Loops | PpL | a | b | c | d |
| Theoretische Werte | | 1.0 | -0.4 | 0.114286 | -0.0253968 |
| 1000 | 1000 | 1.0 ± 0.0 | -0.421067 ± 0.0296627 | 0.11374 ± 0.0281823 | $-0.0139431 \pm 0.00651883$ |
| 5000 | 1000 | 1.0 ± 0.0 | -0.423186 ± 0.0133041 | 0.115366 ± 0.0126179 | -0.014227 ± 0.00291464 |
| 20000 | 1000 | 1.00863 ± 0.0317975 | -0.40538 ± 0.303012 | 0.114159 ± 0.819809 | -0.0199654 ± 0.658022 |

Tabelle 2.4.: Ergebnisse der Polynomapproximation für $k = (1, 1, 1, 1)^T$ und einen Initialisierungswert von 10

angeben zu können, wurden zwei Bereiche, die durch eine dynamisch festgelegte Grenze T_{DG} getrennt sind, betrachtet. Die Lage der Grenze ist dabei vom Fehler der einzelnen Messpunkte abhängig, der in analoger Weise, wie der Fehler des Integrationskerns, mit Hilfe der Fehlerrechnung bestimmt wird. In Abbildung 2.3 ist die Dichte der 2-Punkt Funktion für zwei verschiedene statistische Ensembles aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass bei einem Ensemble von 5000 Loops und 1000 PpL, der Algorithmus in einem bestimmten Bereich $\Pi_{\text{max}}^{\mu\nu} \pm \delta$ um das Extrema dieser Funktion ungenaue Werte liefert, die jedoch durch eine Erhöhung der Loopanzahl verbessert werden können.

$$\begin{aligned}
 T < T_{\text{DG}} &\rightarrow \delta\Pi^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{e^{-m^2 T}}{T^3} [c^{\mu\nu} T^4 + d^{\mu\nu} T^5] \\
 T \geq T_{\text{DG}} &\rightarrow \delta\Pi^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{e^{-m^2 T}}{T^3} [I_{\text{Kern}}^{\mu\nu} - a^{\mu\nu} T^2 - b^{\mu\nu} T^3]
 \end{aligned}$$

Die Ursache einer solchen Abweichung ist vor allem auf die Ergebnisse der Koeffizienten des Polynoms zurückzuführen, was bedeutet, dass der verwendete Approximationsalgorithmus aufgrund einer zu starken Streuung der Messpunkte versagt. Somit liefern die Resultate der einzelnen Koeffizienten des Polynoms eine gute Indikation über die Genauigkeit der Messwerte. Auch in diesem Fall ist eine Betrachtung des Grenzverhaltens einzelner Größen notwendig. Ein wichtiger Parameter für diese Untersuchung stellt dabei der Massenparameter m dar. Im Fall sehr kleiner Massen beginnt das Integral über T zu divergieren, was eine numerische Auswertung der 2-Punkt Funktion für diese Fälle unmöglich werden lässt.

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow 0} \delta\Pi^{\mu\nu}[k, T, m] &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{T} \left[\int_0^1 dt e^{-k^2 T t(1-t)} (1-2t)^2 - \frac{1}{3} + \frac{k^2 T}{30} \right] \{g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu\} \\
 \lim_{m \rightarrow \infty} \delta\Pi^{\mu\nu}[k, T, m] &= 0
 \end{aligned}$$

In Abbildung 2.4 wurde mit Hilfe eines statistischen Ensembles von 20000 Loops und 1000 PpL die Dichte der 2-Punkt Funktion berechnet. Es ist zu erkennen, dass mit zunehmendem Massenterm m , die Fläche unter der Kurve kleiner wird und somit die Integration über T gegen 0 für $m \rightarrow \infty$ konvergieren muss. In Abbildung 2.5 ist genau das erwartete Verhalten der Dichte der 2-Punkt Funktion dargestellt. Dabei ist es not-

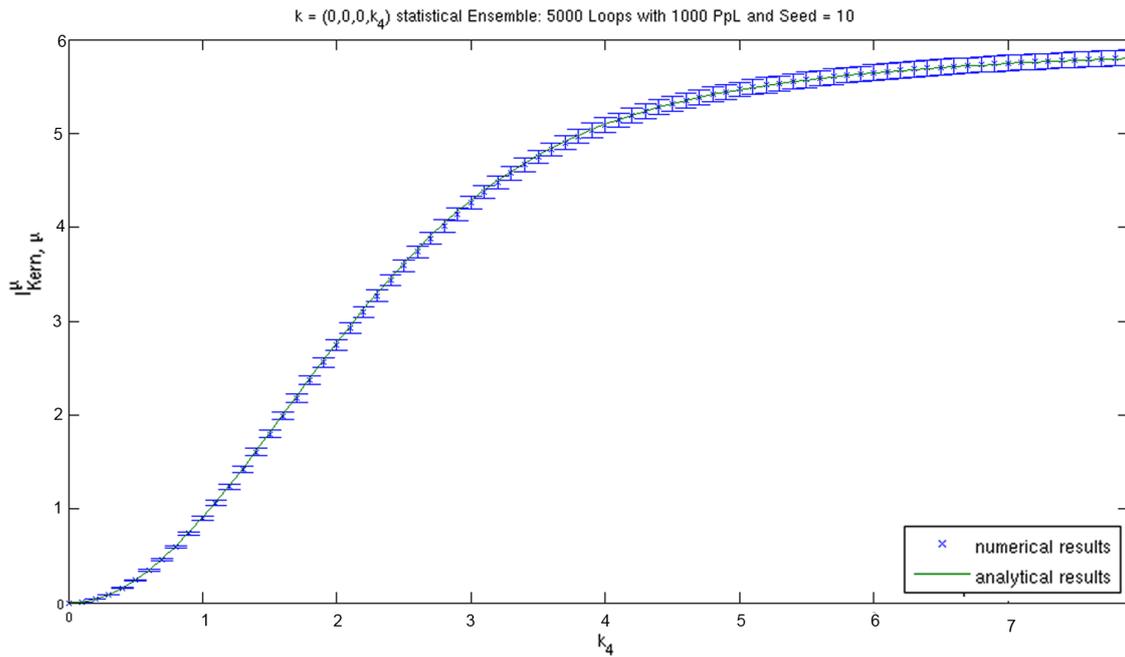
wendig die Simulation bei einem Startwert des Massenparameters m von 0.3 beginnen zu lassen, da für kleinere Parameter, aufgrund der Divergenz des Integrals, die numerischen Routinen versagen. Die Integrationen sind mit Hilfe der GSL - Routinen realisiert, die das Integral auf der Basis eines Gaußschen Konvergenzverfahrens mit einem relativen Fehler von 10^{-4} berechnen. Dieser Fehler ist jedoch nicht zu verwechseln mit dem numerischen Fehler der einzelnen Messwerte der Integration. Dieser wird mit Hilfe eines numerischen Verfahrens berechnet, das auf den Jackknife-Algorithmus zurückgeht. Jedoch kann aufgrund der Rechenzeit das statistische Ensemble von Weltlinien nur in eine Gruppe von Subensembles zerlegt werden, was den Nachteil hat, dass der tatsächliche numerische Fehler verborgen bleibt. Die einzelnen numerischen Fehler sind demzufolge noch mit einem unbekanntem Fehler behaftet, was bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden muss. Der systematische Fehler resultiert aus der Tatsache, dass im Rahmen des Algorithmus ein endliches statistisches Ensemble verwendet wird in dem die einzelnen Loops durch eine endliche Anzahl von Stützstellen charakterisiert sind. Eine Bestimmung des systematischen Fehlers kann nur durch einen Übergang zum Kontinuum erreicht werden, das heißt die Anzahl der Stützstellen pro Loop muss im Unendlichkeitslimit betrachtet werden. Die Ergebnisse der numerischen Simulation lassen den Schluss zu, dass eine numerische Berechnung der 2-Punkt Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ auf Basis der Weltliniennumerik im Fall des Vakuums möglich ist. Der nächste Schritt war es die Numerik auf die Berücksichtigung von elektromagnetischen Feldern auszuweiten. Einen Bezug der Ergebnisse auf physikalische Phänomene ist an dieser Stelle jedoch, wie in der Einleitung erwähnt, noch nicht möglich, da der Photonenvektor k hierzu als Minkowskiwertige Größe auf dem Lichtkegel in die Simulation gegeben werden muss. Jedoch ermöglicht die Betrachtung bestimmte numerische Grenzen für die Eingabeparameter zu untersuchen und zu verstehen. Als Beispiel ist der Massenterm m zu nennen, der eine untere Grenze innerhalb der Simulation besitzt. Aber auch der Vektor k , kann nur in bestimmten Bereichen betrachtet werden, da es sonst für die numerische Integrationsroutine nicht mehr möglich ist ein konvergentes Verhalten der Funktion zu erkennen.

2.3. Stabilität des Algorithmus

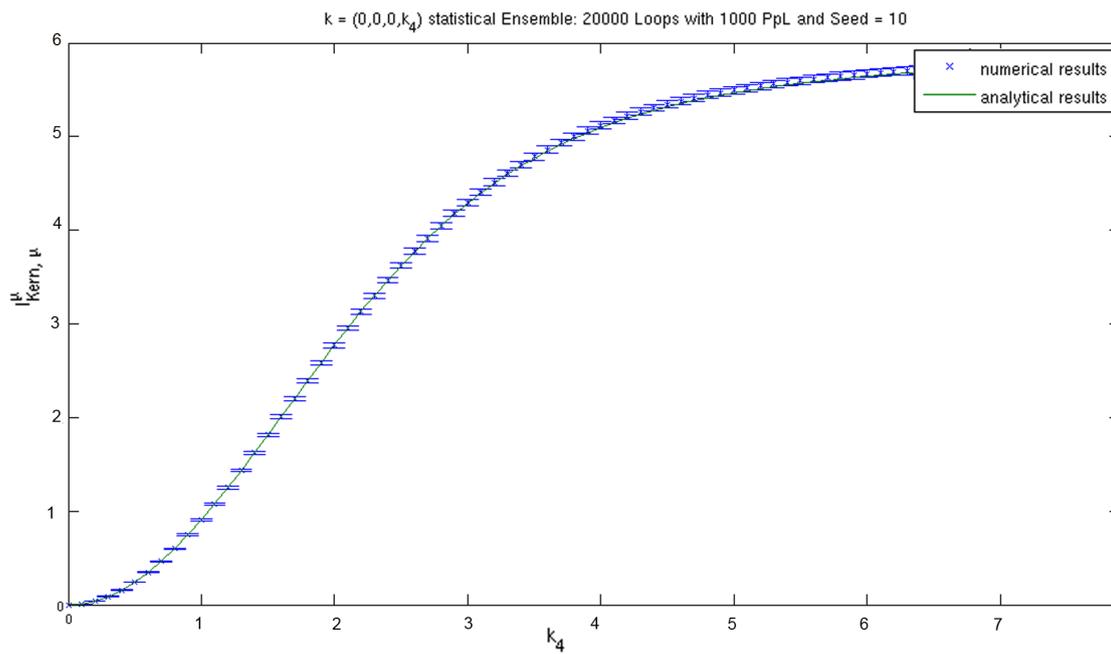
Um eine endgültige Aussage über die Zuverlässigkeit der numerischen Ergebnisse treffen zu können, ist es zum einen notwendig den Algorithmus anhand von Beispielen zu testen, für die ein jeweiliges analytisches Vergleichsergebnis vorliegt, und zum anderen die Wirkung einzelner Simulationsparameter auf genau diese Ergebnisse zu untersuchen. Im Rahmen des verwendeten Algorithmus sind dabei nicht die einzelnen physikalischen Simulationsparameter von zentraler Bedeutung, da diese das numerische Ergebnis in Bezug auf das analytische weitestgehend unbeeinflusst lassen, sondern das gewählte statistische Ensemble. Dieses Ensemble wird durch drei Größen charakterisiert, nämlich die Anzahl der Loops und die Zahl der Stützstellen pro Loop (PpL) sowie der Initialisierungswert des Zufallsgenerators (Seed-Wert), der die Reproduzierbarkeit bei konstanten weiteren

Parameter sicherstellt. Im Rahmen der Stabilitätsuntersuchung, deren Ergebnisse in Abbildung 2.6 zusammengefasst sind, wurden bei festgehaltener Anzahl von Stützstellen, die beiden anderen Parameter variiert. Mit Hilfe dieser Ergebnisse ist es möglich das optimale statistische Ensemble bei vertretbarem Aufwand hinsichtlich der Rechenzeit zu bestimmen.

2. Das Vakuum



(a) Statistisches Ensemble von 5000 Loops mit jeweils 1000 Stützstellen.



(b) Statistisches Ensemble von 20000 Loops mit jeweils 1000 Stützstellen.

Abbildung 2.2.: Spur des Integrationskernes für verschiedene statistische Ensembles mit einem Initialisierungswert (Seed) von 10.

2. Das Vakuum

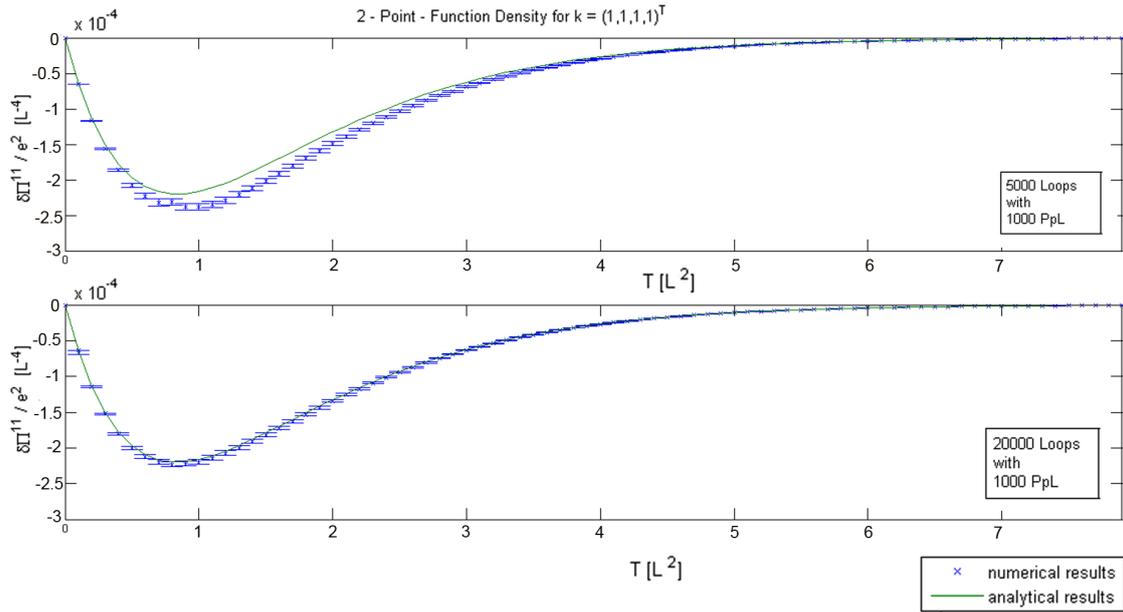


Abbildung 2.3.: $\delta\Pi^{11}$ mit $k = (1, 1, 1, 1)^T$ für verschiedene statistische Ensemble mit einem Initialisierungswert (Seed) von 10. Man erkennt, dass mit Vergrößerung der Loopanzahl eine bessere Approximation an die analytischen Ergebnisse ermöglicht wird.

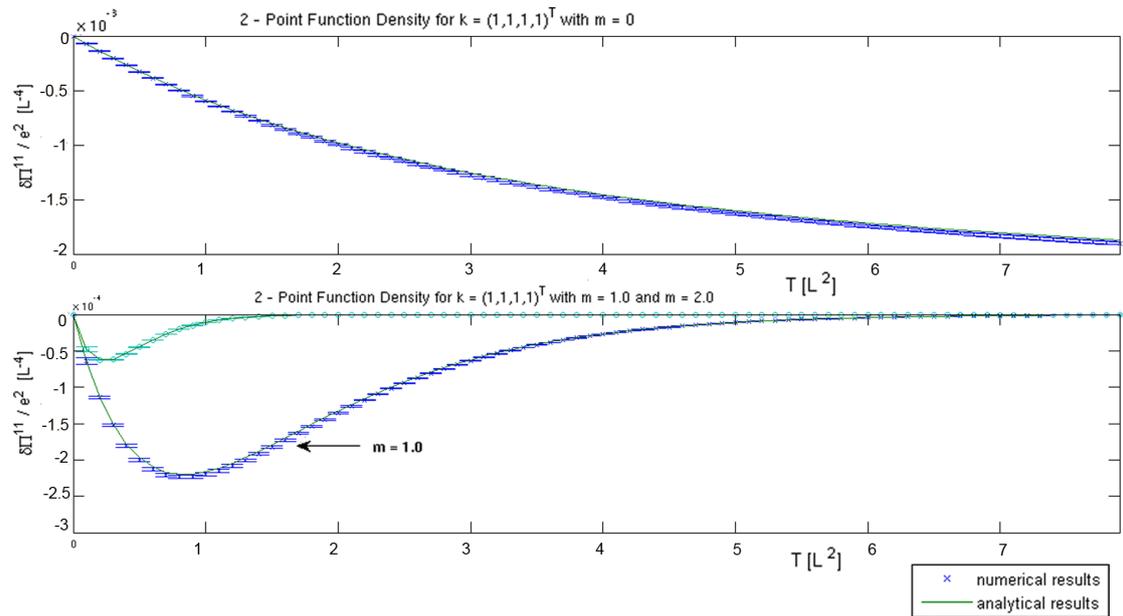


Abbildung 2.4.: $\delta\Pi^{11}$ mit $k = (1, 1, 1, 1)^T$ für verschiedene Massenparameter m und einem Initialisierungswert (Seed) von 10.

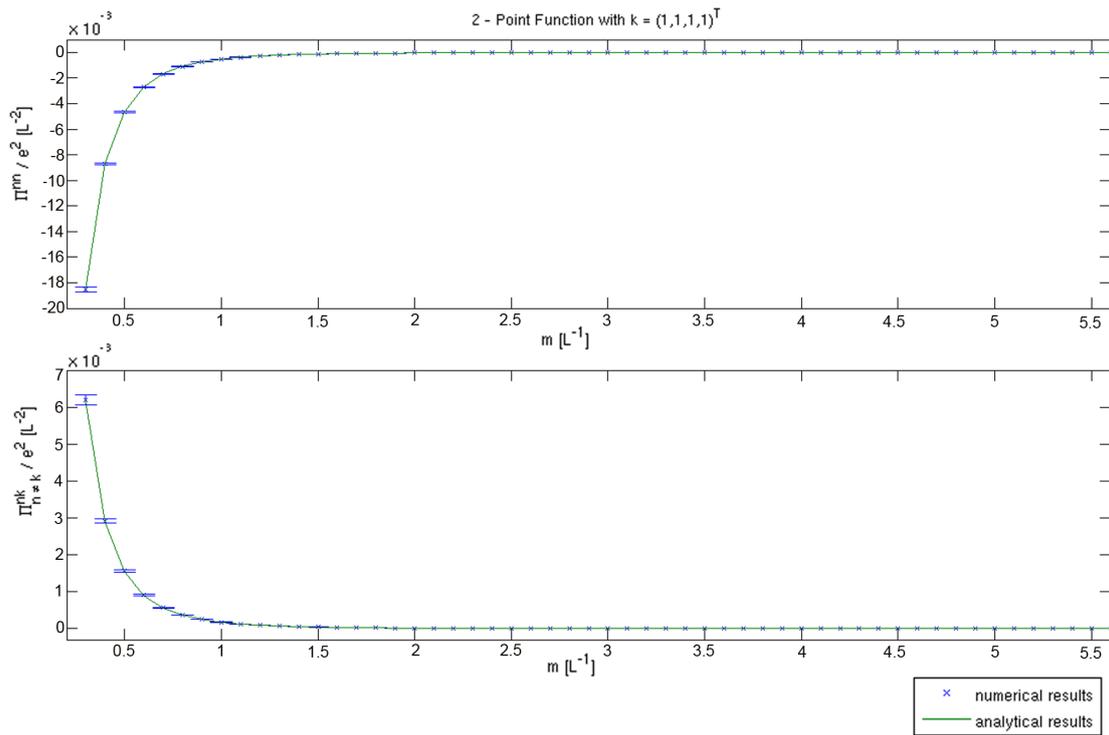


Abbildung 2.5.: 2-Punkt Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ für $k = (1, 1, 1)^T$ mit einem Initialisierungswert (Seed) von 10.

2. Das Vakuum

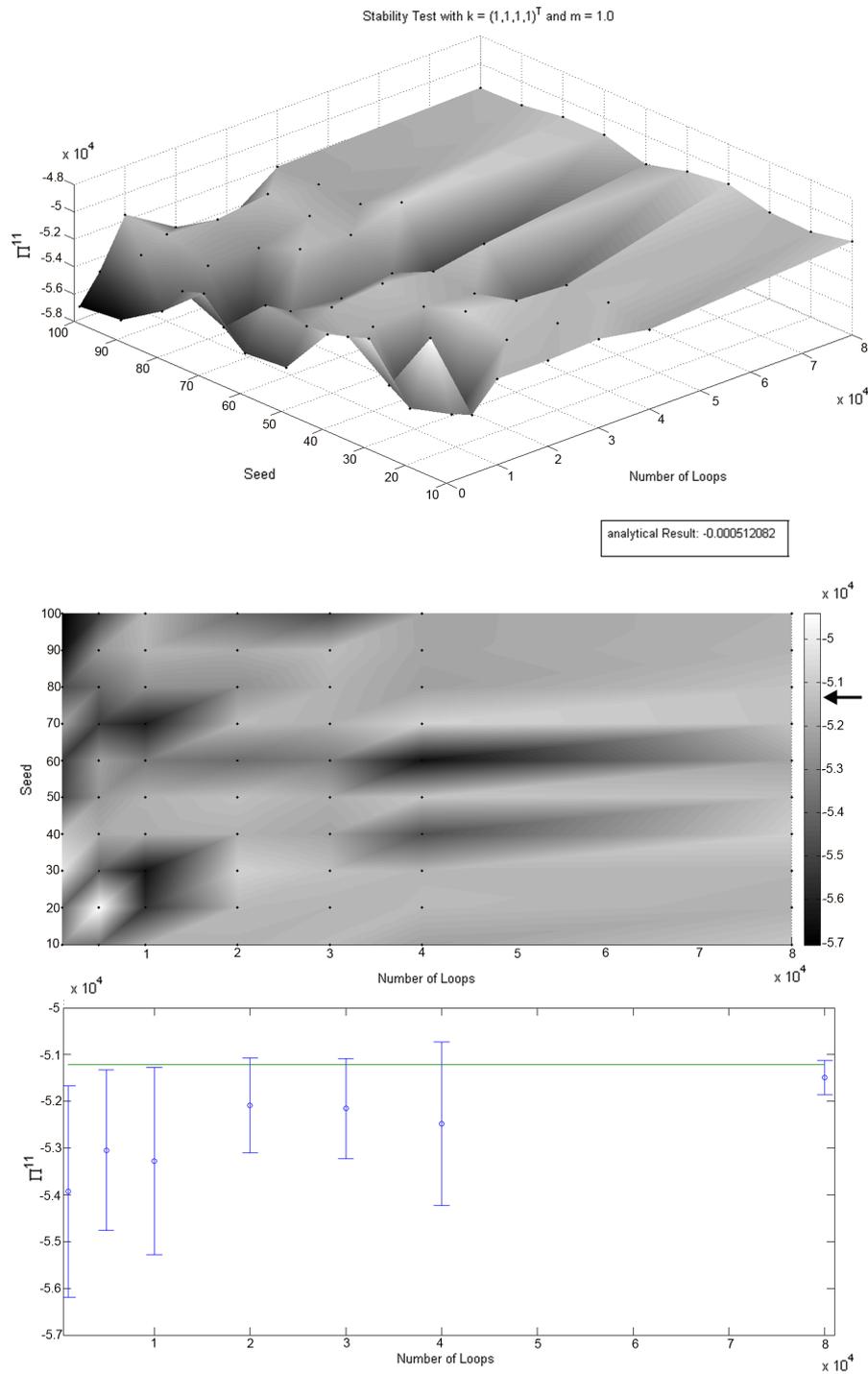


Abbildung 2.6.: Stabilitätstest für Π^{11}/e^2 mit einem Massenterm von $m = 1.0$ für 1000 Stützstellen pro Weltlinie. Die einzelnen Diagramme zeigen dabei die Streuung der numerischen Ergebnisse in Abhängigkeit vom gewählten statistischen Ensemble und ermöglichen somit eine optimale Wahl der Loopanzahl bei minimaler Abweichung vom analytisch zu erwartenden Ergebnis.

3. Die 2-Punkt Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ für ein konstantes Magnetfeld B

In der Einleitung ist das Phänomen der Erzeugung eines Elektron-Positron Paares in starken Magnetischen Feldern erwähnt, das von Toll und Robl ([6]) erstmals untersucht wurde. Die Rechnungen in diesen Arbeiten bezogen sich jedoch nur auf hochenergetische Photonen in schwachen elektromagnetischen Feldern. Wobei die Wahrscheinlichkeit dieses Effektes nach der bis dahin im Rahmen der Quantenmechanik üblichen Methode¹ berechnet wurde. Im Jahr 1974 ist, ausgehend von diesen Publikationen, von Tsai und Erber in ([25]) ein neues Verfahren auf Basis der **proper-time**-Methode von Schwinger entwickelt worden. Die daraus resultierende Methode ermöglichte eine wesentlich einfachere Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten und führte erstmals zu einem Polarisationsensor, mit dem die Effekte der Vakuumpolarisation beschrieben werden konnten. In [26] wurden diese Rechnungen auch auf niederenergetische Photonen in beliebigen Feldern erweitert. Im vorherigen Kapitel 2 ist dieser Polarisationsensor $\Pi^{\mu\nu}$ in Abwesenheit von elektromagnetischen Feldern für das Vakuum behandelt worden. Dieses Problem ist dazu geeignet, die Funktionalität von Algorithmen und bestimmten numerischen Verfahren zu testen, die damit verbunden physikalischen Probleme sollen jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet werden. In der physikalischen Realität ist ein Fall, bei dem elektromagnetische Felder keine Rolle spielen sehr unwahrscheinlich, da diese Felder nahezu überall anzutreffen sind. Deshalb stellt sich die Frage, welchen Einfluss bestimmte Felder und oder Feldkonfigurationen auf die Vakuumpolarisation haben und vor allem, welche physikalischen Effekte mit Hilfe von Experimenten beobachtbar sind.

3.1. Theoretische Grundlagen

Zur Einführung von elektromagnetischen Feldern wird die Vakuumgleichung für Γ^1 durch ein zusätzliches Eichpotential a^μ mit $A^\mu \rightarrow A^\mu + a^\mu$ erweitert. Dieses Potential trägt dabei die Informationen über das vorhandene elektromagnetische Feld, das im 4-dimensionalen durch den Feldstärketensor $F_E^{\mu\nu 2}$ charakterisiert ist. Innerhalb einer abelschen Theorie, wie sie in diesem Fall angewendet wird, ist der Tensor durch $F^{\mu\nu} = \partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu$ definiert und somit vollständig antisymmetrisch, da für den Kommutator $[a^\mu, a^\nu] = 0$ gilt.

¹Berechnung der Wahrscheinlichkeitsamplituden ψ mit Hilfe der exakten Wellenfunktion \rightarrow Wahrscheinlichkeit: $\sim \psi\psi^*$.

² $F_E^{\mu\nu}$ euklidischer Feldstärketensor \rightarrow im Weiteren wird aus Gründen der Übersichtlichkeit der Index E vernachlässigt.

Ausgehend von den obigen Überlegungen ergibt sich für Γ^1 damit Gleichung (3.1).

$$\Gamma^1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x e^{-ie \int_0^T d\tau (A_\mu + a_\mu) \dot{x}^\mu} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \quad (3.1)$$

Diese Vorgehensweise bei der Erweiterung um ein konstantes Feld wurde von Christian Schubert in [22] im Jahr 2000 erstmals veröffentlicht und analytisch gelöst. Zur Berechnung der 2-Punkt Funktion $\Pi^{\mu\nu}$ ist eine Entwicklung von Gleichung (3.1) in einer Taylorreihe analog zum Vakuumfall notwendig. Hierbei ist zu beachten, dass das elektromagnetische Feld über a^μ exakt in die Lösung der 2-Punkt Funktion eingeht und somit die resultierende Gleichung eine große Ähnlichkeit zur Funktion auf dem Vakuum aufweisen wird. Somit folgt für $\Pi^{\mu\nu}$, bei gleichbleibender Vorgehensweise wie in Kapitel 2, Gleichung (3.2).

