



**FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA**

Lichtdiffraction im Quantenvakuum

Bachelorarbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science (B.Sc.) im Studiengang Physik

Vorgelegt von: Justus Heuer

Eingereicht am 22.12.2021

Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut

Erstgutachter:

Prof. Dr. Holger Gies

Zweitgutachter:

PD Dr. Felix Karbstein

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theoretische Grundlagen	4
2.1	Die Feldtheorie der klassischen Elektrodynamik	4
2.2	Die Feldtheorie der Quantenelektrodynamik	5
2.3	Die Vakuum-Lagrangedichte in der Quantenelektrodynamik	6
3	Aufgabenszenario und experimentelle Größen	10
3.1	Ziele und Hintergründe des Experiments	10
3.2	Die Feldkonfiguration	11
3.3	Die charakteristischen Parameter des Signals	12
4	Allgemeine Berechnung der differentiellen Signalphotonenzahldichte und des Signalfelds	14
4.1	Berechnung der Lorentz-Invarianten	14
4.2	Die differentielle Signalphotonenzahldichte für Vakuum-Doppelbrechung	15
4.3	Das Signalphotonenfeld	18
4.4	Die Fourier-Transformation der Feldamplituden	19
5	Das nichtlineare Signal für orthogonale Laserlaufrichtungen und beispielhafte Parameter	22
5.1	Optimierung der Laser-Polarisationswinkel	23
5.2	Auswertung der doppeltgebrochenen Signalphotonenzahl	24
5.3	Auswertung des Signalfelds	32
6	Fazit und Ausblick	35

1 Einleitung

Wenn wir uns das Vakuum klassisch vorstellen, denken wir zunächst an einen vollständig leeren Raum, in dem keine Teilchen vorhanden sind. Mathematisch ist diese Vorstellung zwar einfach zu beschreiben, sie wird jedoch beim Übergang von der klassischen in die Quantenwelt ad absurdum geführt. Bereits die Heisenberg'sche Unschärferelation zeigt, dass es nicht möglich ist den Energiezustand eines Systems zu einem beliebig genauen Zeitpunkt beliebig genau zu messen. Diese Einschränkung gilt bemerkenswerterweise nicht nur für Systeme aus Teilchen, sondern auch für ein scheinbar teilchenloses System, das sogenannte Vakuum. Hier wird klar: wir müssen uns von der Vorstellung verabschieden, dass im Vakuum nichts passiert.

Die Quantenfeldtheorie füllt diese Vorstellung mit Leben, oder besser gesagt mit fluktuierenden Feldern, sogenannten virtuellen Teilchen-Antiteilchen-Paaren, die spontan entstehen und wieder gegenseitig annihilieren. Das Spannende ist: diese Fluktuationen sind keine rein theoretische Idee. Sie können experimentell nachgewiesen werden, indem man sie dazu bringt, mit externen Teilchen oder Feldern zu interagieren. Eine der Möglichkeiten dafür ist der *Casimir-Effekt*, der die klassisch nicht erklärbare Anziehung zweier leitender Platten beschreibt, zwischen denen sich ein Vakuum befindet, resultierend aus den Fluktuationen des Photonenfelds [1]. Dieser wurde auch bereits experimentell nachgewiesen (siehe bspw. [2]). Eine andere Option Quantenfluktuationen sichtbar zu machen, welche hier genauer untersucht werden soll, sind starke elektromagnetische Felder, die mit Elektron-Positron-Paaren im Quantenvakuum wechselwirken und dabei ihre Eigenschaften ändern. Beispielsweise können einzelne Photonen gestreut werden (Lichtdiffraktion). Durch diese Interaktionen werden die klassischen elektromagnetischen Feldgleichungen durch nichtlineare Terme ergänzt, was wiederum die Aufgabe des Superpositionsprinzips notwendig macht.

Einer der wesentlichen dabei auftretenden Effekte ist die sogenannte Vakuum-Doppelbrechung, bei der durch die Interaktion mit dem polarisierten Vakuum die Polarisation der Photonen in einem elektromagnetischen Feld verschoben wird. Seit 2001 wird im PVLAS-Experiment versucht, diese Interaktion von Licht mit starken Magnetfeldern im Labor nachzuweisen, jedoch ist dies bisher noch nicht gelungen [3]. Allerdings wurden Hinweise auf diesen Effekt im emittierten Licht eines Neutronensterns mit sehr starkem Magnetfeld gefunden [4]. Inzwischen gibt es auch einen neuen Ansatz, die Vakuum-Doppelbrechung im Labor sichtbar zu machen. Dafür sollen zwei linear polarisierte Hochintensitätslaserpulse in einem Brennpunkt fokussiert werden [5]. Das Experiment wurde zwar bisher noch nicht erfolgreich in die Tat umgesetzt, jedoch sind die notwendigen technischen Mittel dafür bereits in naher Zukunft verfügbar [6].

Diese Möglichkeit Quantenfluktuationen zu beobachten, wird in dieser Arbeit tiefergehend erläutert. Hier soll die Kollision zweier Laserpulse und die dadurch hervorgerufene Streuung der Photonen modelliert werden. Real detektierbar sein soll die Vakuum-Doppelbrechung durch eine Veränderung der Polarisation eines der Laser nach der Kollision. Ziel soll es sein, diesen Effekt möglichst weitgehend analytisch zu modellieren, um dann mit Hilfe des Modells und numerischen Berechnungen in *Mathematica* mit exemplarischen Parametern die reale Größenordnung des Effekts darzustellen.

2 Theoretische Grundlagen

Um die quantenelektrodynamischen Effekte im Vakuum zu behandeln, ist es zunächst wichtig die klassische elektromagnetische Feldtheorie einzuführen. Anschließend wird die quantentheoretische Formulierung der Elektrodynamik skizziert und die Abweichungen von der klassischen Theorie begründet. In dieser Arbeit wird weitgehend mit der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik und dem Einstein-Kalkül gearbeitet, wobei implizit die Minkowski-Metrik mit der Signatur $(+, -, -, -)$ verwendet wird. Ebenso wird das Heavyside-Lorentz-Einheitensystem ($c = \hbar = 1$) verwendet, wodurch alle physikalischen Einheiten als Potenz der Energie (in eV) angegeben werden können.

2.1 Die Feldtheorie der klassischen Elektrodynamik

Die klassische lineare Feldtheorie der Elektrodynamik fundiert auf dem elektromagnetischen Feld A^ν und dem Feldstärketensor. Dieser lässt sich schreiben als

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ und $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ sind dabei das klassische elektrische und magnetische Feld. A^μ beschreibt ein kovariantes Vektorpotential, aus dem sich $F^{\mu\nu}$ ableiten lässt. Wie man leicht erkennt, ist $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$). Darüber hinaus ist $F^{\mu\nu}$ eichinvariant, also invariant gegenüber Eichtransformationen des Vektorpotentials $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, wobei $\Lambda(x^\mu)$ eine beliebige, zweifach differenzierbare skalare Funktion beschreibt. Wie leicht an der Bestimmungsgleichung zu erkennen, hängt $F^{\mu\nu}$ nicht von $\Lambda(x^\mu)$ ab.

Aus dem Feldstärketensor lassen sich zwei skalare, algebraisch unabhängige, Lorentz-invariante Größen

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\vec{B}^2 - \vec{E}^2), \quad (2)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (3)$$

konstruieren¹.

Die fundamentalen Gleichungen der Elektrodynamik, die Maxwell-Gleichungen lauten in kovarianter Form

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \quad (4a)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (4b)$$

wobei j^μ die Vierer-Stromflussdichte beschreibt, die die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllt und im Vakuum verschwindet. Die Maxwell-Gleichungen sind lineare partielle Differentialgleichungen

¹ \mathcal{G} ist lediglich eine pseudoskalare Größe, da bei Zeit- und Paritätsinversion das Vorzeichen vertauscht wird. \mathcal{G}^2 ist jedoch ein regulärer Lorentz-invarianter Skalar.

zweiter Ordnung, ergo genügen ihre Lösungen dem Superpositionsprinzip, da jede Linearkombination aus Lösungen der Gleichungen diese wiederum erfüllt.

Wie allgemein für Feldtheorien, lässt sich auch für die elektromagnetische Feldtheorie eine skalare Lagrangedichte \mathcal{L} konstruieren, die Lorentz-invariant ist und aus der mittels der Euler-Lagrange-Gleichungen,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0, \quad (5)$$

die Maxwell-Gleichungen folgen. \mathcal{L} kann also allgemein nur von skalaren Lorentz- und eichinvarianten Größen abhängen. Die Festlegung der klassischen Lagrangedichte auf

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\nu A_\nu \quad (6)$$

lässt sich heuristisch begründen, da daraus die Maxwell-Gleichungen folgen müssen. Im Vakuum reduziert sie sich auf

$$\mathcal{L} = -\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (7)$$

Alternativ lässt sich die Lagrangedichte auch als Variationsprinzip aus der Wirkung

$$S = \int_{\Gamma} d^4x \mathcal{L} \quad (8)$$

und dem Hamilton'schen Prinzip der extremalen Wirkung formulieren. Γ beschreibt dabei eine beliebige Integrationsregion in der Raumzeit, außerhalb welcher \mathcal{L} verschwindet. Detailliertere Einführungen und Erläuterungen der hier eingeführten Größen finden sich beispielsweise in [7] oder [8].

2.2 Die Feldtheorie der Quantenelektrodynamik

Die klassische Formulierung der Elektrodynamik ist zwar vereinbar mit Einsteins Spezieller Relativitätstheorie, jedoch nicht mit der Quantenmechanik, da diese nichtrelativistisch formuliert ist. Deren Grundidee ist der Welle-Teilchen-Dualismus, wonach massereiche und masselose Teilchen ebenso Welleneigenschaften aufweisen und die Distinktion dazwischen aufgehoben wird. Der Zustand eines Ein-Teilchen-Systems lässt sich in der Quantenmechanik durch einen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ charakterisieren, der Element eines Hilbertraums \mathcal{H} ist. Das Betragsquadrat $|\psi(x)|^2 = \langle\psi|\psi\rangle$ lässt sich als die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens am entsprechenden Raumpunkt interpretieren, die über den gesamten Raum integriert eins ergeben muss. Physikalischen Observablen $\langle A \rangle$ wird ein Operator A zugeordnet und es gilt für den Erwartungswert $\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$. Die Evolutionsgleichung freier quantenmechanischer Zustände, auch Schrödinger-Gleichung genannt, lautet

$$i\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle = -\frac{1}{2m}\Delta|\psi\rangle. \quad (9)$$

H bezeichnet den Hamilton-Operator, mit dem sich die Energiezustände des Systems berechnen lassen [9]. An der Gleichung lässt sich schnell erkennen, dass die zugrunde liegende Feldtheorie keine

relativistische sein kann, da Zeit- und Raumableitungen unterschiedlicher Ordnung sind, im Rahmen dieser Theorie also nicht äquivalent sind. Eine relativistische Formulierung der Quantentheorie muss dieser Bedingung jedoch genügen.

Eine der ersten relativistischen Quantenfeldtheorien formulierte Paul Dirac 1928 in seiner Arbeit [10] für Teilchen mit Spin 1/2, charakterisiert durch die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (10)$$

wobei γ^μ die Dirac-Matrizen, ψ die vierwertige Zustandsfunktion und m die Teilchenmasse bezeichnet. Elektronen genügen als Teilchen mit Spin 1/2 dieser Theorie. Bemerkenswert ist dabei, dass die Dirac-Gleichung auch Zustände mit negativer Energie als Lösung zulässt, was implizieren würde, dass beispielsweise in Atomen gebundene Elektronen spontan in einen Zustand niedrigerer Energie zerfallen könnten und die mögliche Menge freigesetzter Energie dabei unbegrenzt ist. Da dies faktisch jedoch nicht passiert, formulierte Dirac ein anschauliches Erklärungsmodell: Im Einklang mit dem Pauli-Prinzip, welches besagt, dass kein fermionischer Zustand mehrfach besetzt sein darf, seien alle Zustände negativer Energie bereits durch nicht beobachtbare Teilchen besetzt. Dieses Modell wird als Dirac-See bezeichnet ².

Daraus ergibt sich die Möglichkeit für ein Elektron negativer Energie durch Anregung, beispielsweise durch ein energiereiches Photon, in einen Zustand positiver Energie gehoben zu werden. Dadurch verbleibt ein 'Loch' im Dirac-See mit positiver Energie und gegensätzlicher Ladung, welches als Positron (das Antiteilchen des Elektrons) bezeichnet wird. Dieser Prozess wird auch als Paarerzeugung bezeichnet. Dieser Prozess kann genauso umgekehrt stattfinden, wenn ein Elektron das 'Loch' auffüllt, also mit einem Positron gegenseitig annihiliert. Dabei werden wiederum zwei Photonen frei, deren Energie der Teilchenmasse entspricht. Beschrieben wird dieses Modell beispielsweise in der Einführung von [11].

2.3 Die Vakuum-Lagrangedichte in der Quantenelektrodynamik

Als Konsequenz aus diesem Modell ergibt sich, dass im Vakuum ein Photon mit ausreichend Energie spontan in ein Elektron und ein Positron zerfallen kann. Genauso kann das Vakuum aufgrund der Energie-Zeit-Unschärfe lokal Zustände annehmen, deren Energie sich von null unterscheidet. Lediglich im Mittel über lange Zeitdauern muss die Vakuumenergie null betragen. Diese sogenannten Vakuumfluktuationen werden in der Quantenelektrodynamik (QED) durch virtuelle Positron-Elektron-Paare beschrieben, die spontan entstehen und wieder zerfallen³. Da diese Teilchenpaare eine Ladung tragen, bilden sie einen elektromagnetischen Dipol und können beispielsweise durch externe elektromagnetische Felder polarisiert werden, die sogenannte Vakuum-Polarisation. Diese hat wiederum Auswirkungen auf externe Felder. Es wird also deutlich, dass die klassische Lagrangedichte

²Dieses Modell ist zwar in der quantenfeldtheoretischen Beschreibung überholt, aber an dieser Stelle ausreichend.

³Tatsächlich können auch andere virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare entstehen. Da jedoch Elektronen die geladenen Teilchen mit der geringsten Masse sind, werden die Quantenfluktuationen der QED durch Elektron-Positron-Paare dominiert.

aus Gleichung (7) angepasst werden muss. Diese lautet in der Formulierung der QED

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi + eA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (11)$$

mit $\cancel{D} = \gamma^\mu\partial_\mu$ und $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$. Der erste Term beschreibt dabei die klassische Dynamik freier elektromagnetischer Felder, der zweite Term die Dynamik freier Elektronen und Positronen und der dritte Term die Interaktion zwischen Photonen und Fermionen⁴, charakterisiert durch die elektromagnetische Kopplungskonstante e .

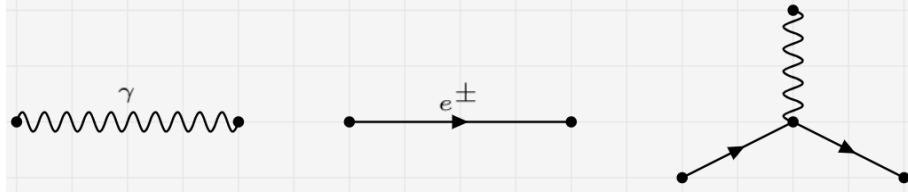


Abb. 1: Eine Übersicht der elementaren Bauteile von Feynman-Diagrammen in der QED. Das erste Bauteil beschreibt das Verhalten freier elektromagnetischer Felder, das zweite die Propagation von Positronen und Elektronen und das dritte die Interaktion zwischen Fermionen und Photonen. Die Bauteile korrespondieren mit den entsprechenden Termen der Lagrangedichte.

Aus diesen drei fundamentalen Prozessen lassen sich Feynman-Diagramme konstruieren, die die Interaktionsprozesse zwischen Fermionen und Photonen beschreiben (siehe Abbildung 1). Tatsächlich tritt für einen Prozess mit festgelegten ein- und ausgehenden Teilchen jeder mögliche Prozess auf, für den mit diesen Randbedingungen ein Feynman-Diagramm konstruiert werden kann. Alle möglichen Prozesse können nach der Anzahl auftretender geschlossener Schleifen in ihren Feynman-Diagrammen charakterisiert werden, wobei der Beitrag von Prozessen mit n Schleifen in der Größenordnung $\alpha^n = (\frac{e^2}{4\pi})^n$ unterdrückt wird⁵ [12].