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}[k] &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \\ &\quad \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ikx_{\tau_1}} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{-ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-ie \int_0^T d\tau a_\mu \dot{x}^\mu} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \\ &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \left\langle \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ikx_{\tau_1}} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{-ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-ie \int_0^T d\tau a_\mu \dot{x}^\mu} \right\rangle \quad (3.2) \end{aligned}$$

Wiederum wurde auch hier auf eine explizite Angabe der Normierung verzichtet, die aber bei den einzelnen Berechnungen und vor allem im Rahmen der Simulation berücksichtigt ist. Für ein konstantes magnetisches Feld B mit $\mathcal{B} = B(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ lässt sich das Eichpotential a^μ auch schreiben als $a^\mu = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} x_\nu$, oder in vollständiger Matrixschreibweise als:

$$a^\mu = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} x_\nu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & 0 \\ -B_3 & 0 & B_1 & 0 \\ B_2 & -B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Für die Anzahl der Dimensionen D ist dabei der Wert vier verwendet worden. Ausgehend von Gleichung (3.2) und dem Ausdruck für a^μ für konstante Felder ist es möglich eine analytische Lösung für das Problem zu finden. Hierzu wird die gleiche mathematische Erweiterung wie im Vakuumfall verwendet, was bedeutet, dass anstelle von \dot{x}^μ der Ausdruck $\dot{x}^\mu \epsilon_\mu \rightarrow e^{\dot{x}\epsilon}|_{\text{lin}(\epsilon)}$, zu betrachten ist. In den nachfolgenden Gleichungen wurde diese

Erweiterung in die Funktion $\Pi^{\mu\nu}[k]$ explizit eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\Pi^{\mu\nu}[k] &\sim \int_{x(0)=x(T)}^{CM} \mathcal{D}x \left\{ \dot{x}_{\tau_1}^\mu e^{ikx_{\tau_1}} \dot{x}_{\tau_2}^\nu e^{-ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-ie \int_0^T d\tau a_\mu \dot{x}^\mu} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \\
&\rightarrow \int_{x(0)=x(T)}^{CM} \mathcal{D}x \left\{ e^{\dot{x}_{\tau_1} \epsilon_1 + ikx_{\tau_1}} e^{\dot{x}_{\tau_2} \epsilon_2 - ikx_{\tau_2}} \right\} e^{-ie \int_0^T d\tau a_\mu \dot{x}^\mu} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \Big|_{lin(\epsilon_1, \epsilon_2)} \\
&\rightarrow \int_{x(0)=x(T)}^{CM} \mathcal{D}x e^{\sum_{j=1}^2 \dot{x}_{\tau_j} \epsilon_j + i \sum_{j=1}^2 k_j x_{\tau_j}} e^{-\frac{1}{2} ie \int_0^T d\tau x_\mu F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu} e^{-\frac{1}{4} \int_0^T d\tau \dot{x}^2} \Big|_{lin(\epsilon_1, \epsilon_2)}
\end{aligned}$$

Über die Methode der quadratischen Ergänzung kann das Pfadintegral nun explizit für $F^{\mu\nu} = \text{const.}$ gelöst werden. Im Gegensatz zu den Greenschen Funktionen des Vakuums G_B lauten diese unter Berücksichtigung eines Feldes

$$\mathcal{G}_{B_{12}} = 2 \langle \tau_1 | (\partial_\tau^2 - 2ieF\partial_\tau)^{-1} | \tau_2 \rangle$$

und müssen vorerst separat gelöst werden, was in C.3 vorgeführt ist. Die resultierende Gleichung für $\Pi^{\mu\nu}$ besitzt nach Ausführung der quadratischen Ergänzung demzufolge die erwartete identische Form wie in (2.8), jedoch mit $G_{B_{12}} \rightarrow \mathcal{G}_{B_{12}}$. Bei der Bestimmung der 2-Punkt Funktion muss außerdem der Tensorcharakter von $\mathcal{G}_{B_{12}}$ beachten werden, der auf den Feldstärketensor in der Bestimmungsgleichung von $\mathcal{G}_{B_{12}}$ zurückzuführen ist.

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 k_i \mathcal{G}_{B_{ij}} k_j} &= e^{-\frac{1}{2} k [2\mathcal{G}_{B_{12}} - \mathcal{G}_{B_{11}} - \mathcal{G}_{B_{22}}] k} \\
e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_i \ddot{\mathcal{G}}_{B_{ij}} \epsilon_j} &= e^{\frac{1}{2} [\epsilon_1 \ddot{\mathcal{G}}_{B_{11}} \epsilon_1 + \epsilon_2 \ddot{\mathcal{G}}_{B_{22}} \epsilon_2 + 2\epsilon_1 \ddot{\mathcal{G}}_{B_{12}} \epsilon_2]} \\
e^{i \sum_{i,j=1}^2 \epsilon_i \dot{\mathcal{G}}_{B_{ij}} k_j} &= e^{\epsilon_1 [\dot{\mathcal{G}}_{B_{11}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}}] k + \epsilon_2 [\dot{\mathcal{G}}_{B_{21}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{22}}] k}
\end{aligned}$$

Vor allem für den nächsten Rechenschritt ist dies von zentraler Bedeutung. Denn darin müssen analog zum Vakuumfall die einzelnen Exponentialfunktionen in Ordnungen von ϵ_1 und ϵ_2 entwickelt werden, wobei nur Terme eine Rolle spielen, in denen sowohl ϵ_1 als auch ϵ_2 vorkommen. Die einzelnen Rechenschritte sind im nachfolgenden dargestellt:

$$\begin{aligned}
e^{\dots} \Big|_{lin(\epsilon_1, \epsilon_2)} &= e^{-\frac{1}{2} k [2\mathcal{G}_{B_{12}} - \mathcal{G}_{B_{11}} - \mathcal{G}_{B_{22}}] k} \left[\epsilon_1 \ddot{\mathcal{G}}_{B_{12}} \epsilon_2 - \epsilon_1 [\dot{\mathcal{G}}_{B_{11}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}}] k \epsilon_2 [\dot{\mathcal{G}}_{B_{21}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{22}}] k \right] \\
&= e^{-k [\mathcal{G}_{B_{12}} - \mathcal{G}_{B_{11}}] k} \left[\epsilon_1 \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}} \epsilon_2 k \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}} k - \epsilon_1 [\dot{\mathcal{G}}_{B_{11}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}}] k \epsilon_2 [\dot{\mathcal{G}}_{B_{21}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{22}}] k \right] \\
&= e^{-k [\mathcal{G}_{B_{12}} - \mathcal{G}_{B_{11}}] k} \epsilon_{1,\mu} \left[\dot{\mathcal{G}}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}} k - [\dot{\mathcal{G}}_{B_{11}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}}]^{\mu k} [\dot{\mathcal{G}}_{B_{21}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{22}}]^{\nu k} \right] \epsilon_{2,\nu} \\
&\rightarrow e^{-k [\mathcal{G}_{B_{12}} - \mathcal{G}_{B_{11}}] k} \left[\dot{\mathcal{G}}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}} k - [\dot{\mathcal{G}}_{B_{11}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{12}}]^{\mu\sigma} [\dot{\mathcal{G}}_{B_{21}} - \dot{\mathcal{G}}_{B_{22}}]^{\nu\tau} k_\sigma k_\tau \right]
\end{aligned}$$

Auf diese Weise ergibt sich ein Ausdruck für den Polarisationsensor unter Berücksichtigung eines konstanten elektromagnetischen Feldes. Im Gegensatz zum Vakuumfall jedoch hängt dieser Tensor, wie in Gleichung (3.3) zu erkennen ist, zusätzlich von einer Symmetrie in der Eigenzeit τ ab.

$$\begin{aligned} e^{-k^2 G_{B_{12}}} [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] \dot{G}_{B_{12}}^2 &\Rightarrow \text{Hinzunahme eines konstanten Feldes} \\ \Rightarrow e^{-k[G_{B_{12}} - G_{B_{11}}]k} &\left[\dot{G}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{G}_{B_{12}} k - [\dot{G}_{B_{11}} - \dot{G}_{B_{12}}]^{\mu\sigma} [\dot{G}_{B_{21}} - \dot{G}_{B_{22}}]^{\nu\tau} k_\sigma k_\tau \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Für die analytische Lösung der 2-Punkt Funktion folgt letztendlich Gleichung (3.4). Die Normierung dieser Funktion fordert einen zusätzlichen Faktor $\det \left[\frac{\sin eFT}{eFT} \right]^{-1/2}$, der ebenfalls eine explizite Abhängigkeit vom betrachteten elektromagnetischen Feld besitzt, und deren Ableitung im Fall eines reinen Magnetfeldes in 1.5 vorgeführt wurde. Dieses elektromagnetische Feld in F kann dabei sowohl aus einem Magnet-, elektrischen Feld oder auch aus beiden Feldern bestehen.

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \det \left[\frac{\sin eFT}{eFT} \right]^{-1/2} \int_0^T \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 \\ e^{-k[G_{B_{12}} - G_{B_{11}}]k} \left[\dot{G}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{G}_{B_{12}} k - [\dot{G}_{B_{11}} - \dot{G}_{B_{12}}]^{\mu\sigma} [\dot{G}_{B_{21}} - \dot{G}_{B_{22}}]^{\nu\tau} k_\sigma k_\tau \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Gleichung (3.4) liefert aber lediglich für skalare Felder ohne Berücksichtigung von Spinorfeldern die richtigen Ergebnisse. Zur Untersuchung der Wirkung von Spinoren ist die analoge Rechnung mit der Lagrangedichte der QED durchzuführen, wie sie unter anderem in [27] zu finden ist.

3.1.1. Analytische Lösung für $\Pi^{\mu\nu}$ mit konstantem Magnetfeld beliebiger Orientierung

An Stelle von allgemeinen elektromagnetischen Feldern sollen im Rahmen dieser Arbeit, vorerst nur reine Magnetfelder berücksichtigt werden. Die Gestalt des euklidischen Feldstärketensors wurde schon in 1.2.1 besprochen und findet nun eine explizite Anwendung. Einen Ansatz zur analytischen Lösung des Problems des Polarisationsensors und somit des Integrationskerns der 2-Punkt Funktion $I_{Kern}^{\mu\nu}$ unter Berücksichtigung konstanter Magnetfelder liefert eine Zerlegung der Greenschen Funktion $\mathcal{G}_{B_{12}}$ in gerade- und ungerade Anteile in der Eigenzeit τ . Dieser Rechenschritt ist schon in [22] von Christian Schubert gezeigt worden. Zur Vereinfachung der einzelnen Gleichungen erfolgt an dieser Stelle eine Substitution $Z = eFT$, womit sich für die Greensche Funktion $\mathcal{G}_{B_{12}}$ die

folgenden Ausdrücke ergeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{B_{12}} &= \frac{T}{2Z^2} \left\{ \frac{Z}{\sin Z} e^{-iZ\dot{G}_{B_{12}}} - 1 + iZ\dot{G}_{B_{12}} \right\} \\ \Rightarrow \mathcal{G}_{B_{12}} - \mathcal{G}_{B_{11}} &= \frac{T}{2Z^2} \left\{ \frac{Z}{\sin Z} \left[e^{-iZ\dot{G}_{B_{12}}} - \cos eFT \right] + iZ\dot{G}_{B_{12}} \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die detaillierte Rechnung, die zur Darstellung der Greenschen Funktion für konstante Felder führt, ist im Anhang C.3 aufgeführt. Um den Polarisationsensor genauer auszuwerten, erfolgt an dieser Stelle die angesprochene Zerlegung in Funktionen \mathcal{S} und \mathcal{A} , die im einzelnen die geforderten Symmetrieeigenschaften besitzen. Die jeweiligen Symmetrien dieser Funktionen werden im Anhang C.3 ausführlich untersucht und in den folgenden Rechnungen ausgenutzt. Innerhalb der Exponentialfunktion des Integrationskerns und somit des Polarisationsensors müssen aus Symmetriegründen alle ungeraden Anteile verschwinden, da die Integration über das Produkt aus gerader und ungerader Funktion sich zu 0 ergibt. Wobei die Symmetrien bei Vertauschung der Eigenzeit $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$ und der Lorentzindizes $\mu \leftrightarrow \nu$ betrachtet werden.

$$\begin{aligned} & \left[\dot{G}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{G}_{B_{12}} k - [\dot{G}_{B_{11}} - \dot{G}_{B_{12}}]^{\mu\sigma} [\dot{G}_{B_{21}} - \dot{G}_{B_{22}}]^{\nu\tau} k_\sigma k_\tau \right] \\ (1) & \rightarrow (\dot{S}_{B_{12}}^{\mu\nu} + \dot{A}_{B_{12}}^{\mu\nu}) k (\dot{S}_{B_{12}} + \dot{A}_{B_{12}}) k \\ & = \dot{S}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{S}_{B_{12}} k + \dot{S}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{A}_{B_{12}} k + \dot{A}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{S}_{B_{12}} k + \dot{A}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{A}_{B_{12}} k = \dot{S}_{B_{12}}^{\mu\nu} k \dot{S}_{B_{12}} k \\ (2) & \rightarrow [\dot{S}_{B_{11}} + \dot{A}_{B_{11}} - \dot{S}_{B_{12}} - \dot{A}_{B_{12}}]^{\mu\sigma} [\dot{S}_{B_{21}} + \dot{A}_{B_{21}} - \dot{S}_{B_{22}} - \dot{A}_{B_{22}}]^{\nu\tau} k_\sigma k_\tau \\ & = -\dot{S}_{B_{12}}^{\mu\sigma} \dot{S}_{B_{21}}^{\nu\tau} + [\dot{A}_{B_{11}} - \dot{A}_{B_{12}}]^{\mu\sigma} [\dot{A}_{B_{21}} - \dot{A}_{B_{22}}]^{\nu\tau} k_\sigma k_\tau \\ & = \dot{S}_{B_{12}}^{\mu\sigma} \dot{S}_{B_{12}}^{\nu\tau} - [\dot{A}_{B_{12}} - \dot{A}_{B_{11}}]^{\mu\sigma} [\dot{A}_{B_{12}} - \dot{A}_{B_{22}}]^{\nu\tau} k_\sigma k_\tau \end{aligned}$$

Für die 2-Punkt Funktion folgt Gleichung (3.6), in der der Polarisationsensor mit Hilfe der Funktionen \dot{A} und \dot{S} beschrieben werden kann.

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \det \left[\frac{\sin eFT}{eFT} \right]^{-1/2} \iint_0^T d\tau_1 d\tau_2 \\ & e^{-k[\mathcal{S}_{B_{12}} - \mathcal{S}_{B_{11}}]k} \left[\dot{S}_{B_{12}}^{\mu\nu} \dot{S}_{B_{12}}^{\sigma\tau} - \dot{S}_{B_{12}}^{\mu\sigma} \dot{S}_{B_{12}}^{\nu\tau} + [\dot{A}_{B_{12}} - \dot{A}_{B_{11}}]^{\mu\sigma} [\dot{A}_{B_{12}} - \dot{A}_{B_{22}}]^{\nu\tau} \right] k_\sigma k_\tau \end{aligned} \quad (3.6)$$

Für ein konstantes Magnetfeld, das die Form aus Abschnitt 3.1 unter der Annahme von Kugelkoordinaten besitzt, ist es möglich den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ durch $B\Lambda^{\mu\nu}$ auszudrücken. Die Matrix $\Lambda^{\mu\nu}$ erfüllt dabei den Tensorcharakter von $F^{\mu\nu}$ und enthält die Information über die Lage des Feldes und ist demzufolge durch die Lagewinkel ϕ und θ bestimmt. Eine weitere wichtige Beziehung zur Berechnung des Polarisationsensors folgt aus dem Zusammenhang zwischen $F^{\mu\nu}$ und $\tilde{F}^{\mu\nu}$, die bei Summation zu $\Lambda^{\mu\nu} + \tilde{\Lambda}^{\mu\nu} = -1$ führen. Unter Ausnutzung dieser Beziehungen und ausgehend von Gleichung (3.6) ergibt

sich für den Tensoranteil dieser Gleichung der Ausdruck:

$$\begin{aligned}
& \left[\dot{S}_{B_{12}}^{\mu\nu} \dot{S}_{B_{12}}^{\sigma\tau} - \dot{S}_{B_{12}}^{\mu\sigma} \dot{S}_{B_{12}}^{\nu\tau} + [\dot{A}_{B_{12}} - \dot{A}_{B_{11}}]^{\mu\sigma} [\dot{A}_{B_{12}} - \dot{A}_{B_{22}}]^{\nu\tau} \right] k_\sigma k_\tau \\
&= \left\{ \frac{\sinh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} \right\}^2 (\Lambda^{2\mu\nu} k \Lambda^2 k - \Lambda^{2\mu} k \Lambda^{2\nu} k) + \dot{G}_{B_{12}}^2 (\tilde{\Lambda}^{2\mu\nu} k \tilde{\Lambda}^2 k - \tilde{\Lambda}^{2\mu} k \tilde{\Lambda}^{2\nu} k) \\
&+ \dot{G}_{B_{12}} \frac{\sinh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} (\tilde{\Lambda}^{2\mu\nu} k \Lambda^2 k - \tilde{\Lambda}^{2\mu} k \Lambda^{2\nu} k + \Lambda^{2\mu\nu} k \tilde{\Lambda}^2 k - \Lambda^{2\mu} k \tilde{\Lambda}^{2\nu} k) \\
&- \left\{ \frac{\cosh z \dot{G}_{B_{12}} - \cosh z}{\sinh z} \right\}^2 \Lambda^\mu k \Lambda^\nu k \\
&= \left\{ \left[\frac{\sinh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} \right]^2 - \left[\frac{\cosh z \dot{G}_{B_{12}} - \cosh z}{\sinh z} \right]^2 - \dot{G}_{B_{12}} \frac{\sinh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} \right\} (\Lambda^{2\mu\nu} k \Lambda^2 k - \Lambda^{2\mu} k \Lambda^{2\nu} k) \\
&+ \left\{ \dot{G}_{B_{12}}^2 - \dot{G}_{B_{12}} \frac{\sinh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} \right\} (\tilde{\Lambda}^{2\mu\nu} k \tilde{\Lambda}^2 k - \tilde{\Lambda}^{2\mu} k \tilde{\Lambda}^{2\nu} k) + \dot{G}_{B_{12}} \frac{\sinh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{\Lambda}^{2\mu\nu} k \Lambda^2 k - \tilde{\Lambda}^{2\mu} k \Lambda^{2\nu} k + \Lambda^{2\mu\nu} k \tilde{\Lambda}^2 k - \Lambda^{2\mu} k \tilde{\Lambda}^{2\nu} k \\
&= -\Lambda^{2\mu\nu} k \Lambda^2 k - g^{\mu\nu} k (\Lambda^2 + \tilde{\Lambda}^2) k - \tilde{\Lambda}^{2\mu\nu} k \tilde{\Lambda}^2 k + k^\mu (\Lambda^{2\nu} + \tilde{\Lambda}^{2\nu}) k + \tilde{\Lambda}^{2\mu} k \tilde{\Lambda}^{2\nu} k + \Lambda^{2\mu} k \Lambda^{2\nu} k \\
&= g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu - \left\{ \Lambda^{2\mu\nu} k \Lambda^2 k - \Lambda^{2\mu} k \Lambda^{2\nu} k + \tilde{\Lambda}^{2\mu\nu} k \tilde{\Lambda}^2 k - \tilde{\Lambda}^{2\mu} k \tilde{\Lambda}^{2\nu} k \right\}
\end{aligned}$$

Die resultierende Gleichung für die 2-Punkt Funktion ist damit nur noch abhängig von den Tensoren $I_{\dots}^{\mu\nu}$, die im Einzelnen eine vergleichbare Struktur zum Vakuumpolarisationstensor aufweisen.

- $I_{\Lambda}^{\mu\nu} = \Lambda^{2\mu\nu} k \Lambda^2 k - \Lambda^{2\mu} k \Lambda^{2\nu} k$
- $I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}^{2\mu\nu} k \tilde{\Lambda}^2 k - \tilde{\Lambda}^{2\mu} k \tilde{\Lambda}^{2\nu} k$
- $I_0^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu$

Mit Hilfe der analogen Substitutionen in der Eigenzeit, wie im Vakuumfall und $1-2t \rightarrow v$, folgt für die 2-Punkt Funktion Gleichung 3.7. Der Parameter z wird dabei durch eBT definiert und ist wie der Parameter v dimensionslos, das heißt $[z] = [v] = 1$. Die Dimension der 2-Punkt Funktion ist damit ausschließlich durch die Tensoren $I_{\dots}^{\mu\nu}$ festgelegt und für $D = 4 \rightarrow L^{-2}$ analog zur 2-Punkt Funktion im Vakuum. Verständlich wird diese Gleichheit der Dimension dadurch, dass das magnetische Feld exakt in die einzelnen Gleichungen einfließt, die sich nur durch einen dimensionslosen Exponentialfaktor von

denen des Vakuums unterscheiden.

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} = & (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi)^{D/2} T^{D/2-2}} \frac{z}{\sinh z} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} e^{-\frac{T}{2} \left\{ \frac{\cosh zv - \cosh z}{z \sinh z} \right\} k \Lambda^2 k - \frac{T}{4} (v^2 - 1) k \tilde{\Lambda}^2 k} \\ & \left(\left(\left[\frac{\sinh zv}{\sinh z} \right]^2 - \left[\frac{\cosh zv - \cosh z}{\sinh z} \right]^2 - v \frac{\sinh zv}{\sinh z} \right) I_\Lambda^{\mu\nu} + \left\{ v^2 - v \frac{\sinh zv}{\sinh z} \right\} I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu} + v \frac{\sinh zv}{\sinh z} I_0^{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jedoch kommt es auch in Gleichung (3.7) bei kleinen Werten für den Parameter T ($T \rightarrow 0$) zu einem divergenten Verhalten der Funktion, was wiederum eine Renormierung des Integrals und der damit verbundenen Einführung von Countertermen notwendig macht. Durch Taylorentwicklung des Integrationskernes um $T = 0$ lassen sich die jeweilig benötigten Terme bestimmen. Im Folgenden ist das resultierende Polynom 5. Grades der Entwicklung dargestellt:

$$\begin{aligned} I_{Kern}^{\mu\nu} = & \frac{1}{3} I_0^{\mu\nu} T^2 - \frac{k^2}{30} I_0^{\mu\nu} T^3 \\ & + \frac{1}{1260} \left[3k^4 I_0^{\mu\nu} - e^2 B^2 (196 I_\Lambda^{\mu\nu} - 28 I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu} + 98 I_0^{\mu\nu}) \right] T^4 \\ & - \frac{1}{7560} \left[k^6 I_0^{\mu\nu} + e^2 B^2 k \Lambda^2 k (240 I_\Lambda^{\mu\nu} - 24 I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu} + 78 I_0^{\mu\nu}) \right. \\ & \quad \left. + e^2 B^2 k \tilde{\Lambda}^2 k (240 I_\Lambda^{\mu\nu} - 24 I_{\tilde{\Lambda}}^{\mu\nu} + 66 I_0^{\mu\nu}) \right] T^5 \\ = & a^{\mu\nu} T^2 + b^{\mu\nu} T^3 + c^{\mu\nu} T^4 + d^{\mu\nu} T^5 \end{aligned}$$

Die ersten beiden Ordnungen ($a^{\mu\nu}, b^{\mu\nu}$) dieser Entwicklung entsprechen exakt denen des Vakuumfalls, was bedeutet, dass für kleine Parameter T die Dichte der 2-Punkt Funktion für konstante Felder mit der Funktion im Vakuum übereinstimmen muss und die Wirkung des Feldes erst für große Parameter T zu bemerken ist. Diese Tatsache ist eine wichtige Erkenntnis, da im Fall von räumlich inhomogenen Feldern die Wirkung der Inhomogenität erst ab der Ordnung T^5 auftreten sollte und man für die numerische Berechnung in diesem Fall die Kenntnis der kleineren Ordnungen voraussetzen kann. Vor allem die wichtige T^4 -Ordnung, an der die Kalibrierung der Routine vorgenommen wird, sollte somit identisch zu der im konstantem Magnetfeld sein.

3.1.2. Numerische Berechnung von $\Pi^{\mu\nu}$ mit konstantem Magnetfeld B

Bei der numerischen Berechnung von $\Pi^{\mu\nu}$ für konstante Felder kann ausgenutzt werden, dass die 2-Punkt Funktion bis auf einen exponentiellen Faktor mit dem Vakuum übereinstimmt. Der Algorithmus vor allem bei der Erfüllung der Ward-Identität kann vollständig vom Vakuum übernommen und muss lediglich um den zusätzlichen exponentiellen Anteil ergänzt werden. Die Ausgangsgleichung bildet somit Gleichung (2.13) die

im Folgenden für die Behandlung konstanter Felder angepasst wird:

$$\Pi^{\mu\nu} = (-ie)^2 \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \left\langle \int_0^T \int_0^T d\tau_1 d\tau_2 [k^2 \dot{x}_{\tau_1}^\mu - k^\mu [k \dot{x}_{\tau_1}]] e^{ikx_{\tau_1}} [k^2 \dot{x}_{\tau_2}^\mu - k^\nu [k \dot{x}_{\tau_2}]] e^{-ikx_{\tau_2}} e^{-i\frac{1}{2}e \int_0^T d\tau x_\mu F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu} \right\rangle \quad (3.8)$$

Für den Algorithmus des konstanten Magnetfeldes muss zunächst zur Berechnung des Integrationskernes und des zusätzlichen exponentiellen Faktors eine Methode zur Behandlung von Tensorgleichungen entwickelt werden, die eine numerische Bestimmung des Produktes $x_\mu F^{\mu\nu} \dot{x}_\nu$ ermöglicht. Im Weiteren ist eine zusätzliche Anpassung der Counterterme in den Ordnungen T^4 und T^5 nötig, da bei diesen ein Einfluss des magnetischen Feldes besteht. Vor allem der T^4 - Term sollte dabei berücksichtigt werden, da mit dessen Hilfe die Stabilisierung der numerischen Nonlinear-Least-Square Methode durchgeführt wird. Für den Integrationskern $I_{Kern}^{\mu\nu}$ mit einem konstanten Feld B ergibt sich damit im Rahmen der Weltliniennumerik Gleichung (3.9).

$$I_{Kern}^{\mu\nu} = T \left\langle \sum_{m,n=1}^N I_{Vakuumnm}^{\mu\nu} e^{-\frac{i}{2}eBT \sum_{k=1}^N y_{\mu,k} \Lambda^{\mu\nu} (y_{\nu,k} - y_{\nu,k-1})} \right\rangle \quad (3.9)$$

$$I_{Vakuumnm}^{\mu\nu} = [k^2 y_m^\mu - k^\mu [ky_m]] \left\{ e^{ik\sqrt{T}y_m} - e^{ik\sqrt{T}y_{m+1}} \right\} [k^2 y_n^\mu - k^\mu [ky_n]] \left\{ e^{-ik\sqrt{T}y_n} - e^{-ik\sqrt{T}y_{n+1}} \right\}$$

3.2. Ergebnisse der numerischen Simulation für konstante Magnetfelder B

Im ersten Teil der numerischen Simulation wurde die Dichte der 2-Punkt Funktion untersucht, da diese am schnellsten Aufschluss darüber geben kann, wie sich der numerische Algorithmus verhalten wird, und ob eine Berechnung mit den verwendeten Methoden sinnvoll ist. Hierzu ist der Polarisationsensor für den euklidischen Impulsvektor $k = (0, 1, 0, 1)^T$ und verschiedene Feldstärken eB berechnet und mit den analytischen Werten verglichen worden. In Abbildung 3.1 ist das Verhalten der 22-Komponente exemplarisch dargestellt, wobei der Massenterm mit $m = 1.0$ gewählt wurde. Es ist anhand der Dichte zu erkennen, dass mit zunehmender Feldstärke eB die 2-Punkt Funktion anwächst und für einen bestimmten Wert dieses Parameters einen Nulldurchgang besitzt. In Abbildung 3.1 ist die Dichte des Polarisationsensors für verschiedene Feldstärken dargestellt. Eine anschließende Integration über T liefert ein Ergebnis für die 2-Punkt Funktion, das in der nachfolgenden Tabelle 3.1 zu finden ist. In der Nähe des null-Durchgangs der Funktion kommt es aufgrund der Tatsache, dass bei der Integration die Differenz zweier Flächen betrachtet wird, zu einer Vergrößerung des Fehlers der numerischen Ergebnisse. Die Lage dieses Durchgangs hängt dabei von der Wahl des Vektors k ab. Für $k = (0, 0.1, 0, 0.1)^T$ liegt der kritische Bereich der numerische Analyse bei Feldstärken zwischen $eB = 0$ und $eB = 0.1$ und damit bei kleineren Werten eB als bei dem zuerst gewählten Vektor, was bei der Wahl der jeweiligen Parameter berücksichtigt werden muss,

3. Konstantes Magnetfeld B

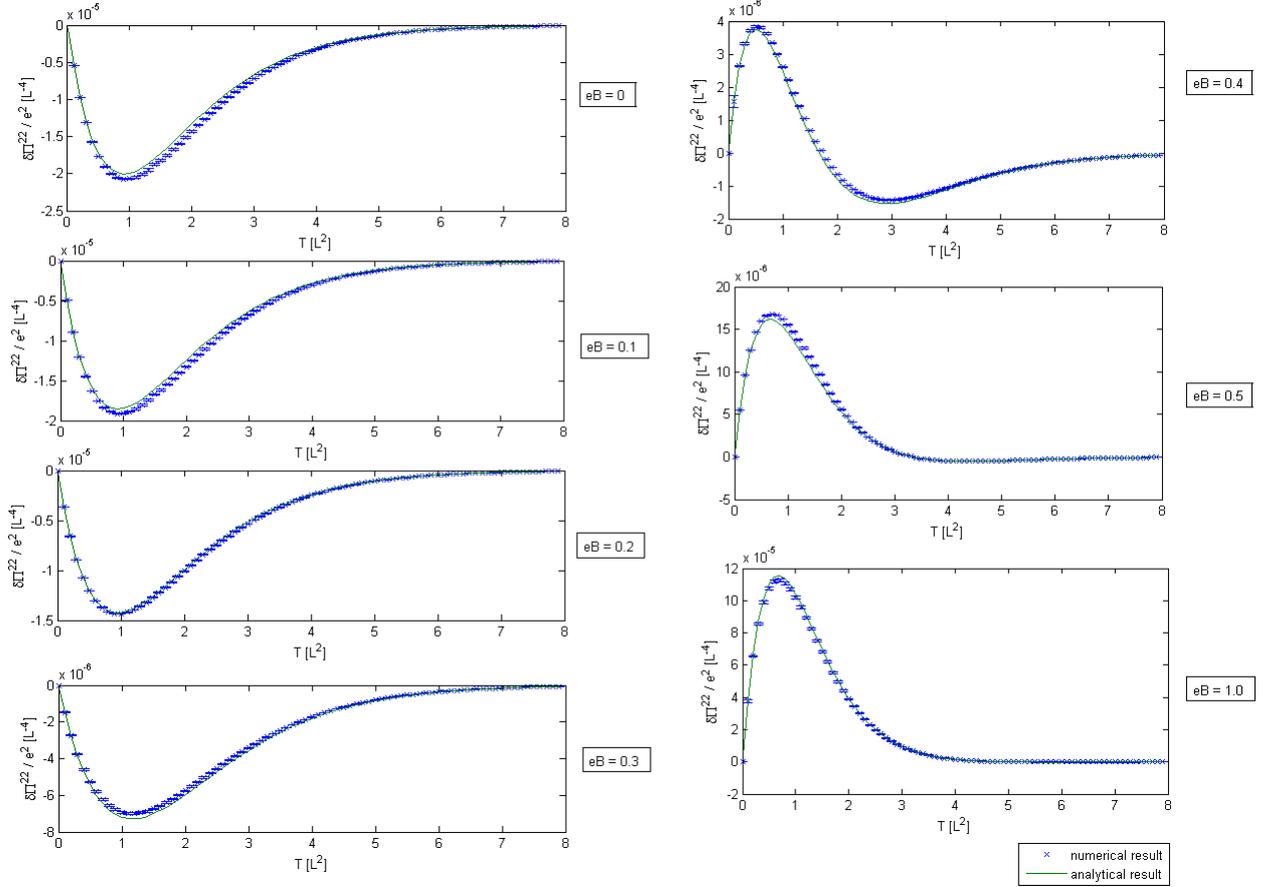


Abbildung 3.1.: Die Dichte der 22-Komponente $\delta\Pi^{22}/e^2$ für verschiedene Feldstärken eB . Man erkennt, dass mit zunehmender Feldstärke die Fläche unter der Kurve einen Null-Durchgang besitzt, was einen kritischen Bereich für die Integration darstellt.

um zu große numerische Fehler zu vermeiden. Anzumerken ist an dieser noch, dass mit der Wahl des Masseterms $m = 1.0$, die kritische Feldstärke den Wert $eB_{cr} = m^2 = 1.0$ annimmt. Die Zuverlässigkeit der einzelnen Ergebnisse wird demzufolge von mehreren Faktoren bestimmt und kann nicht pauschal auf die Größe des verwendeten statistischen Ensembles bezogen werden. Vielmehr ist eine Bewertung der Resultate über die Kenntnis der Taylorentwicklung des Integrationskernes möglich, das heißt, je weiter diese vom analytisch zu erwartenden Wert abweichen, desto schlechter ist das numerische Resultat. Desweiteren kann es für große Werte T zu Schwankungen des statistischen Fehlers kommen, da in diesem Bereich der zusätzliche exponentielle Faktor des Feldes die Vakuumlösung zu kleineren Werten verschiebt, die Streuung der Ergebnisse und damit der Fehler jedoch gleich bleibt.

Ein weiterer interessanter Einflussfaktor ist die Wirkung der Feldausrichtung auf die 2-Punkt Funktion. Dazu wird als erstes der vollständige Tensor $\Pi^{\mu\nu}/e^2$ für einen bestimm-

3. Konstantes Magnetfeld B

| eB | $\frac{\Pi^{22}}{e^2} _{ana}$ | $\frac{\Pi^{22}}{e^2} _{num}$ |
|------|-------------------------------|---|
| 0 | $-4.972 \cdot 10^{-5}$ | $-5.241 \cdot 10^{-5} \pm 2.38 \cdot 10^{-6}$ (~ 4.0 %) |
| 0.1 | $-4.642 \cdot 10^{-5}$ | $-4.865 \cdot 10^{-5} \pm 2.21 \cdot 10^{-6}$ (~ 4.5 %) |
| 0.2 | $-3.676 \cdot 10^{-5}$ | $-3.725 \cdot 10^{-5} \pm 1.76 \cdot 10^{-6}$ (~ 4.7 %) |
| 0.3 | $-2.130 \cdot 10^{-5}$ | $-2.056 \cdot 10^{-5} \pm 1.15 \cdot 10^{-6}$ (~ 5.6 %) |
| 0.4 | $-8.126 \cdot 10^{-7}$ | $-2.766 \cdot 10^{-7} \pm 5.48 \cdot 10^{-7}$ (~ 198.1 %) |
| 0.5 | $2.390 \cdot 10^{-5}$ | $2.523 \cdot 10^{-5} \pm 1.21 \cdot 10^{-6}$ (~ 4.8 %) |
| 1.0 | $1.874 \cdot 10^{-4}$ | $1.845 \cdot 10^{-4} \pm 5.48 \cdot 10^{-6}$ (~ 3.0 %) |

Tabelle 3.1.: 22-Komponente des Polarisationsensors für verschiedene Feldstärken.

ten Massenterm $m = 1.0$ und dem Vektor $k = (0, 0.1, 0, 0.1)^T$ bei einem statistischen Ensemble von 40000 Loops mit jeweils 1000 Stützstellen berechnet. Für die Felddausrichtung $(\phi, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$ ergibt sich somit für den Polarisationsensor :

$$\begin{pmatrix} 5.59 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.15 \cdot 10^{-6} & 0 & -3.15 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0 & 1.09 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & -3.15 \cdot 10^{-6} & 0 & 3.15 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{numerische Simulation} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5.33 \cdot 10^{-6} \pm 2.48 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.08 \cdot 10^{-6} \pm 1.34 \cdot 10^{-7} & 0 & -3.08 \cdot 10^{-6} \pm 1.34 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 0 & 1.08 \cdot 10^{-5} \pm 3.94 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0 & -3.08 \cdot 10^{-6} \pm 1.34 \cdot 10^{-7} & 0 & 3.08 \cdot 10^{-6} \pm 1.34 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}$$

Dabei wurde der numerische Algorithmus nur für Komponenten angewendet, bei denen das analytische Ergebnis ungleich null ist. Für die Felddausrichtungen $(\phi, \theta) = (0, 0)$ und $(\phi, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ergeben sich, bei gleichbleibenden Parametern:

$$(\phi, \theta) = (0, 0) : \begin{pmatrix} 1.09 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.15 \cdot 10^{-6} & 0 & -3.15 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0 & 5.59 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & -3.15 \cdot 10^{-6} & 0 & 3.15 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{numerische Simulation} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1.07 \cdot 10^{-5} \pm 4.03 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.05 \cdot 10^{-6} \pm 1.39 \cdot 10^{-7} & 0 & -3.05 \cdot 10^{-6} \pm 1.39 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 0 & 5.59 \cdot 10^{-6} \pm 2.45 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0 & -3.05 \cdot 10^{-6} \pm 1.39 \cdot 10^{-7} & 0 & 3.05 \cdot 10^{-6} \pm 1.39 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}$$

$$(\phi, \theta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \begin{pmatrix} 6.30 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.44 \cdot 10^{-6} & 0 & -2.44 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0 & 6.30 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & -2.44 \cdot 10^{-6} & 0 & 2.44 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{numerische Simulation} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 6.30 \cdot 10^{-6} \pm 2.92 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.42 \cdot 10^{-6} \pm 1.12 \cdot 10^{-7} & 0 & -2.42 \cdot 10^{-6} \pm 1.12 \cdot 10^{-7} \\ 0 & 0 & 6.13 \cdot 10^{-6} \pm 2.66 \cdot 10^{-7} & 0 \\ 0 & -2.42 \cdot 10^{-6} \pm 1.12 \cdot 10^{-7} & 0 & 2.42 \cdot 10^{-6} \pm 1.12 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}$$

In Tabelle 3.2 ist die Feldausrichtung, die durch die Winkel ϕ und θ bestimmt wird, in

| Feldausrichtung | Orientierung in kartesischen Koordinaten |
|----------------------------------|--|
| $(0, 0)$ | x^3 - Richtung |
| $(0, \frac{\pi}{2})$ | x^1 - Richtung |
| $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ | x^2 - Richtung |

Tabelle 3.2.: Feldausrichtung im kartesischen Koordinatensystem.

kartesischen Koordinatensystem dargestellt. Um in den nachfolgenden Simulationen die Zahl der Einflussparameter zu verringern, ist die Feldausrichtung mit $(\phi, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$ festgelegt, was aber im Rahmen des Programms durch Anpassung von Λ jederzeit verändert werden kann. Anhand der einzelnen Matrizen ist zu erkennen, dass auch in diesem Fall die geforderte Ward-Identität numerisch exakt erfüllt wird. Eine Bestimmung der einzelnen Tensorkomponenten unter Voraussetzung der Kenntnis der analytischen Lösungen, kann ebenfalls Aufschluss über die Stabilität des numerischen Algorithmus liefern, da zur Simulation und Berechnung des Pfadintegrals ein 4-dimensionales statistisches Ensemble erzeugt werden muss, auf das in Abhängigkeit von der berechneten Komponente unterschiedlich zugegriffen wird. Die heißt es werden jeweils unterschiedliche Dimensionen des Ensembles zur Simulation verwendet, was zu einer Schwankung der numerischen Resultate führen kann, wie es zum Beispiel bei der Berechnung der 11- und 33-Komponente für $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in dem obigen Tensor zu sehen ist.

3.3. Die Phasengeschwindigkeit im konstanten magnetischen Feld

Die Untersuchungen in den vorangegangenen Kapiteln haben gezeigt, dass eine Behandlung von $\Pi^{\mu\nu}$ im Rahmen der Weltliniennumerik möglich ist. Außerdem sind die Grenzen des Algorithmus bei der Wahl einzelner Parameter offengelegt worden. Sowohl im Fall des Vakuums als auch unter Berücksichtigung konstanter Felder konnte gezeigt werden, dass die numerischen Resultate unter bestimmten Umständen sehr gut mit den analytischen Werten korrelieren. Jedoch eignet sich keines der bisher bestimmten Ergebnisse dazu, physikalische Phänomene zu untersuchen. Ziel der in Abschnitt 1.1 beschriebenen Experimente ist es, das Phänomen der Vakuumdoppelbrechung nachzuweisen. Als einfallendes Teilchen wird dabei ein Photon betrachtet das durch einen Impulsvektor k beschrieben wird. Im Nachfolgenden soll mit Hilfe der numerischen Simulation, das Phänomen der Vakuumdoppelbrechung in konstanten Magnetfeld anhand der Phasengeschwindigkeit untersucht werden.

3.3.1. Analytische Berechnung der Phasengeschwindigkeit

Bei Betrachtung der Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle im Raum werden im Allgemeinen zwei Arten der Geschwindigkeit unterschieden. Zum einen die Phasengeschwindigkeit, die über

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{\mathbf{k}}$$

bestimmt wird und von der Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ sowie der Wellenzahl $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}$ der elektromagnetischen Wellen abhängt und zum anderen die Gruppengeschwindigkeit v_{gr} . Auf welche Weise und vor allem in welchem Medium sich Wellen ausbreiten ist in der Dispersionsrelation $\omega(k)$ enthalten und liefert einen Zusammenhang zwischen v_{ph} und v_{gr} . Im Fall des Vakuums spricht man, in der klassischen Physik, von einem dispersionsfreien Medium, in dem beide Geschwindigkeiten den gleichen Wert annehmen ($v_{\text{ph}} = v_{\text{gr}}$). Bei der Wellenausbreitung in Medien unterscheiden sich diese beiden Geschwindigkeiten im Allgemeinen. Im Folgenden wird als Beispiel die Dispersionsrelation eines freien Teilchens betrachtet, woraus der Zusammenhang $2v_{\text{ph}} = v_{\text{gr}}$ folgt. Der Unterschied zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit führt nun zum zerfließen des betrachteten Wellenpakets.

$$\begin{aligned} \text{freies Teilchen: } \omega(\mathbf{k}) &= \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} \rightarrow v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}}{2m} & v_{\text{gr}} &= \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}}{m} \rightarrow \left| \frac{d^2\omega}{d\mathbf{k}^2} \right| = \frac{\hbar^2}{m} \\ \text{Vakuum: } \omega(\mathbf{k}) &= \hbar \mathbf{k} \rightarrow v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{\mathbf{k}} = \hbar & v_{\text{gr}} &= \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \hbar \rightarrow \left| \frac{d^2\omega}{d\mathbf{k}^2} \right| = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der 2-Punkt Funktion ist es möglich eine Aussage über das Verhalten der Phasengeschwindigkeit des in dieser Gleichung betrachtete Wechselwirkungsteilchens (Photon) zu treffen. Es kann dabei sowohl im Rahmen der Wellenoptik als auch mit der Korpuskulartheorie beschrieben werden und bewegt sich mit $v_{\text{gr}} = c$ fort. Innerhalb der speziellen Relativitätstheorie wird eine Objekt mit einer Geschwindigkeit, die gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, als lichtartig (oder auch nullartig) bezeichnet. Werden nun zwei Ereignisse innerhalb des Raumes betrachtet, die lichtartig auseinander liegen, so ergibt sich für das Linienelement $(ds)^2 = 0$ oder im Impulsraum $k^2 = 0$. Diese Bedingung für lichtartige Teilchen zeigt, warum die bisherigen Ergebnisse nicht dazu geeignet waren physikalische Phänomene zu untersuchen, da alle bisherigen Betrachtungen ausschließlich mit euklidischen Parametern vorgenommen worden sind. Im euklidischen Raum ist das Skalarprodukt eines Vektors über $k^2 = g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu$ ³ definiert und kann nur den Wert null annehmen, wenn es sich bei dem Vektor um den Nullvektor handelt. Die Lösung dieses Problems besteht darin den Vektor k als minkowskiwertige Größe in der Simulation zu behandeln. Zur analytische Berechnung des Problems wird, wie schon im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, eine Felddausrichtung von $(\phi, \theta) = (0, \frac{\pi}{2})$, dass heißt in x_1 -Richtung, angenommen. In [27] wurden die analogen Berechnungen für spinorwertige Felder in x_3 -

³ $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$: Metrik im euklidischen Raum.

Richtung durchgeführt, worauf an dieser Stelle jedoch vorerst verzichtet wird. Ausgehend von Gleichung (3.7) und den nachfolgenden Funktionen, ist zu erkennen, dass eine Anwendung von Λ und $\tilde{\Lambda}$ auf den Impulsvektor k diesen auf Komponenten parallel und senkrecht zum betrachteten Feld projizieren.

$$\begin{aligned} k &= (k_1, k_2, k_3, k_4) \rightarrow k^2 = k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2 \\ k_{\mu} F^{\mu\nu} k_{\nu} &= 0 \quad k_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} k_{\nu} = 0 \\ k_{\perp}^{\mu} &= \Lambda^{\mu\nu} k_{\nu} = (0, -k_3, k_2, 0) \rightarrow v_{\perp}^{\mu} \equiv k_{\perp}^{\mu} \\ k_{\parallel}^{\mu} &= \tilde{\Lambda}^{\mu\nu} k_{\nu} = (k_4, 0, 0, -k_1) \rightarrow v_{\parallel}^{\mu} \equiv k_{\parallel}^{\mu} \end{aligned}$$

Mit den daraus resultierenden Vektoren ist es nun möglich, ähnlich wie schon im Vakuumfall verschiedene Projektionsoperatoren zu definieren, was in [27] explizit durchgeführt worden ist und deren Richtigkeit mit den zugehörigen Eigenschaften überprüft werden kann. Innerhalb der Quantentheorie oder Quantenfeldtheorie werden einzelnen physikalischen Größen Observablen zugeordnet, die eine Eigenwertgleichung der Form $\hat{A}\Psi = a\Psi$ erfüllen. Ein solches Eigenwertproblem muss zur Bestimmung der Phasengeschwindigkeit v_{ph} gelöst werden. Die dabei zu betrachtende Matrix ergibt sich, ausgehend von der effektiven Lagrangedichte \mathcal{L}_{eff} , die auf den Heisenberg-Euler-Lagrangian zurückgeht, zu: $[k^2 g^{\mu\nu} - k^{\mu} k^{\nu} + \Pi^{\mu\nu}]$ und schließlich auf Gleichung (3.10). Das Eichfeld besteht dabei aus einem konstanten Anteil A_{μ} und einem Anteil $f_{\mu\nu}$, der sich mit Hilfe von ebenen Wellen beschreiben lässt.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}(x) &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} \int d^4\tilde{x} A_{\mu}(x) \Pi^{\mu\nu} A_{\nu}(\tilde{x}) \\ &\rightarrow A_{\mu}(x) = A_{\mu} + f_{\mu\nu}(x, k) a^{\nu}(k) \rightarrow f_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} e^{ikx} \\ &\Rightarrow [k^2 g^{\mu\nu} - k^{\mu} k^{\nu} + \Pi^{\mu\nu}] a_{\nu} = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Zum besseren Verständnis der einzelnen Gleichungen, ist die Betrachtung eines identischen Problems in der klassischen Mechanik vorteilhaft. Darin wird ein klassisches physikalisches System im Rahmen des Lagrangeformalismus mit Hilfe einer Lagrangefunktion L , die von verschiedenen Parametern des Systems abhängen kann, beschrieben. Die Bewegungsgleichungen für das System folgen direkt durch Anwendung der Lagrangegleichungen auf diese Funktion und führen zu einer analogen Darstellung wie in (3.10). Auch innerhalb der Quantenfeldtheorie steht am Anfang einer Betrachtung innerhalb des Pfadintegralformalismus eine Lagrangefunktion, welche die Eigenschaften des Systems (Spin, Wechselwirkungen, u.s.w.) enthält. Für die Projektoren $P^{\mu\nu}$, die zur Lösung des Eigenwertproblems notwendig sind, gilt nach [27]: $k^2(P_0^{\mu\nu} + P_{\perp}^{\mu\nu} + P_{\parallel}^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} k^2 - k^{\mu} k^{\nu}$ und für die 2-Punkt Funktion: $\Pi^{\mu\nu} = \Pi_0 P_0^{\mu\nu} + \Pi_{\perp} P_{\perp}^{\mu\nu} + \Pi_{\parallel} P_{\parallel}^{\mu\nu}$, womit sich dieses schreiben

lässt als:

$$\begin{aligned} [k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu + \Pi^{\mu\nu}] a_\nu &= 0 \\ [k^2 (P_0^{\mu\nu} + P_\perp^{\mu\nu} + P_\parallel^{\mu\nu}) + \Pi_0 P_0^{\mu\nu} + \Pi_\perp P_\perp^{\mu\nu} + \Pi_\parallel P_\parallel^{\mu\nu}] a_\nu &= 0 \\ [k^2 + \Pi_0] P_0^{\mu\nu} a_\nu + [k^2 + \Pi_\parallel] P_\parallel^{\mu\nu} a_\nu + [k^2 + \Pi_\perp] P_\perp^{\mu\nu} a_\nu &= 0 \end{aligned}$$

mit den beiden Projektoren:

$$P_\perp^{\mu\nu} = \frac{k_\perp^\mu k_\perp^\nu}{k_\perp^2} \quad P_\parallel^{\mu\nu} = \frac{k_\parallel^\mu k_\parallel^\nu}{k_\parallel^2} \quad (3.11)$$

mit denen bei Anwendung auf $\Pi^{\mu\nu}$, die Gleichungen (3.12) und (3.13) folgen, die zur späteren Bestimmung der Phasengeschwindigkeit benötigt werden.

$$\begin{aligned} \Pi_\perp &= \frac{1}{k_\perp^2} k_\perp^\mu \Pi_{\mu\nu} k_\perp^\nu \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{T^2} \widehat{k}_\perp^\mu I_{\mu\nu} \widehat{k}_\perp^\nu \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \widehat{k}_\perp^\mu I_{\mu\nu} \widehat{k}_\perp^\nu &= T^2 \frac{z}{\sinh z} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \left\{ \left[\left(\frac{\sinh zv}{\sinh z} \right)^2 - \left(\frac{\cosh zv - \cosh z}{\sinh z} \right)^2 \right] k_\perp^2 + v \frac{\sinh zv}{\sinh z} k_\parallel^2 \right\} e^{-\phi_0 T} \\ &\quad - \left[\frac{1}{3} - \frac{k^2 T}{30} \right] k^2 T^2 \end{aligned}$$

- $I_\Lambda^{\mu\nu} = g_\perp^{\mu\nu} k_\perp^2 - k_\perp^\mu k_\perp^\nu \quad \rightarrow \quad \widehat{k}_\perp^\mu I_{\mu\nu}^{B_1} \widehat{k}_\perp^\nu = k_2^2 + k_3^2 = k_\perp^2$
- $I_\Lambda^{\mu\nu} = g_\parallel^{\mu\nu} k_\parallel^2 - k_\parallel^\mu k_\parallel^\nu \quad \rightarrow \quad \widehat{k}_\perp^\mu I_{\mu\nu}^{B_2} \widehat{k}_\perp^\nu = 0$
- $I_0^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu \quad \rightarrow \quad \widehat{k}_\perp^\mu [g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu] \widehat{k}_\perp^\nu = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = k^2$
- $\phi_0 = -\frac{1}{2} \frac{\cosh zv - \cosh z}{z \sinh z} k_\perp^2 - \frac{1}{4} (v^2 - 1) k_\parallel^2$

$$\begin{aligned} \Pi_\parallel &= \frac{1}{k_\parallel^2} k_\parallel^\mu \Pi_{\mu\nu} k_\parallel^\nu \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{T^2} \widehat{k}_\parallel^\mu I_{\mu\nu} \widehat{k}_\parallel^\nu \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\widehat{k}_\parallel^\mu I_{\mu\nu} \widehat{k}_\parallel^\nu = T^2 \frac{z}{\sinh z} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \left\{ v \frac{\sinh zv}{\sinh z} k_\perp^2 + v^2 k_\parallel^2 \right\} e^{-\phi_0 T} - \left[\frac{1}{3} - \frac{k^2 T}{30} \right] k^2 T^2$$

- $I_\Lambda^{\mu\nu} = g_\perp^{\mu\nu} k_\perp^2 - k_\perp^\mu k_\perp^\nu \quad \rightarrow \quad \widehat{k}_\parallel^\mu I_{\mu\nu}^{B_1} \widehat{k}_\parallel^\nu = 0$

- $I_{\Lambda}^{\mu\nu} = g_{\parallel}^{\mu\nu} k_{\parallel}^2 - k_{\parallel}^{\mu} k_{\parallel}^{\nu} \rightarrow \widehat{k}_{\parallel}^{\mu} I_{\mu\nu}^{B_2} \widehat{k}_{\parallel}^{\nu} = k_1^2 + k_4^2 = k_{\parallel}^2$
- $I_0^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} k^2 - k^{\mu} k^{\nu} \rightarrow \widehat{k}_{\parallel}^{\mu} [g^{\mu\nu} k^2 - k^{\mu} k^{\nu}] \widehat{k}_{\parallel}^{\nu} = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = k^2$

Physikalisch entsprechen die ersten beiden Polarisationszustände parallel und senkrecht zum betrachteten Feld einer typischen Zerlegung von Wellen in der klassischen Physik. Eine Anwendung findet sich unter anderem bei der Untersuchung von Doppelbrechung im Calcit, in der die Polarisation jedoch relativ zur optischen Achse des Kristalls betrachtet wird. Der dritte Polarisationszustand, der durch Anwendung von $P_0^{\mu\nu}$ erzeugt wird, ist jedoch ein rein quantenmechanisches Phänomen. Dieses hat vorerst aber keinen Einfluss auf die einzelnen Ergebnisse, da die Eigenwertgleichung $[k^2 + \Pi_0] P_0^{\mu\nu} a_{\nu} = 0$ mit Hilfe des Nullvektors gelöst werden kann. Die Lösung der Bewegungsgleichung liegt nun in einer Ebene, die durch die Vektoren k_{\perp} und k_{\parallel} aufgespannt wird, was auch gleichbedeutend mit der Aussage ist, dass diese beiden Vektoren Eigenvektoren zu den Eigenwerten Π_{\perp} und Π_{\parallel} darstellen. Für die Phasengeschwindigkeit im Vakuum ergibt sich nach Entwicklung um $\frac{\Pi_{\perp/\parallel}}{k^2}$:

$$\begin{aligned}
 k^2 + \Pi_{\perp/\parallel} &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + \Pi_{\perp/\parallel} = 0 \\
 \rightarrow -k_4^2 &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \Pi_{\perp/\parallel} = \mathbf{k}^2 + \Pi_{\perp/\parallel} \\
 \rightarrow \frac{(ik_4)^2}{\mathbf{k}^2} &= 1 + \frac{\Pi_{\perp/\parallel}}{\mathbf{k}^2} = 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{T^2} \frac{\widehat{k}_{\perp/\parallel}^{\mu} I_{\mu\nu} \widehat{k}_{\perp/\parallel}^{\nu}}{\mathbf{k}^2} \\
 \rightarrow v_{\text{ph}} &= \sqrt{1 + \frac{\Pi_{\perp/\parallel}}{\mathbf{k}^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Pi_{\perp/\parallel}}{\mathbf{k}^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\Pi_{\perp/\parallel}^2}{\mathbf{k}^4}\right)
 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle der Lösung wird der Grenzfall $B_{\text{cr}} = \frac{m^2}{e} \gg B$ betrachtet, der sich auf analoge Weise wie in [27] für schwache Magnetfelder B berechnen lässt. Innerhalb der Gleichungen beschreibt $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ die Feinstrukturkonstante und θ den Winkel zwischen Magnetfeld und dem einfallendem Photon (vgl. PVLAS - Experiment), welches durch den 4-dimensionalen Vektor k beschrieben wird⁴. Innerhalb des numerischen Algorithmus wird die Frequenz ω durch die k_4 - Komponente getragen.