Da in dieser Arbeit die Interaktionen makroskopischer elektromagnetischer Arbeit behandelt werden sollen, reicht es aus Prozesse zu betrachten, deren Anfangs- und Endzustände frei von Elektronen und Positronen sind, diese also nur in Form von geschlossenen Schleifen in den Feynman-Diagrammen inkorporieren. Darüber hinaus ist es ausreichend, die Interaktion der virtuellen Elektronen und Positronen mit externen Photonen zu betrachten und mögliche Wechselwirkungen mit virtuellen Photonen unberücksichtigt zu lassen, da solche Prozesse nur in höherer Ordnung in α stattfinden. Faktisch wird also die Streuung (Diffraktion) von Photonen am polarisierten Vakuum betrachtet.

Der klassische Wirkungsterm \mathcal{S}_{MW} nach Gleichung (8) wird dann durch einen nichtlinearen Term ergänzt, die effektive Heisenberg-Euler-Wirkung \mathcal{S}_{int} . Damit erhält man die effektive Wirkung $\mathcal{S}_{eff} = \mathcal{S}_{MW} + \mathcal{S}_{int}$. Deren analytische Form für langsam veränderliche⁶ externe elektromagnetische

⁴Fermionen sind Teilchen mit halbzahligen Spin. Elementare Fermionen haben alle Spin $\frac{1}{2}$, allerdings lassen sich Vielteilchensysteme, wie beispielsweise Atome, konstruieren, deren Gesamtspin größer, aber ebenfalls halbzahlige Werte annehmen.

⁵ $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$ ist die elektromagnetische Feinstrukturkonstante.

⁶Langsam veränderlich meint hier im Verhältnis zur Compton-Wellenlänge $\lambda_C = \frac{1}{m_e} \simeq 3,9 \cdot 10^{-13} \text{ m} = 2,0 \cdot 10^6 \text{ eV}^{-1}$ bzw. zur Compton-Zeit $\tau_C \simeq 1,3 \cdot 10^{-21} \text{ s} = 2,0 \cdot 10^6 \text{ eV}^{-1}$, also der Skala, auf der die virtuelle Paarbildung

Felder wurde zum ersten Mal 1936 von Heisenberg und Euler in [13] explizit berechnet. Die entsprechende Heisenberg-Euler-Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left[1 - \frac{1}{3}(\tilde{E}^2 - \tilde{B}^2)\eta^2 - \tilde{E}\tilde{B}\eta^2 \cot(\tilde{E}\eta) \coth(\tilde{B}\eta) \right]. \quad (12)$$

Die Herleitung dieser Formel übersteigt den Rahmen dieser Arbeit, findet sich aber beispielsweise auch in [14] oder [12]. $\tilde{B} = \frac{|\vec{B}|}{B_{crit}}$ und $\tilde{E} = \frac{|\vec{E}|}{E_{crit}}$ bezeichnen die dimensionslosen Feldstärken mit den kritischen Feldstärken

$$B_{crit} = \frac{m_e^2}{e} = 4,4 \cdot 10^9 \text{T} = 8,5 \cdot 10^{11} \text{eV}^2, \quad E_{crit} = \frac{m_e^2}{e} = 1,3 \cdot 10^{18} \text{V/m} = 8,5 \cdot 10^{11} \text{eV}^2. \quad (13)$$

Da real im Labor erzeugte Feldstärken in der Regel um Größenordnungen unter den kritischen Feldstärken liegen, kann $\tilde{E}, \tilde{B} \ll 1$ angenommen werden, was bedeutet, dass die Schwachfeldnäherung eine realistische Herangehensweise ist. Diese lässt sich aus Gleichung (12) ableiten, indem die trigonometrischen Funktionen im Integranden bis zur dritten Ordnung Taylor-entwickelt werden. Die Formeln dafür lauten nach [15]

$$\cot(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2n}}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \mathcal{O}(x^5) \quad (14)$$

$$\coth(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \mathcal{O}(x^5) \quad (15)$$

mit den Bernoulli-Zahlen B_{2k} , wobei $B_0 = 1$, $B_2 = \frac{1}{6}$ und $B_4 = -\frac{1}{30}$ betragen. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= \frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left[1 - \frac{1}{3}(\tilde{E}^2 - \tilde{B}^2)\eta^2 - \eta^2 \tilde{E}\tilde{B} \left(\frac{1}{\eta\tilde{E}} - \frac{\eta\tilde{E}}{3} - \frac{(\eta\tilde{E})^3}{45} \right) \left(\frac{1}{\eta\tilde{B}} + \frac{\eta\tilde{B}}{3} - \frac{(\eta\tilde{B})^3}{45} \right) \right] \\ &= \frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \left[1 - \frac{1}{3}(\tilde{E}^2 - \tilde{B}^2)\eta^2 - \eta^2 \tilde{E}\tilde{B} \left(\frac{1}{\eta^2 \tilde{E}\tilde{B}} + \frac{\tilde{B}}{3\tilde{E}} - \frac{\tilde{E}}{3\tilde{B}} - \frac{\tilde{B}^3}{45\tilde{E}} \eta^2 - \frac{\tilde{E}\tilde{B}}{9} \eta^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\tilde{E}^3}{45\tilde{B}} \eta^2 + \frac{\tilde{E}\tilde{B}^3}{135} \eta^4 - \frac{\tilde{E}^3\tilde{B}}{135} \eta^4 + \frac{\tilde{E}^3\tilde{B}^3}{2025} \eta^6 \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

Für die Schwachfeldnäherung werden maximal die zweiten Potenzen der Lorentz-Invarianten nach Gleichungen (2) und (3) betrachtet, was der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ entspricht. Somit werden nur Terme berücksichtigt, in denen \tilde{E} und \tilde{B} zusammen nicht in höherer Ordnung als vier auftreten. Damit reduziert sich der Ausdruck auf

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{m_e^4}{8\pi^2} \int_0^\infty d\eta \frac{e^{-\eta}}{\eta^3} \frac{(\tilde{B}^2 - \tilde{E}^2)^2 + 7\tilde{E}^2\tilde{B}^2}{45} \eta^4 = \frac{e^4}{8\pi^2 m_e^4} \frac{4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2}{45} \int_0^\infty d\eta \eta e^{-\eta}. \quad (17)$$

typischerweise abläuft. Experimentell erzeugte Felder sind auf diesen Skalen in der Regel näherungsweise konstant.

Damit muss nur noch das Integral hinter der Konstante ausgewertet werden.

$$\int_0^\infty d\eta \eta e^{-\eta} = \left[-\eta e^{-\eta} \right]_{\eta=0}^{\eta=\infty} + \int_0^\infty d\eta e^{-\eta} = \left[-e^{-\eta} \right]_0^\infty = 1. \quad (18)$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\mathcal{L}_{int}(\mathcal{F}, \mathcal{G}^2) = \frac{2\alpha^2}{45m_e^4} [4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2]. \quad (19)$$

Dieser Ausdruck für die Lagrangedichte wird als Ausgangspunkt für die Berechnungen in dieser Arbeit genommen.

Den Grund warum der nichtlineare Anteil der Lagrangedichte bei praktischen Anwendungen in der Regel keine Rolle spielt, lässt sich am Vorfaktor erkennen, der die Konstanten $m_e = 511,0 \text{ keV}$ und $\alpha \simeq \frac{1}{137}$ enthält. Dieser unterdrückt nichtlineare Effekte um viele Größenordnungen, sodass entsprechende Effekte erst bei sehr hohen Feldstärken sichtbar werden.

3 Aufgabenszenario und experimentelle Größen

In diesem Abschnitt geht es darum, die Versuchsbedingungen zu skizzieren, unter denen der Nachweis der Vakuum-Doppelbrechung möglich gemacht werden soll. Dafür werden zunächst ein paar allgemeine Überlegungen zum Versuchsaufbau ausgeführt. Anschließend werden die mathematischen Grundlagen zur Beschreibung der beiden verwendeten Laserpulse, sowie der zu bestimmenden experimentellen Parameter eingeführt, mit denen in den darauffolgenden Kapiteln die Analyse erfolgen soll.

3.1 Ziele und Hintergründe des Experiments

Ziel des Experimentes ist es, den Effekt der Vakuum-Doppelbrechung in der Wechselwirkung zweier elektromagnetischer Felder nachzuweisen. Die scheinbar einfachste Möglichkeit dafür, ein einzelner linear polarisierter Hochintensitätslaser, führt jedoch zu keinem Ergebnis, da in diesem Fall die Lorentz-Invarianten \mathcal{F} und \mathcal{G} verschwinden. Das ist leicht an deren Definitionsgleichungen (2) und (3) erkennbar. Hier findet zwar auch Vakuum-Polarisation statt, allerdings steht diese immer senkrecht zur Laserlaufrichtung und hat daher keinen Effekt auf das Laserfeld. Daher ist es interessant, die Überlagerung der Felder zweier linear polarisierter Hochintensitätslaser zu betrachten. Laserpulse im Röntgenbereich⁷ mit ausreichend hohen Amplituden, die ein potentiell messbares Signal hervorrufen, lassen sich am besten mit einzelnen Laserpulsen realisieren [6]. Daher werden hier keine kontinuierlichen Laser zur Modellierung verwendet. Im Experiment soll die Verschiebung der Polarisation eines Laserpulses von linearer zu leicht elliptischer Polarisation nachgewiesen werden. Ziel ist es für Beispielparameter von realen Versuchsaufbauten zu zeigen, unter welchen Bedingungen ein solcher Nachweis der Vakuum-Doppelbrechung praktisch gelingen könnte.

Der einfachste Fall zweier gegenläufiger Laser, für den der Effekt der Doppelbrechung maximal ausgeprägt ist [6], wird bereits in [17] behandelt. Dieser Aufbau ist zwar mathematisch einfacher zu beschreiben, jedoch in der Realisierung problembehaftet, da die Quellen der Pulse aufgrund des geometrischen Aufbaus gleichzeitig das Target des jeweils anderen Pulses sind. Hier wird deshalb eine Verallgemeinerung für beliebige Ausrichtungen der beiden Pulse zueinander betrachtet und daraufhin der Spezialfall orthogonaler Laserlaufrichtungen ausgewertet⁸. Der Einfachheit halber wird hierbei ein vergleichsweise schwacher Probelaser und ein deutlich stärkerer Pumplaser betrachtet. Mit Hilfe dieser Annahmen können die Wechselwirkungen der Laser mit dem Vakuum näherungsweise als elastische Stöße der Photonen des Probelasers an den Photonen des Pumplasers modelliert werden. Dadurch muss nur der Effekt des Pumplasers auf den Probelaser berücksichtigt werden, was die Rechnung wesentlich vereinfacht. Dieses Szenario wurde für orthogonale Laserlaufrichtungen auch bereits in [18] direkt anhand der nichtlinearen Feldgleichungen untersucht. Hier wird stattdessen der Ansatz aus [17] verwendet, bei dem das Fourier-transformierte Signal aus den Fourier-transformierten nichtlinearen Feldgleichungen berechnet wird.

⁷Röntgenlaser werden zum Nachweis des Effektes in der Regel verwendet, da mit diesen die höchste Polarisationsreinheit erzielt werden kann [16].

⁸Manche Teile der Auswertung sind jedoch auch für allgemeine Kollisionswinkel gültig.

3.2 Die Feldkonfiguration

Allgemein lässt sich in der klassischen Elektrodynamik die Einhüllende eines kontinuierlichen, in z -Richtung ausgerichteten, Gauß-förmigen Lasers im Rahmen der paraxialen Näherung nach [19] mit der Formel

$$E(\vec{x}) = \mathfrak{E}_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right] \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} \right] e^{-ikz - i\xi(z)} \quad (20)$$

beschreiben. Hier ist

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \quad (21)$$

die Strahlbreite,

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) \quad (22)$$

der Krümmungsradius und

$$\xi(z) = \arctan \frac{z}{z_R} \quad (23)$$

die Gouy-Phase. $z_R = \frac{kw_0^2}{2}$ beschreibt die Rayleigh-Länge, die durch $w(z = z_R) = \sqrt{2}w_0$ definiert ist (siehe Abbildung 2). Da für den Nachweis von Vakuum-Doppelbrechung die Verwendung stark fokus-

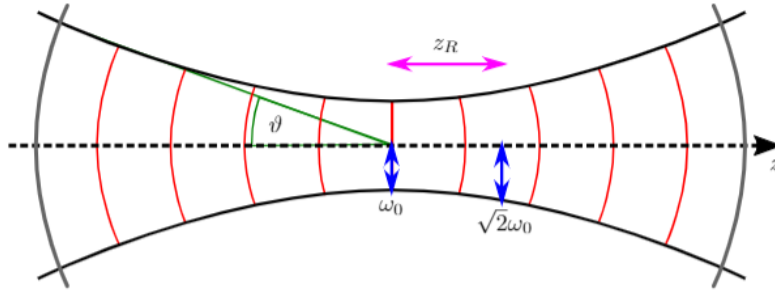


Abb. 2: Schematischer Aufbau des Profils der Einhüllenden eines gaussförmigen Laserpulses. Die roten Linien beschreiben die Phasenfronten.

sierter Laser notwendig ist und sich der Bereich der nichtlinearen Interaktionen im Wesentlichen auf den Fokuspunkt der beiden Laser beschränkt, an dem diese kollidieren, kann im Folgenden $z_R \rightarrow \infty$ angenommen werden, wodurch die Strahlbreite überall konstant w_0 beträgt [20]. Darüber hinaus fällt die Gouy-Phase $\xi(z)$ weg und der Krümmungsradius $R(z)$ läuft gegen unendlich. Ebenfalls geht der Emissionswinkel θ gegen null und die Phasenfronten bilden jeweils Ebenen (vgl. Abbildung 2). Da nur der Realteil des elektrischen Felds des Lasers beobachtbar ist, reicht es, sich in der Rechnung auf diesen zu beschränken. Da hier jedoch die Kollision zweier pulsförmiger Laser betrachtet werden soll, muss ein zusätzlicher zeiteinhüllender Term hinzugefügt werden.

Das Koordinatensystem wird für den Versuchsaufbau so gewählt, dass sich der schwache Probelaserpuls E_1 in die Richtung $\hat{\kappa}_1 = (1, 0, 0)$ und der starke Pumplaserpuls E_2 in die Richtung $\hat{\kappa}_1 = (\cos \Theta, \sin \Theta, 0)$ ausbreitet. Die Maxima beider Laserpulse sollen bei $x^\mu = (0, 0, 0, 0)$ aufeinander treffen. Die Einhüllende eines Laserpulses lässt sich dann mit den obigen Annahmen analog zu

[17] durch

$$E_i(\vec{x}) = \mathfrak{E}_i \exp \left[- \left(\frac{\vec{x} \cdot \hat{\kappa}_i - t}{\tau_i/2} \right)^2 \right] \exp \left[- \frac{\vec{x}^2 - (\vec{x} \cdot \hat{\kappa}_i)^2}{w_{0,i}^2} \right] \cos(\omega_i(\vec{x} \cdot \hat{\kappa}_i - t)) \quad (24)$$

beschreiben und gibt die ortsabhängige Amplitude der Feldstärkevektoren \vec{E}_i und \vec{B}_i an. Dabei ist \mathfrak{E}_i die Amplitude der Einhüllenden mit $\mathfrak{E}_1 \ll \mathfrak{E}_2$, τ_i die Pulsdauer⁹, $w_{0,i}$ der Strahlradius¹⁰ und ω_i die Strahlfrequenz des i -ten Laserpulses. Die Feldstärkevektoren des kombinierten Laserfelds lassen sich somit beschreiben durch

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad \text{mit} \quad (25)$$

$$\vec{E}_1 = E_1(0, -\sin \phi_1, \cos \phi_1) \quad \text{und} \quad \vec{E}_2 = E_2(\sin \Theta \sin \phi_2, -\cos \Theta \sin \phi_2, \cos \phi_2), \quad (26)$$

sowie

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad \text{mit} \quad (27)$$

$$\vec{B}_1 = E_1(0, -\cos \phi_1, -\sin \phi_1) \quad \text{und} \quad \vec{B}_2 = E_2(\sin \Theta \cos \phi_2, -\cos \Theta \cos \phi_2, -\sin \phi_2). \quad (28)$$

Der Winkel Θ beschreibt die Ausrichtung der beiden Laserpulse zueinander, wobei dieser so definiert ist, dass die Pulse für $\Theta = 0$ die gleiche Ausbreitungsrichtung haben. Während die beiden Laserpulse sich in der x - y -Ebene ausbreiten, sind deren Polarisationswinkel ϕ_i so gewählt, dass sie den Winkel des \vec{E}_i -Felds zur z -Achse beschreiben.

3.3 Die charakteristischen Parameter des Signals

Da hier das Signalphotonenfeld und das externe Laserfeld getrennt betrachtet werden, lässt sich die Abhängigkeit der nichtlinearen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}(F + f)$ in einen Anteil des Laserfelds $F^{\mu\nu}$ und einen Anteil des Signalphotonenfelds $f^{\mu\nu} = \partial^\mu a^\nu - \partial^\nu a^\mu$ zerlegen. Dann gilt

$$\mathcal{L}_{int}(F + f) = \mathcal{L}_{int}(F) - \underbrace{2\partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{int}(F)}{\partial F^{\mu\nu}} \right)}_{=j_\nu(F)} a^\nu + \mathcal{O}(a^2). \quad (29)$$

Da mit stark fokussierten Lasern gearbeitet wird, verschwindet $\mathcal{L}_{int}(F)$ näherungsweise außerhalb des Kollisionsbereichs und übrig bleibt die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_\gamma(a|F) = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - j_\nu a^\nu \quad (30)$$

mit der Signalphotonenflussdichte $j_\nu(F)$ und dem Signalphotonenfeld a^ν . Diese Gleichung beschreibt alle Interaktionsprozesse des externen Felds mit dem Vakuum, bei denen ein einzelnes Signalphoton emittiert wird, also Lichtdiffraktionsprozesse¹¹. Das Signalphotonenfeld folgt dementsprechend aus

⁹ τ_i entspricht der Zeit, an dem die Feldamplitude auf das $\frac{1}{e^4}$ -fache abgefallen ist.

¹⁰ $w_{0,i}$ entspricht dem Radius, an dem die Feldamplitude auf das $\frac{1}{e}$ -fache abgefallen ist.

¹¹Dazu gehört die hier untersuchte Vakuum-Doppelbrechung, weitere Effekte dieser Art sind beispielsweise Quantenreflektion oder Photonenverschmelzung.

der Lösung der nichtlinearen Feldgleichungen der Form

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (31)$$

die sich aus (30) berechnen lassen. $a^\nu(x)$ lässt sich dann wie folgt schreiben:

$$a^\nu(x) = \operatorname{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik^\mu x_\mu}}{ik^0} j^\nu(k) \Big|_{k^0=|\vec{k}|} \quad (32)$$

mit

$$j^\nu(k) = \int d^4x e^{-ik^\mu x_\mu} j^\nu(x). \quad (33)$$

Entsprechend ergibt sich das elektrische Signalfeld aus

$$\vec{e}(x) = -\vec{\nabla} a^0(x) - \partial_t \vec{a}(x) = \operatorname{Re} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ik^\mu x_\mu} (\vec{j}(k) - \vec{k} j^0(k)) \Big|_{k^0=|\vec{k}|}. \quad (34)$$

Darüber hinaus gilt für die Energie des Signalphulses mit $|\vec{e}(k)| = |\vec{b}(k)| = |\vec{j}(k)|$

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\vec{e}(k)|^2 \Big|_{k^0=|\vec{k}|} = \sum_{p=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} |\vec{\epsilon}_p \cdot \vec{j}(k)|^2 \Big|_{k^0=|\vec{k}|}, \quad (35)$$

wobei sich das elektrische Signalfeld in Richtung zweier normierter, zueinander orthogonaler Polarisationsvektoren $\vec{\epsilon}_p$ aufspannen lässt. Diese Aufspaltung ermöglicht später, den polarisationsgeflippten Teil des Signals zu isolieren. Damit folgt die differentielle Signalphotonenzahldichte

$$d^3N_p = \frac{d^3W_p}{k^0} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^0} |\vec{\epsilon}_p(k) \cdot \vec{j}(k)|^2 \Big|_{k^0=|\vec{k}|}. \quad (36)$$

Die in die Formel eingehende Amplitude lässt sich alternativ auch schreiben als

$$\vec{\epsilon}_p(k) \cdot \vec{j}(k) \Big|_{k^0=|\vec{k}|} = ik^0 \int d^4x e^{-ik^\mu x_\mu} [\vec{\epsilon}_p(k) \cdot \vec{P} - \vec{\epsilon}_{p+1}(k) \cdot \vec{M}] \Big|_{k^0=|\vec{k}|}, \quad (37)$$

wobei

$$\vec{P} = -\vec{E} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \mathcal{F}} - \vec{B} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \mathcal{G}} \quad (38)$$

die Polarisation und

$$\vec{M} = -\vec{B} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \mathcal{F}} + \vec{E} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \mathcal{G}} \quad (39)$$

die Magnetisierung sind, die durch die Signalphotonen hervorgerufen werden. Diese Formeln und Herleitungen sind lediglich eine kurze Skizze. Eine ausführliche Einführung findet sich in [17].

4 Allgemeine Berechnung der differentiellen Signalphotonenzahldichte und des Signalfelds

In diesem Abschnitt sollen allgemeine analytische Ausdrücke für die differentielle Signalphotonenzahldichte d^3N_p der polarisationsgeflippten Signalphotonen und für das Signalphotonenfeld $\vec{e}(x)$ aus den in Abschnitt 3.2 eingeführten Feldverteilungen von Probe- und Pumplaser hergeleitet werden. Dabei werden schrittweise zunächst die Lorentz-Invarianten \mathcal{F} und \mathcal{G} und anschließend d^3N_p und $\vec{e}(x)$ selbst berechnet. Für beide Formeln ist es notwendig, dasselbe Fourierintegral der Feldverteilungen der Laser zu lösen, was am Ende dieses Kapitels passiert.

4.1 Berechnung der Lorentz-Invarianten

Die erste Lorentz-Invariante \mathcal{F} lässt sich nach Gleichung (2) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{-1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) = \frac{-1}{2}((\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 - (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)^2) \\ &= \frac{-1}{2}(\vec{E}_1^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \vec{E}_2^2 - \vec{B}_1^2 - 2\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 - \vec{B}_2^2) \\ &\stackrel{\vec{E}_i^2 \equiv \vec{B}_i^2}{=} -\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 + \vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2.\end{aligned}\tag{40}$$

Es müssen also die Skalarprodukte \vec{E}_i - und \vec{B}_i -Felder berechnet werden. Mit der Parametrisierung der Feldrichtungen nach Gleichungen (26) und (28) folgt

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 E_2 (\cos \Theta \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2)\tag{41}$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{B}_2 = E_1 E_2 (\cos \Theta \cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2)\tag{42}$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= E_1 E_2 (1 - \cos \Theta) (\sin \phi_1 \sin \phi_2 - \cos \phi_1 \cos \phi_2) \\ &= -E_1 E_2 (1 - \cos \Theta) \cos(\phi_1 + \phi_2).\end{aligned}\tag{43}$$

Die zweite Lorentz-Invariante \mathcal{G} lässt sich nach Gleichung (3) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= -\vec{E} \cdot \vec{B} = -(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \\ &\stackrel{\vec{E}_i \cdot \vec{B}_i = 0}{=} -\vec{E}_1 \cdot \vec{B}_2 - \vec{B}_1 \cdot \vec{E}_2.\end{aligned}\tag{44}$$

Die Berechnung der Skalarprodukte ergibt

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{B}_2 = E_1 E_2 (\cos \Theta \sin \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2)\tag{45}$$

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 E_2 (\cos \Theta \cos \phi_1 \sin \phi_2 - \sin \phi_1 \cos \phi_2).\tag{46}$$

Damit folgt schließlich

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= -E_1 E_2 [(\cos \Theta (\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2) - (\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2))] \\ &= E_1 E_2 (1 - \cos \Theta) \sin(\phi_1 + \phi_2).\end{aligned}\tag{47}$$

Es zeigt sich, dass \mathcal{F} und \mathcal{G} nur von der Summe der Polarisationswinkel abhängen. Da für die Definition der Polarisationswinkel ϕ_i im Bezug auf das Vorzeichen Wahlfreiheit gilt, ließe sich diese Abhängigkeit für eine Transformation $\phi_i \rightarrow \phi'_i = -\phi_i$ auch alternativ in eine Winkeldifferenz umschreiben.

4.2 Die differentielle Signalphotonenzahldichte für Vakuum-Doppelbrechung

Um die differentielle Signalphotonenzahldichte nach Gleichung (36) zu berechnen, müssen zunächst die Ausdrücke für die Polarisierung und Magnetisierung des Vakuums gefunden werden, die sich aus dem nichtlinearen Anteil der Lagrangedichte des Laserfelds ergeben. Mit der Formel für den nichtlinearen Anteil der Lagrangedichte aus Gleichung (19) und den Lorentz-Invarianten aus den Gleichungen (43) und (47) gilt für die Polarisierung des Vakuums

$$\begin{aligned}\vec{P} &= -\vec{E} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \mathcal{F}} - \vec{B} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \mathcal{G}} = -\frac{2\alpha^2}{45m_e^4} (8\mathcal{F}\vec{E} + 14\mathcal{G}\vec{B}) \\ &\stackrel{\alpha=\frac{e^2}{4\pi}}{=} \frac{e^4(1-\cos\Theta)}{180\pi^2 m_e^4} E_1 E_2 [4\cos(\phi_1 + \phi_2)(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) - 7\sin(\phi_1 + \phi_2)(\vec{B}_1 + \vec{B}_2)] \\ &\simeq \frac{e^4(1-\cos\Theta)}{180\pi^2 m_e^4} E_1 E_2^2 \left[4\cos(\phi_1 + \phi_2) \begin{pmatrix} \sin\Theta \sin\phi_2 \\ -\cos\Theta \sin\phi_2 \\ \cos\phi_2 \end{pmatrix} - 7\sin(\phi_1 + \phi_2) \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos\phi_2 \\ -\cos\Theta \cos\phi_2 \\ \sin\phi_2 \end{pmatrix} \right]\end{aligned}\quad (48)$$

und für die Magnetisierung des Vakuums

$$\begin{aligned}\vec{M} &= -\vec{B} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \mathcal{F}} + \vec{E} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \mathcal{G}} = -\frac{2\alpha^2}{45m_e^4} (8\mathcal{F}\vec{B} - 14\mathcal{G}\vec{E}) \\ &\stackrel{\alpha=\frac{e^2}{4\pi}}{=} \frac{e^4(1-\cos\Theta)}{180\pi^2 m_e^4} E_1 E_2 [4\cos(\phi_1 + \phi_2)(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) + 7\sin(\phi_1 + \phi_2)(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)] \\ &\simeq \frac{e^4(1-\cos\Theta)}{180\pi^2 m_e^4} E_1 E_2^2 \left[4\cos(\phi_1 + \phi_2) \begin{pmatrix} \sin\Theta \cos\phi_2 \\ -\cos\Theta \cos\phi_2 \\ -\sin\phi_2 \end{pmatrix} + 7\sin(\phi_1 + \phi_2) \begin{pmatrix} \sin\Theta \sin\phi_2 \\ -\cos\Theta \sin\phi_2 \\ \cos\phi_2 \end{pmatrix} \right].\end{aligned}\quad (49)$$

Dabei wurden alle Terme der Ordnung E_1^2 und höher vernachlässigt, da $E_1 \ll E_2$ und daher nur die quasielastische Streuung von Photonen des ersten Lasers am zweiten Laser relevant für die Betrachtung ist. Weiterhin gilt nach Gleichung (37)

$$\vec{\epsilon}_p(k) \cdot \vec{j}(k) \Big|_{k^0=|\vec{k}|} = ik^0 \int d^4x e^{-ik^\mu x_\mu} [\vec{\epsilon}_p(k) \cdot \vec{P} - \epsilon_{p+1}(k) \cdot \vec{M}] \Big|_{k^0=|\vec{k}|}. \quad (50)$$

Für $\vec{\epsilon}_p$, $p = 1, 2, 3, 4$, gilt hier¹²

$$\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{k} = \vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{k} = \vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\epsilon}_1 = -\vec{\epsilon}_3, \quad \vec{\epsilon}_2 = -\vec{\epsilon}_4. \quad (51)$$

Der Wellenvektor des Signalphotonenfelds \vec{k} lässt sich im inversen Raum allgemein parametrisieren durch

$$\hat{\vec{k}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_k \\ -\sin\phi_k \sin\theta_k \\ \cos\phi_k \sin\theta_k \end{pmatrix}. \quad (52)$$

¹²Formal mathematisch ist es notwendig den Index hier bis vier laufen zu lassen, um mit Gleichung (37) das richtige Ergebnis zu erhalten (dabei ist $\vec{\epsilon}_5 \equiv \vec{\epsilon}_1$). Um am Ende das gesamte Signal zu berechnen, reicht jedoch die Summation über die beiden linear unabhängigen Indizes $p = 1, 2$.

Anders als in der konventionellen Definition von Kugelkoordinaten werden die Winkel hier so definiert, dass θ_k den Neigungswinkel zur x -Achse und ϕ_k den Rotationswinkel um die x -Achse beschreibt. Dann lässt sich $\vec{\epsilon}_p$ über die Definitionsgleichung (51) analog wie in [20] allgemein schreiben als

$$\vec{\epsilon}_p = \begin{pmatrix} -\sin \theta_k \cos \beta_k \\ -\sin \phi_k \cos \theta_k \cos \beta_k - \cos \phi_k \sin \beta_k \\ \cos \phi_k \cos \theta_k \cos \beta_k - \sin \phi_k \sin \beta_k \end{pmatrix}, \quad (53)$$

wobei $\beta_k \in [0, 2\pi]$ als freier Parameter die Ausrichtung von $\vec{\epsilon}_p$ festlegt. Für $\vec{\epsilon}_p \rightarrow \vec{\epsilon}_{p+1}$ ist dann $\beta_k \rightarrow \beta_k + \frac{\pi}{2}$. Um den Effekt der Vakuum-Doppelbrechung zu untersuchen, wird β_k nun so gewählt, dass $\vec{\epsilon}_p \cdot \vec{E}_1 = 0$ gilt, das Signal also senkrecht zur Polarisationsrichtung des Probelasers polarisiert ist. Dadurch wird nur der polarisationsgeflippte Teil der Signalphotonen berücksichtigt, also nur der Teil, der die Polarisation des Probelasers verschiebt und somit aus dem Effekt der Vakuum-Doppelbrechung resultiert. Daraus lässt sich als Bedingung

$$\beta_k = \begin{cases} \pm \frac{\pi}{2}, & \text{falls } \phi_k = \phi_1 + n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \arctan(\cos \theta_k \cot(\phi_k - \phi_1)), & \text{sonst} \end{cases} \quad (54)$$

bestimmen, wobei für die Werte $\phi_k = \phi_1 + n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$ eine Fallunterscheidung angestellt werden muss, um die Polstellen in der allgemeinen Bedingungsgleichung zu umgehen. Für diesen Spezialfall wird diese durch beide Wahlen von β_k unabhängig vom Vorzeichen gelöst. Physikalisch macht die Wahl des Vorzeichens keinen Unterschied, da am Ende nur das Betragsquadrat des Ergebnisses real gemessen werden kann. Somit ergibt sich für den Polarisationsvektor des Signalphotonenfelds