3.3.2. Bestimmung des Grenzfalls schwacher Felder

Ausgehend von Gleichung (3.13) wird der Limes schwacher Felder durch Vernachlässigung aller Terme der Ordnung k^2 und einer Entwicklung um $eB = 0$ bestimmt. Aufgrund der Forderung, dass der Vektor k auf dem Lichtkegel liegen soll, muss für dessen Skalarprodukt mit sich selbst gelten $k^2 \simeq 0$. Dies kann innerhalb der Simulation nur durch Annahme einer komplexwertigen (rein imaginären) k_4 -Komponente erfüllt werden. Das

⁴ $k = (\mathbf{k}, \omega) = (k_1, k_2, k_3, \omega)$

bedeutet, dass der Vektor k des einfallenden Photons als minkowskiwertige Größe behandelt werden muss. Für die parallel- und senkrecht-Komponente der 2-Punkt Funktion ergeben sich demnach die Gleichungen (3.14) und (3.15).

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\parallel} &\sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \frac{z}{\sinh z} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \left\{ v \frac{\sinh zv}{\sinh z} - v^2 \right\} k_{\perp}^2 e^{\frac{Tk_{\perp}^2}{2} \left\{ \frac{\cosh zv - \cosh z}{z \sinh z} \right\} - \frac{Tk_{\perp}^2}{4} (v^2 - 1)} \\
 &\approx -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \left\{ \frac{1}{6} v^2 (v^2 - 1) z^2 k_{\perp}^2 \right\} e^{\frac{T^3}{48} (v^2 - 1)^2 (eB)^2 k_{\perp}^2} \\
 &\approx -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \left\{ \frac{1}{6} v^2 (v^2 - 1) z^2 k_{\perp}^2 \right\} = \frac{1}{45} \frac{e^4 B^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} dT T e^{-m^2 T} k_{\perp}^2 \\
 &= \frac{1}{45} \frac{e^4 B^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2)}{m^4} k_{\perp}^2 = \frac{1}{45} \frac{e^4 B^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{m^4} k_{\perp}^2 = \frac{1}{45} \frac{e^4 B^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{m^4} \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\perp} &\sim -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \times \\
 &\quad \frac{z}{\sinh z} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \left\{ \left(\frac{\sinh zv}{\sinh z} \right)^2 - \left(\frac{\cosh zv - \cosh z}{\sinh z} \right)^2 - v \frac{\sinh zv}{\sinh z} \right\} k_{\perp}^2 e^{-\phi_0 T} \\
 &\approx \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \left\{ \frac{1}{12} (v^2 - 1)(v^2 - 3) z^2 k_{\perp}^2 \right\} e^{\frac{T^3}{48} (v^2 - 1)^2 (eB)^2 k_{\perp}^2} \\
 &\approx \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{-1}^1 \frac{dv}{2} \left\{ \frac{1}{12} (v^2 - 1)(v^2 - 3) z^2 k_{\perp}^2 \right\} = \frac{7}{45} \frac{e^4 B^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} dT T e^{-m^2 T} k_{\perp}^2 \\
 &= \frac{7}{45} \frac{e^4 B^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2)}{m^4} k_{\perp}^2 = \frac{7}{45} \frac{e^4 B^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{m^4} k_{\perp}^2 = \frac{7}{45} \frac{e^4 B^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{m^4} \mathbf{k}^2 \sin^2 \theta \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Für den parallelen Fall sollte somit die Lösung der Simulation ausgehend von Gleichung (3.14) gegen einen Wert von $\frac{1}{90}$ konvergieren, was im Folgenden dargestellt ist:

$$\begin{aligned}
 v_{\parallel} &\approx 1 - \frac{1}{90} \frac{\alpha^2 B^2}{m^4} \sin^2 \theta \approx 1 - \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T} \widehat{k}_{\parallel}^{\mu} I_{\mu\nu} \widehat{k}_{\parallel}^{\nu}}{T^2 \mathbf{k}^2} \quad (m^2 \rightarrow \infty) \\
 &\rightarrow \frac{1}{90} \approx \frac{m^4}{\alpha^2 B^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T} \widehat{k}_{\parallel}^{\mu} I_{\mu\nu} \widehat{k}_{\parallel}^{\nu}}{T^2 \mathbf{k}^2} = \frac{m^4}{e^2 B^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \int_0^{\infty} \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T} \widehat{k}_{\parallel}^{\mu} I_{\mu\nu} \widehat{k}_{\parallel}^{\nu}}{T^2 \mathbf{k}^2}
 \end{aligned}$$

Wohingegen im senkrechten Fall bei Betrachtung der selbe Näherung die Lösung gegen den Wert von $\frac{7}{90}$ konvergiert.

3.3.3. Numerische Berechnung der Phasengeschwindigkeit

Bei der numerischen Berechnung der Phasengeschwindigkeit v_{ph} wird der Impulsvektor k des Photons als Minkowskiwertige Größe in die Simulation eingebracht, wodurch es zu einem zusätzlichen numerischen Fehler, zu dem schon bestehenden aus den vorherigen Simulationen mit euklidischen Parametern, kommt, der nur mit der Verwendung eines größeren statistischen Ensembles verringert werden kann. Der zusätzliche numerische Fehler liegt darin begründet, dass durch einzelne komplexwertige Parameter die Exponentialfunktionen kein typisches konvergentes Verhalten mehr aufweisen, sondern einen zusätzlichen oszillierenden Charakter besitzen, der zu einer erhöhten Streuung der Messwerte führt. Dieses Verhalten der einzelnen Messwerte kann nur mit einer erhöhten Anzahl von Weltlinien in den Griff bekommen werden. Es ist möglich diesen zusätzlichen numerischen Fehler mit Hilfe des Jackknife-Algorithmus zu bestimmen, jedoch würde eine Fehlerrechnung nach dem exakten Algorithmus die Rechendauer bei 50 Subensembles um einen Faktor 50 erhöhen, was trotz Parallelisierung des Verfahrens nicht gelöst werden kann. Aus diesem Grund beschränkt sich die Bestimmung auf den zuvor verwendeten Algorithmus der schon zur Bestimmung des Fehlers bei $\Pi^{\mu\nu}$ zum Einsatz gekommen ist, wobei die so erhaltenen Fehler eine zusätzlichen Streuung durch die Minkowskiwertige Größe besitzen. Eine Aussage über den eigentlichen numerischen Fehler dieser Simulation ist somit nicht möglich und muss bei der Interpretation der Resultate berücksichtigt werden. Im ersten Teil der Simulation wird der Limes schwacher Felder betrachtet, für den eine Konvergenz gegen die Faktoren $\frac{1}{90}$ und $\frac{7}{90}$ vorliegen soll. Die Simulation erfolgt dabei mit einem Photonenvektor $k = (0, 0.1, 0, i \cdot 0.1)^T$ und einem statistischen Ensemble von 40000 Loops und jeweils 1000 Stützstellen pro Loop. Für $m = 1.0$ und einem Feld von $eB = 0.1$ ist das Ergebnis der Entwicklung des Integrationskernes explizit angegeben. Es

| a | b | c | d |
|--|---|--|---|
| parallel Komponente | | | |
| 0 | 0 | $-2.22 \cdot 10^{-6}$ | 0 |
| $1.39 \cdot 10^{-5} \pm 3.85 \cdot 10^{-5}$ | $7.63 \cdot 10^{-7} \pm 1.31 \cdot 10^{-4}$ | $-2.22 \cdot 10^{-6} \pm 1.20 \cdot 10^{-4}$ | $2.15 \cdot 10^{-8} \pm 3.16 \cdot 10^{-5}$ |
| senkrecht Komponente | | | |
| 0 | 0 | $-1.56 \cdot 10^{-5}$ | 0 |
| $-3.40 \cdot 10^{-5} \pm 2.50 \cdot 10^{-5}$ | $4.46 \cdot 10^{-6} \pm 4.47 \cdot 10^{-5}$ | $-1.56 \cdot 10^{-5} \pm 2.16 \cdot 10^{-5}$ | $3.73 \cdot 10^{-7} \pm 2.96 \cdot 10^{-6}$ |

Tabelle 3.3.: Ergebnis der Entwicklung des Integrationskernes von $\Pi^{\mu\nu}$ unter Verwendung Minkowskiwertiger Größen

ist zu erkennen, dass die meisten Entwicklungsterme, aufgrund der Forderung $k^2 = 0$, null ergeben. Durch einen numerischen Algorithmus kann diese Tatsache jedoch niemals exakt erfüllt werden. Der für die Numerik wichtige Term ist somit der T^4 -Koeffizient, da er im

Fall eines konstanten Magnetfeldes als einziger kein triviales Ergebnis liefert. Dies ist im Rahmen des Renormierungsverfahrens wichtig, da wie in den zuvor behandelten Fällen eine Stabilisierung anhand genau diese Koeffizienten vorgenommen wird. Die Ausführung der Integration über T für den senkrechten und parallelen Fall liefert für die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit ein Ergebnis, das in den Abbildungen 3.2 und 3.3 dargestellt ist. Da bei den Berechnungen der Wert $eB = 0.1$ konstant gehalten wird, konvergiert die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit in beiden Fällen für $\frac{B}{B_{\text{cr}}} = \frac{eB}{m^2} \rightarrow 0$ gegen null. Dies bedeutet, dass mit größer werdendem Parameter m oder der damit daraus resultierenden Stärke des kritischen Feldes $eB_{\text{cr}} = m^2$, der zu erwartende Effekt einer Veränderung der Phasengeschwindigkeit bei konstanter Feldstärke eB nicht mehr nachzuweisen ist ($\Delta v_{\text{ph}} \rightarrow 0$ für $eB_{\text{cr}} \rightarrow \infty$). Damit ist gezeigt worden, dass die verwendeten

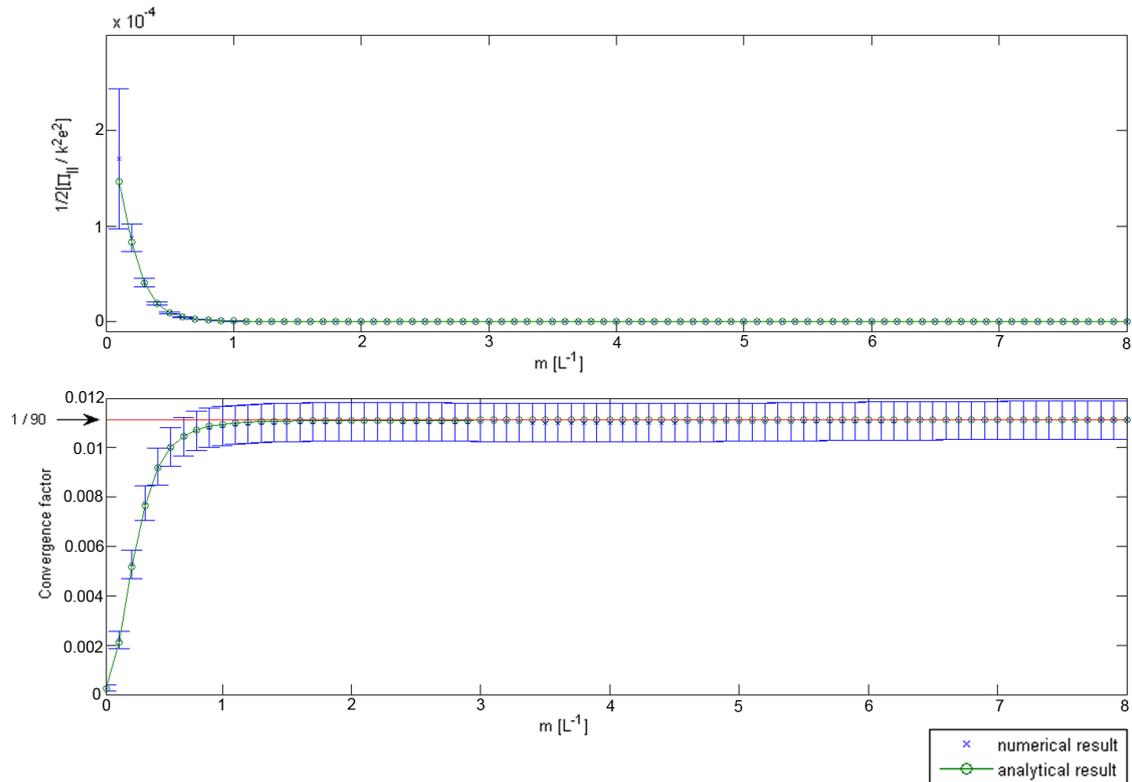


Abbildung 3.2.: Veränderung der Phasengeschwindigkeit v_{\parallel} für $eB = 0.1$ mit einem Ensemble von 40000 Loops und 1000 Stützstellen pro Loop (Seed = 10) bei Variation des Massenparameters.

Feldstärken eB nahe der kritischen Feldstärke liegen müssen, damit es zu einer signifikanten Variation von v_{ph} kommt und der Effekt der Doppelbrechung im Rahmen eines Experimentes zu beobachtet ist. Im Grenzfall schwacher Felder konnte mit Hilfe der numerischen Methode die Konvergenz gegen die beiden analytisch vorhergesagten Werte von $\frac{1}{90}$ und $\frac{7}{90}$ nachgewiesen werden, was eine Bestätigung des Algorithmus darstellt.

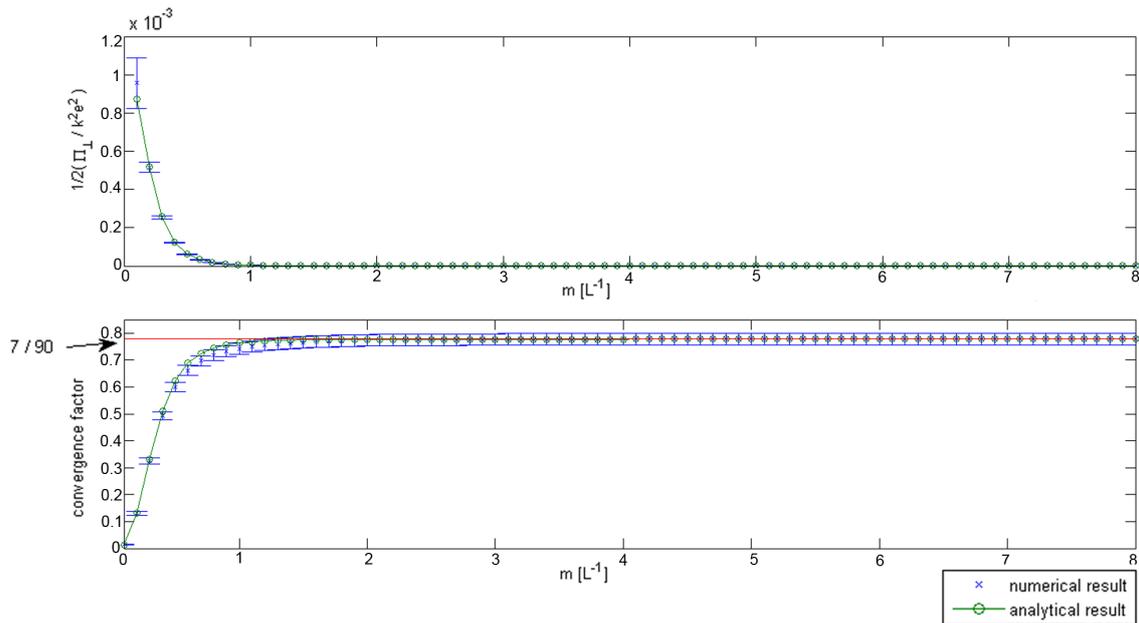


Abbildung 3.3.: Veränderung der Phasengeschwindigkeit v_{\perp} für $eB = 0.1$ mit einem Ensemble von 40000 Loops und 1000 Stützstellen pro Loop (Seed = 10) bei Variation des Massenparameters.

Die Wahl des verwendeten statistischen Ensembles liegt in einer Stabilitätsuntersuchung begründet. Dabei wurden für beide Fälle die relevanten Parameter, die das statistische Ensemble bestimmen, einzeln betrachtet und mit den analytischen Werten verglichen. In den Abbildungen 3.5 und 3.6 ist zu erkennen, dass eine zunehmende Stabilisierung der Messwerte bei Erhöhung der Loopanzahl, jedoch auf Kosten der Rechenzeit, vorliegt. Zu beachten ist, dass der in den Abbildungen, dargestellte Wert nicht dem jeweiligen Konvergenzfaktor entspricht, sondern unterhalb von diesem liegt, da für einen Massenterm von $m = 1.0$ noch keine Konvergenz vorliegt. Die eingezeichneten Werte sollen damit nur der Orientierung dienen. Die beste Wahl zwischen aufzuwendender Rechenzeit und möglichst aussagekräftigen Ergebnissen stellt somit das gewählte Ensemble von 40000 Loops dar, das auch bei Variation des Seed-Wertes eine Streuung des Messwertes unterhalb von 10 % besitzt. Vor allem bei der Untersuchung inhomogener Magnetfelder, bei denen kein analytisches Vergleichsergebnis existiert, ermöglicht eine solche Vorgehensweise die Zuverlässigkeit der einzelnen Resultate zu bewerten.

3.3.4. Physikalische Interpretation

Im Gegensatz zu den zuvor betrachteten Fällen, bei denen ein euklidischer Photonenvektor verwendet wurde, kann nun anhand der Ergebnisse eine erste Aussagen über die Physik bei Anwesenheit konstanter Magnetfelder gemacht werden. Es ist zu sehen, dass

die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit mit zunehmend schwächer werdenden Magnetfeldern stark exponentiell abnimmt und somit schon für Feldstärken, die nur eine Größenordnung unterhalb von eB_{cr} liegen, sehr kleine Werte annimmt. Für einen experimentellen Nachweis des Effektes bedeutet dieses Resultat, dass für eB Werte nahe der kritischen Feldstärke benötigt werden, um den Effekt der Doppelbrechung durch Vakuumfluktuationen nachzuweisen. Jedoch wurden in diesem Zusammenhang in der Einleitung Methoden beschrieben, wie diese Problematik ausgeglichen werden kann (Weglänge des Photons, Empfindlichkeit des Polarimeters, u.s.w.). Dass überhaupt von einer Doppelbrechung gesprochen werden kann, ist an den unterschiedlichen Werten für die parallel- und senkrecht-Komponente der Phasengeschwindigkeit zu erkennen, die im einzelnen wie folgt mit der Brechzahl n zusammenhängen:

$$n = \frac{v_{\text{ph}}^0}{v_{\text{ph}}} \quad v_{\text{ph}}^0 \equiv c$$

Somit kommt es im Vakuum durch Fluktuationen zum selben Effekt wie im Calcit bei welchem ebenfalls ein Unterschied zwischen den einzelnen Brechzahlen auftritt, der aber im Rahmen einer klassischen Theorie beschrieben werden kann. Es wird bei dieser klassischen Brechung zwischen einer ordentlichen⁵- und außerordentlicher⁶ Brechung unterschieden, die damit eine vollständige Analogie zum betrachteten Quanteneffekt besitzt. Ausgehend von einer Intensität des Polarislasers von $10^{21} \frac{W}{\text{cm}^2}$, die in etwa $10^{-7} \%$ der kritischen Intensität beträgt, ist der direkte Nachweis nach den in der Simulation erhaltenen Ergebnissen nur über Messinstrumente mit einer hohen Empfindlichkeit oder unter Ausnutzung weiterer Effekte möglich. Im Bezug auf die numerischen Ergebnisse aus Abbildung 3.5 oder 3.6 liegt der zu erwartende Wert für die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit in etwa bei $m^2 \sim 10^7 L^{-2}$. Bei Berechnung der 2-Punkt Funktion für unterschiedliche Feldstärken eB mit festgehaltener kritischer Feldstärke $eB_{\text{cr}} = m^2 = 1.0$, ist in Abbildung 3.4 zu erkennen, dass diese mit zunehmenden Werten von eB ansteigt. Dies bestätigt noch einmal die Ergebnisse aus 3.5 und 3.6, wo die kritische Feldstärke als Variable zu einem vorgegebenen eB untersucht wurde. Dabei kommt es, wie auch in den vorherigen Rechnungen, zu einer erhöhten Streuung der Messergebnisse in der Nähe der kritischen Feldstärke, was jedoch durch ein größeres statistisches Ensemble kompensiert werden kann. Letztendlich konnten die in der Einleitung zu dieser Arbeit gemachten Aussagen über den zu erwartenden Effekt der Doppelbrechung aufgrund der Vakuumfluktuationen in Anwesenheit eines konstanten Feldes durch die numerische Simulation bestätigt werden.

⁵ $n_o = \frac{c}{v_{\perp}}$
⁶ $n_{ao} = \frac{c}{v_{\parallel}}$

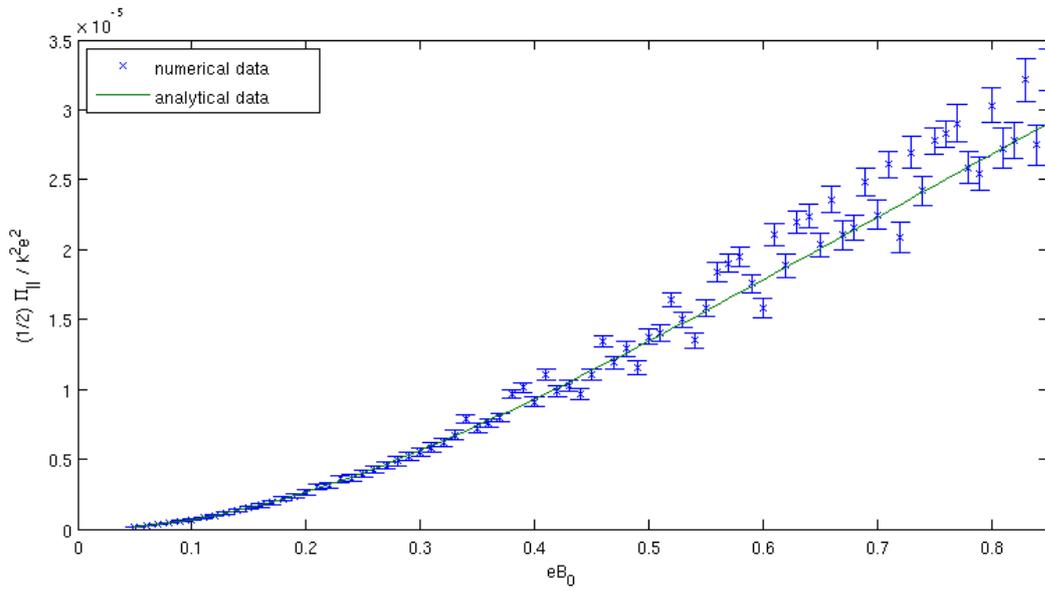


Abbildung 3.4.: Verschiebung der Phasengeschwindigkeit für unterschiedliche Feldstärken eB bei konstanten kritischen Feld $m^2 = 1.0$ und $k = (0, 0.1, 0, 0.1)^T$. Es ist eine zunehmende Streuung der Messwerte bei Konvergenz der Feldstärke gegen den kritischen Wert zu erkennen, was unter anderem am Versagen der numerischen Integration liegen kann.

3. Konstantes Magnetfeld B

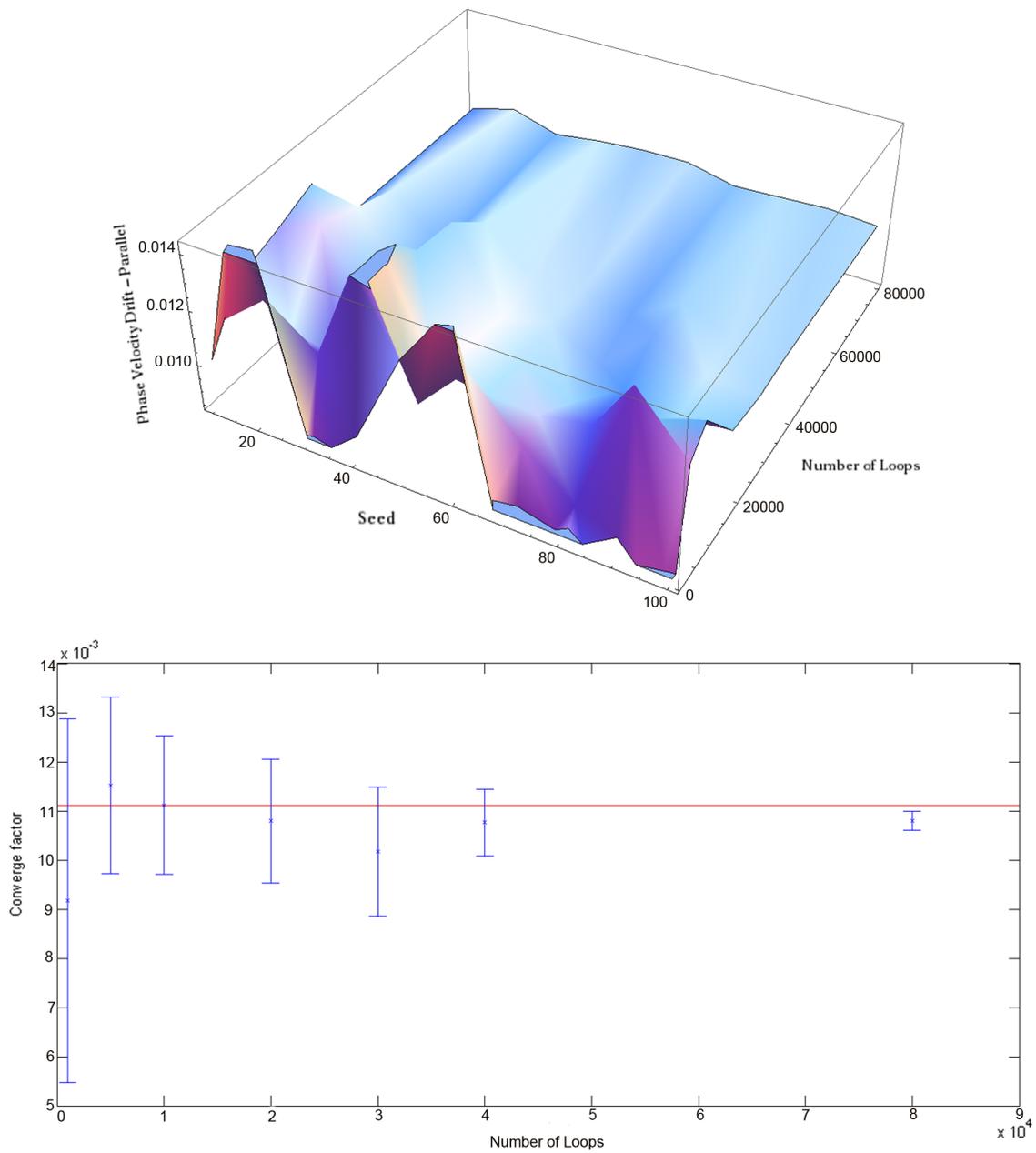


Abbildung 3.5.: Stabilitätstest für $\frac{1}{2}\Pi_{\parallel}/k^2e^2$ (bzw. des Konvergenzfaktors von $\frac{1}{90}$) mit einem Massenterm von $m = 1.0$ für 1000 Stützstellen pro Weltlinie. Es ist in den Diagrammen eine Konvergenz und zunehmende Stabilisierung bei Erhöhung der Loopanzahl gegen den analytischen Wert zu erkennen.