$$\vec{\epsilon}_p = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta_k \cot^2(\phi_k - \phi_1)}} \begin{pmatrix} -\sin \theta_k \\ -\sin \phi_k \cos \theta_k - \cos \phi_k \cos \theta_k \cot(\phi_k - \phi_1) \\ \cos \phi_k \cos \theta_k - \sin \phi_k \cos \theta_k \cot(\phi_k - \phi_1) \end{pmatrix} \quad (55)$$

und

$$\vec{\epsilon}_{p+1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta_k \cot^2(\phi_k - \phi_1)}} \begin{pmatrix} \sin \theta_k \cos \theta_k \cot(\phi_k - \phi_1) \\ \sin \phi_k \cos^2 \theta_k \cot(\phi_k - \phi_1) - \cos \phi_k \\ -\cos \phi_k \cos^2 \theta_k \cot(\phi_k - \phi_1) - \sin \phi_k \end{pmatrix}, \quad (56)$$

sowie für die Spezialfälle $\phi_k = \phi_1 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\vec{\epsilon}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp \cos \phi_k \\ \mp \sin \phi_k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\epsilon}_{p+1} = \begin{pmatrix} \pm \sin \theta_k \\ \pm \sin \phi_k \cos \theta_k \\ \mp \cos \phi_k \cos \theta_k \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Mit den Gleichungen (48) und (49) lässt sich dann schreiben

$$\begin{aligned}
\left[\vec{\epsilon}_p \cdot \vec{P} - \epsilon_{p+1} \cdot \vec{M} \right] &= \frac{e^4(1 - \cos \Theta)}{180\pi^2 m_e^4} E_1 E_2^2 \\
&\cdot \left[\frac{4 \cos(\phi_1 + \phi_2)}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta_k \cot^2(\phi_k - \phi_1)}} [(\cos \phi_2 - \cot(\phi_k - \phi_1) \cos \theta_k \sin \phi_2) \cos \phi_k (\cos \theta_k - \cos \Theta) \right. \\
&\quad + (\sin \phi_2 + \cot(\phi_k - \phi_1) \cos \theta_k \cos \phi_2) \\
&\quad \cdot (\sin \phi_k \cos \theta_k \cos \Theta - \sin \theta_k \sin \Theta - \sin \phi_k)] \\
&+ \frac{7 \sin(\phi_1 + \phi_2)}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta_k \cot^2(\phi_k - \phi_1)}} [(\sin \phi_2 + \cot(\phi_k - \phi_1) \cos \theta_k \cos \phi_2) \cos \phi_k (\cos \theta_k - \cos \Theta) \\
&\quad + (\cot(\phi_k - \phi_1) \cos \theta_k \sin \phi_2 - \cos \phi_2) \\
&\quad \cdot (\sin \phi_k \cos \theta_k \cos \Theta - \sin \theta_k \sin \Theta - \sin \phi_k)] \Big] \\
&= \frac{e^4(1 - \cos \Theta)}{180\pi^2 m_e^4} E_1 E_2^2 [4A \cos(\phi_1 + \phi_2) + 7B \sin(\phi_1 + \phi_2)],
\end{aligned} \tag{58}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
\left[\vec{\epsilon}_p \cdot \vec{P} - \epsilon_{p+1} \cdot \vec{M} \right] &= \pm \frac{e^4(1 - \cos \Theta)}{180\pi^2 m_e^4} E_1 E_2^2 \\
&\cdot \left[4 \cos(\phi_2 + \phi_k) [-\cos \phi_k \sin \phi_2 (\cos \theta_k - \cos \Theta) + \cos \phi_2 (\sin \phi_k \cos \theta_k \cos \Theta - \sin \theta_k \sin \Theta - \sin \phi_k)] \right. \\
&\quad \left. + 7 \sin(\phi_2 + \phi_k) [\cos \phi_k \cos \phi_2 (\cos \theta_k - \cos \Theta) + \sin \phi_2 (\sin \phi_k \cos \theta_k \cos \Theta - \sin \theta_k \sin \Theta - \sin \phi_k)] \right] \\
&= \pm \frac{e^4(1 - \cos \Theta)}{180\pi^2 m_e^4} E_1 E_2^2 [4A' \cos(\phi_1 + \phi_2) + 7B' \sin(\phi_1 + \phi_2)]
\end{aligned} \tag{59}$$

für die Spezialfälle $\phi_k = \phi_1 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Dabei werden wiederum alle Terme der Ordnung E_1^2 vernachlässigt. Da nur die Feldstärken ortsabhängig sind, können alle anderen Terme vor das Integral gezogen werden und die Formel für die differentielle Signalphotonenzahldichte reduziert sich auf

$$d^3 N_p = \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^0}{2} \frac{e^8(1 - \cos \Theta)^2}{180^2 \pi^4 m_e^8} \cdot [4A \cos(\phi_1 + \phi_2) + 7B \sin(\phi_1 + \phi_2)]^2 \cdot \left| \int d^4 x E_1 E_2^2 e^{-ik^\mu x_\mu} \right|^2. \tag{60}$$

Damit bleibt nur die Berechnung des Integrals über die Feldamplituden (siehe Abschnitt 4.4).

4.3 Das Signalphotonenfeld

Um das Signalphotonenfeld nach Gleichung (34) zu berechnen, muss zunächst der Vierer-Vakuumstrom

$$j_\nu = 2\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial F^{\mu\nu}} \quad (61)$$

ermittelt werden, wie in Gleichung (29) eingeführt. Entsprechend dem bereits in Gleichung (1) eingeführten Feldstärketensor, wird für die Berechnung die folgende Notation verwendet:

$$\begin{aligned} F^{0i} &= -F^{i0} = E^i, & F^{ij} &= \epsilon^{ijk} B_k, \\ E^i &= -E_i \triangleq \vec{E}, & B^i &= -B_i \triangleq \vec{B}. \end{aligned} \quad (62)$$

Damit lassen sich dann die Lorentz-Invarianten darstellen als

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(E_i E^i - B_i B^i), \quad \mathcal{G} = E_i B^i. \quad (63)$$

Dann folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial F^{0i}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial E^i} = \frac{\overbrace{e^4}^{=2C}}{180\pi^2 m_e^4} [4\mathcal{F} E_i + 7\mathcal{G} B_i], \quad (64)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial F^{i0}} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial E^i} = -\frac{e^4}{180\pi^2 m_e^4} [4\mathcal{F} E_i + 7\mathcal{G} B_i], \quad (65)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial F^{\mu\mu}} = 0, \quad (66)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial F^{ij}} = -\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial F^{ji}} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial B_k} = \frac{e^4}{180\pi^2 m_e^4} \epsilon_{ijk} [4\mathcal{F} B^k - 7\mathcal{G} E^k], \quad (67)$$

und somit lässt sich

$$j_0 = -4C \partial^i [4\mathcal{F} E_i + 7\mathcal{G} B_i] = 4C \nabla [4\mathcal{F} \vec{E} + 7\mathcal{G} \vec{B}] \quad (68)$$

sowie

$$j_i = 4C \partial^j \epsilon_{ijk} [4\mathcal{F} B^k - 7\mathcal{G} E^k] + 4C \partial^0 [4\mathcal{F} E_i + 7\mathcal{G} B_i] \quad (69)$$

$$= -4C \nabla \times [4\mathcal{F} \vec{B} - 7\mathcal{G} \vec{E}] - 4C \partial_t [4\mathcal{F} \vec{E} + 7\mathcal{G} \vec{B}] \quad (70)$$

herleiten. Um daraus das Signalphotonenfeld zu errechnen, müssen diese Ausdrücke zunächst Fourier-transformiert werden. Dabei lässt sich ausnutzen, dass die Ableitungen in Form der Wellenvektoren vor das Fourier-Integral gezogen werden können¹³. Damit ergibt sich schließlich nach Einsetzen von Gleichung (43) und (47) unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung in E_1

$$\begin{aligned} j^0(k) &= 4C \int d^4x e^{-ik^\mu x_\mu} \nabla [4\mathcal{F} \vec{E} + 7\mathcal{G} \vec{B}] \\ &= -4C(1 - \cos \Theta) i\vec{k} \cdot [4 \cos(\phi_1 + \phi_2) \hat{E}_2 - 7 \sin(\phi_1 + \phi_2) \hat{B}_2] \int d^4x e^{-ik^\mu x_\mu} E_1 E_2^2 \end{aligned} \quad (71)$$

¹³Dabei muss beachtet werden, dass aufgrund der Wahl der Metrik anders als üblich für räumliche Ableitungen ein Vorzeichenwechsel notwendig ist.

und

$$\begin{aligned}
j^i(k) = \vec{j}(k) &= 4C \int d^4x e^{-ik^\mu x_\mu} \partial_t [4\mathcal{F}\vec{E} + 7\mathcal{G}\vec{B}] + \nabla \times [4\mathcal{F}\vec{B} - 7\mathcal{G}\vec{E}] \\
&= 4C(1 - \cos \Theta) ik^0 [(4 \cos(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{B}}_2 - 7 \sin(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{E}}_2) \\
&\quad - \hat{\vec{k}} \times (4 \cos(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{E}}_2 + 7 \sin(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{B}}_2)] \int d^4x e^{-ik^\mu x_\mu} E_1 E_2^2.
\end{aligned} \tag{72}$$

Das zu berechnende Integral ist also dasselbe wie das in Abschnitt 4.2 für die differentielle Signalphotonenzahldichte. Das gesamte Signalphotonenfeld im Fourier-Raum lässt sich daher nach Gleichung (34) zusammenfassen durch

$$\vec{j} - \hat{\vec{k}} j^0 = 4C(1 - \cos \Theta) ik^0 \vec{A}(k^0, \theta_k, \phi_k, \phi_1, \phi_2) \int d^4x e^{-ik^\mu x_\mu} E_1 E_2^2 \tag{73}$$

mit dem winkelabhängigen Richtungsvektor

$$\begin{aligned}
\vec{A}(k^0, \theta_k, \phi_k, \phi_1, \phi_2) &= -\hat{\vec{k}} \times (4 \cos(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{B}}_2 + 7 \sin(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{E}}_2) \\
&\quad + (4 \cos(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{E}}_2 - 7 \sin(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{B}}_2) \\
&\quad + \hat{\vec{k}} (\hat{\vec{k}} \cdot (4 \cos(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{E}}_2 - 7 \sin(\phi_1 + \phi_2) \hat{\vec{B}}_2)).
\end{aligned} \tag{74}$$

4.4 Die Fourier-Transformation der Feldamplituden

Sowohl für die Signalphotonenzahldichte, als auch das Signalphotonenfeld bleibt wie gezeigt die Berechnung des folgenden Integrals

$$\begin{aligned}
\int d^4x E_1 E_2^2 e^{-ik^\mu x_\mu} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dt E_1 E_2^2 e^{ik^0 t - i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\
&= \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left[-\frac{2z^2}{w_{0,2}^2} - \frac{z^2}{w_{0,1}^2} - ik_z z \right] \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left[-\frac{y^2}{w_{0,1}^2} - \frac{2y^2 \cos^2 \Theta}{w_{0,2}^2} - \frac{8y^2 \sin^2 \Theta}{\tau_2^2} - ik_y y \right] \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[-\frac{4x^2}{\tau_1^2} - \frac{8x^2 \cos^2 \Theta + 16xy \sin \Theta \cos \Theta}{\tau_2^2} - \frac{2x^2 \sin^2 \Theta}{w_{0,2}^2} - ik_x x \right] \\
&\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp \left[-\frac{4t^2 - 8xt}{\tau_1^2} - \frac{8t^2 - 16t(x \cos \Theta + y \sin \Theta)}{\tau_2^2} + ik^0 t \right] \\
&\quad \cdot \cos[\omega_1(x - t)] \cos^2[\omega_2(x \cos \Theta + y \sin \Theta)].
\end{aligned} \tag{75}$$

Der quadratische Kosinusterm in der letzten Zeile kann zu $\frac{1}{2}$ gemittelt werden, da der Probelaser quasielastisch an Laser 2 gestreut wird und die Signalphotonen somit näherungsweise die Frequenz ω_1 des ersten Lasers haben. Daher sollte die differentielle Signalphotonenzahldichte kaum von

der Frequenz des Pumplasers ω_2 abhängen. Das Zeitintegral lässt sich daher in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp[-at^2 + a't] \cos[\omega_1(x-t)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left[\frac{a'^2 - \omega_1^2}{4a}\right] \cos\left[\omega_1\left(x - \frac{a'}{2a}\right)\right] \quad (76)$$

mit

$$a = \frac{8\tau_1^2 + 4\tau_2^2}{\tau_1^2 \tau_2^2} \quad (77a)$$

$$a' = a'(x, y, k^0) = \frac{8x}{\tau_1^2} + \frac{16(x \cos \Theta + y \sin \Theta)}{\tau_2^2} + ik^0. \quad (77b)$$

Nach Einsetzen von a' und Isolierung aller von x abhängigen Terme lässt sich das entsprechende Integral wie folgt schreiben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp[-bx^2 - b'x] \cos[-\omega_1 ux + \omega_1 b''] = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left[\frac{b'^2 - \omega_1^2 u^2}{4b}\right] \cos\left[\omega_1 b'' + \frac{\omega_1 u b'}{2b}\right] \quad (78)$$

mit

$$b = a - \frac{8 \sin^2 \Theta}{\tau_2^2} + \frac{2 \sin^2 \Theta}{w_{0,2}^2} - \frac{16}{a} \left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{2 \cos \Theta}{\tau_2^2} \right)^2 \quad (79a)$$

$$b' = b'(y, k^0, k_x) = py - iqk^0 + ik_x \quad (79b)$$

$$p = \sin \Theta \cos \Theta \left(\frac{16}{\tau_2^2} - \frac{128}{a\tau_2^4} \right) - \frac{64 \sin \Theta}{a\tau_1^2 \tau_2^2} \quad (79c)$$

$$q = \frac{1}{a} \left(\frac{8 \cos \Theta}{\tau_2^2} + \frac{4 \sin \Theta}{\tau_1^2} \right) \quad (79d)$$

$$b'' = b''(y, k^0) = \frac{8 \sin \Theta}{a\tau_2^2} \omega_1 y + i \frac{1}{2a} \omega_1 k^0 \quad (79e)$$

$$u = \frac{8(1 - \cos \Theta)}{a\tau_2^2}. \quad (79f)$$

Wiederum nach Einsetzen von b' und b'' und Isolierung aller von y abhängigen Terme kann das entsprechende Integral folgendermaßen berechnet werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \exp[-cy^2 - ic'y] \cos[\omega_1 vy + i\omega_1 c''] = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \exp\left[-\frac{c'^2 + \omega_1^2 v^2}{4c}\right] \cos\left[i\omega_1 \left(c'' - \frac{c'v}{2c}\right)\right] \quad (80)$$

mit

$$c = \frac{1}{w_{0,1}^2} + \frac{2 \cos^2 \Theta}{w_{0,2}^2} + \frac{8 \sin^2 \Theta}{\tau_2^2} - \frac{64 \sin^2 \Theta}{a\tau_2^4} - \frac{p^2}{4b} \quad (81a)$$

$$c' = c'(k^0, k_x, k_y) = k_y - \frac{p}{2b} k_x + \left(\frac{pq}{2a} - \frac{8 \sin \Theta}{a\tau_2^2} \right) k^0 \quad (81b)$$

$$c'' = c''(k^0, k_x) = \left(\frac{1}{2a} - \frac{uq}{2b} \right) k^0 + \frac{u}{2b} k_x \quad (81c)$$

$$v = \frac{8 \sin \Theta}{a\tau_2^2} + \frac{up}{2b}. \quad (81d)$$

Final muss also nur noch das Integral über z ausgerechnet werden, in dem jedoch keine Mischterme mit den anderen Integrationsvariablen auftauchen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp \left[- \left(\frac{1}{w_{0,1}^2} + \frac{2}{w_{0,2}^2} \right) z^2 - ik_z z \right] = \sqrt{\frac{\pi w_{0,1}^2 w_{0,2}^2}{2w_{0,1}^2 + w_{0,2}^2}} \exp \left[- \frac{w_{0,1}^2 w_{0,2}^2 k_z^2}{4(2w_{0,1}^2 + w_{0,2}^2)} \right]. \quad (82)$$

Nach Zusammenfassen all dieser Ergebnisse ergibt sich für das gesamte Fourierintegral

$$\begin{aligned} \int d^4x E_1 E_2^2 e^{-ik^\mu x_\mu} &= \frac{\pi^2 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2^2}{4\sqrt{abc}} \sqrt{\frac{w_{0,1}^2 w_{0,2}^2}{2w_{0,1}^2 + w_{0,2}^2}} \exp \left[- \frac{w_{0,1}^2 w_{0,2}^2}{8w_{0,1}^2 + 4w_{0,2}^2} k_z^2 \right] \\ &\cdot \sum_{s=\pm 1} \exp \left[- \frac{1}{4a} (k^0 - s\omega_1)^2 - \frac{1}{4b} (k_x - qk^0 + us\omega_1)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4c} \left(\frac{p}{2b} k_x - k_y - \left(\frac{pq}{2b} - \frac{8 \sin \Theta}{a\tau_2^2} \right) k^0 - vs\omega_1 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (83)$$

mit den Parametern

$$a = \frac{8\tau_1^2 + 4\tau_2^2}{\tau_1^2 \tau_2^2}, \quad b = \frac{8(1 - \cos \Theta)^2}{2\tau_1^2 + \tau_2^2} + \frac{2 \sin^2 \Theta}{w_{0,2}^2} \quad (84a)$$

$$c = \frac{1}{w_{0,1}^2} + \frac{2 \cos^2 \Theta}{w_{0,2}^2} + \frac{8 \sin^4 \Theta}{4w_{0,2}^2(1 - \cos \Theta)^2 + (2\tau_1^2 + \tau_2^2) \sin^2 \Theta} \quad (84b)$$

$$p = -\frac{16 \sin \Theta (1 - \cos \Theta)}{2\tau_1^2 + \tau_2^2}, \quad q = \frac{2\tau_1^2 \cos \Theta + \tau_2^2 \sin \Theta}{2\tau_1^2 + \tau_2^2} \quad (84c)$$

$$u = \frac{2\tau_1^2(1 - \cos \Theta)}{2\tau_1^2 + \tau_2^2}, \quad v = \frac{2\tau_1^2 \sin \Theta}{2\tau_1^2 + \tau_2^2} \left(1 - \frac{8w_{0,2}^2(1 - \cos \Theta)^2}{4(1 - \cos \Theta)^2 w_{0,2}^2 + \sin^2 \Theta (2\tau_1^2 + \tau_2^2)} \right), \quad (84d)$$

womit sich schließlich die Formel für die differentielle Zahl polarisationsgeflippter Signalphotonen und das allgemeine Signalphotonenfeld nach Gleichungen (60) und (73) explizit angeben lassen. An der obigen Gleichung ist schnell ersichtlich, dass man nur in der x - y -Ebene um $k^0 \simeq \omega_1$ ein Signal erwarten kann, da die Amplitude in z -Richtung und für andere Frequenzen sehr schnell exponentiell abfällt. Die Auswertung kann demnach für $\phi_k = \pm \frac{\pi}{2}$ erfolgen¹⁴. Das ist legitim, da das Ergebnis aus Gleichung (82) näherungsweise die Form einer Delta-Distribution $\delta(k_z)$ annimmt [21].

¹⁴Beide Wahlmöglichkeiten werden dabei berücksichtigt, indem der Definitionsbereich von θ_k alternativ auf $[0, 2\pi]$ ausgedehnt wird.

5 Das nichtlineare Signal für orthogonale Laserlaufrichtungen und beispielhafte Parameter

Im vorherigen Abschnitt wurden bereits explizite Formeln für die Signalphotonenzahldichte und das Signalphotonenfeld zwischen einem Probe- und einem Pumplaserpuls für beliebige Polarisations- und Kollisionswinkel hergeleitet. Besonders interessant ist jedoch ein möglichst starkes Signal für einen realistischen experimentellen Aufbau zu betrachten, mit dem auch real die Wechselwirkungen zwischen dem elektromagnetischen Feld und dem Vakuum nachgewiesen werden können. Daher ist das Ziel optimierte Polarisationswinkel ϕ_1 und ϕ_2 der beiden Laser für orthogonale Laserlaufrichtungen ($\Theta = \frac{\pi}{2}$) zu finden. Wie bereits erläutert, wird primär das Signal in der x - y -Ebene betrachtet (also $\phi_k = \frac{\pi}{2}$) und zunächst für eine maximale Amplitude in x -Richtung optimiert, da die Vermutung nahe liegt, dass der Großteil des Signals in Richtungen mit kleinem θ_k emittiert wird. Ziel ist es, die Abhängigkeit der Signalstärke vom Winkel zur Laufrichtung des Probelasers, also von θ_k , und von der Tailenbreite des Probelasers $w_{0,1}$ zu analysieren und zu zeigen, ab welchem Winkel die Stärke des Signalfelds die des Probepulsfelds übertrifft und die Signatur somit nachgewiesen werden kann. Darüber hinaus soll durch Überlagerung des Signalfelds mit dem Probelaserfeld eine elliptische Polarisation des Probelaserpulses nach der Kollision und damit der Effekt der Doppelbrechung rechnerisch nachgewiesen werden und deren relativer Anteil am gesamten nichtlinearen Signal exemplarisch verdeutlicht werden.

Die in der Auswertung verwendeten Parameter des Pumplasers entsprechen denen des Hochintensitätslasers *ReLaX* [22] am *European XFEL* (*X-Ray Free-Electron Laser*) in Hamburg, die Parameter des Probelasers entsprechen denen des Lasers *XFEL* selbst [23]. Diese lauten in natürlichen Einheiten:

	Probelaser	Pumplaser
Pulsdauer	$\tau_1 = 334,4 \text{ eV}^{-1}$	$\tau_2 = 63,84 \text{ eV}^{-1}$
Strahlradius	$w_{0,1} = r \cdot 1,014 \text{ eV}^{-1}, r \in [0.2, 25]$	$w_{0,2} = 8,619 \text{ eV}^{-1}$
Strahlfrequenz	$\omega_1 = 12\,914 \text{ eV}$	$\omega_2 = 1,550 \text{ eV}$
Pulsenergie	$W_1 = 1,2914 \cdot 10^{16} \text{ eV}$	$W_2 = 6,24 \cdot 10^{19} \text{ eV}$
Feldamplitude	$\mathfrak{E}_1 = \frac{1}{r} \cdot 8,7357 \cdot 10^6 \text{ eV}^2, r \in [0.2, 25]$	$\mathfrak{E}_2 = 163,5 \cdot 10^6 \text{ eV}^2$

Tab. 1: Die verwendete experimentelle Parameter in natürlichen Einheiten.

Die Feldamplitude für eine gegebene Pulsenergie kann hergeleitet werden, indem das Quadrat der Einhüllenden der Laserfeldstärke aus Gleichung (24) zu einem beliebigen Zeitpunkt (z.B. $t = 0$) über den gesamten Raum integriert wird und anschließend nach der Amplitude aufgelöst wird. Dann ergibt sich¹⁵

$$\mathfrak{E}_i = \frac{2^{7/4} \sqrt{W_i}}{\pi^{3/4} \sqrt{\tau_i} w_{0,i}}. \quad (85)$$

Der Parameter r beschreibt indes die Variation der Strahlbreite des Probelaserpulses $w_{0,1}$, die hier untersucht werden soll. Da bei einer Variation der Strahlbreite die Pulsenergie dennoch konstant bleiben soll, nimmt die Amplitude somit für abnehmende Strahlbreiten zu.

¹⁵In der vollständigen Formel taucht noch ein Faktor $(1 - e^{-\tau_1^2 \omega_1^2})^{-1}$ auf, der jedoch näherungsweise eins beträgt.

5.1 Optimierung der Laser-Polarisationswinkel

Um die optimale Wahl der Polarisationswinkel ϕ_1 und ϕ_2 zu finden, muss also das Maximum der Funktion aus Gleichung (58) für $\phi_k = \frac{\pi}{2}$ und $\Theta = \frac{\pi}{2}$ gefunden werden. Mit diesen Annahmen vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\begin{aligned} [4A \cos(\phi_1 + \phi_2) + 7B \sin(\phi_1 + \phi_2)]^2 &= \frac{(1 + \sin \theta_k)^2}{\cos^2 \phi_1 + \cos^2 \theta_k \sin^2 \phi_k} \\ &\cdot [4 \cos(\phi_1 + \phi_2)(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \theta_k \sin \phi_1 \cos \phi_2) \\ &+ 7 \sin(\phi_1 + \phi_2)(\sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \theta_k - \cos \phi_1 \cos \phi_2)]^2. \end{aligned} \quad (86)$$

Darin sind bereits alle notwendigen Fallunterscheidungen enthalten und die einzige scheinbare Polstelle bei $\theta_k = \pm \frac{\pi}{2}$ und $\phi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ kürzt sich heraus, wenn nur für θ_k eingesetzt wird. Der Vorfaktor lässt sich dann als dreidimensionale Dichtefunktion der Winkel ϕ_1 , ϕ_2 und θ_k darstellen.

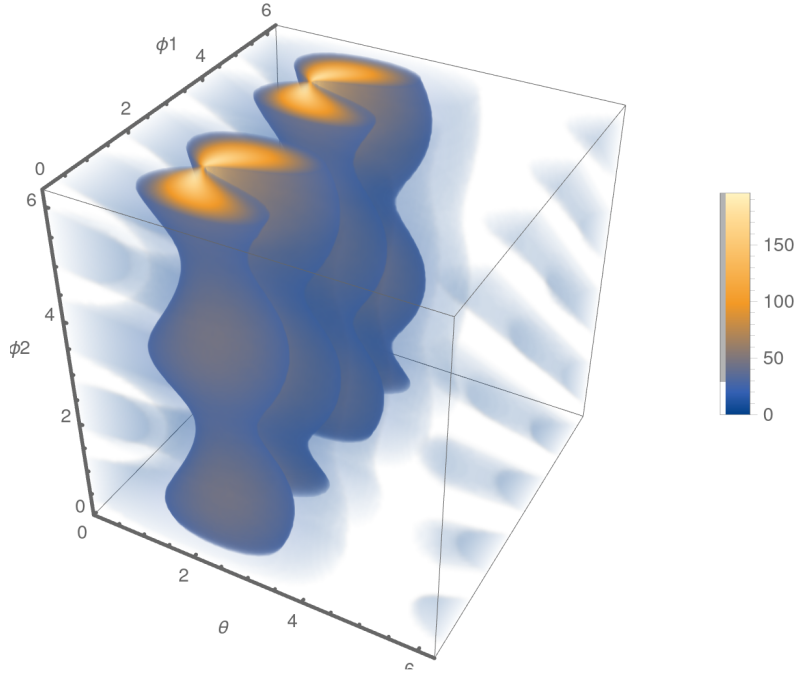


Abb. 3: Der Betrag des Vorfaktors in Abhängigkeit von den Polarisationswinkeln der Laser und des Emissionswinkels θ_k des Signals.

Das Diagramm zeigt deutlich, dass wenn man nur den Vorfaktor betrachtet, die stärkste Signatur nicht in Richtung des Probepulses emittiert wird, sondern für eine entsprechende Wahl der Polarisationswinkel bei $\theta_k \simeq \frac{\pi}{2}$. Da an dieser Stelle jedoch noch nicht die Abhängigkeit vom Exponentialterm aus Gleichung (83) einkalkuliert wurde und mit diesem für den Fall $q \ll 1$ die Signatur in y -Richtung exponentiell unterdrückt wird, ist es dennoch sinnvoll vor allem die Amplitude in Laufrichtung des Probepulses ($\theta_k = 0$) zu betrachten¹⁶. Damit vereinfacht sich der Ausdruck aus Gleichung (86)

¹⁶Dass das plausibel ist, zeigt sich auch in Abbildung 6

zu

$$\begin{aligned}
& [4A \cos(\phi_1 + \phi_2) + 7B \sin(\phi_1 + \phi_2)]^2 \\
&= [4 \cos(\phi_1 + \phi_2)(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \sin \phi_1 \cos \phi_2) + 7 \sin(\phi_1 + \phi_2)(\sin \phi_1 \sin \phi_2 - \cos \phi_1 \cos \phi_2)]^2 \\
&= 9 \sin^2(\phi_1 + \phi_2) \cos^2(\phi_1 + \phi_2) = \frac{9}{4} \sin(2\phi_1 + 2\phi_2).
\end{aligned} \tag{87}$$

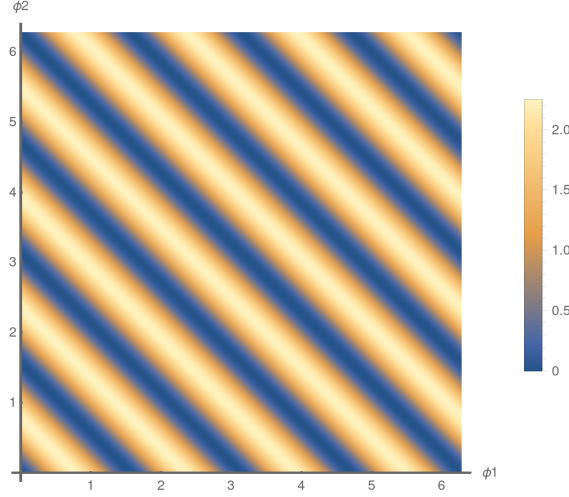


Abb. 4: Der Betrag des Vorfaktors in Abhängigkeit der Polarisationswinkel der Laser.

Damit bleiben relativ viele Möglichkeiten zur optimalen Wahl der Polarisationswinkel, wie Abbildung 4 zeigt, da auch an keiner anderen Stelle Abhängigkeiten von den Polarisationswinkeln auftreten. Die Bestimmungsgleichung für die Extremwerte lautet $\phi_1 + \phi_2 = \frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$ und wird beispielsweise für $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\phi_2 = 0$ erfüllt. Der Maximalwert beträgt also $\frac{9}{4}$. Tatsächlich zeigt sich, dass diese Wahl der Polarisationswinkel unabhängig von der Wahl des Kollisionswinkel für kleine θ_k das ideale Ergebnis für die hier berechneten Werte liefert [6].

5.2 Auswertung der doppeltebrochenen Signalphotonenzahl

Um die Stärke des Effekts der Vakuum-Doppelbrechung auszuwerten, muss die Zahl der polarisationsgeflippten Signalphotonen pro Probepuls ausgerechnet und mit der Zahl der Photonen im Puls ins Verhältnis gesetzt werden. Für den Spezialfall orthogonaler Laserlaufrichtungen reduzieren sich die Konstanten aus Gleichung (84) auf

$$a = \frac{8\tau_1^2 + 4\tau_2^2}{\tau_1^2 \tau_2^2} = 1,999 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad b = \frac{8w_{0,2}^2 + 4\tau_1^2 + 2\tau_2^2}{w_{0,2}^2(2\tau_1^2 + \tau_2^2)} = 26,96 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2, \tag{88a}$$

$$c = \frac{8w_{0,1}^2 + 4w_{0,2}^2 + 2\tau_1^2 + \tau_2^2}{w_{0,1}^2(4w_{0,2}^2 + 2\tau_1^2 + \tau_2^2)} = 3,508 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 + \frac{1}{r^2} 0,9726 \text{ eV}^2, \tag{88b}$$

$$p = -\frac{16}{2\tau_1^2 + \tau_2^2} = -7,026 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2, \quad q = \frac{\tau_2^2}{2\tau_1^2 + \tau_2^2} = 17,90 \cdot 10^{-3}, \quad (88c)$$

$$u = \frac{2\tau_1^2}{2\tau_1^2 + \tau_2^2} = 0,9821, \quad v = \frac{2\tau_1^2}{2\tau_1^2 + \tau_2^2} \left(1 - \frac{4w_{0,2}^2}{4w_{0,2}^2 + 2\tau_1^2 + \tau_2^2} \right) = 0,9808. \quad (88d)$$

Ebenso reduziert sich der winkelabhängige Vorfaktor aus Gleichung (58) mit orthogonaler Laserlaufrichtung und Festlegung der Polarisationswinkel der Laserpulse auf $\phi_1 = 0$ und $\phi_2 = \frac{\pi}{4}$ auf

$$\begin{aligned} [4A \cos(\phi_1 + \phi_2) + 7B \sin(\phi_1 + \phi_2)]^2 &= \frac{1}{\sin^2 \phi_k + \cos^2 \phi_k \cos^2 \theta_k} \\ &\cdot \left[\frac{3}{2} (\cos^2 \phi_k \cos^2 \theta_k + \sin^2 \phi_k + \sin \phi_k \sin \theta_k) - \frac{11}{2} (\cos \phi_k \sin \theta_k \cos \theta_k) \right]^2. \end{aligned} \quad (89)$$

Für $\theta_k = 0$ und $\phi_k = \pm \frac{\pi}{2}$ ergibt sich damit wie erwartet ein Vorfaktor von $\frac{9}{4}$.