3. Konstantes Magnetfeld B

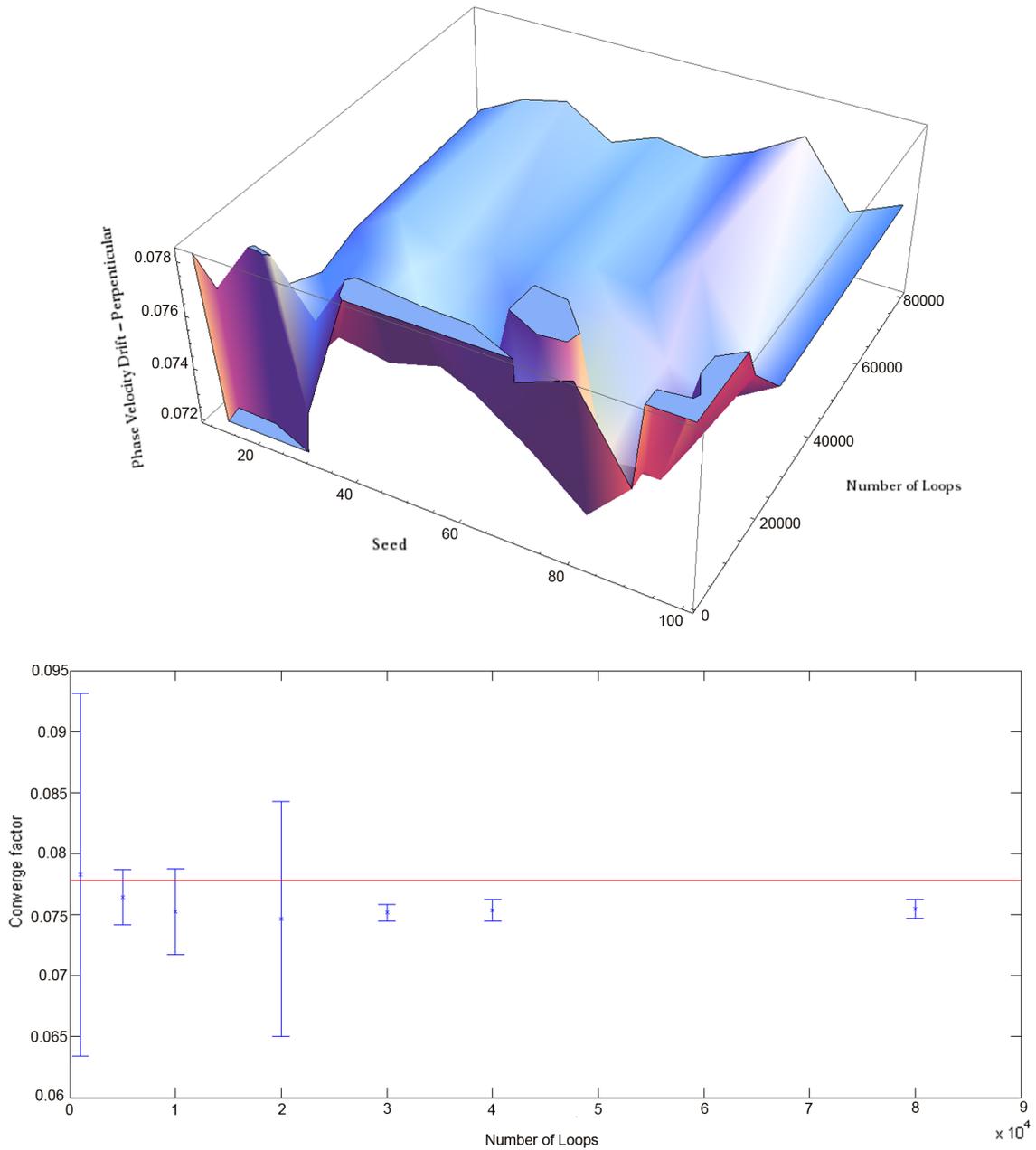


Abbildung 3.6.: Stabilitätstest für $\frac{1}{2}\Pi_{\perp}/k^2e^2$ (bzw. des Konvergenzfaktors von $\frac{7}{90}$) mit einem Massenterm von $m = 1.0$ für 1000 Stützstellen pro Weltlinie.

4. Inhomogene Magnetfelder $\mathcal{B}(x)$

Mit Hilfe der vorangegangenen Simulationen konnte nachgewiesen werden, dass eine Behandlung des Problems der Bestimmung der 2-Punkt Funktion unter Berücksichtigung von elektromagnetischen Feldern im Rahmen der Weltliniennumerik möglich ist. Vor allem die Resultate des konstanten magnetischen Feldes unter Verwendung eines minowskiwertigen Photonenvektors lieferten eine gute Approximation an die analytischen Rechnungen. Im Folgenden Kapitel sollen nun räumlich inhomogenen Feldern mit Hilfe der numerischen Verfahren basierend auf den Weltlinienformalismus untersucht werden. Die Schwierigkeit bei den in dieser Arbeit verwendeten Methoden besteht in der Kenntnis der Entwicklung des Integrationskernes zur Bestimmung der Counterterme, was das Wissen über die Struktur einer analytischen Lösung bisher vorausgesetzt hat. Jedoch konnte schon im Fall eines konstanten Feldes gezeigt werden, dass die verwendeten Counterterme bis zur Ordnung T^3 mit denen des Vakuums übereinstimmen, und eine Wirkung des Feldes erst für höhere Ordnungen zu berücksichtigen ist. Im Fall von inhomogenen Feldern sollte somit ein Einfluss der Inhomogenität erst ab der Ordnung T^5 zu sehen sein. Die Betrachtung von inhomogenen Feldern ist vor allem dann interessant, wenn es möglich sein wird, experimentelle Messungen auf der Skala der Comptonwellenlänge $\lambda_C = \frac{1}{m}$ vorzunehmen. Bei den, in Kapitel 1 beschriebenen Versuchen, erfolgen die einzelnen Messungen in einem Bereich der weit oberhalb dieser Wellenlänge zu finden ist, was eine Betrachtung räumlicher Feldinhomogenitäten vorerst nicht erforderlich macht. Doch gerade auf der Skala von λ_C sagt die Theorie neue Teilchen voraus, die nur nachgewiesen werden können, wenn der Einfluss der räumlichen Inhomogenitäten vollständig verstanden ist. Dabei handelt es sich nach [28] um Teilchen des **hidden sector**, das heißt Teilchen die keine direkte Wechselwirkung mit den Kräften des Standardmodells besitzen und effektiv durch eine kleine Ladung (*minicharged particles*) und Masse gekennzeichnet sein können.

4.1. Numerische Berechnung der Phasengeschwindigkeit

Um die Veränderung der Phasengeschwindigkeit bei räumlich inhomogenen Feldern zu untersuchen, wird an dieser Stelle ein Feld der Form (4.1) betrachtet, das durch drei physikalische Parameter charakterisiert ist und wie das in Kapitel 3 verwendete konstante Magnetfeld eine Ausrichtung in x^1 Richtung aufweist.

$$B(x^3) = B_0 + B_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_B} x^3\right) \quad (4.1)$$

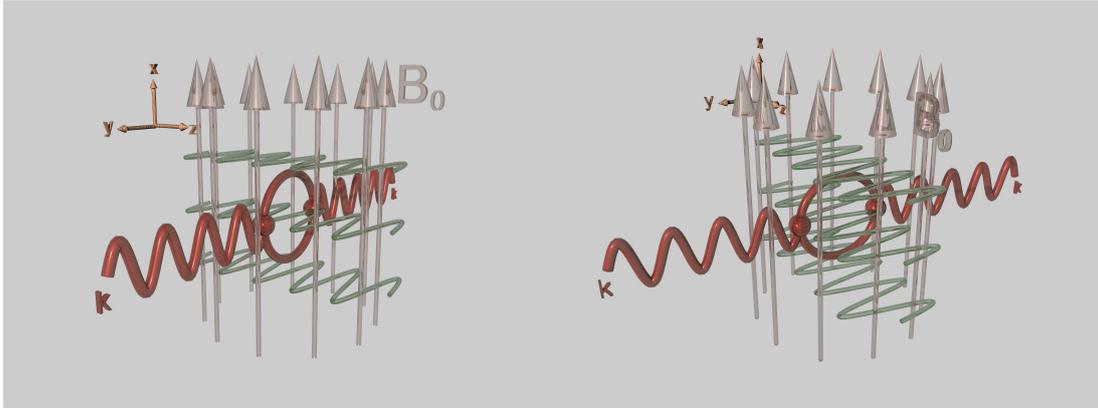


Abbildung 4.1.: Schematische Darstellung des räumlich inhomogenen Magnetfeldes.

Die das Feld beschreibenden Größen sind dabei zum einen das mittlere Magnetfeld B_0 , das durch eine kosinusartige Inhomogenität mit der Amplitudenfeldstärke B_1 und der Wellenlänge λ_B durch Superposition überlagert wird. Diese Inhomogenität breitet sich in x^3 -Richtung aus und verschwindet aufgrund der Eigenschaften des Kosinus, wenn $x^3 = (2n+1)\frac{\lambda_B}{4}$ ($n \in N_0$) ist. Um die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit berechnen zu können, wird an dieser Stelle das Vektorpotential $a^\mu(x)$ benötigt, welches explizit über die Definition des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ bestimmt werden muss.

$$\begin{aligned}
 F^{\mu\nu} &= B(x^3)\Lambda^{\mu\nu} = \partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu \\
 \rightarrow F &= B(x^3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 a &= (0, B_0 x^3 + B_1 \frac{\lambda_B}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_B} x^3\right), 0, 0) \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Hierbei ist die Wahl des Vektorpotentials keinesfalls eindeutig, sondern es liegt eine Eichfreiheit vor, die auf weitere Ausdrücke für a^μ führt, die zum Feld aus Gleichung (4.1) gehören. Die Eichtransformation wird dabei analog zu 1.2.1 mit einem skalaren Feld Φ nach (4.3) durchgeführt.

$$a^\mu = \tilde{a}^\mu + \partial^\mu \Phi \rightarrow \Phi = \frac{1}{2} B_0 x^3 x^2 \quad (4.3)$$

Der Ausdruck (4.2) kann nun, wie schon im Fall des homogenen Magnetfeldes, in den Wilsonloop eingesetzt und anschließend diskretisiert werden.

$$\begin{aligned}
 & \exp \left\{ -ie \int_0^T d\tau a^\mu \dot{x}_\nu \right\} \\
 &= \exp \left\{ -ieB_0 \int_0^T d\tau x^3 \dot{x}^2 - ieB_1 \int_0^T d\tau \frac{\lambda_B}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_B} x^3 \right) \dot{x}^2 \right\} \left\{ x(\tau) = \sqrt{T} y \left(\frac{\tau}{T} \right) + x_{\text{CM}} \right\} \\
 &= \exp \left\{ -ieB_0 T \int_0^1 d\tau y^3 \dot{y}^2 - ieB_1 \frac{\lambda_B \sqrt{T}}{2\pi} \int_0^1 d\tau \sin \left(\frac{2\pi \sqrt{T}}{\lambda_B} y^3 + \phi \right) \dot{y}^2 \right\} \quad (4.4) \\
 & \text{mit} \quad \phi = \frac{2\pi x_{\text{CM}}^3}{\lambda_B}
 \end{aligned}$$

Ausgehend von (4.4), wird auch im Fall eines inhomogenen Feldes, die Gleichung zur Berechnung der Phasengeschwindigkeit nur um einen multiplikativen exponentiellen Anteil erweitert und entspricht bis auf genau diesen Anteil der numerischen Gleichung für ein homogenes Magnetfeld. Für kleine Parameter T ist der Einfluss des homogenen Feldanteils wesentlich stärker als der des Inhomogenen, was anhand der einzelnen Exponenten zu erkennen ist. Dies zeigt, dass die zu erwartenden Counterterme bis zur Ordnung T^4 mit denen des homogenen Feldes übereinstimmen sollten und erst für spätere Ordnungen die Wirkung des inhomogenen Feldes berücksichtigt werden muss. Da nun die Stabilisierung des Algorithmus anhand des T^4 -Terms vorgenommen wird, kann dieser bis auf die Erweiterung um einen Exponentialfaktor vom konstanten Feld übernommen werden. Die numerische Bestimmung der Counterterme, zur Renormierung des T -Integrals, erfolgt damit anhand des Grenzfalles eines homogenen Feldes mit der mittleren Feldstärke B_0 . Bei der Wahl des Eichpotential sollte außerdem zusätzlich geprüft werden, ob eine Diskretisierung des Ausdruckes überhaupt möglich ist oder es dadurch zu Resultaten kommt, die im einzelnen nur im Kontinuumslimit korrekte Ergebnisse liefern würden.

4.2. Numerische Ergebnisse für inhomogene Magnetfelder

Um die Konsistenz der numerischen Ergebnisse zu überprüfen, wurde zuerst der Limes großer Wellenlängen λ_B betrachtet. In diesem Fall ist es möglich die Winkelfunktionen in einer Taylorreihe zu entwickeln¹ und anschließend nach der nullten Ordnung abzubrechen. Für einen Phasenwinkel von $\phi = 0$ ist die Näherung im Folgenden kurz dargestellt.

$$\lim_{\lambda_B \rightarrow \infty} B = \lim_{\lambda_B \rightarrow \infty} B_0 + B_1 \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_B} x^3 \right) = B_0 + B_1 \quad (4.5)$$

¹ $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$

In Gleichung (4.5) ist zu erkennen, dass bei großen Wellenlängen, der Wert für die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit, gegen den Wert für ein konstantes Feld der mittleren Feldstärke $B_0 + B_1$ konvergiert. Dieses Grenzverhalten ist mit Hilfe der numerischen Methoden für den Photonenvektor $k = (0, 0.1, 0, 0.1)^T$ mit einem Massenterm $m = 1.0$ und einem statistischen Ensemble von 40000 Loops und 1000 Stützstellen pro Loop, für verschiedene Felder überprüft worden. Die Größe des Ensemble resultiert dabei aus den Stabilitätsuntersuchungen für ein konstantes Feld, deren Ergebnis für die parallele Komponente in Abbildung 3.5 dargestellt ist. Um aber die einzelnen Grenzwerte besser verstehen zu können, wurden in Tabelle 4.1 die analytischen und numerischen Werte für den Limes großer Wellenlängen λ_B mit Hilfe der Gleichungen für ein konstantes Feld berechnet. Dabei entsprechen die einzelnen Einträge einer Verschiebung der Phasengeschwindigkeit um den gesuchten Limes bei einem mittleren Magnetfeld von $eB_0 + eB_1$. In

| eB_0 | eB_1 | $\frac{1}{2} \frac{\Pi_{\parallel}}{e^2 k^2} ana$ | $\frac{1}{2} \frac{\Pi_{\parallel}}{e^2 k^2} num$ |
|--------|--------|--|--|
| 0.1 | 0.01 | $8.36 \cdot 10^{-7}$ | $8.23 \cdot 10^{-7} \pm 5.9 \cdot 10^{-8}$ |
| 0.1 | 0.05 | $1.53 \cdot 10^{-6}$ | $1.50 \cdot 10^{-6} \pm 1.0 \cdot 10^{-7}$ |
| 0.2 | 0.1 | $5.63 \cdot 10^{-6}$ | $5.51 \cdot 10^{-6} \pm 3.2 \cdot 10^{-7}$ |

Tabelle 4.1.: Konstanter-Feld Limes für große Frequenzen λ_B

Abbildung 4.2 ist die Verschiebung der Parallelkomponente der Feldstärke für verschiedene Felder mit den jeweiligen Grenzwerten $\lambda_B \rightarrow \infty$ und $\lambda_B \rightarrow 0$ aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die Konvergenz gegen die einzelnen Grenzwerte im Rahmen des numerischen Fehlers unabhängig von der Wahl der jeweiligen Feldstärkeparameter erfüllt wird. Die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit konvergiert somit bei ansteigenden Wellenlängen des inhomogenen Feldanteils gegen den erwarteten Wert und ist damit nach oben und unten begrenzt. Außerdem ist es mit Hilfe des numerische Verfahrens möglich den bisher unerforschten Bereich kleiner Wellenlängen, das bedeutet den Bereich auf Skala der Comptonwellenlänge, zu untersuchen. Die Effekte in diesen Wellenlängenbereich sollen in einen späteren Teil dieses Kapitels näher betrachtet werden, weil die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit im Vergleich zu den Effekten für große Wellenlängen um einige Größenordnungen kleiner ist. Die Wirkung der Inhomogenität wirkt sich außerdem sowohl auf den parallelen - als auch auf den senkrechten Fall in der selben Weise aus, da die Wirkung dieses Feldes nur durch eine multiplikative Exponentialfunktion vermittelt wird und somit nicht durch die jeweiligen Projektoren beeinflusst werden kann. In 4.2 sind die Grenzen für die verschiedenen konstanten Feld Limes B_0 (rot) und $B_0 + B_1$ (grün) mit eingezeichnet. Die Konvergenz gegen die obere Grenze liegt, für die untersuchten Beispiele, immer im Rahmen des numerischen Fehlers und wird auch bei der Betrachtung eines größeren Messbereiches im Rahmen der Fehlergrenzen erfüllt. Im nächsten Teil der numerischen Simulation soll die Frage untersucht werden, wie sich der zusätzliche Freiheitsgrad des Phasenwinkels ϕ auf die Variation der Phasengeschwindigkeit auswirkt und welchen Einfluss somit der Schwerpunkt, durch den das Ensemble von Weltlinien charakterisiert wird, besitzt. Für den Fall, dass dieser Winkel mit null gewählt wird, kommt es im Rahmen der verwendeten Auflösung zu einem kontinuierlichen Anstieg der Verschie-

4. Inhomogene Magnetfelder $\mathcal{B}(x)$

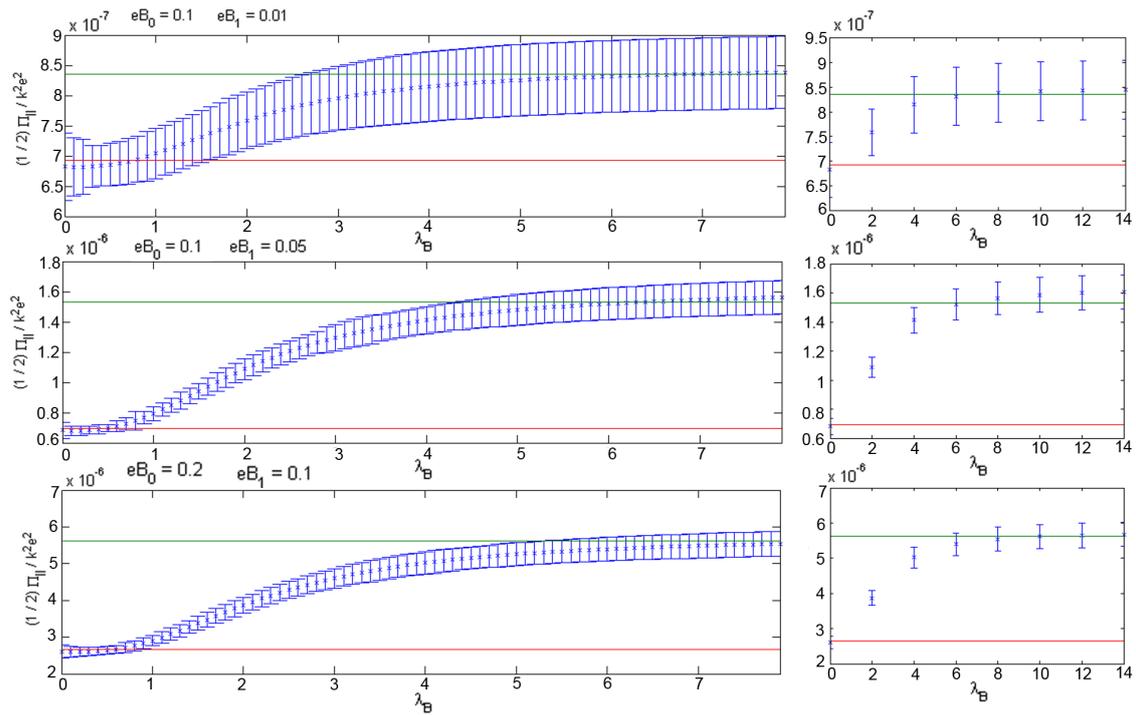


Abbildung 4.2.: Konstanter Feld Limes für große Frequenz λ_B und verschiedene Feldstärken B_0 und B_1

bis zum Limes großer Wellenlängen. Jedoch ist bei der Behandlung von räumlich inhomogenen Feldern vor allem der Bereich kleiner Wellenlängen λ_B von Interesse, da die Effekte auf der Skala der Comptonwellenlänge untersucht werden sollen. In Abbildung 4.3 ist die Schrittweite von 0.1 auf 0.03 verringert worden, um eine bessere Auflösung des Bereiches kleiner Wellenlängen λ_B für einen zunächst konstanten Winkel $\phi = 0$ zu ermöglichen. Es ist zu erkennen, dass es zwischen $\lambda_B = 0$ und $\lambda_B = 0.5$ zu einer minimalen Abweichung der Verschiebung der Phasengeschwindigkeit unterhalb des Wertes bei $\lambda_B = 0$ kommt, die jedoch wesentlich geringer ist als der numerische Fehler der einzelnen Messpunkte. Es lässt sich somit allein durch Abbildung 4.3 nicht mit Sicherheit sagen, ob es sich dabei um einen physikalischen Effekt der räumlichen Inhomogenitäten oder um ein numerisches Artefakt handelt. Jedoch lassen die Ergebnisse aus Abbildung 4.7 bei denen die Messung für verschiedenen Phasenwinkel ϕ durchgeführt wurde den Schluss zu, dass es sich tatsächlich um einen physikalischen Effekt handelt. Im Gegensatz zu der Verschiebung der Phasengeschwindigkeit im Grenzfall großer Wellenlängen ist die Ausprägung der Extrema auf der Skala der Comptonwellenlänge exakt um den Wert $\Delta\phi = \pi$ verschoben und in Hinblick auf die Intensität um einige Größenordnungen kleiner. Im nächsten Schritt soll nun die Wirkung des Phasenwinkels ϕ auf die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit untersucht werden. Wie in Gleichung (4.4) gezeigt wird, existiert ein direkter Zusammenhang mit der x^3 -Komponente des CM-Punktes, außerdem ist ϕ

4. Inhomogene Magnetfelder $\mathcal{B}(x)$

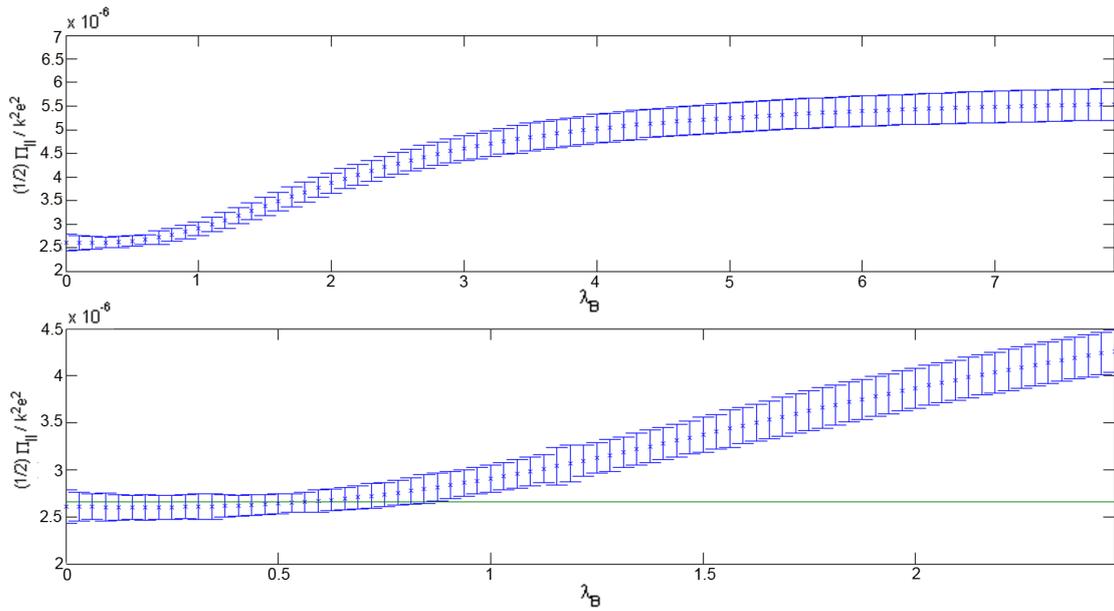


Abbildung 4.3.: Erhöhung der Auflösung für die Feldkombination $eB_0 = 0.2$ und $eB_1 = 0.1$. Es ist zu erkennen, dass es im Bereich kleiner Wellenlängen zur Ausprägung eines Minimas kommt, was einen ersten Hinweis auf den Einfluss der räumlichen Inhomogenität gibt.

indirekt proportional zur verwendeten Wellenlänge λ_B des inhomogenen Feldes. Der CM-Punkt beschreibt den Schwerpunkt des Systems, dessen Einfluss in den vorangegangenen Betrachtungen keine signifikante Rolle gespielt hat. Da in diesem Fall die Inhomogenität eine explizite räumliche Abhängigkeit besitzt, ist eine Betrachtung dieses zusätzlichen Freiheitsgrades notwendig. In Abbildung 4.4 wurde dazu der Phasenwinkel im Bereich von 0 bis π variiert, wobei die Feldstärken mit $eB_0 = 0.2$ und $eB_1 = 0.1$, sowie der Photonenvektor k und der Massenterm m , wie in den vorangegangenen Berechnungen gewählt wurden. Die Stärke des mittleren Magnetfeldes B_0 beträgt somit ein fünftel der kritischen Feldstärke $eB_{\text{cr}} = 1.0$, was nach den vorangegangenen Untersuchungen (3.2 und 3.3), zu einer signifikanten Verschiebung der Phasengeschwindigkeit führen sollte. Im Rahmen eines Experimentes benötigt man somit Laserintensitäten von $\approx 9.4 \cdot 10^{28} \frac{W}{\text{cm}^2}$, die sechs Größenordnungen über der Intensität des Polaris liegen. Um den Einfluss des Phasenwinkels ϕ auf die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit besser verstehen zu können, wurden in den Abbildungen 4.5 und 4.6 die Ergebnisse der Simulation im Bereich $\phi \in [0, 2\pi]$ für verschiedene Wellenlängen λ_B dargestellt. Man erkennt, dass für kleine Wellenlängen die Konstante-Feld-Approximation mit den mittleren Feld B_0 lokal eine gute Näherung liefert. Der eigentliche Effekt des räumlich inhomogenen Feldes im Bereich der Comptonwellenlänge ist jedoch auch bei diesen Messungen nur schwer zu erkennen und erfordert somit eine höhere Auflösung des vorderen Wellenbereiches, was in Abbildung 4.7 dargestellt ist.

4. Inhomogene Magnetfelder $\mathcal{B}(x)$

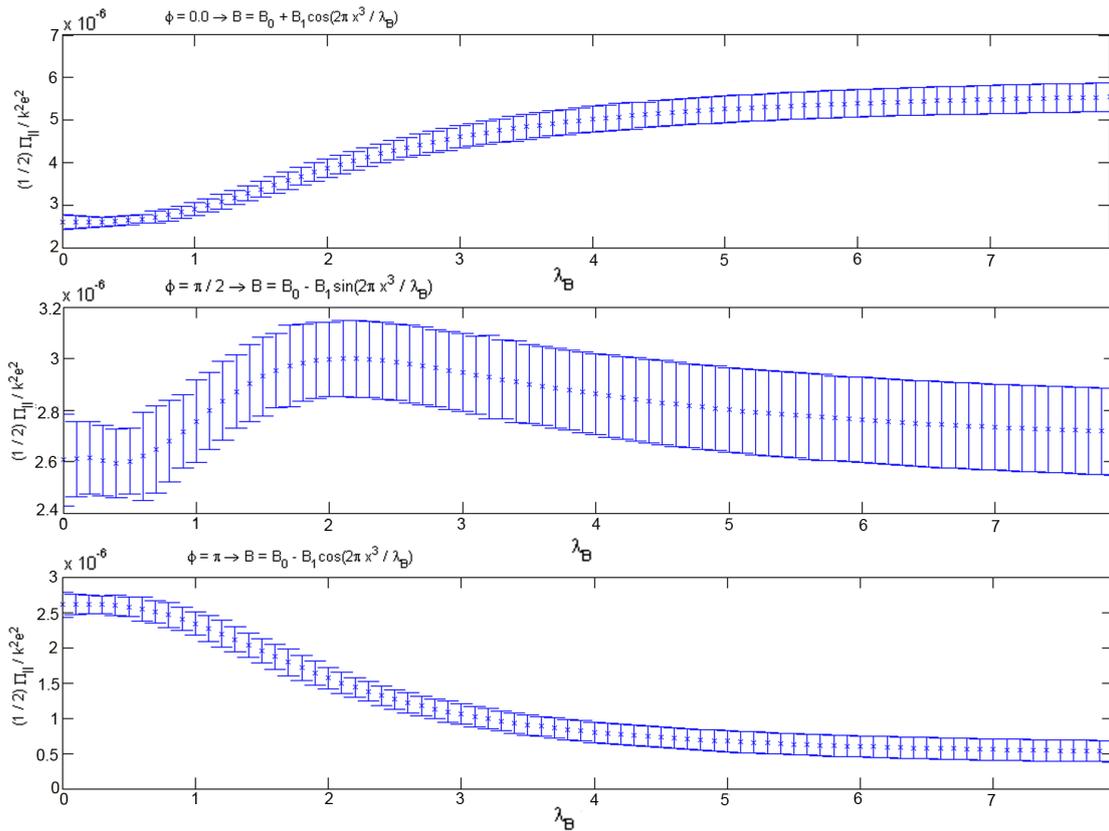


Abbildung 4.4.: Verschiebung der Phasengeschwindigkeit für verschiedene Phasenwinkel ϕ . Für den Grenzfall großer Wellenlängen ist der erwartete Effekt, dass die Verschiebung gegen den Wert eines konstanten Feldes der Stärke $B_0 + B_1$ konvergiert erfüllt. Für kleine Wellenlängen liefert diese Konstante-Feld-Näherung jedoch nur lokal das richtige Ergebnis.