Um die absolute Signalphotonenzahl auswerten zu können, muss die gesamte Gleichung (60) über den \vec{k} -Raum integriert werden. Das Integral über die Winkel θ_k und ϕ_k ist nicht analytisch lösbar. Im Gegensatz dazu ist die Integration über k^0 zwar analytisch möglich, die Stammfunktion jedoch nur numerisch auswertbar, da sie Terme der Gauß'schen Fehlerfunktion $\text{erf}(x)$ enthält. Deshalb wird die gesamte Integration von vornherein numerisch mittels *Mathematica* ausgeführt. Die Formel für die differentielle Signalphotonenzahldichte lässt sich mit den hier getroffenen Annahmen insgesamt schreiben als

$$\begin{aligned} d^3N_p &= \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{k^0}{2} \cdot \frac{\mathfrak{E}_1^2 \mathfrak{E}_2^4 e^8}{720^2 m_e^8 abc} \cdot \frac{w_{0,1}^2 w_{0,2}^2}{2w_{0,1}^2 + w_{0,2}^2} \cdot \exp \left[-\frac{w_{0,1}^2 w_{0,2}^2}{4w_{0,1}^2 + 2w_{0,2}^2} (k^0)^2 \cos^2 \phi_k \sin^2 \theta_k \right] \\ &\cdot \frac{1}{\sin^2 \phi_k + \cos^2 \phi_k \cos^2 \theta_k} \left[\frac{3}{2} (\cos^2 \phi_k \cos^2 \theta_k + \sin^2 \phi_k + \sin \phi_k \sin \theta_k) - \frac{11}{2} (\cos \phi_k \sin \theta_k \cos \theta_k) \right]^2 \\ &\cdot \exp \left[-\frac{1}{2a} (k^0 - s\omega_1)^2 - \frac{1}{2b} (k^0 \cos \theta_k - qk^0 - us\omega_1)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2c} \left(\frac{p}{2b} k^0 \cos \theta_k + k^0 \sin \phi_k \sin \theta_k - \left(\frac{pq}{2b} - \frac{8}{a\tau_2^2} \right) k^0 - vs\omega_1 \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (90)$$

Dabei wird der Summand für $s = -1$ aus Formel (83) vernachlässigt, da dieser für $k^0 \gg 0$ überall faktisch null beträgt. Zusätzlich zu den in Tabelle 1 eingeführten Parametern wird zur numerischen Auswertung der Betrag von der elektromagnetischen Kopplungskonstante $e^2 = 4\pi\alpha = \frac{4\pi}{137}$ und der Elektronenmasse $m_e = 511,0 \cdot 10^3 \text{ eV}$ benötigt.

Vor der Integration ist es zunächst einmal interessant zu untersuchen, an welchen Stellen die differentielle Signalphotonenzahldichte Werte annimmt, die sich wesentlich von null unterscheiden, wo also die erwarteten schmalen Peaks liegen. Das ist auch notwendig, um die Stützstellen bei der numerischen Integration passend zu wählen. Dass das nur um $\phi_k = \pm \frac{\pi}{2}$ der Fall ist, wurde bereits am Ende von Abschnitt 4.4 gezeigt. Die Abhängigkeit von k^0 lässt sich für $\phi_k = \pm \frac{\pi}{2}$ und $\theta_k = 0$ wie in Abbildung 5 darstellen und es zeigt sich wie erwartet ein deutlicher Peak um $k^0 = \omega_1$, dessen

Halbwertsbreite außerhalb der hier berücksichtigten signifikanten Stellen liegt ¹⁷. Der Parameter r wurde hier exemplarisch gleich eins gewählt.

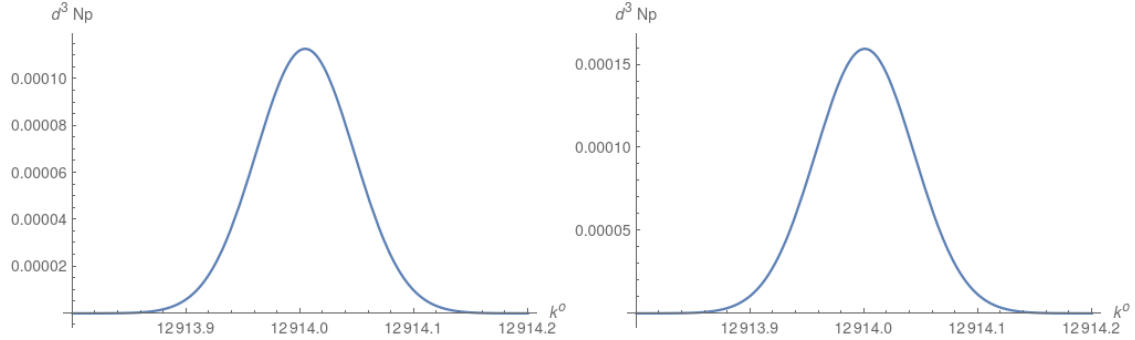


Abb. 5: Amplitude der differentiellen Signalphotonenzahldichte für $\phi_k = \pm \frac{\pi}{2}$, $\theta_k = 0$ und $r = 0.3495$ & 1.

Analog lässt sich die Abhängigkeit von θ_k wie in Abbildung 6 darstellen. Der tatsächliche Peak liegt also nicht genau bei $\theta_k = 0$, sondern ist um ein kleines Stück verschoben auf $\theta_{k,max} = 1,797 \cdot 10^{-4}$. Am Nullpunkt ist die Amplitude tatsächlich schon um ein Vielfaches abgefallen. Falls stattdessen $\phi_k = -\frac{\pi}{2}$ gewählt wird, wird der Kurvenverlauf um $\theta_k = 0$ gespiegelt, was bedeutet, dass in beide Richtungen für $\pm \theta_{k,max} = 1,797 \cdot 10^{-4}$ symmetrische Nebenmaxima auftreten. Bei der Aufintegration werden im Endeffekt beide Wahlmöglichkeiten berücksichtigt.

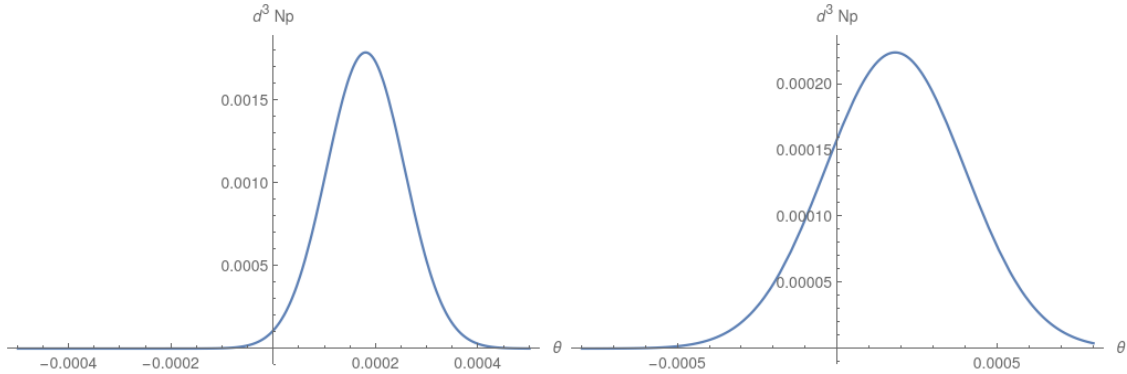


Abb. 6: Amplitude der differentiellen Signalphotonenzahldichte für $k^0 = \omega_1$, $\phi_k = \frac{\pi}{2}$ und $r = 0.3495$ & 1.

Wenn die Kurven für beide Wahlmöglichkeiten $\phi_k = \pm \frac{\pi}{2}$ aufaddiert werden und graphisch in Abhängigkeit von θ_k und r dargestellt werden wie in Abbildung 7, sind zwei symmetrische Peaks bei $\theta_k \simeq 1.797 \cdot 10^{-4}$ zu erkennen, die für zunehmende Probestrahlbreiten immer schärfer werden. Die maximale Amplitude wird dabei bei einem Wert von $r = 22.06$ erreicht, was einer Strahlbreite von $w_{0,1} = 4412 \text{ nm}$ entspricht, sodass bei diesem ein isoliertes Signal unter Idealbedingungen am besten gemessen werden könnte.

¹⁷Wie im Diagramm zu sehen, ist erst in der sechsten signifikanten Stelle eine Abweichung von null (außer für $k^0 = \omega_1$) erkennbar. Hier wird allerdings nur mit vier signifikanten Stellen gerechnet.

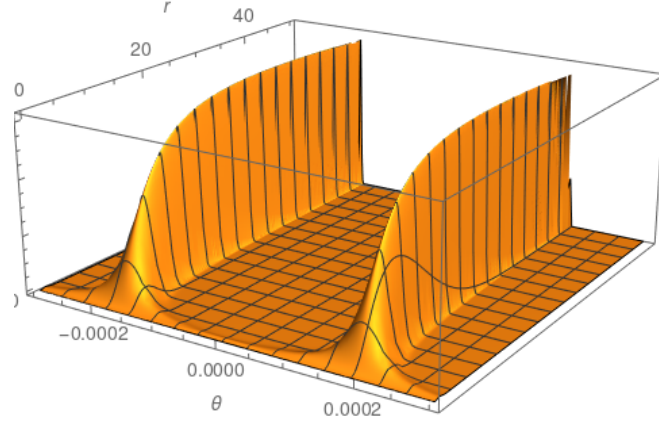


Abb. 7: Amplitude der differentiellen Signalphotonenzahldichte für $k^0 = \omega_1$ und $\phi_k = \pm \frac{\pi}{2}$ in Abhängigkeit von θ_k und r .

Die gesamte Zahl der polarisationsgeflippten Signalphotonen ergibt sich schließlich durch Aufintegration über den gesamten inversen Raum. In Abhängigkeit des Parameters r , also der Strahlbreite des Probelasers ergibt sich dann eine Zahl von Signalphotonen der Größenordnung, wie in Abbildung 8 für einen breiteren Wertebereich und nochmal detailliert um das Maximum herum dargestellt. Man sieht einen eindeutigen Peak für $r_{max} = 0,3495$, was einer Strahlbreite von $w_{0,1} \simeq 69,9$ nm entspricht und innerhalb der technischen Möglichkeiten für Röntgenlaser liegt (vgl. [24], [25], [26]). Für diesen optimalen Parameter beträgt die Signalphotonenzahl pro Puls $N_p = 1,216 \cdot 10^{-3}$. Für kleinere Probestrahlbreiten fällt die Signalphotonenzahl sehr schnell sehr steil ab. Für größere Probestrahlbreiten ist der Abfall deutlich flacher und auch für die maximale hier untersuchte Strahlbreite ist noch eine merkliche Amplitude erkennbar.

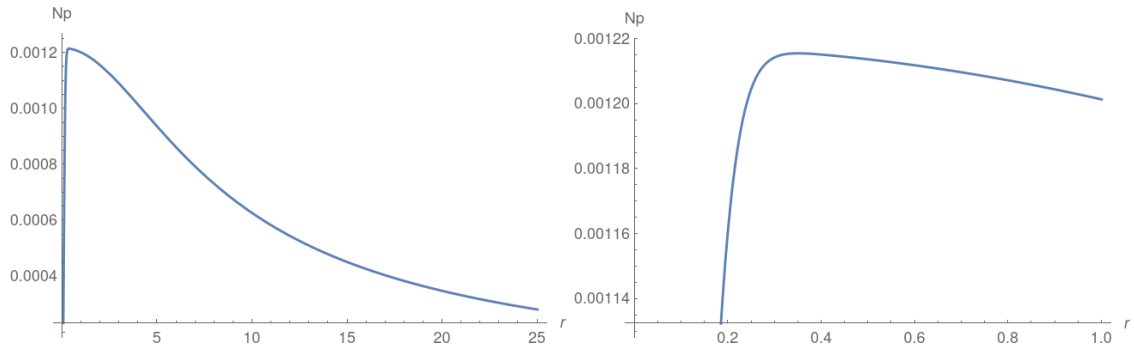


Abb. 8: Zahl der polarisationsgeflippten Signalphotonen pro Probepuls für $10 \text{ nm} \leq w_{0,1} \leq 5000 \text{ nm}$.

Die Gültigkeit dieses Ergebnis lässt sich mit der analytischen Näherungsformel für die Zahl polarisationsgeflippter Photonen aus [6] (hier für $\Theta = \frac{\pi}{2}$)

$$N_p = \frac{8\alpha^4 \omega_1 W_1 W_2^2}{225\pi^2 m_e^8} \frac{1}{(w_1 w_2)^2} \frac{T_1}{\tau_1} \frac{w_1}{w_{0,1}} \left(4 + \frac{T_1 T_2}{w_1 w_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(4 \left(\frac{T_1}{\tau_1} \frac{w_{0,1}}{w_1}\right)^2 + \frac{T_1 T_2}{w_1 w_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (91)$$

mit den Parametern

$$\begin{aligned} T_1 &= \tau_1 \sqrt{1 + 2 \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^2}, & w_1 &= w_{0,1} \sqrt{1 + 2 \left(\frac{w_{0,1}}{w_{0,2}}\right)^2}, \\ T_2 &= \tau_2 \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^2}, & w_2 &= w_{0,2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_{0,2}}{w_{0,1}}\right)^2} \end{aligned} \quad (92)$$

leicht überprüfen, bei der unter anderem für θ_k eine Kleinwinkelnäherung bis zur zweiten Ordnung angesetzt wird. Tatsächlich zeigt sich, dass die Ergebnisse für verschiedene Probefokussierungen im Rahmen der signifikanten Stellen übereinstimmen. So ergibt sich nach beiden Formeln beispielsweise

$$N_p(r = 0.3495) = 1,216 \cdot 10^{-3}, \quad N_p(r = 1) = 1,201 \cdot 10^{-3}, \quad N_p(r = 25) = 2,816 \cdot 10^{-4}. \quad (93)$$

Der Plot der Näherungsformel für N_p in Abhängigkeit von r zeigt jedoch keinen Abfall für Werte $r < 0.3495$, wie in 9 erkennbar. Stattdessen nimmt die Signalstärke für abnehmende Probestrahlbreiten weiter zu und konvergiert für $r \rightarrow 0$ gegen $N_p = 1.218 \cdot 10^{-3}$. Die Ursache hierfür ist aber möglicherweise, dass für sehr kleine Streuregionen breitere Streuwinkel relevant werden und damit Beiträge in höherer Ordnung von θ_k nicht mehr vernachlässigt werden können, worauf auch der Verlauf von Abbildung 7 für kleine r hinweist. Ob sich damit jedoch eine so starke numerische Abweichung erklären lässt, ist mindestens fragwürdig.

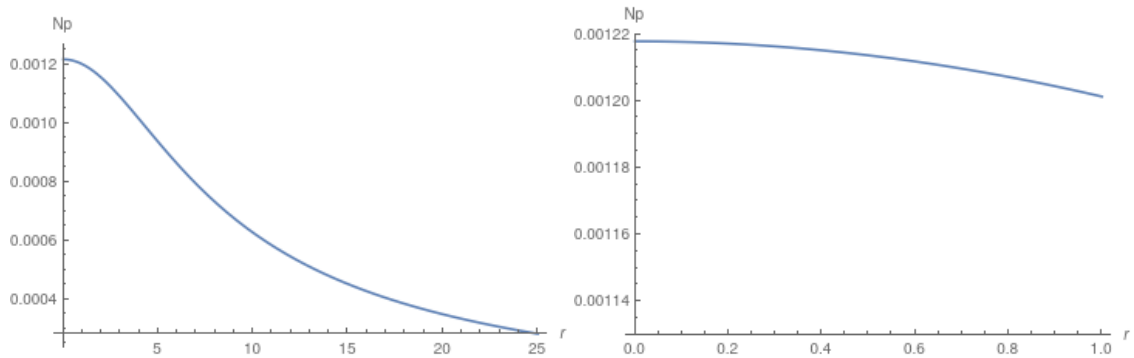


Abb. 9: Darstellung der Signalphotonenzahl mit Hilfe der Näherungsformel (91) in Abhängigkeit von r .

Anmerkung: Bei numerischer Integration mit einer höheren *MinRecursion* knickt der Kurvenverlauf erst ab einem Wert von $r =$ (HIER WERT EINFÜGEN) ab, wie in Diagramm 10 dargestellt. Daher kann davon ausgegangen werden, dass das Abknicken durch einen Fehler in der numerischen Berechnung bedingt ist und der Kurvenverlauf der Näherungsformel ansatzweise dem realen Verlauf

entspricht. Die Sprungstellen im zweiten Diagramm sind ebenfalls auf Fehler in der numerischen Berechnung zurückzuführen.

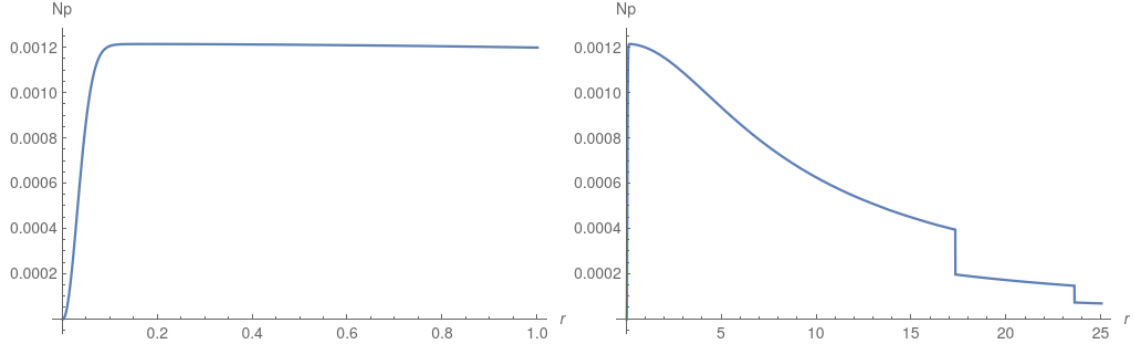


Abb. 10: Numerisch berechnete Signalphotonenzahl in Abhängigkeit von r für eine höhere minimale Rekursion

Damit das Signal tatsächlich detektierbar ist, muss die Zahl der polarisationsgeflippten Signalphotonen pro Puls normiert über die Zahl der Photonen im Probepuls (hier $N = 10^{12}$) die Polarisationsreinheit \mathcal{P} übersteigen. Daher ist diese neben der erreichbaren Feldamplitude einer der limitierenden Faktoren für den experimentellen Nachweis der Nichtlinearitäten elektromagnetischer Felder, wobei die technische Grenze von \mathcal{P} in der Größenordnung 10^{-11} liegt. Hier wird mit $\mathcal{P} = 1,4 \cdot 10^{-11}$ gerechnet [27]. Tatsächlich muss jedoch nicht das Feld im Gesamten betrachtet werden, es reicht aus die Photonenzahl des Signals N_p und des Probepulses N_0 für einen spezifischen Emissionswinkel θ_k zu betrachten. Dann gilt ab einem bestimmten Winkel $\theta_{k,crit}$

$$\frac{dN_p}{d\cos\theta_k} > \frac{dN_0}{d\cos\theta_k} = \mathcal{P} N_1 (\omega_1 w_{0,1})^2 \exp\left[-\frac{1}{2}(\omega_1 w_{0,1})^2 \sin^2\theta_k\right]. \quad (94)$$

In der hier verwendete Formel wird das Fernfeld der Probelasers betrachtet. Daher findet die Näherung der unendlichen Rayleigh-Länge keine Anwendung und entsprechend werden auch für von der Laserlaufrichtung abweichende Winkel Probephotonen detektiert (vgl. [17]). $N_1 = 10^{12}$ ist hierbei die Zahl der Photonen pro Probepuls.

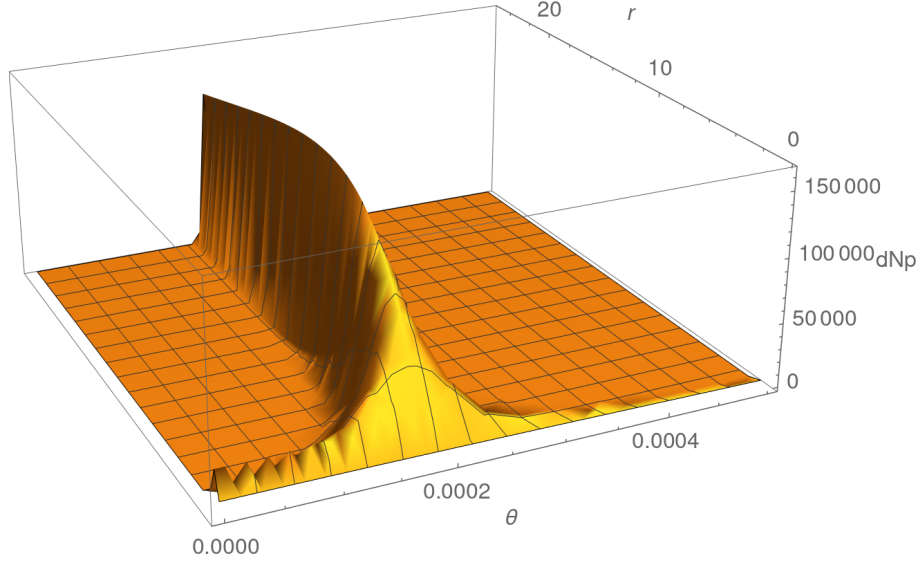


Abb. 11: Die Amplitude von $\frac{dN_p}{d\cos\theta_k}$ in Abhängigkeit von θ_k und r .

In Abbildung 11 zeigt sich sehr gut, welche Parameter optimiert werden müssen, um ein messbares Signal zu erhalten. Für starke Fokussierungen $r \sim w_{0,1}$ erhält man für einen breiteren Winkelbereich ein Signal mit signifikanter Amplitude. Dieser Bereich engt sich mit zunehmendem r jedoch immer stärker um einen scharfen Peak bei $\theta_{k,max} = 1,799 \cdot 10^{-4}$ ein, interessanterweise nimmt jedoch bis $r_{max} = 9,000$ die Amplitude bei $\theta_{k,max}$ zu. Deshalb ist es faktisch am sinnvollsten bei diesen Parametern zu messen. Die Amplitude beträgt an dieser Stelle $\frac{dN_p}{d\cos\theta_k} = 164,0 \cdot 10^3$. Tatsächlich ist der Winkel mit der maximalen Amplitude für bestimmte r nicht konstant, sondern weicht beispielsweise für kleine r leicht nach unten ab. Das erklärt auch, warum der optimale Winkel aus Abbildung 6 vom hier berechneten Wert abweicht.

Zu klären bleibt jedoch, ob an der Stelle auch die Bedingung aus Gleichung (94) erfüllt ist. In Abbildung 12 zeigt sich jedoch schnell, dass sich die beiden Kurven aus Gleichung (94) schon für $r = 2.1$ in etwa bei $\theta_{k,max}$ schneiden. Für etwas größere r ist dann $\theta_{k,crit} < \theta_{k,max}$ und die Amplitude bei $\theta_{k,crit}$ wird schnell vernachlässigbar klein, sodass es für eine scharf winkelaufgelöste Messung zwei Nebenpeaks bei $\theta_k = \pm\theta_{k,max}$ geben sollte. Wenn für viele aufeinanderfolgende Laserpuls-kollisionen die winkelaufgelöste Photonenverteilung gemessen wird, könnten sich diese Nebenpeaks auch in einer realen Messung zeigen.

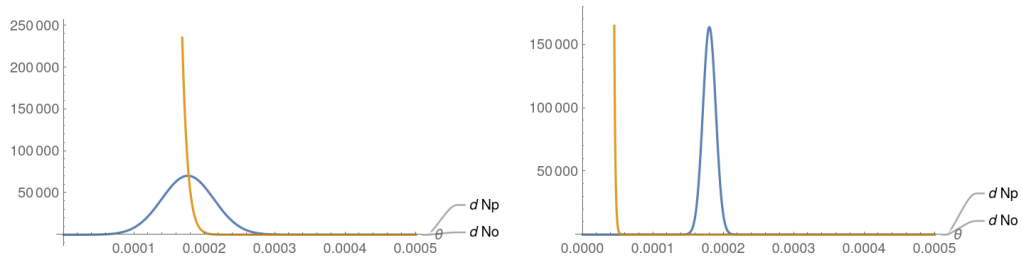


Abb. 12: Vergleich des Abfalls der Probepulsstärke und des Signals für $r = 2.1$ und $r = 9$.

Die Abhängigkeit des kritischen Winkels von der Probefokussierung ergibt sich wie ansatzweise in Abbildung 13 dargestellt. Die numerische Berechnung einer stetigen Kurve ist sehr umfangreich und nähme deshalb viel Zeit in Anspruch. Tatsächlich sieht man auch schon für wenige Punkte einen charakteristischen Verlauf und es zeigt sich, dass sich der kritische Winkel ab einem gewissen Wert für r nur noch unwesentlich ändert, etwa ab dem Punkt, ab dem $\theta_{k,crit} < \theta_{k,max}$ gilt und beide Kurven aus Abbildung 12 exponentiell in entgegengesetzte Richtungen abfallen.

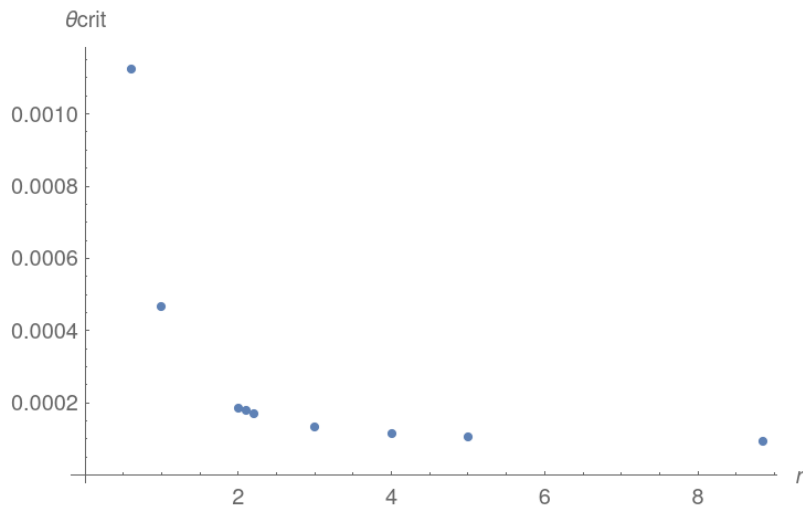


Abb. 13: Die Abhängigkeit von $\theta_{k,crit}$ von der Probefokussierung, für einzelne Werte dargestellt.

5.3 Auswertung des Signalfelds

Um den Anteil der doppelt gebrochenen Photonen am Gesamtsignal zu analysieren, ist es neben der Signalphotonenzahl auch interessant das gesamte Signalfeld zu betrachten. Mit den oben festgelegten Parametern reduzieren sich die Richtungen von \hat{E}_2 und \hat{B}_2 auf

$$\hat{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (95)$$

und der Richtungsvektor des Fourier-transformierten Signalfelds aus Gleichung (74) auf

$$\vec{A}(\theta_k, \phi_k) = \begin{pmatrix} 11 \cos \phi_k \sin \theta_k \cos \theta_k - 3(1 - \sin \phi_k \sin \theta_k + \cos^2 \theta_k) \\ 3 \cos \theta_k (1 + \sin \phi_k \sin \theta_k) - 11 \cos \phi_k \sin \theta_k (1 + \sin \phi_k \sin \theta_k) \\ 11(1 - \sin \phi_k \sin \theta_k + \cos^2 \phi_k \sin^2 \theta_k) - 3 \cos \phi_k \sin \theta_k \cos \theta_k \end{pmatrix} \text{ für } \hat{k} = \hat{e}_x \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Es lässt sich bereits erkennen, dass das elektrische Feld für das Signal in x -Richtung in einem Winkel von etwa $\alpha = 56, 71^\circ$ zur Richtung des elektrischen Felds des Probepulses steht. Somit ist für diesen Fall der Anteil der polarisationsgeflippten Signalphotonen am Gesamtsignal $\sin \alpha = 83, 59\%$, woran man erkennen kann, dass die Vakuum-Doppelbrechung ein sehr wesentliches Charakteristikum der Interaktion elektromagnetischer Felder mit dem Quantenvakuum ist. Der Probelasers ist also nach der Kollision insgesamt leicht elliptisch polarisiert.

Das gesamte Signalfeld in x -Richtung ergibt sich dementsprechend aus

$$\begin{aligned} \vec{e}|_{\vec{k}=k^0 \vec{e}_x} &= \text{Re} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta(\theta_k) \delta(\phi_k - \frac{\pi}{2}) e^{ik^\mu x_\mu} 4Ci \cdot \vec{A}(\theta_k, \phi_k) \cdot \int d^4 x E_1 E_2^2 e^{-ik^\mu x_\mu} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{e^4}{720m_e^4} \cdot \frac{\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2^2}{\sqrt{abc}} \cdot \frac{w_{0,1} w_{0,2}}{\sqrt{2w_{0,1}^2 + w_{0,2}^2}} \\ &\quad \cdot \int_0^\infty dk^0 k^0 \cdot \vec{A}(\theta_k = 0, \phi_k = \frac{\pi}{2}) \exp \left[-\frac{1}{4a} (k^0 - \omega_1)^2 - \frac{1}{4b} ((1-q)k^0 + u\omega_1)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4c} \left(\left(\frac{p(1-q)}{2b} + \frac{8}{a\tau_2^2} \right) k^0 - v\omega_1 \right)^2 \right] \sin[k^0(t-x)]. \end{aligned} \quad (97)$$

Dabei wurde wiederum der Term für $s = -1$ aus Gleichung (83) vernachlässigt. Das Integral lässt sich dann mit in Tabelle 1 definierten Parametern mittels *Mathematica* numerisch auswerten. Da das Signalfeld wiederum raum- und zeitabhängig ist (bzw. im Spezialfall des Signals in x -Richtung abhängig von der Differenz $t - x$), lässt sich dessen Amplitude in Richtung des normierten Vektors \hat{A} für r_{max} und kleine Differenzen $t - x \simeq \frac{2\pi}{\omega_1}$ wie in Abbildung 14 darstellen.

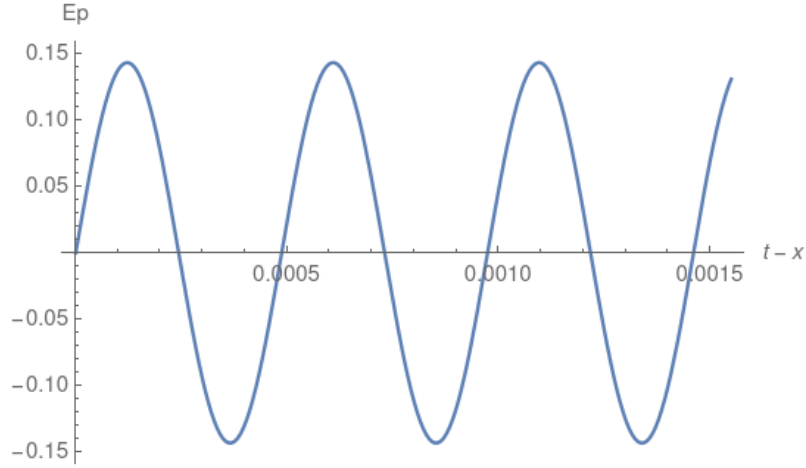


Abb. 14: Amplitude des gesamten elektrischen Felds des Signals in x -Richtung für die ideale Fokussierung $r = 0,3495$.