4.2.1. Wirkung der räumlichen Inhomogenität

In der Einleitung zu diesen Abschnitt wurde erwähnt dass die Untersuchungen von räumlich inhomogenen Feldern vor allem im Bereichen auf der Skala der Comptonwellenlänge wichtig werden. Die Abbildungen 4.5 und 4.6 zeigen, dass das geforderte Konvergenzverhalten der Verschiebung auch bei Variation des Phasenwinkels ϕ erfüllt wird. Die dabei ausgeprägten Extrema besitzen eine 2π -Periodizität was auf die Gestalt des inhomogenen Feldanteils zurückgeht. Bei der Auswertung der numerischen Ergebnisse ist zu beachten, dass es bei einem Maximum der Verschiebung zu einem Minimum der Phasengeschwindigkeit v_{ph} kommt und dieses sowohl für die parallel- als auch für die senkrecht-Komponente in identischer Weise erfüllt wird. Der Effekt der Vakuumdoppelbrechung tritt somit auch bei einem inhomogenen Feld deutlich auf. Jedoch sind diese Effekte noch nicht die eigentlich gesuchten Auswirkungen der Inhomogenität auf der Skala der Comptonwellenlänge,

da der zu untersuchende Wellenlängenbereich unterhalb von $\lambda_B = 1.0$ zu finden ist. Die numerischen Resultate in 4.3 haben eine leichte Variation der Verschiebung genau in diesem Bereich aufgezeigt, konnten aber aufgrund des großen numerischen Fehlers nicht zugeordnet werden. In Abbildung 4.7 ist dieser besondere Wellenlängenbereich nun für verschiedene Phasenwinkel aufgetragen, wobei für die einzelnen Simulationsparameter die gleichen Werte angenommen wurden wie schon bei den Abbildungen 4.5 und 4.6. In Abbildung 4.7 ist eine deutliche Ausprägung von Minima und Maxima zu erkennen, die in analoger Weise zu den Extrema im Limes großer Wellenlängen eine 2π -Periodizität besitzen. Dieses Resultat lässt darauf schliessen, dass es sich dabei durchaus um den gesuchten physikalischen Effekt handelt der durch das inhomogene Feld verursacht wird und nicht um numerische Artefakte, da diese zumeist zufällig auftreten und keine so deutliche Korrelation besitzen. Jedoch sind die einzelnen Variationen der Phasengeschwindigkeit sehr klein und werden von den numerischen Fehlern überdeckt, was bedeutet, dass an diesen Stellen weiter Untersuchungen nötig sind um eindeutig einen physikalischen Effekt zuordnen zu können. Interessant ist, dass sich die Ausprägung der Extrema der Phasengeschwindigkeit auf der Skala der Comptonwellenlänge genau umgekehrt zu den Extrema im Bereich großer Wellenlängen verhält, also um π verschoben ist. Die Problematik der Stärke des Effektes kann dabei, ausgehend von 4.7, bezogen auf das Ergebnis bei $\lambda_B = 0$, mit einer Variation von $\frac{1}{2} \frac{\Pi_{\parallel}(\lambda_B=0)}{k^2 e^2} \pm 0.01$ verdeutlicht werden, wobei der numerische Fehler der einzelnen Messwerte um bis zu einen Faktor 10 größer ist als die zu erkennende Ausprägung der Extrema.

4.2.2. Rechenzeiten des numerischen Algorithmus

Eine wichtige Größe bei der numerischen Simulation von physikalischen Problemen ist die benötigte Rechenzeit, die von verschiedensten Faktoren abhängig ist. Einer dieser Einflussfaktoren, der über Stabilitätsuntersuchungen festgelegt wurde, ist die Größe des statistischen Ensembles, das mit 40000 Loops und je 1000 Stützstellen pro Loop in den verwendeten Algorithmus gegeben wurde. Die Rechenzeit verhält sich dabei im allgemeinen linear zur Größe des Ensembles und ist im Rahmen des verwendeten Programms im Hinblick auf die Erzeugung der einzelnen Weltlinien nicht parallelisiert und somit unabhängig von den zur Verfügung stehenden Prozessorkernen. In der folgenden Tabelle wurde die Rechenzeit, die man zur Bestimmung der Verschiebung der Phasengeschwindigkeit für inhomogene Felder benötigt, für verschiedene Systeme angegeben. Dazu wurde der Algorithmus für 80 verschiedene Messwerte mit dem festgelegten Ensemble durchgeführt. Im Gegensatz zur Ensembleerzeugung liegt nun eine Parallelisierung des Verfahrens vor und verhält sich direkt proportional zur Anzahl der zu Verfügung stehenden Kerne. Bei den angegebenen Werten handelt es sich um Richtwerte für die Rechenzeit, die für das angesprochene Ensemble und die Anzahl der Messpunkte unter Volllast der Prozessorkerne benötigt wird. Die tatsächliche benötigte Zeit kann dabei stark von diesen einzelnen Werten abweichen, da als Einflussfaktor neben den Simulationsparametern auch noch systembedingte Einflüsse (Auslastung durch andere Programme, etc.)

4. Inhomogene Magnetfelder $\mathcal{B}(x)$

| Prozessor | AMD Phenom X4 940 | 2 x AMD Opteron 2352 | Intel Core i7 965 |
|-----------------------------|----------------------|----------------------|-------------------|
| Architektur | Deneb | Barcelona | Bloomfield |
| Core - Speed [GHz] | 3.0 | 2.1 | 3.2 |
| Anzahl Kerne | 4 | 8 | 4 |
| Anzahl Threads | 4 | 8 | 8 |
| Integrationsroutine[h] | 30 | 24 | 15 |
| Jackknife [h] | 50 | 36 | 27 |
| vollständige Berechnung [d] | 3.3 | 2.5 | 1.8 |

Tabelle 4.2.: Durchschnittliche Rechenzeit zur Berechnung der Phasengeschwindigkeit.

eine Rolle spielen. Innerhalb der numerischen Routinen beansprucht die numerische Integration den Großteil der Rechenzeit, da diese aufgrund des Konvergenzverfahrens nicht parallelisiert werden kann.

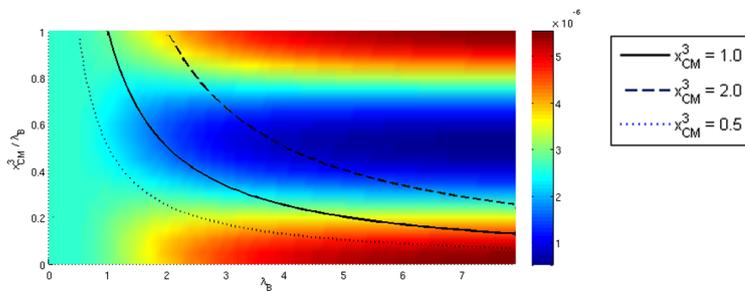
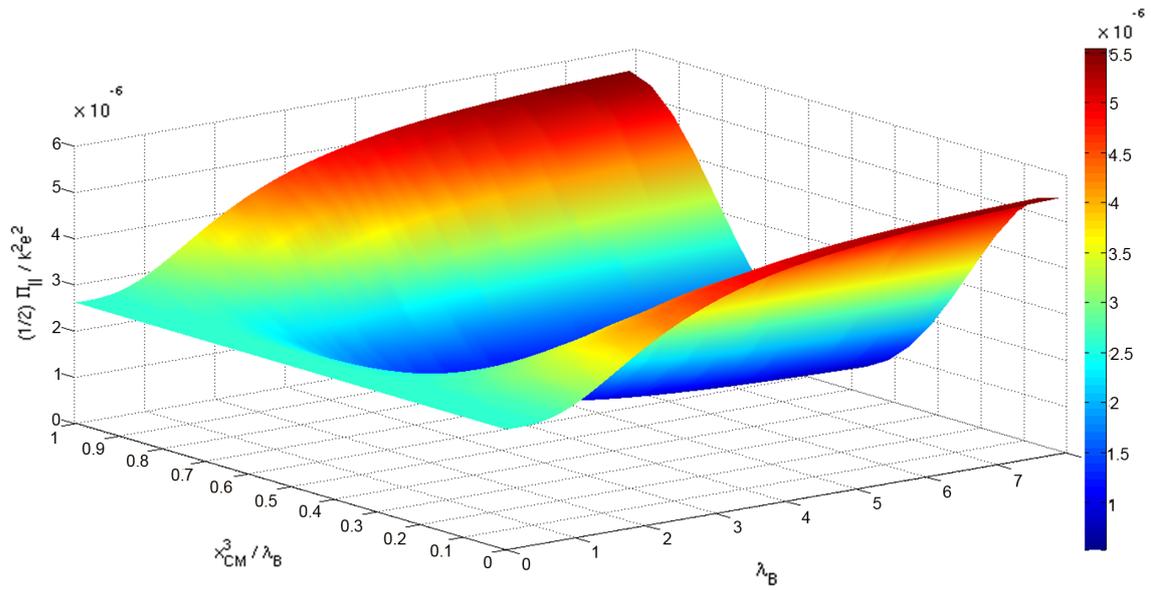


Abbildung 4.5.: Verschiebung der Phasengeschwindigkeit in einem Bereich $\phi \in [0, 2\pi]$. Beide Graphen zeigen eine Ausprägung von Extrema im Bereich großer Wellenlängen, ermöglichen jedoch keine Rückschlüsse auf die Effekte auf Skala der Comptonwellenlänge.

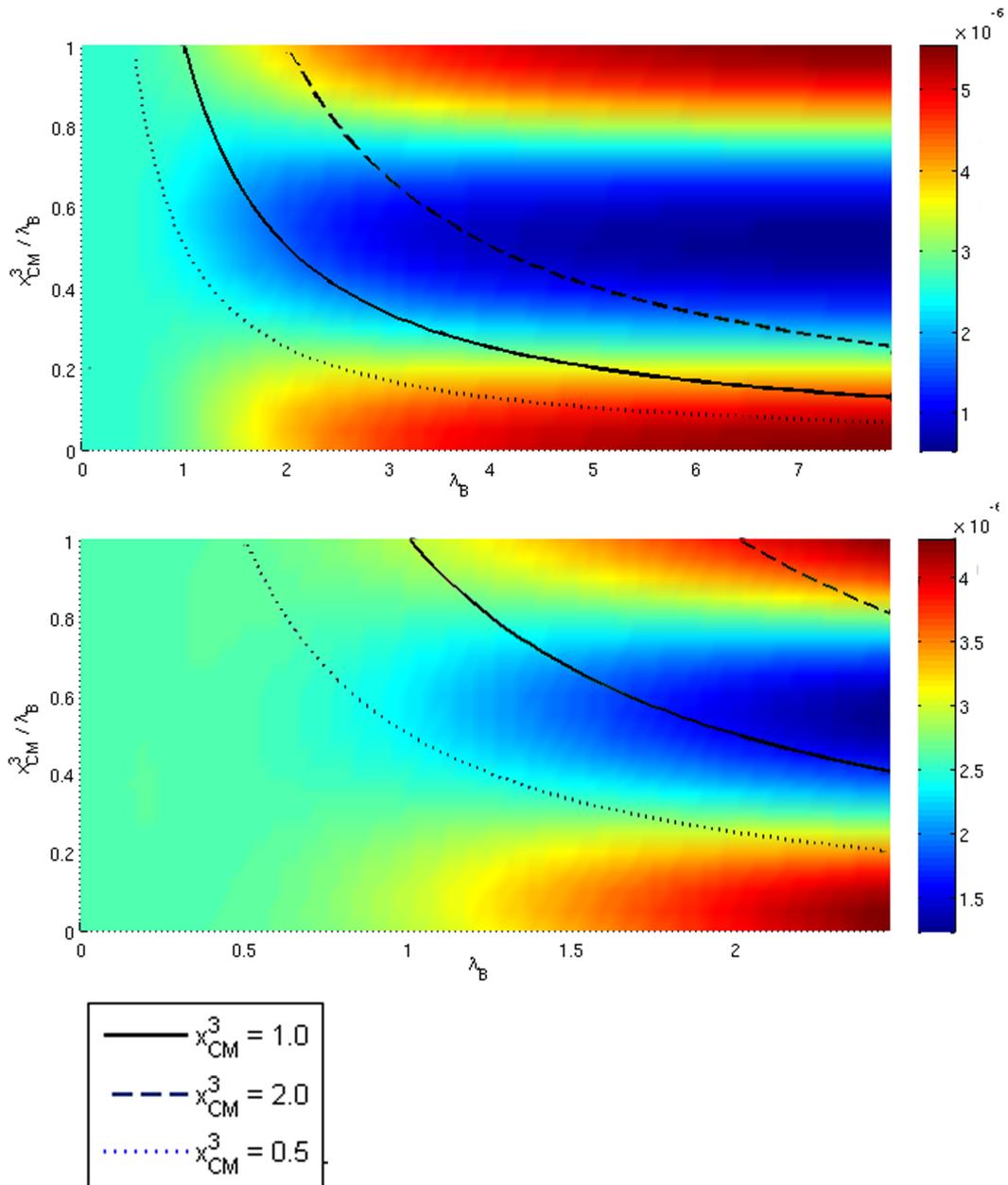


Abbildung 4.6.: Vergrößerung der Wellenlängenaufösung λ_B von einer Schrittweite 0.1 \rightarrow 0.03.

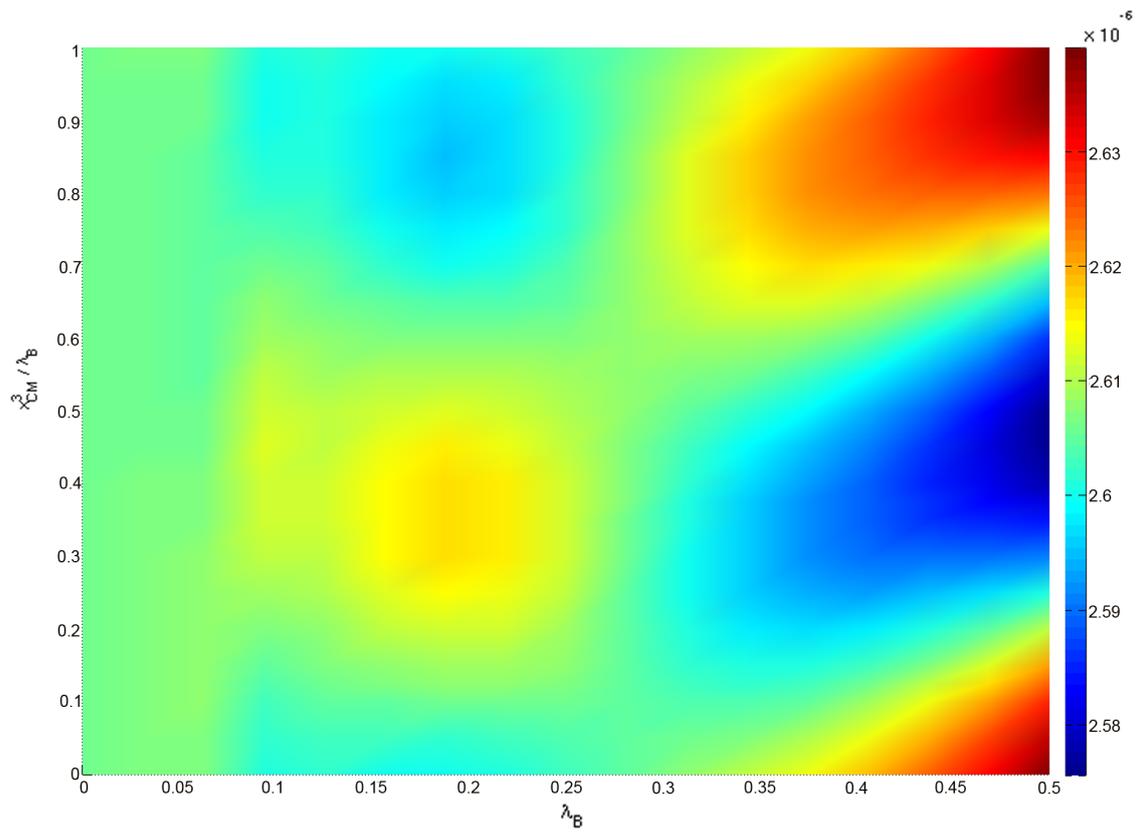


Abbildung 4.7.: Vergrößerte Darstellung des vorderen Wellenlängenbereiches bei einer Schrittweite von 0.03. Es ist im Wellenlängenbereich auf Skala der Comptonwellenlänge ebenfalls eine Ausprägung von Extrema zu erkennen, die genau um $\Delta\phi = \pi$ zu denen bei großen Wellenlängen verschoben sind. In der Abbildung erkennt man außerdem, dass der Effekt der räumlichen Inhomogenität wesentlich kleiner ist als der bei großen Wellenlängen.

5. Zusammenfassung und Ausblick

5.1. Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es den 2-Punkt Korrelator $\Pi^{\mu\nu}$ der Vakuumpolarisation unter Berücksichtigung von räumlich inhomogenen Magnetfelder mit Hilfe des Weltlinienformalismus zu untersuchen. Dieser Formalismus wurde zuvor lediglich auf die Untersuchung der effektive Wirkung Γ oder von Energiezuständen angewendet und wird im Rahmen dieser Arbeit erstmals zu Bestimmung von Korrelationsfunktionen eingesetzt. Hierzu ist im ersten Schritt, in Kapitel 2, der Polarisationsensor auf dem Vakuum, das heißt, unter Abwesenheit von elektromagnetischen Feldern behandelt worden. Mit Hilfe des numerischen Verfahrens war eine gute Approximation an die analytischen Werte möglich. Die analytische Lösung von $\Pi^{\mu\nu}$ konnte, ausgehend von der Arbeit [21], mit der Methode der Greenschen Funktion generiert werden (Abschnitt 2.1.3). Die numerischen Lösungen in Abschnitt 2.2 wurden dabei zunächst mit rein euklidischen Parametern berechnet. Nachdem die Simulation auf dem Vakuum zu einem positiven Ergebnis hinsichtlich der Anwendung des Weltlinienformalismus geführt hat, konnte diese auf konstante Felder erweitert werden. In Kapitel 3 war die Vorgehensweise zunächst die gleich wie auf dem Vakuum, wobei auch in diesen Fall der Test mit rein euklidischen Parametern erfolgreich durchgeführt werden konnte (Abschnitt 3.2). Um eine Behandlung von physikalischen Problemen im Rahmen des Formalismus zu ermöglichen, wurden in Abschnitt 3.3, Minkowskiwertige Parameter in Form des Photonenvektors k , an die numerischen Methoden übergeben. Dies führte zunächst zu einem erhöhten numerischen Fehler und einer erhöhten Streuung einzelner Ergebnisse, was jedoch mit einer Vergrößerung des Ensembles von Weltlinien kompensiert werden konnte. Die Ergebnisse in Abschnitt 3.3 zeigen, dass eine Behandlung des 2-Punkt Korrelators auch mit Minkowskiwertigen Größen im Rahmen des Weltlinienformalismus möglich ist. Da auch im Fall des konstanten Feldes es möglich war die numerischen Ergebnisse mit analytischen zu vergleichen, musste vor den Übergang zu inhomogenen Feldern eine Untersuchung der Stabilität der Algorithmen (Abbildungen 3.5 und 3.5) durchgeführt werden. Vor allem die Schwierigkeit bei der Renormierung des Integrals über die Eigenzeit T , bei der es zu einem Versagen der numerischen Bestimmung der Counterterme durch eine erhöhte Streuung der Messpunkte kommen konnte, wurde durch eine solche Untersuchung kompensiert. Im nächsten Schritt wurden räumlich inhomogene Felder mit einem kosinusförmigen inhomogenen Anteil untersucht und dabei zunächst die Grenzfälle $\lambda_B \rightarrow 0$ und $\lambda_B \rightarrow \infty$ betrachtet. Dabei konnte in Abschnitt 4.2 durch die Simulation gezeigt werden, dass in im Fall großer Frequenzen λ_B die Verschiebung der Phasengeschwindigkeit gegen das Ergebnis für ein konstantes

Magnetfeld der Stärke $B_0 + B_1$ konvergiert. In diesem Grenzfall liefert somit die Näherung mit einem mittleren konstanten Feld eine gute Näherung und bedeutet, dass die Ergebnisse für die einzelnen Brechzahlen n_{\parallel} und n_{\perp} mit denen des konstanten Feldes korrelieren. Im Bereich der Comptonwellenlänge λ_C hingegen, zeigte sich ein Effekt, der nicht mit Hilfe einer lokalen konstanten Feld Näherung bestimmt werden kann und nur durch Behandlung der vollständigen Inhomogenität innerhalb der 2-Punkt Funktion zu erkennen ist. Durch Abbildung 4.7 war es aber möglich, diese Verschiebung der Phasengeschwindigkeit zu verdeutlichen. Es ist darin zu erkennen, dass der gesuchte Effekt im wesentlichen einige Größenordnungen unterhalb des Effektes bei großen Wellenlängen liegt und nur sehr schwer numerisch zu bestimmen ist, weil der numerische Fehler der einzelnen Messpunkte größer ist als der zu erkennende Einfluss der räumlichen Inhomogenität. Jedoch treten die einzelnen Extrema nicht zufällig auf sondern sind genau um einen Phasenwinkel von π zu denen bei großen Wellenlängen verschoben und besitzen die selbe Periodizität. Damit zeigen die bisherigen numerischen Ergebnisse erstmalig, dass es auf der Skala der Comptonwellenlänge zu einer zusätzlichen Variation des Brechungsindex kommt und somit ein Einfluss der räumlichen Inhomogenität nachweisbar ist.

5.2. Ausblick

Da der Effekt auf der Skala der Comptonwellenlänge unterhalb des numerischen Fehlers liegt, ist es notwendig die Untersuchung mit weiteren statistischen Ensembles durchzuführen. Auf diese Weise kann die Erscheinung mit hoher Wahrscheinlichkeit einem physikalischen Effekt zugeordnet werden. Außerdem ist eine Simulation von $\Pi^{\mu\nu}$ auf räumlich inhomogenen Feldern für Photonen, die Parallel zur Inhomogenität des Feldes verlaufen, notwendig. Im nächsten Schritt wird die Untersuchung der vollständigen SQED, das heißt unter Berücksichtigung von elektrischen Feldern E von Interesse sein. Wobei die räumliche Inhomogenität nicht auf das magnetische Feld beschränkt werden muss. Kann auch für diesen allgemeineren Fall eine Anwendung des Weltlinienformalismus zur Berechnung der Korrelationsfunktion bestätigt werden, ist eine Anwendung auf die vollständige QED zu untersuchen. Aber auch eine Behandlung von Problemen aus den Bereich der QCD kann dabei in Betracht gezogen werden.

Literaturverzeichnis

- 1 HEINZL, Thomas ; ILBERTON, Anton: Exploring high-intensity QED at ELI. (2009). <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2009-00113-x>. – DOI 10.1140/epjd/e2009-00113-x (document), 1, 1.1
- 2 KARUZA, Marin: PVLAS experiment: Measurement of optical properties of quantum vacuum. In: *PVLAS Collaboration* (2006), March (document), 1.2
- 3 HEINZL, Thomas u. a.: On the observation of vacuum birefringence. In: *Opt. Commun.* 267 (2006), S. 318 – 321 (document), 1, 1.1.2, 1.4
- 4 EINSTEIN, Albert: (1921). http://www.bhm.ch/de/news_04a.cfm?bid=4&jahr=2006 (document), 1.5
- 5 SAUTER, Fritz: Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs. In: *Z. Phys.* 69 (1931), S. 742–764 1
- 6 TOLL, John S.: *The Dispersion relation for light and its application to problems involving electron pairs*, Princeton University, Diss., 1952 1, 3
- 7 MARKLUND, Mattias ; LUNDIN, Joakim: Quantum Vacuum Experiments Using High Intensity Lasers. (2008). <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2009-00169-6>. – DOI 10.1140/epjd/e2009-00169-6 1
- 8 ZAVATTINI, E. u. a.: PVLAS: Probing vacuum with polarized light. In: *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 164 (2007), S. 264–269. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2006.11.096>. – DOI 10.1016/j.nuclphysbps.2006.11.096 1.1.1
- 9 GNEDIN, Yuri N. ; PIOTROVICH, M. Y. ; NATSVLISHVILI, T. M.: PVLAS Experiment: Some Astrophysical Consequences. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 374 (2007), S. 276–281. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.11159.x>. – DOI 10.1111/j.1365-2966.2006.11159.x 1.1.1
- 10 RONCADELLI, Marco: Behind Pvlas. (2007) 1.1.1
- 11 KARUZA, Marin: *Precision ellipsometry at PVLAS*. http://axion-wimp2007.desy.de/e30/e108/talk_karuza.pdf. Version: June 2007 1.3a, 1.3b
- 12 FLIESSBACH, Torsten: *Allgemeine Relativitätstheorie*. Bd. 5. Elsevier, 2006 1.2
- 13 RYDER: *Quantum Field Theory*. Second Edition. Cambridge University Press, 1996 1.2.1, 1.3.1, 1.3.1

- 14** GIES, Holger: Vorlesung Quantenfeldtheorie. In: *Friedrich Schiller Universität* (2008) 1.3.1
- 15** SCHMIDT, Michael G. ; SCHUBERT, Christian: The Worldline path integral approach to Feynman graphs. (1994) 1.4
- 16** SCHMIDT, Michael G. ; SCHUBERT, Christian: Worldline Green functions for multi-loop diagrams. In: *Phys. Lett. B*331 (1994), S. 69–76. [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(94\)90944-X](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(94)90944-X). – DOI 10.1016/0370-2693(94)90944-X 1.4
- 17** GAGNE, Darius G.: The Worldline formalism. . – UMI-97-21322 1.4
- 18** KLINGMUELLER, Klaus: Pair Production on the Worldline. In: *Diplomarbeit* (2004) 1.4, 1.5, 2.1.1
- 19** KOCH, Katrin: *Vakuumfluktuationen und nichtlineare Elektrodynamik*, Friedrich Schiller Universität, Diplomarbeit 1.5
- 20** HEISENBERG, W. ; EULER, H.: Consequences of Dirac’s theory of positrons. In: *Z. Phys.* 98 (1936), S. 714–732 1.5
- 21** SCHUBERT, Christian: Perturbative quantum field theory in the string-inspired formalism. In: *Phys. Rept.* 355 (2001), S. 73–234. [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00013-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00013-8). – DOI 10.1016/S0370-1573(01)00013-8 2.1, 2.1.3, 5.1, C.2
- 22** SCHUBERT, Christian: Vacuum polarisation tensors in constant electromagnetic fields. I. In: *Nucl. Phys. B*585 (2000), S. 407–428. [http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213\(00\)00423-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0550-3213(00)00423-5). – DOI 10.1016/S0550-3213(00)00423-5 2.1, 3.1, 3.1.1, C.4
- 23** GIES, Holger ; LANGFELD, Kurt ; MOYAERTS, Laurent: Casimir effect on the worldline. In: *JHEP* 06 (2003), S. 018 2.1.4
- 24** NOLTING, Wolfgang: *Grundkurs Theoretische Physik 5/1 - Quantenmechanik Grundlagen*. Bd. 06. Springer Verlag Berlin, 2004 2.1.4
- 25** TSAI, Wu-yang ; ERBER, Thomas: Photon Pair Creation in Intense Magnetic Fields. In: *Phys. Rev. D*10 (1974), S. 492. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.10.492>. – DOI 10.1103/PhysRevD.10.492 3
- 26** TSAI, Wu-yang ; ERBER, Thomas: The Propagation of Photons in Homogeneous Magnetic Fields: Index of Refraction. In: *Phys. Rev. D*12 (1975), S. 1132. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.12.1132>. – DOI 10.1103/PhysRevD.12.1132 3
- 27** GIES, Holger: Probing the quantum vacuum. Perturbative effective action approach in QED and QCD and its applications. 3.1, 3.3.1, 3.3.1, 3.3.1