Man sieht eine eindeutige periodische sinusförmige Schwingung, deren erstes Maximum bei $(t - x)_{max} = 1,216 \cdot 10^{-4} \text{eV}^{-1}$ liegt. Die daraus berechnete Signalfrequenz

$$\omega_{Signal} = \frac{\pi}{2(t - x)_{max}} = 12914 \text{eV} \quad (98)$$

liegt wie erwartet genau beim Wert der Probepulsfrequenz ω_1 . Da das Signal stark oszilliert, ist es zur Analyse des Signals interessant dessen Einhüllende zu betrachten. Dafür wurde die Amplitude des Signalfelds numerisch an aufeinanderfolgenden Maxima ausgewertet, wie in Abbildung 15 dargestellt. Es wurde insgesamt ein Bereich von 200.000 Maxima um den Ursprung betrachtet. Dabei wurde jedes 625te Maximum berücksichtigt. Es zeigt sich deutlich, dass die Oszillationsfrequenz kaum von ω_1 divergiert, da sonst in dieser Darstellung der Einhüllenden merkliche Oszillationen erkennbar sein müssten. Stattdessen ist der Kurvenverlauf innerhalb der signifikanten Stellen vollständig achsensymmetrisch. Die Einhüllende der Signalfeldamplitude \vec{E}_p lässt sich an eine Gauss-Verteilung der Form

$$|\vec{E}_{p,x}(t - x)|_{\vec{k}=\vec{e}_x} = E_{p,x} \cdot \exp \left[-\frac{4(t - x)^2}{\tau_p^2} \right] \quad (99)$$

anpassen, analog zur Form des Probepulses nach Gleichung (26). Dann ergibt sich für die Amplitude $E_{p,x} = 0,1432 \text{eV}^2$ und für die Pulsdauer $\tau_p = 46,31 \text{eV}^{-1} \hat{=} 30,47 \text{fs}$, welche bemerkenswerterweise kleiner als die Pulsdauer des Probelasers ist.

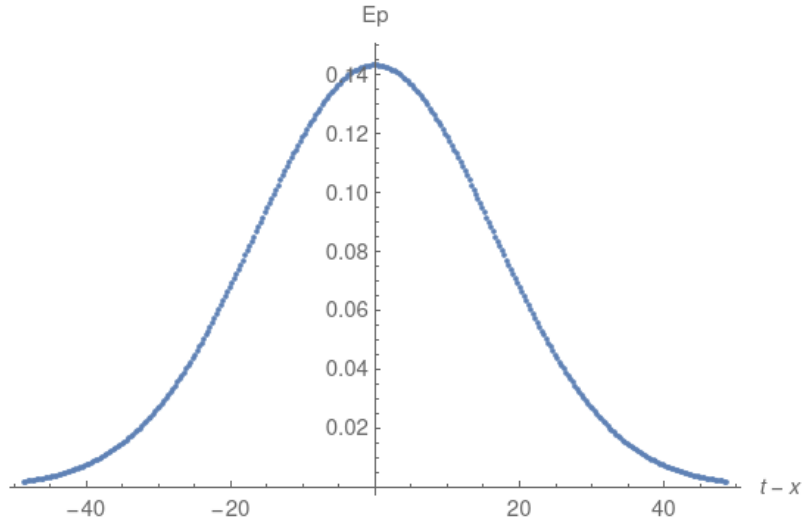


Abb. 15: Einhüllende des Signalpulses in x-Richtung für $r = 0,3495$.

Tatsächlich zeigt sich jedoch, dass die Pulsdauer des Signals abhängig von der Probefokussierung $w_{0,1}$ ist. Wie in Abbildung 16 dargestellt, nimmt die Pulsdauer mit breiterer Fokussierung ab. Für $r = 1$ beträgt die Pulsdauer beispielsweise $\tau_p = 45,92 \text{ eV}^{-1}$. Wie bereits in Abbildung 11 zu sehen, verringert sich die Amplitude des Signals in x -Richtung im gleichen Bereich jedoch um ein deutlich größeres Maß, da für größere r der wesentliche Teil des Signals in Richtung $\theta_{k,max}$ emittiert wird. Für $r > 3,6$ war es deshalb nicht mehr möglich, ein numerisches Ergebnis zu berechnen.

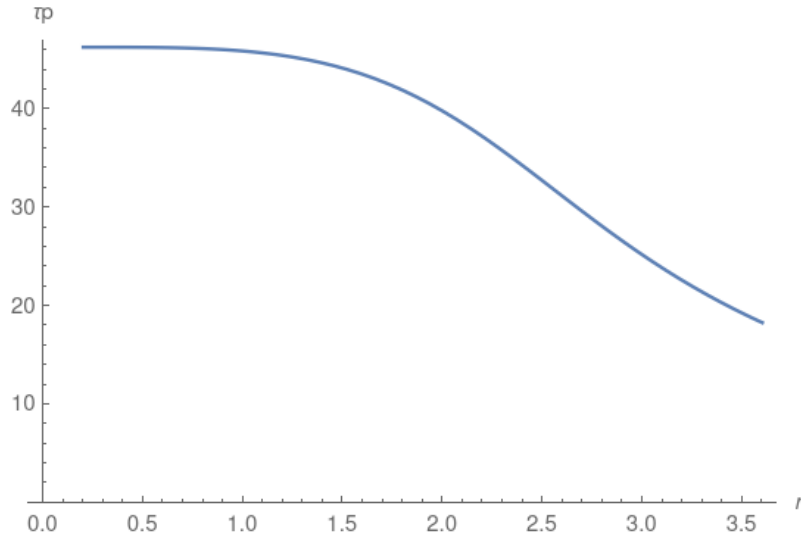


Abb. 16: Die Pulsdauer des Signalfelds τ_p in Abhängigkeit von der Probefokussierung $\sim r$.

6 Fazit und Ausblick

Im Wesentlichen lassen sich die Ergebnisse dieser Arbeit auf zwei relevante Punkte herunterbrechen. Zum einen wurde in Kapitel 4 explizite analytische Formeln für das elektrische Feld der Signalphotonen und für die differentielle Zahl der polarisationsgeflippten Signalphotonen berechnet, welche die Größe des Effekts der Vakuum-Doppelbrechung charakterisiert (Gleichungen (60) und (73) in Kombination mit Gleichung (83)). Diese Formeln sind unabhängig vom Kollisionswinkel, von der Polarisation der Laserpulse und von den Laserparametern. Außerdem unterliegen sie nur wenigen Näherungen, sodass damit Versuchsaufbauten mit einem Probepulslaser und einem Pumpulslaser allgemein relativ gut beschrieben werden können¹⁸. Daher sind diese Formeln gut zur tiefergehenden Analyse für verschiedene experimentelle Szenarien geeignet.

Zum anderen wurden in Kapitel 5 die hergeleiteten Formeln für reale Parameter und einen spezifischen Kollisionswinkel ausgewertet und eine ideale Wahl der Polarisationswinkel bestimmt. Hier zeigt sich, dass der Effekt der Vakuum-Doppelbrechung auch für sehr große Laserfeldstärken nur sehr gering ist, das Signal jedoch für die passende Wahl der Probefokussierung so scharf auf einen bestimmten Emissionswinkel fokussiert ist, dass es dort theoretisch möglich sein sollte, die Vakuum-Doppelbrechung experimentell nachzuweisen. Durch die Auswertung des Signalfelds lassen sich einige weitere mögliche interessante Beobachtungen vorhersagen, wie die Pulsdauer des Gesamtsignals oder den Anteil der Vakuum-Doppelbrechung am gesamten nichtlinearen Signal, der, wie exemplarisch berechnet, sehr wesentliche Ausmaße annimmt.

Was im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht untersucht werden konnte, ist, wie sich die Änderung des Kollisionswinkels auf die Beobachtbarkeit des Signals auswirkt und ob sich für andere Kollisionswinkel eine mögliche bessere Messbarkeit der Vakuum-Doppelbrechung ergibt. Erwartbar wäre nach den Gleichungen aus Kapitel 4, dass die Zahl polarisationsgeflippter Signalphotonen bis zu einem Kollisionswinkel von 180° weiter zunimmt. Aller Voraussicht nach treten dann für entsprechende Probefokussierungen scharfe Peaks des Signals bei bestimmten Winkeln in der Kollisionsebene auf. Hier wäre es besonders interessant $\theta_{k,max}$ und die dazugehörige Amplitude für verschiedene Kollisionswinkel zu bestimmen, um allgemein auf die idealen experimentellen Bedingungen zum Nachweis der Vakuum-Doppelbrechung schließen zu können¹⁹. Darüber hinaus wurden hier nicht die diversen Hindernisse in der experimentellen Umsetzung berücksichtigt, die den Nachweis deutlich erschweren²⁰. Rein exemplarisch sei hier nur die Schwierigkeit genannt, beide Laserpulse exakt im selben Raumzeitpunkt aufeinandertreffen zu lassen. Darüber hinaus müssen externe Störeffekte beispielsweise durch unreines Vakuum möglichst unterbunden werden. Prinzipiell könnte es aber in naher Zukunft gelingen, die Vakuum-Doppelbrechung und damit die Nichtlinearität elektromagnetischer Felder im Labor nachzuweisen.

¹⁸auch wenn der Unterschied zur analytischen Näherungsformel für die differentielle Zahl der polarisationsgeflippten Signalphotonen aus [6] nicht sehr wesentlich sein sollte, siehe Abschnitt 5.2

¹⁹Wenn sich beispielsweise experimentelle Parameter finden ließen, für die $\theta_{k,max}$ in einem Bereich liegt, in dem der Winkelvorfaktor aus Abschnitt 5.1 maximal wird, ließe sich die Signalamplitude nochmal um zwei Größenordnungen verstärken. Allerdings ist auch der Winkelvorfaktor in einigen Termen abhängig vom Kollisionswinkel und dürfte daher gewissen Schwankungen unterliegen.

²⁰Eine Untersuchung findet sich beispielsweise in [6].

Literatur

- [1] Hendrik Casimir. “On the attraction between two perfectly conducting plates”. In: *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*. Bd. 51. 1948, S. 793–795.
- [2] S. K. Lamoreaux. “Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μ m Range”. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1 Jan. 1997), S. 5–8. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.5. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.5>.
- [3] Edoardo Milotti. *PVLAS Experiment*. URL: <http://pvlas.ts.infn.it/>.
- [4] European Southern Observatory. *First Signs of Weird Quantum Property of Empty Space? VLT observations of neutron star may confirm 80-year-old prediction about the vacuum*. URL: <https://www.eso.org/public/news/eso1641/>.
- [5] Thomas Heinzl u. a. “On the observation of vacuum birefringence”. In: *Opt. Commun.* 267 (2006), S. 318–321. DOI: 10.1016/j.optcom.2006.06.053. arXiv: hep-ph/0601076.
- [6] Felix Karbstein et al. “Vacuum birefringence at x-ray free-electron lasers”. In: *New Journal of Physics* 23.9 (Sep. 2021), S. 095001. ISSN: 1367-2630. DOI: 10.1088/1367-2630/ac1df4. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/ac1df4>.
- [7] Kurt Lechner. *Classical Electrodynamics. A Modern Perspective*. Berlin: Springer Nature, 2018. ISBN: 978-3-319-91808-2. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-91809-9>.
- [8] Björn Feuerbacher et al Matthias Bartelmann. *Theoretische Physik 2 — Elektrodynamik*. 1. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum, 2018. ISBN: 978-3-662-56116-4. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56117-1>.
- [9] Matthias Bartelmann et al. *Theoretische Physik 3. Quantenmechanik*. 1. Aufl. Berlin: Springer Spektrum, 2018. ISBN: 978-3-662-56071-6. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56072-3>.
- [10] Paul Dirac. “The quantum theory of the electron”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 117 (1928), S. 610–624. DOI: 10.1098/rspa.1928.0023.
- [11] Edouard B. Manoukian. *Quantum Field Theory I. Foundations and Abelian and Non-Abelian Gauge Theories*. 1. Aufl. Springer, Cham, 2016. ISBN: 978-3-319-30938-5. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-30939-2>.
- [12] Felix Karbstein. “The quantum vacuum in electromagnetic fields: From the Heisenberg-Euler effective action to vacuum birefringence”. In: *Proceedings of the Helmholtz International Summer School 2016 (HQ 2016): Quantum Field Theory at the Limits : from Strong Fields to Heavy Quarks*. Hrsg. von A. Ali et al. Verlag Deutsches Elektronen-Synchrotron Hamburg, 2017, S. 44–57. ISBN: 978-3-945931-07-3. DOI: <http://dx.doi.org/10.3204/DESY-PROC-2016-04>.
- [13] Werner Heisenberg und Hans Heinrich Euler. “Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons”. In: *Zeitschrift für Physik* 98.11 (1936), S. 714–732. DOI: 10.1007/BF01343663.
- [14] Walter Greiner und Joachim Reinhardt. *Quantum Electrodynamics*. 3. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 1994. ISBN: 3-540-44029-1.
- [15] I.S. Gradshteyn und I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Corrected and Enlarged Edition. San Diego: Academic Press, Inc., 1980.

- [16] K. S. Schulze. “Fundamental limitations of the polarization purity of x rays”. In: *APL Photonics* 3, 126106 (2018). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5061807>.
- [17] Felix Karbstein. “Probing Vacuum Polarization Effects with High-Intensity Lasers”. In: *Particles* 3.1 (2020), S. 39–61. ISSN: 2571-712X. DOI: 10.3390/particles3010005. URL: <https://www.mdpi.com/2571-712X/3/1/5>.
- [18] A. Di Piazza, K. Z. Hatsagortsyan und C. H. Keitel. “Light diffraction by a strong standing electromagnetic wave”. In: *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006), S. 083603. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.083603. arXiv: hep-ph/0602039.
- [19] Georg A. Reider. *Photonics. An Introduction*. 1. Aufl. Wien: Springer, Cham, 2016. ISBN: 978-3-319-26074-7. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-26074-7>.
- [20] Holger Gies et al. “All-optical signatures of strong-field QED in the vacuum emission picture”. In: *Phys. Rev. D* 97 (3 Feb. 2018), S. 036022. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.036022. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.036022>.
- [21] Tilo Arens et al. *Mathematik*. 4. Aufl. Berlin: Springer Spektrum, 2018. ISBN: 978-3-662-56740-1. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56741-8>.
- [22] HDZR. *HIBEF Laser Systeme*. 2020. URL: <https://www.hzdr.de/db/Cms?pOid=51491&pNid=711&pLang=de>.
- [23] European XFEL. *Facts and Figures*. URL: https://www.xfel.eu/facility/overview/facts_amp_figures/index_eng.html.
- [24] H. Mimura et al. “Generation of 1020Wcm² hard X-ray laser pulses with two-stage reflective focusing system”. In: *Nat Commun* 5, 3539 (2014). DOI: <https://doi.org/10.1038/ncomms4539>.
- [25] Kazuto Yamauchi u. a. “Single-nanometer focusing of hard x-rays by Kirkpatrick–Baez mirrors”. In: *Journal of Physics: Condensed Matter* 23.39 (Sep. 2011), S. 394206. DOI: 10.1088/0953-8984/23/39/394206. URL: <https://doi.org/10.1088/0953-8984/23/39/394206>.
- [26] E. Nazaretski et al X. Huang H. Yan. “11 nm hard X-ray focus from a large-aperture multilayer Laue lens”. In: *Sci Rep* 3, 3562 (2013). DOI: <https://doi.org/10.1038/srep03562>.
- [27] Marx et al. forthcoming. 2022.

Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen angefertigt habe. Die eingereichte Arbeit ist nicht anderweitig als Prüfungsleistung verwendet worden oder in deutscher oder einer anderen Sprache als Veröffentlichung erschienen.

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Benutzung zur Verfügung zu stellen.

----- (Ort/Datum) ----- (Unterschrift)