- 28** AHLERS, M. ; GIES, H. ; JAECKEL, J. ; REDONDO, J. ; RINGWALD, A.: Laser experiments explore the hidden sector. In: *Phys. Rev. D* 77 (2008), S. 095001. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.77.095001>. – DOI 10.1103/PhysRevD.77.095001
4
- 29** NOLTING, Wolfgang: *Grundkurs Theoretische Physik 4*. Bd. 5. Springer Verlag Berlin, 2005 A.1
- 30** KUYPERS, Friedhelm: *Klassische Mechanik*. Bd. 7. Auflage. Wiley-VCH, 2005 A.1
- 31** BRONSTEIN: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2005 C.2
- 32** LÜSCHER, Martin: *User guide for ranlx and ranlx.d*, 1997 F
- 33** WOLF, Jürgen: *C++ von A bis Z*. Galileo Computing, 2008 F.2

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit

Vakuumpolarisation in räumlich inhomogenen Magnetfeldern

selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Jena, den 13. Januar 2010

LARS RÖSSLER

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Diplomarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, den 13. Januar 2010

LARS RÖSSLER

Anhang

A. Effektive Wirkung und Legendre Transformation

A.1. Legendre Transformation

Als Legendre¹ Transformation wird eine mathematische Operation bezeichnet, die eine Funktion $f(x)$ in eine Funktion $g(u)$ transformiert. Die neue Funktion $g(u)$ beschreibt dabei die Legendretransformierte von $f(x)$, wobei die Variable u als neuer Parameter ausgehend von der alten Funktion mit $u = \frac{df}{dx}$ definiert wird. Mathematisch ist diese Art der Operation durch Gleichung (A.1) beschrieben, in der sowohl f als auch g reellwertige Funktionen darstellen.

$$g = \sup_x \left\{ \frac{df}{dx} x - f \right\} \quad (\text{A.1})$$

Bei einer Anwendung dieser Gleichung auf Funktionen innerhalb der Quantenfeldtheorie, muss die totale Ableitung der Funktion $f(x)$ in eine Funktionalableitung übergehen. Im Fall der effektiven Wirkung $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$, die die Legendretransformierte des Schwingerfunktionals $W[J]$ ist, folgt ausgehend von (A.1) die Gleichung (A.2) mit dem Quellenfeld $J(x)$ und der neu definierten Variable $\phi_{\text{cl}}(x)$.

$$\Gamma[\phi_{\text{cl}}] = \sup_J \left\{ \int d^D x \frac{\delta W}{\delta J} J - W \right\} \quad (\text{A.2})$$

Neben der Berechnung der effektiven Wirkung in der Quantenfeldtheorie, gibt es eine Vielzahl von Anwendung dieser mathematischen Operation in der Physik. In der klassischen Mechanik wird der Übergang vom Lagrange- zum Hamiltonformalismus durch eine Legendretransformation realisiert. Die Funktion $f(x)$ kann dabei mit der Lagrangefunktion $L(x, \dot{x}, t)$ und $g(u)$ mit der Hamiltonfunktion $H(x, p, t)$ identifiziert werden. Auch in der Thermodynamik werden die einzelnen thermodynamischen Potentiale über eine Legendretransformationen erzeugt. Genauere Informationen zu den einzelnen Anwendungen innerhalb der theoretischen Physik sind unter anderem in [29] oder [30] zu finden. Der Zusammenhang zwischen den Funktionen g und f ist in Gleichung (A.3), für

¹Adrien - Marie Legendre: französischer Mathematiker, der in verschiedenen Bereichen der Mathematik arbeitete und zum Beispiel die Methode der kleinsten Quadrate entwickelte.

die Differentiale dg und df dargestellt.

$$\begin{aligned}
 df &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \rightarrow \sum_{i=1}^N u_i dx_i \\
 dg &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial g}{\partial u_i} du_i \rightarrow \sum_{i=1}^N x_i du_i \\
 &\rightarrow df = \sum_{i=1}^N d(u_i x_i) - dg
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

A.2. Effektive Wirkung

Die effektive Wirkung Γ ergibt sich über Legendretransformation aus der Schwingerfunktion $W[J]$. Dabei folgt für die Gleichung (A.1) innerhalb der Feldtheorie Gleichung (A.4). Die Funktionen $W[J]$ und $\Gamma[\phi_{\text{cl}}]$ sind dabei Funktionale der D -dimensionalen Funktionen $J(x)$ und $\phi_{\text{cl}}(x)$. Wobei sich $\phi_{\text{cl}}(x)$ analog zum Parameter u aus Abschnitt A.1 durch funktionale Ableitung der Schwingerfunktion W nach J ergibt.

$$\Gamma[\phi_{\text{cl}}] = \sup_J \left\{ \int \frac{\delta W[J]}{\delta J} J - W[J] \right\} \tag{A.4}$$

Im Nachfolgenden soll kurz gezeigt werden, wie ausgehend von der Funktion $Z[J]$ die effektiven Wirkung Γ folgt. Hierzu wird die Variablensubstitution $\phi \rightarrow \phi + \eta$ durchgeführt und anschließend die Wirkung S in einer Taylorreihe um das neue Feld $\phi = \phi_{\text{cl}}$ entwickelt.

$$\begin{aligned}
 Z[J] &= \int D\phi e^{-S[\phi] + \int J\phi} \\
 &= \int D\phi e^{-S[\phi + \eta] + \int J(\phi + \eta)} \quad \phi \rightarrow \phi + \eta \\
 &\rightarrow S[\phi + \eta] = S[\phi_{\text{cl}}] + \int \frac{\delta S}{\delta \phi} \Big|_{\phi = \phi_{\text{cl}}} \eta + \frac{1}{2} \iint \eta \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} \Big|_{\phi = \phi_{\text{cl}}} \eta + \mathcal{O}(\eta^3) \\
 &\approx \int D\eta e^{-S[\phi_{\text{cl}}] - \frac{1}{2} \iint \eta H_W \eta + \int J\phi_{\text{cl}}} = e^{-S[\phi_{\text{cl}}] + \int J\phi_{\text{cl}}} \int D\eta e^{-\frac{1}{2} \iint \eta H_W \eta} \\
 &\rightarrow Z[J] e^{-\int J\phi_{\text{cl}} + S[\phi_{\text{cl}}]} = e^{W - \int J\phi_{\text{cl}} + S[\phi_{\text{cl}}]} \approx \frac{1}{\sqrt{\det H_W}} \\
 &\rightarrow e^{-\Gamma} \approx \frac{1}{\sqrt{\det H_W}} e^{-S} \\
 &\rightarrow \Gamma[\phi_{\text{cl}}] \approx S[\phi_{\text{cl}}] + \frac{1}{2} \ln \det H_W
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Das resultierende Pfadintegral über den Parameter η , kann mit Hilfe des Gaußschen Integrals gelöst werden und führt auf die bekannte Approximation der effektiven Wirkung, die in dieser Gleichung bis zur ersten Ordnung angegeben ist.

B. Weltliniennumerik am Beispiel der ϕ^4 -Theorie

Ziel dieses Kapitel ist es die Methode der Weltliniennumerik anhand eines Beispiels einzuführen. In Kapitel 1 wurden die grundlegenden Schritte der Weltliniennumerik erläutert, und die wichtigsten Gleichungen zur Behandlung einer Theorie im Rahmen dieses numerischen Verfahrens aufgezeigt. An dieser Stelle sollen anhand der skalaren ϕ^4 -Theorie die wichtigsten Rechenschritte erläutert werden. Diese Wechselwirkungstheorie weist dabei eine große Ähnlichkeit zur Theorie des Standardmodells auf, das im Rahmen der QCD behandelt wird. Der erste Schritt zur numerischen Behandlung einer Quantenfeldtheorie stellt die Formulierung des Hamiltonoperators im euklidischen Raum dar.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4 \quad (\text{B.1})$$

Hierzu wird die Transformation $t \rightarrow i\tau$ in Gleichung (B.1) durchgeführt, woraus bei einer euklidische Formulierung der Lagrangedichte Gleichung (B.2) folgt. Im Gegensatz zu der Definition in Kapitel 1 wurde die Minkowskimetrik mit $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$ verwendet, was bei der Auswertung des Skalarproduktes zu berücksichtigen ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi + \frac{1}{2}\partial_t\phi\partial^t\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4 \\ &= -\frac{1}{2}\partial_i\phi\partial^i\phi - \frac{1}{2}\partial_\tau\phi\partial^\tau\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4 \\ &= -\left\{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4\right\} \\ &= -\mathcal{L}_E \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Im nächsten Schritt muss der Korrekturterm erster Ordnung zur effektive Wirkung bestimmt werden, was die Auswertung des Ausdruckes H_W erfordert. Da im Rahmen dieser Rechnung eine partielle Integration durchgeführt wird, ist zum besseren Verständnis die Einführung eines Dummyfeldes ψ vorgenommen worden, welches bei der Lösung wegge-

lassen werden kann.

$$\begin{aligned}
 H_W \psi(z) &= \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} \psi(z) \\
 &= \frac{\delta^2}{\delta \phi_z \delta \phi_x} \int d^D y \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_y \partial^\mu \phi_y + \frac{1}{2} m^2 \phi_y^2 + \frac{g}{4!} \phi_y^4 \right\} \psi(z) \\
 &= \frac{\delta}{\delta \phi_z} \int d^D x \left\{ -\partial^\mu \partial_\mu \phi_x + m^2 \phi_x + \frac{g}{3!} \phi_x^3 \right\} \psi(x) \\
 &= \left\{ -\partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \frac{g}{2} \phi_x^2 \right\} \psi(z) \\
 \rightarrow H_W &= -\partial^2 + m^2 + \frac{g}{2} \phi_z^2 = p^2 + m^2 + \frac{g}{2} \phi_z^2
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Aus der klassischen Mechanik ist der Zusammenhang zwischen Hamilton- und Lagrange-funktion bekannt. Die Hamiltonfunktion ergibt sich dabei durch Legendre-Transformation der Lagrangefunktion, wobei der neu eingeführte Parameter des generalisierten Impulses über $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ mit den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{x} zusammenhängt. Die Anwendung dieses Zusammenhangs auf den Hamilton der Weltliniennumerik H_W , ergibt für die Lagrangefunktion $L_W = \frac{1}{4} \dot{x}^2 - m^2 - \frac{g}{2} \phi^2$. Zu beachten ist, dass die Ableitung des Parameters x in der Funktion für L_W nach dem Zeitparameter t geschieht. Innerhalb der Weltliniennumerik soll hingegen der imaginäre Zeitparameter τ verwendet werden, was eine Transformation nach $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = i \frac{dx}{d\tau}$ erfordert.

$$\begin{aligned}
 \Gamma^1 &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int_{x(0)=x(-iT)} \mathcal{D}x \left\{ e^{i \int_0^{-iT} dt L_W} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x \left\{ e^{\int_0^T d\tau L_W} \right\}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Das Einsetzen der Lagrangefunktion der Weltliniennumerik in (B.4) führt somit auf Gleichung (B.5), in der das Feld ϕ_x noch explizit vom Parameter $x(\tau)$ abhängt.

$$\Gamma^1 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x e^{-\int_0^T d\tau \left\{ \frac{1}{4} \dot{x}^2 + \frac{g}{2} \phi_x^2 \right\}} \tag{B.5}$$

Diese Gleichung bildet die Grundlage zur numerischen Betrachtung des Korrekturterms 1. Ordnung zur effektiven Wirkung der ϕ^4 -Theorie im Rahmen der Weltliniennumerik. Bevor jedoch zu einer diskretisierten Form dieses Ausdruckes übergegangen werden kann, sollte eine Betrachtung der Längendimension der relevanten Parameter durchgeführt werden, da dies für eine spätere physikalische Interpretation der einzelnen Resultate von zentraler Bedeutung ist. In Tabelle B.1 sind die Dimensionen der einzelnen Größen im

System der natürlichen Einheiten, das heißt $c = \hbar = 1$, zusammengetragen. Dabei sind die Angaben für $D = 4$ Dimensionen von besonderem Interesse, da diese Dimensionsanzahl der bekannten physikalischen Realität entspricht und im Weiteren die Dimension der Parameter in gebräuchliche Einheitensysteme (SI- oder CGS- System) übersetzt werden kann. Im letzten Schritt ist es sinnvoll in Gleichung (B.5) eine Fixierung der einzelnen

| Parameter | Längendimension [D - dimensional] | Längendimension [4 - dimensional] |
|---------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| x^μ | L | L |
| m | L^{-1} | L^{-1} |
| ϕ | $L^{-\frac{D-2}{2}}$ | L^{-1} |
| \mathcal{L} | L^{-D} | L^{-4} |
| g | L^{D-4} | 1 |
| L_W | L^{-2} | L^{-2} |
| T, τ | L^2 | L^2 |

Tabelle B.1.: Längendimensionen der einzelnen Parameter innerhalb der ϕ^4 -Theorie

Weltlinien (Loops) an einen spezifischen Punkt x_{CM} vorzunehmen, der auch als Massenschwerpunkt dieses Ensembles bezeichnet wird. Außerdem ist ein Übergang zu einem dimensionslosen Parameter y im Rahmen der numerischen Auswertung notwendig, um eine zusätzliche Dimensionsabhängigkeit innerhalb des Verfahrens zu vermeiden. Mit Hilfe der Transformation $x(\tau) = \sqrt{T}y\left(\frac{\tau}{T}\right) + x_{\text{CM}}$ und einer expliziten Betrachtung der Normierung ergibt sich aus Gleichung (B.5) der Ausdruck (B.6).

$$\begin{aligned}
 \Gamma^1 &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int_{x(0)=x(T)} \mathcal{D}x e^{-\int_0^T d\tau \left\{ \frac{1}{4} \dot{x}^2 + \frac{g}{2} \phi_x^2 \right\}} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} e^{-m^2 T} \int d^D x_{\text{CM}} \int_{x(0)=x(T)}^{\text{CM}} \mathcal{D}x e^{-\int_0^T d\tau \left\{ \frac{1}{4} \dot{x}^2 + \frac{g}{2} \phi_x^2 \right\}} \\
 \Gamma^1 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi T)^2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int dx_{\text{CM}}^4 e^{-m^2 T} \left\{ \frac{\int_{y(0)=y(1)}^{\text{CM}} \mathcal{D}y e^{-\int_0^1 d\tau \left\{ \frac{1}{4} \dot{y}^2 + \frac{gT}{2} \phi^2(\sqrt{T}y + x_{\text{CM}}) \right\}}}{\int_{y(0)=y(1)}^{\text{CM}} \mathcal{D}y e^{-\int_0^1 d\tau \left\{ \frac{1}{4} \dot{y}^2 \right\}}} \right\} \quad (\text{B.6})
 \end{aligned}$$

B.1. Betrachtung der Normierung

Wie in Kapitel 1 schon erwähnt worden ist liegt in den einzelnen Gleichungen eine Normierung auf die Theorie des freien Teilchens mit den Hamiltonoperator H_0 vor. Diese Normierung wurde jedoch bei der Betrachtung der einzelnen Rechenschritte weggelassen

und soll an dieser Stelle gesondert betrachtet werden. In den nachfolgenden Gleichungen wird die Berechnung des Normierungsparameters vorgeführt, was über eine Auswertung der Spur $Tr[e^{-H_0T}]$ erfolgt:

$$\begin{aligned}
 Tr[e^{-H_0T}] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}x e^{i \int_0^{-iT} dt L_W^0} = \mathcal{N} e^{-m^2T} \int \mathcal{D}x e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2} \\
 &= \int d^D x \langle x | e^{-H_0T} | x \rangle \\
 &= \int d^D x \iint d^D q d^D p \langle x | p \rangle \langle p | e^{-(\partial^2 + m^2)T} | q \rangle \langle q | x \rangle \\
 &= \int d^D x \iint \frac{d^D q d^D p}{(2\pi)^D} e^{ipx} \langle p | e^{-(p^2 + m^2)T} | q \rangle e^{-iqx} \\
 &= e^{-m^2T} \int \frac{d^D p}{2\pi} e^{-p^2T} = e^{-m^2T} \frac{1}{(4\pi T)^{D/2}}
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integrals und der Fouriertransformation, die den Übergang in den Impulsraum ermöglicht, ergibt sich für die Normierung \mathcal{N} der Gleichungen der Weltliniennumerik Gleichung (B.7).

$$\mathcal{N} = \frac{1}{(4\pi T)^{D/2}} \left\{ \int \mathcal{D}x e^{-\int_0^T d\tau \frac{1}{4} \dot{x}^2} \right\}^{-1} \quad (\text{B.7})$$

C. Berechnung des N-Punkt Korrelators auf den Vakuum

Ausgangspunkt für die Berechnung der N-Punkt Funktion (Korrelator) auf den Vakuum stellt die Entwicklung des Korrekturterms erster Ordnung Γ^1 der effektiven Wirkung Γ nach dem Eichfeld A^μ dar, bei der dieses Feld durch ebene Wellen beschrieben wird.

$$\Gamma^1 = \sum_{i=0}^N \frac{1}{N!} \int \dots \int d^D x_1 \dots d^D x_N \frac{\delta^N \Gamma^1}{\delta A^{\mu_1} \dots \delta A^{\mu_N}} A^{\mu_1} \dots A^{\mu_N}$$

Die Vektoreigenschaft des Eichfeldes wird vom Parameter ϵ_i bestimmt. Bei der Entwicklung der Exponentialfunktion nach ebenen Wellen, entfällt der Faktor $1/N!$, da alle $N!$ möglichen Permutationen berücksichtigt werden müssen. Eine Vereinfachung der Gleichung ist über die Einführung einer Vertexfunktion $V[k_i, \epsilon_i] = \int_0^T d\tau_i \epsilon_i^\mu \dot{x}_\mu e^{ik_i x(\tau_i)}$ möglich. Durch Ausführung der einzelnen Rechenschritte ergibt sich Gleichung C.1.

$$\begin{aligned} e^{-ie \int_0^T d\tau A_\mu \dot{x}^\mu} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-ie)^N}{N!} \int_0^T d\tau_1 \dots \int_0^T d\tau_N A_{\mu_1} \dot{x}^{\mu_1} \dots A_{\mu_N} \dot{x}^{\mu_N} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} (-ie)^N \int_0^T d\tau_1 \dots \int_0^T d\tau_N \epsilon_{\mu_1} \dot{x}^{\mu_1} e^{ik_1 x_1} \dots \epsilon_{\mu_N} \dot{x}^{\mu_N} e^{ik_N x_N} \quad (C.1) \end{aligned}$$

Mit deren Hilfe und der gleichzeitigen Verschiebung um den Massenschwerpunkt durch die Transformation $x \rightarrow x + x_{CM}$ folgt für den N-Punkt Korrelator $\Gamma[k_1, \epsilon_1, \dots, k_N, \epsilon_N]$ die nachfolgende Gleichung. Durch den Übergang in den Impulsraum muss für δ -Funktion eine Fouriertransformation¹ durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} \Gamma[\dots] &\sim (-ie)^N (2\pi)^D \delta(\sum_i k_i) \int_{x(0)=x(T)}^{CM} \mathcal{D}x \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \epsilon_i^\mu \dot{x}^\mu e^{ik_i x^\mu} e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2} \\ &\sim (-ie)^N (2\pi)^D \delta(\sum_i k_i) \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i \int_{x(0)=x(T)}^{CM} \mathcal{D}x e^{\epsilon_i \dot{x} + ik_i x} e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \dot{x}^2} \Big|_{lin(\epsilon_i)} \end{aligned}$$

¹ $(2\pi)^D \delta(\sum_i k_i) = \int dx_{CM} e^{ix_{CM} \sum_i k_i}$

Zur Vereinfachung der Darstellung ist in den Gleichungen die Integration über den Parameter der Eigenzeit T vorerst weggelassen wurden. Bei der anschließenden Auswertung der einzelnen Gleichungen ist darauf zu achten, dass diese Integration nach wie vor vorliegt. Durch Ausnutzung der Vertexfunktion kann das Pfadintegral und somit die N-Punkt Funktion auch geschrieben werden als:

$$\Gamma[k_1, \epsilon_1, \dots] = (-ie)^N \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \langle V[k_1, \epsilon_1] \dots V[k_N, \epsilon_N] \rangle \quad (\text{C.2})$$

C.1. Methode der Quadratischen Ergänzung

Die Methode der quadratischen Ergänzung ermöglicht es einzelne Integrale auf ein Gaussches Integral zurückzuführen, das anschließend gelöst werden kann. Innerhalb der Feldtheorie findet diese Methoden vor allem bei der Auswertung von Pfadintegralen eine Anwendung. Im ersten Teil soll am Beispiel eines Integrals (Gleichung C.4), für $D = 1$ Dimensionen, diese Methode angewendet werden. Das benötigte Gaussche Integral für diesen Fall ist in Gleichung C.3 dargestellt.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \quad (\text{C.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+ux} \quad (\text{C.4})$$

Bei der Anwendung des mathematischen Verfahren zur Lösung des Integrals in Gleichung C.4 wird auf die folgende Weise vorgegangen:

1. Prüfung ob eine Anwendung der Quadratischen Ergänzung möglich ist, das heißt, sich das jeweilige Integral auf die Form von Gleichung C.3 zurückführen lässt
2. Anwendung der quadratische Ergänzung über:

$$-\frac{1}{2}ax^2 + ux = -\frac{a}{2}\left(x^2 - 2\frac{u}{a}x\right) = -\frac{a}{2}\left(x - \frac{u}{a}\right)^2 + \frac{u^2}{2a}$$

3. Lösung des erhaltenen Gausschen Integrals mit Hilfe der Substitution $v = x - \frac{u}{a}$

Bei Ausführung der einzelnen Schritte ergibt sich für Gleichung C.3:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+ux} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}(x-\frac{u}{a})a(x-\frac{u}{a})} e^{\frac{u^2}{2a}} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{\frac{u^2}{2a}}$$

In Kapitel 2 muss zur analytische Lösung von $\Pi^{\mu\nu}$ auf den Vakuum das Pfadintegral in Gleichung 2.7 ausgewertet werden. Hierzu wird für die Ausdrücke \dot{x} eine Exponentialdarstellung verwendet, die es ermöglicht das daraus resultierende Integral über quadratischen Ergänzung zu lösen. Die Vorgehensweise ist identisch zu $D = 1$ Dimensionen und kann somit zur Auswertung des Pfadintegrals verwendet werden, womit für Gleichung 2.7 sich die Form in C.5 ergibt.

$$\int_{x(0)=x(T)}^{CM} \mathcal{D}x e^{-\frac{1}{4} \int_0^1 d\tau \left[x - 2 \sum_i \epsilon_i \left(\frac{d}{d\tau} \right)^{-1} - 2i \sum_i k_i \left(\frac{d}{d\tau} \right)^{-2} \right] \left[- \left(\frac{d}{d\tau} \right)^2 \right] \left[x - 2 \sum_j \epsilon_j \left(\frac{d}{d\tau} \right)^{-1} - 2i \sum_j k_j \left(\frac{d}{d\tau} \right)^{-2} \right]} e^{\sum_{i,j} [\epsilon_i \epsilon_j \left(\frac{d}{d\tau} \right)^0 + k_i k_j \left(\frac{d}{d\tau} \right)^{-2} - 2i k_i \epsilon_j \left(\frac{d}{d\tau} \right)^{-1}]}$$
 (C.5)

Um dieses Integral zu lösen, ist eine Einführung von Greenschen Funktionen $G_{B_{ij}}$ notwendig, die im nachfolgenden Abschnitt besprochen werden.

C.2. Greensche Funktion $G_{B_{ij}}$ auf den Vakuum

Zur Lösung des Pfadintegrals in Gleichung 2.7 des Weltlinienalgorithmus werden Greenschen Funktionen verwendet, die in [21] von Christian Schubert eingeführt worden. Im Rahmen der SQED sind diese Funktionen auf den Raum der periodischen Funktionen H_p definiert und werden nach Gleichung C.6 beschrieben.

$$\langle \tau_1 | \left[\frac{d}{d\tau} \right]^{-n} | \tau_2 \rangle = -\frac{T^{n-1}}{n!} B_n \left(\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{T} \right) \text{sign}^n(\tau_1 - \tau_2)$$
 (C.6)

Zur Auswertung von Gleichung C.6 ist die Kenntnis der Bernoulli - Polynome $B_n(x)$ notwendig, die sich nach [31] über Reihenentwicklung um $t = 0$ aus der nachfolgenden Funktion bestimmen lassen:

$$\begin{aligned} \frac{te^{tx}}{e^t - 1} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)t + (1 - 6x + 6x^2) \frac{t^2}{12} + \mathcal{O}(t^3) \\ \Rightarrow B_0(x) &= 1 \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2} \quad B_2(x) = \frac{1}{6} - x + x^2 \end{aligned}$$

Dabei wird nach Konvention ein Faktor zwei innerhalb der Definition berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_1 | \left[\frac{d}{d\tau} \right]^{-2} | \tau_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(|\tau_1 - \tau_2| - \frac{(\tau_1 - \tau_2)^2}{T} - \frac{T}{6} \right) =: \frac{1}{2} G_B \\
 \langle \tau_1 | \left[\frac{d}{d\tau} \right]^{-1} | \tau_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(\text{sign}(\tau_1 - \tau_2) - 2 \frac{(\tau_1 - \tau_2)}{T} \right) =: \frac{1}{2} \dot{G}_B \\
 \langle \tau_1 | \left[\frac{d}{d\tau} \right]^{-0} | \tau_2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{T} \right) =: \frac{1}{2} \ddot{G}_B
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

Mit Hilfe der Gleichungen C.7 und der Methode der quadratischen Ergänzung lässt sich somit das Pfadintegral zur Berechnung von Γ^1 schreiben als:

$$\int_{x(0)=x(T)}^{CM} \mathcal{D}x e^{\dots} = e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} [\epsilon_i \epsilon_j \ddot{G}_{Bij} + k_i k_j G_{Bij} - 2i k_i \epsilon_j \dot{G}_{Bij}]} \Big|_{\text{lin}(\epsilon_{i,j})}$$

Für die N-Punkt Funktion ergibt sich auf diese Weise Gleichung C.8 und kann über die Einschränkung $i, j = 1, 2$ auf 2.7 zurückgeführt werden.

$$\Gamma^1 = (-ie)^N (2\pi)^D \delta \left(\sum_i k_i \right) \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{e^{-m^2 T}}{(4\pi T)^{D/2}} \prod_{i=1}^N \int_0^T d\tau_i e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} [\epsilon_i \epsilon_j \ddot{G}_{Bij} + k_i k_j G_{Bij} - 2i k_i \epsilon_j \dot{G}_{Bij}]} \Big|_{\text{lin}(\epsilon_{i,j})} \tag{C.8}$$

C.3. Erweiterung der Greenschen Funktion auf konstante Felder

Der Ansatz zur Berechnung der Greenschen Funktion auf den Vakuum in Gleichung C.6 kann zur Behandlung eines konstantes Feldes, um dieses erweitern werden. Die Erweiterung der Gleichung wird durch einen Anteil mit den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ erreicht, womit die resultierende Funktion einen Tensorcharakter besitzt. Diese Eigenschaft muss bei der Auswertung der N-Punkt Funktion berücksichtigt werden. Ausgehend von C.7 folgt für die Greensche Funktion unter Hinzunahme eines konstanten Feldes:

$$\mathcal{G}_{B_{12}} = 2 \langle \tau_1 | (\partial_\tau^2 - 2ieF\partial_\tau)^{-1} | \tau_2 \rangle$$

Auch bei dieser Gleichung wird ein Faktor zwei berücksichtigt. Zur Lösung der Greenschen Funktion, wird diese auf die Form in Gleichung C.6 gebracht, was unter Verwendung der geometrischen Reihe und der Reihenentwicklung der Bernoulli-Funktionen auf

die folgenden Gleichungen führt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{B_{12}} &= 2\langle \tau_1 | (\partial_\tau^2 - 2ieF\partial_\tau)^{-1} | \tau_2 \rangle \\
&= 2\langle \tau_1 | \partial_\tau^{-2} \frac{1}{1 - 2ieF\partial_\tau^{-1}} | \tau_2 \rangle \\
&= 2 \sum_{j=0}^{\infty} \langle \tau_1 | \partial_\tau^{-(j+2)} (2ieF)^j | \tau_2 \rangle \\
&= -2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{T^{j-1} (2ieF)^{j-2} \text{sign}^j(\tau_1 - \tau_2)}{j!} B_j \left(\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{T} \right) \\
&= -2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^{j-1} (2ieF)^{j-2} \text{sign}^j(\tau_1 - \tau_2)}{j!} B_j \left(\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{T} \right) - \frac{1}{2e^2 F^2 T} + \frac{B_1 \left(\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{T} \right) \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)}{ieF} \\
&= -\frac{1}{ieF} \frac{\text{sign}(\tau_1 - \tau_2) e^{2ieF(\tau_1 - \tau_2)}}{e^{2ieFT \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)} - 1} - \frac{1}{2e^2 F^2 T} + \frac{B_1 \left(\frac{|\tau_1 - \tau_2|}{T} \right) \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)}{ieF}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Greenschen Funktion $\dot{G}_{B_{12}}$ auf den Vakuum und der Exponentialdarstellung der Sinusfunktion lassen sich diese Gleichungen weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sign}(\tau_1 - \tau_2) e^{2ieF(\tau_1 - \tau_2)}}{e^{2ieFT \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)} - 1} &= \frac{1}{e^{ieFT \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)}} \frac{\text{sign}(\tau_1 - \tau_2) e^{2ieF(\tau_1 - \tau_2)}}{e^{ieFT \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)} - e^{-ieFT \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)}} \\
&= \frac{\text{sign}(\tau_1 - \tau_2) e^{ieFT \left(\frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{T} - \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \right)}}{e^{ieFT \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)} - e^{-ieFT \text{sign}(\tau_1 - \tau_2)}} \\
&= \frac{e^{ieFT \left(\frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{T} - \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \right)}}{2i \sin eFT}
\end{aligned}$$

Für die Greensche Funktion des konstanten Feldes ergibt sich Gleichung C.9, die in Kapitel 3 angewendet wird. Der Tensor F ist an dabei nicht auf das konstante magnetische Feld beschränkt, sondern gilt für allgemeine konstante Felder innerhalb der skalaren Theorie.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{B_{12}} &= \frac{1}{2e^2 F^2 T} \left\{ \frac{eFT}{\sin eFT} e^{ieFT \left(\frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{T} - \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \right)} - 1 - ieFT \left(\frac{2(\tau_1 - \tau_2)}{T} - \text{sign}(\tau_1 - \tau_2) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2e^2 F^2 T} \left\{ \frac{eFT}{\sin eFT} e^{-ieFT \dot{G}_{B_{12}}} - 1 + ieFT \dot{G}_{B_{12}} \right\} \tag{C.9}
\end{aligned}$$

wichtige Eigenschaften der Greenschen Funktion:

- $G_{B_{ii}} = 0$ und $\dot{G}_{B_{ii}} = 1 \rightarrow \mathcal{G}_{B_{11}} = \mathcal{G}_{B_{22}} = \frac{1}{2e^2 F^2 T} \left\{ eFT \frac{\cos eFT}{\sin eFT} - 1 \right\}$
- $\dot{\mathcal{G}}_{B_{12}} = -\frac{i\ddot{G}_{B_{12}}}{2eF} \left\{ \frac{eFT}{\sin eFT} e^{-ieFT \dot{G}_{B_{12}}} - 1 \right\} \equiv \frac{i}{eFT} \left\{ \frac{eFT}{\sin eFT} e^{-ieFT \dot{G}_{B_{12}}} - 1 \right\}$
- $\dot{\mathcal{G}}_{B_{11}} = \dot{\mathcal{G}}_{B_{22}} = \frac{i}{eFT} \left\{ eFT \frac{\cos eFT}{\sin eFT} - 1 \right\}$
- $\ddot{\mathcal{G}}_{B_{12}} = \ddot{G}_{B_{12}} \frac{eFT}{\sin eFT} e^{-ieFT \dot{G}_{B_{12}}} \equiv -\frac{2}{T} \frac{eFT}{\sin eFT} e^{-ieFT \dot{G}_{B_{12}}}$

- $\mathcal{G}_{B_{12}} = \frac{1}{2e^2 F^2 T} \left\{ \frac{eFT}{\sin eFT} e^{ieFT\dot{G}_{B_{21}}} - 1 - ieFT\dot{G}_{B_{21}} \right\} \equiv \mathcal{G}_{B_{21}}^T$ mit $F^T = -F$
- $\dot{\mathcal{G}}_{B_{12}} = \frac{i}{eFT} \left\{ \frac{eFT}{\sin eFT} e^{ieFT\dot{G}_{B_{21}}} - 1 \right\} \equiv -\dot{\mathcal{G}}_{B_{21}}^T$
- $\ddot{\mathcal{G}}_{B_{12}} = -\frac{2}{T} \frac{eFT}{\sin eFT} e^{ieFT\dot{G}_{B_{21}}} \equiv \ddot{\mathcal{G}}_{B_{21}}^T$

C.4. Zerlegung der Greenschen Funktion in gerade und ungerade Anteile in der Eigenzeit

Zur Lösung der 2-Punkt Funktion in Kapitel 3 ist es notwendig die Greensche Funktion in gerade S und ungerade A Anteile in der Eigenzeit τ zu zerlegen. Der Grundgedanke dieses Schrittes besteht darin, dass bei späterer Integration über die Eigenzeit, bestimmte Integrale sich zu null ergeben können. Dabei beschränkt sich dieses Kapitel auf die Betrachtung von konstanten Magnetfeldern, wie sie in Kapitel 3 angewendet werden. Ausgangspunkt für die Zerlegung sind die Funktion f_{gerade} und $f_{ungerade}$, die von Christian Schubert in [22] verwendet worden.

$$\begin{aligned} f_{gerade}(F) &= \frac{1}{B^2} \{-f_{gerade}(iB)F^2 + f_{gerade}(0)[B^2 + F^2]\} \\ &= -f_{gerade}(iB)\Lambda^2 + f_{gerade}(0)[1 + \Lambda^2] \\ f_{gerade}(Z) &= -f_{gerade(iz)\Lambda^2 + f_{gerade}(0)[1 + \Lambda^2] \quad \text{mit } z = eBT \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{ungerade}(F) &= \frac{i}{B^2} \{-Bf_{ungerade}(iB)F - Bf_{ungerade}(0)\tilde{F}\} \\ &= -if_{ungerade}(iB)\Lambda - if_{ungerade}(0)\tilde{\Lambda} \\ f_{ungerade}(Z) &= -if_{ungerade(iz)\Lambda - if_{ungerade}(0)\tilde{\Lambda} \end{aligned}$$

Im Nachfolgenden sollen diese Funktionen explizit auf die Greensche Funktion des konstanten Feldes $\mathcal{G}_{B_{12}}$ angewendet werden, was zu der gesuchten Ausdrücken in Gleichung C.10 und deren Ableitungen in Gleichungen C.11 führt.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{B_{12}} &= \frac{T}{2Z^2} \left\{ \frac{Z}{\sin Z} e^{-iZ\dot{G}_{B_{12}}} - 1 + iZ\dot{G}_{B_{12}} \right\} \\ &= \frac{T}{2Z} \left\{ \frac{[\cos Z\dot{G}_{B_{12}} - i \sin Z\dot{G}_{B_{12}}]}{\sin Z} - \frac{1}{Z} + i\dot{G}_{B_{12}} \right\} \\ (Z \rightarrow iz) &\rightarrow -\frac{T}{2z} \left\{ \frac{[\cosh z\dot{G}_{B_{12}} + \sinh z\dot{G}_{B_{12}}]}{\sinh z} - \frac{1}{z} - \dot{G}_{B_{12}} \right\} \\ \rightarrow \mathcal{G}_{B_{12}}^{gerade} &= -\frac{T}{2z} \left\{ \frac{\cosh z\dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right\} \quad \mathcal{G}_{B_{12}}^{ungerade} = -\frac{T}{2z} \left\{ \frac{\sinh z\dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} - \dot{G}_{B_{12}} \right\} \end{aligned}$$

$$S_{B_{12}} = \frac{T}{2z} \left\{ \frac{\cosh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right\} \Lambda^2 - \frac{T}{12} \left\{ 3\dot{G}_{B_{12}}^2 - 1 \right\} [1 + \Lambda^2] \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \dot{G}_{B_{12}} &= \frac{i}{Z} \left\{ \frac{Z}{\sin Z} e^{-iZ \dot{G}_{B_{12}}} - 1 \right\} \\ &= i \left\{ \frac{[\cos Z \dot{G}_{B_{12}} - i \sin Z \dot{G}_{B_{12}}]}{\sin Z} - \frac{1}{Z} \right\} \\ (Z \rightarrow iz) &\rightarrow \frac{[\cosh z \dot{G}_{B_{12}} + \sinh z \dot{G}_{B_{12}}]}{\sinh z} - \frac{1}{z} \\ &\rightarrow \dot{G}_{B_{12}}^{gerade} = \frac{\sinh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} \quad \dot{G}_{B_{12}}^{ungerade} = \frac{\cosh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \\ \dot{S}_{B_{12}} &= -\frac{\sinh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} \Lambda^2 + \dot{G}_{B_{12}} [1 + \Lambda^2] \\ \dot{A}_{B_{12}} &= -i \left\{ \frac{\cosh z \dot{G}_{B_{12}}}{\sinh z} - \frac{1}{z} \right\} \Lambda \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Diese Funktionen besitzen bestimmte Symmetrien in der Eigenzeit bei Vertauschung von τ_1 und τ_2 und der Lorentzindizes μ und ν , die im Kapitel 3 zur Berechnung des Integrationskernes von $\Pi^{\mu\nu}$ angewendet werden und auf Gleichung 3.6 f\u00fchren.

Symmetrien:

- $S_{B_{12}} = S_{B_{21}} \quad S_{B_{12}}^{\mu\nu} = S_{B_{12}}^{\nu\mu} \quad S_{B_{12}}(z) = S_{B_{12}}(-z)$
- $\dot{S}_{B_{12}} = -\dot{S}_{B_{21}} \quad \dot{S}_{B_{12}}^{\mu\nu} = \dot{S}_{B_{12}}^{\nu\mu} \quad \dot{S}_{B_{12}}(z) = \dot{S}_{B_{12}}(-z)$
- $\dot{A}_{B_{12}} = \dot{A}_{B_{21}} \quad \dot{A}_{B_{12}}^{\mu\nu} = -\dot{A}_{B_{12}}^{\nu\mu} \quad \dot{A}_{B_{12}}(z) = -\dot{A}_{B_{12}}(-z)$

D. Nonlinear Least - Squares - Verfahren

Innerhalb der numerischen Routinen ist es notwendig zur Renormierung eines Integrales, aus einem bestehenden Ensemble von Messpunkten, die Counterterme zu bestimmen. Hierzu wird ein nichtlineares Verfahren der Methode der kleinsten Quadrate verwendet, die von Carl Friedrich Gauss im Jahre 1794 entwickelt wurde. Ausgangspunkt für dieses Verfahren ist eine Funktion $f(x)$, die an ein bestehendes Ensemble von Messpunkten $\{(x_i, y_i) | i = 1 \dots N\}$ angepasst werden soll. Dabei hängt die Funktion $f(x)$ von m Parametern λ_j ab, was schließlich zu einem System aus N Gleichungen der Form D.1 führt.

$$y_i = f(x_i, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (\text{D.1})$$

Im Gegensatz zur linearen Methode dieses Verfahrens, müssen im nichtlinearen Fall den Parametern λ_j Initialisierungswerte zugewiesen werden, was ausgehend von Gleichung D.1 auf Gleichung D.2 führt.

$$d\beta_i = y_i - f(x_i, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} d\lambda_j |_{x_i, \lambda} \quad (\text{D.2})$$

In Gleichung D.2 definiert λ einen Vektor der Form $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Das Ziel der Methode ist es das Minimum für $d\beta = (d\beta_1, \dots, d\beta_N)$ zu finden. Im Idealfall existiert eine Funktion, die eine perfekte Approximation an alle Messpunkte x_i liefert, womit $d\beta = 0$ folgt.

$$\begin{aligned} d\beta &= A d\lambda \\ A^{-1}d\beta &= A^{-1}A d\lambda \\ b &= a d\lambda \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Eine Betrachtung der Gleichungen D.2 in Matrixform führt auf Gleichung D.3, die für $d\lambda$ gelöst werden kann. Die resultierenden Ergebnisse der Lösung liefern neue Werte für die Parameter λ_j , auf die das Verfahren erneut angewendet werden kann. Auf diese Weise ergibt sich ein iteratives Verfahren, das zu einer Konvergenz gegen die erwarteten Werte der Parameter in einen bestimmten Fehlerbereich führt. Der Fehler der einzelnen Parameter hängt dabei direkt mit der Zahl der Iterationen zusammen. Im Fall eines Polynoms der Form $f(x) = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5$ folgt somit für den ersten Iterationsschritt

und den Initialisierungswerten (c_0, c_1, c_2, c_3) :

$$\begin{pmatrix} y_1 - c_0x_1^2 + c_1x_1^3 + c_2x_1^4 + c_3x_1^5 \\ y_2 - c_0x_2^2 + c_1x_2^3 + c_2x_2^4 + c_3x_2^5 \\ \dots \\ y_N - c_0x_N^2 + c_1x_N^3 + c_2x_N^4 + c_3x_N^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & \dots & x_1^5 \\ x_2^2 & \dots & x_2^5 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_N^2 & \dots & x_N^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_0 \\ dc_1 \\ dc_2 \\ dc_3 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Gleichung ist auch eine grundlegende wichtige Bedingung dieses Algorithmus erkennbar, nämlich das die Zahl der Messpunkte N immer größer, gleich sein muss der Zahl der Parameter m .

E. Parallelisierung und Multithreading

Die moderne Rechnerarchitektur von Server und PC - Systemen eröffnet die Möglichkeit einzelnen Programmcode durch Parallelisierung zu beschleunigen. Als Parallelisierung bezeichnet man dabei die simultane Ausführung von Codeabschnitten in mehreren so genannten **Threads**. Die Steuerung und Ausführung der Threads übernimmt dabei das verwendete Betriebssystem und kann vom User nur bedingt beeinflusst werden. Die Idee bestimmte Arbeitsprozesse auf mehrere Threads zu verteilen ist dabei nicht neu, wird aber gerade im Bereich der PC-Systeme erst mit aufkommen moderner X86 - Multico-reprozessoren wie die Core - Architektur von Intel oder die K10 Architektur von AMD konsequent umgesetzt. Im Bereich der Server findet dieses Prinzip schon seit längeren eine Anwendung.

E.1. Möglichkeiten der Parallelisierung

Der Übergang von Seriell zum Parallel ablaufenden Programmcode kann dabei durch verschiedene Möglichkeiten realisiert werden. Eine Möglichkeit, auf die in dieser Einführung nicht eingegangen werden soll, ist die Parallelisierung mit Hilfe der GPU, da es in diesem Bereich noch keinen einheitlichen Standard gibt und die Anwendung von bekannten X86 - Codesprachen nur bedingt möglich ist. Vielmehr geschieht die Umsetzung in diesem Bereich mit Hilfe herstellerspezifischer Programmiersprachen wie zum Beispiel *Cuda* zur Ansteuerung von Nvidia - Karten. Im Rahmen herkömmlicher X86 - Programmiersprachen, wie C++ oder Fortran, kann zur Parallelisierung entweder die Methoden der **OpenMP** - oder **pthread** - Klasse verwendet werden.

E.2. Parallelisierung mit Hilfe der pthread-Klasse

Zur Parallelisierung von Codeabschnitten innerhalb dieser Arbeit haben wir die pthread - Routinen verwendet, da diese die Möglichkeit eröffnen direkter auf den Ablauf einzelner Threads Einfluss zu nehmen. Bevor man jedoch anfängt eine Codesequenz auf einzelne Threads aufzuteilen, sollte man sich überlegen ob dies für den verwendeten Code überhaupt sinnvoll beziehungsweise umsetzbar ist. Möchte man zum Beispiel ein Programm parallelisieren, welches die Fibonacci - Folge berechnet, so ist dies aufgrund der Tatsache, dass sich eine Fibonacci - Zahl aus der Summe ihrer beiden Vorgänger berechnet, nicht möglich. Mit Hilfe von Abbildung E.1 kann man sich dieses Problem leicht verdeutlichen. Nehmen wir an dieser Stelle an, man möchte die ersten 5 Zahlen der Fibonacci -

Folge in einzelnen Threads berechnen lassen, so bekommt jeder der Arbeitsthreads die Aufgabe eine bestimmte Stelle der Folge als Ergebnis auf den Hauptthread zurück zu geben. Das Problem dabei ist jedoch das zum Beispiel der Arbeitstthread zur Berechnung der 5. Fibonaccizahl die Ergebnisse zweier anderer Threads benötigt, was eine simultane Berechnung unmöglich macht, da ein Kommunikation der Arbeitsthreads untereinander nicht möglich ist. Ein solcher Fall führt unter anderen dazu, dass die einzelnen Threads

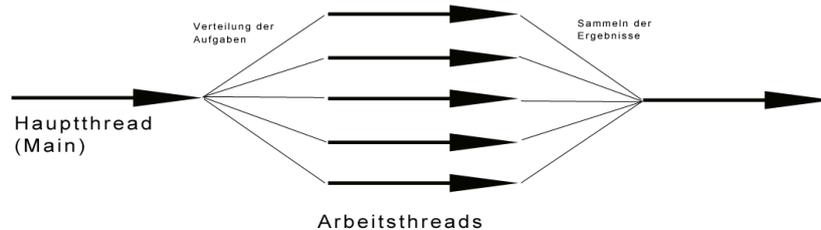


Abbildung E.1.: Schema zur Verdeutlichung des Multithreading Prinzips

nicht mehr synchron ablaufen und es zu Fehlern in der Laufzeit des Programmes kommen kann. Man spricht hier von Asynchronität von Threads. Asynchron verlaufende Threads können im einzelnen wieder synchronisiert werden indem die einzelnen schneller verlaufenden Threads für eine kurze Zeit angehalten werden. Im folgenden soll die Grundstruktur eines einfachen parallelisierten Programmes mit Hilfe der Methoden betrachtet werden. Der zu parallelisierende Codeabschnitt muss hierzu in eine separate Funktion vom Typ *void** ausgelagert werden, an welche die Daten ebenfalls als *void** übergeben werden müssen. Erfordert eine Methode mehrere einzelne Parameterwerte, so sollten dieser in einer Struktur zusammengefasst werden, wobei in einen solchen Fall die Struktur als komplexer Datentyp an die Funktion übergeben wird. Im eigentlichen Programm legt man die Anzahl der Threads in Form einer Variablen fest, was im unteren Beispiel mit Hilfe der Variable *Anzahl der Threads* geschehen ist. Die Anzahl der Thread kann dabei im Prinzip beliebig gewählt werden, sollte aber im Idealfall an die jeweilige Hardware angepasst werden. Die eigentliche Parallelisierung geschieht mit Hilfe des Datentyps *pthread_t*, welcher im folgenden als eigentlicher Arbeitstthread, analog zu Abbildung E.1, betrachtet werden soll. Die Eigenschaften des Threads werden durch die Variable *attr* festgelegt. Dabei muss man entscheiden, ob die einzelnen Prozesse am Ende der Berechnung synchronisiert werden sollen oder eine asynchroner Ablauf verwendet werden soll. Da im Beispiel die einzelnen Arbeitsthreads ihre Ergebnisse an den Hauptthread zurück geben sollen und dies in einer bestimmten Reihenfolgen geschehen soll, wurden sie an dieser Stelle als *Joinable* deklariert, was eine Synchronisation am Ende der Laufzeit beinhaltet. Möchte man keine speziellen Eigenschaften festlegen oder benötigt die parallelisierte Routine keine Übergabewerte, so muss an die jeweilige Position der Funktion *pthread_create()* der Datentyp *NULL* übergeben werden. Die Rückführung der Ergebnisse der einzelnen Arbeitsthreads an den Hauptthread geschieht über die Funktion *pthread_join()*, wobei der eigentliche Rückgabewert an die Variable *Status* übergeben

wird. Für einen Zugriff auf die einzelnen Werte ist danach noch eine Typenumwandlung notwendig, was die Kenntnis über die Art des Rückgabetyps der Funktion voraussetzt. Die hier beschriebenen Methoden und Variablen sind nur ein kleiner Teil der Möglichkeiten, welche diese Programmbibliothek bietet. Für weiterführende Informationen ist die gcc - Referenz zu dieser Klasse geeignet oder diverse Quellen im Netz, welche sich mit Parallelisierung beschäftigen. Die Parallelisierung in den einzelnen Routinen geschieht jedoch immer nach den hier aufgezeigten Schema und beschränkt sich somit auf synchron ablaufende Arbeitsprozesse.

```
#include <pthread.h>

struct Daten für Methode{...};

void * Parallelisierte Methode(void * data){...}

int main(){
    int Anzahl der Threads = 4;
    pthread_t * Threads = new pthread_t[Anzahl der Threads];
    struct * Daten für Methode = new struct Daten für Methode[Anzahl der Threads];

    int rc;
    void * status;
    pthread_attr_t attr;

    pthread_attr_init(&attr);
    pthread_attr_setdetachstate(&attr, PTHREAD_CREATE_JOINABLE);

    for(int i = 0; i < Anzahl der Threads; i ++){
        Daten für Methode[i].Daten = ...;
        rc = pthread_create(&Threads[i], &attr, Parallelisierte Methode, (void*)&Daten für Methode[i]);
    }

    pthread_attr_destroy attr;

    for(int i = 0; i < Anzahl der Threads; i ++){
        rc = pthread_join(&Threads[i], &status);
    }

    ...
}
```

F. Einführung in die Programmanwendungen

Das Programm zur Simulation der 2 - Punkt Funktion und somit zur Berechnung der Phasengeschwindigkeit, wurde von uns in der Programmiersprache C++ verfasst. Das Programm selbst besteht aus 3 Klassen, welche jeweils einen bestimmten Teil betrachten und schrittweise aufeinander aufbauen. Das heißt, während in der ersten Klasse die Problematik noch ausschließlich für das Vakuum betrachtet wird, werden in den anderen Klassen schrittweise die einzelnen Felder eingeführt. Zur Berechnung selbst muss zum Teil auf externe Open - Source Software zurückgegriffen werden, da die im gcc - Standart enthaltenen mathematischen Methoden zur Erzeugung von Zufallszahlen und zur Berechnung der einzelnen Integrale nicht ausreichend sind. Wir haben dabei darauf verzichtet eigenen Integrationsroutinen zu schreiben, da die Fehleranfälligkeit eines solchen Weges zu groß ist und die verwendeten Open - Source Methoden vielfach getestet worden sind. Als externe Quelle zur Erzeugung der Zufallszahlen diente uns dabei der Ranlux - Generator, welcher von Martin Lüschnner 1997 in native C - Code verfasst worden ist. Eine Einführung in die Anwendung dieser Methoden und eine kurze Einführung in die Mathematischen Hintergründe findet man in [32]. Für die numerische Integration und die Integration von komplexen Zahlen haben wir auf die GSL - Bibliothek zurückgegriffen, welche von verschiedenen Autoren im Rahmen des GNU - Science Projektes als wissenschaftliche Open - Source Quelle zur Verfügung gestellt worden ist.

F.1. Grundstruktur des Simulationsprogrammes

Zur Anwendung des Programmes, sollte auf den jeweiligen PC die GSL - und Ranlux - Bibliotheken installiert sein, sowie eine aktuelle Version des gcc - Kompilers zur Anwendung der Multithreading - Routinen. Das Programm selbst besteht, wie schon erwähnt, aus 3 Klassen, welche wiederum jeweils in einer .h und .cpp Datei deklariert sind. Die Definition der einzelnen Methoden und Strukturen geschieht dabei in der .h Datei, welcher zur Ausführung auf die .cpp Datei zurückgreifen muss, da in dieser der Quellcode der einzelnen Methoden geschrieben ist. Im folgenden sind für das Programm notwendigen Quellen aufgelistet, in welchen Grundfunktionen enthalten sind, die zur Ausführung der einzelnen Klassenobjekte notwendig sind.

- Fit_Function.cpp, Fit_Function.h
- VLoop.cpp, VLoop.h

In den ersten Teil sind dabei die einzelnen Fitroutinen zur Berechnung der Counterterme deklariert, sowie Methoden zur analytischen Berechnung dieser. Der Fit geschieht dabei mit Hilfe der *least - squares - Methode* und erfordert die Einbindung der GSL - Routinen. Im zweiten Teil sind die Methoden zur Erzeugung der Zufallszahlen deklariert, welche mit Hilfe des VLoop - Algorithmuses generiert werden. Die Übergaben von Parametern an die einzelnen Funktionen geschieht dabei immer in Form eines Zeigers, da somit der Zugriff auf die Festplatte minimiert wird. Beim Aufrufen der einzelnen Objekte ist somit darauf zu achten, dass die einzelnen Werte schon einmal als Datenobjekt deklariert worden sind. Die Übergabe selbst geschieht mit Hilfe des & - Zeichens, welches vor die Variable gesetzt werden muss und bedeutet das Anstelle der gesamten Variable nur die Speicheradresse an die jeweilige Funktion übergeben werden muss. Im folgenden Beispiel ist eine Übergabe an eine *void* - Methode exemplarisch dargestellt.

```
double Variable;  
Methode(&Variable);
```

Die eigentlichen Klassen sind in den folgenden Dateien deklariert:

- Polarization.cpp, Polarization.h
- Polarization_Constant_Field.cpp, Polarization_Constant_Field.h
- Phase_Velocity.cpp, Phase_Velocity.h

F.2. Grundstruktur der Klassen

Die einzelnen Klassen sind dabei nach der selben Struktur aufgebaut. Die einzelnen Variablen der Klasse, welche die Eigenschaften der 2 - Punkt Funktion oder der Phasengeschwindigkeit festlegen, sowie Informationen die zur Parallelisierung notwendig sind, können nicht direkt festgelegt werden sondern müssen indirekt über eine *Set* - Methode festgelegt werden. Sollte eine Variable nicht mit Hilfe einer solchen Methode initialisiert werden, so ist im Konstruktor einer jeden Klasse ein default - Wert festgelegt. Im folgenden Beispiel soll die Initialisierung einer Klasse und die Anwendung der jeweiligen Funktionen verdeutlicht werden.

```
double Variable;  
Klasse Klassenname = Klasse(...);  
Klassenname.Set_Variable(&Variable);
```

Der Aufruf einzelner Methoden der Klasse geschieht dabei nicht nur im Rahmen von *Set* - Methoden auf die obige Weise, sondern für alle im Rahmen einer Klasse definierten Methoden. Ein Klassenobjekt ist dabei auf die selbe Weise definiert, wie ein einfaches Datenobjekt. Das heißt es kann ebenfalls an einzelne Funktionen übergeben werden, beziehungsweise belegt auf die selbe Weise Speicher wie zum Beispiel ein *double* - Objekt.

Einzig die Speichergröße, welche eine Variable auf den Arbeitsspeicher akquiriert ist von Objekt zu Objekt unterschiedlich. Eine kurze Einführung in die Arbeit mit Klassen in C++ findet man unter anderem in [33]. Nach der Festlegung der einzelnen Parameter, wie zum Beispiel den Massenterm oder die Anzahl der verwendeten Prozessoren, ist es nun möglich die eigentliche Simulation zu initialisieren. Hierzu sind in jeder Klasse verschiedenen Funktionen deklariert. Möchte man Informationen über die Dichte der jeweiligen 2 - Punkt - Funktion haben, das heißt auf die Ausführung der T - Integration verzichten, so genügt der Aufruf einer Methode in deren Namen der Begriff *Density* enthalten ist. Die anderen Methoden führen die Integration über T aus, und geben den numerischen Wert für die vollständigen 2 - Punkt Funktion oder Phasengeschwindigkeit wieder. Für den Vakuum- beziehungsweise Konstanten - Feld Fall werden neben den numerischen Werten noch analytische Werte berechnet und in Form einer .txt Datei ausgegeben. Der Aufbau einer solchen Datei ist im Folgenden skizziert:

Parameterwert (T, mass, ...) → analytisches Ergebnis → numerisches Ergebnis → numerischer Fehler