

Flussgleichung für fermionische Quantenmechanik

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science (B.Sc.)
im Studiengang Physik

Erster Gutachter:

Prof. Dr. Holger Gies
Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Zweiter Gutachter:

PD Dr. Georg Bergner
Theoretisch-Physikalisches Institut
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Abstract

In der vorliegenden Arbeit wird die Methode der Flussgleichung der Funktionalen Renormierungsgruppe vorgestellt und ihre Anwendung am Beispiel des bosonischen anharmonischen Oszillators, sowie des fermionischen harmonischen Oszillators demonstriert. Anschließend wird ein, mittels HUBBARD-STRATONOVICH-Transformation teilweise bosonisiertes, GROSS-NEVEU-artiges Modell in einer Dimension untersucht. Es wird im Speziellen der Fluss der Grundzustandsenergie, die Energielücke zwischen Grundzustand und erstem angeregten Zustand und das Verhalten im Stark-Kopplungs-Limes studiert. Es kann gezeigt werden, dass das untersuchte Modell bei voller Quantenwirkung und vorhandenem YUKAWA-Term keine bosonische Masse besitzt und somit eine Verbindung zur Supersymmetrie aufweist.

In the present thesis, the method of the flow equation of the functional renormalization group will be introduced and an application will be demonstrated, based on the bosonic anharmonic oscillator and the fermionic harmonic oscillator. Subsequently a by HUBBARD-STRATONOVICH transformation partially bosonized GROSS-NEVEU like model will be investigated in one dimension. In particular the flow of the ground state energy, the gap between the energies of the ground state and the first excited state and the behavior in the strong-coupling limit will be studied. It can be shown that the investigated model in the full quantum case and with nonvanishing YUKAWA term has no bosonic mass and thus shows a connection to supersymmetry.

Inhaltsverzeichnis

Abstract	3
1 Einleitung	5
2 Grundlagen	6
2.1 Die Flussgleichung der Funktionalen Renormierungsgruppe	6
2.2 Fermionen und GRASSMANN-Zahlen	10
3 Anwendung der Flussgleichung	12
3.1 Der anharmonische Oszillator	12
3.2 Der fermionische harmonische Oszillator	17
4 Das GROSS-NEVEU-Modell	21
4.1 HUBBARD-STRATONOVICH-Transformation	21
4.2 Herleitung der Flussgleichung	22
4.3 Lösung des Systems	24
4.3.1 Fluss der Grundzustandsenergie	24
4.3.2 Lücke zum ersten angeregten Zustand	25
4.3.3 Verhalten im Stark-Kopplungs-Limes	26
5 Diskussion und Ausblick	28
Literatur	29

1 Einleitung

Quantenfeldtheorien sind ein mächtiges Werkzeug der modernen Theoretischen Physik. Mit ihrer Hilfe lassen sich Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen, Festkörper- und Kernphysik, sowie Systeme vieler Freiheitsgrade studieren. Dabei liefern sie sowohl die bestens bekannten Übereinstimmungen von Vorhersage und Experiment (beispielsweise des magnetischen Moments des Elektrons), als auch bei naiver Betrachtung die wohl größten Abweichungen zwischen beiden (Kosmologische Konstante) und einige offene Fragen (beispielsweise Interpretation des HAAGSchen Theorems). Quantenfeldtheorien sind also in ihrem Umfang und ihrer Komplexität weit davon entfernt, vollkommen verstanden zu sein. Besonders nichtabelsche Eichtheorien, wie die Quantenchromodynamik, stellen eine große Herausforderung dar. Beim Übergang von mikroskopischen zu makroskopischen Skalen ändern sich die auftretenden Kopplungsstärken drastisch (von schwach zu stark). Es ist von allgemeinem Interesse, diesen Übergang von den bekannten mikroskopischen Wechselwirkungen zu den makroskopischen Gesetzen besser zu erforschen. Eine Brücke zwischen „beiden Welten“ schlägt die Flussgleichung der Funktionalen Renormierungsgruppe, welche auf die Erkenntnisse von unter anderen WILSON aufbaut.

In dieser Arbeit wird die Flussgleichung auf ein vergleichsweise einfaches Modell angewendet. Grundkenntnisse der (Quanten-) Feldtheorie werden vorausgesetzt [1–3]. Die Flussgleichung der Funktionalen Renormierungsgruppe wird im zweiten Kapitel hergeleitet, ebenso werden die zur Formulierung fermionischer Feldtheorien benötigten GRASSMANN-Zahlen eingeführt. Während ersteres im Wesentlichen der Argumentation aus [4] folgt, ist letzteres an [5] angelehnt. Für ein tieferes Verständnis der Skalenabhängigkeit und perturbativer (störungstheoretischer) sowie nicht-perturbativer Renormierung seien [6] und [7] empfohlen, welche für die Erstellung dieser Arbeit ebenfalls als hilfreiche Quellen dienten.

Die Anwendung der Flussgleichung wird im dritten Kapitel anhand des bosonischen anharmonischen und des fermionischen harmonischen Oszillators vorgestellt. Die durchgeführten Schritte werden ausführlich dargestellt, um ein möglichst großes Verständnis für die Methode zu erzeugen. Mit dem Thema vertraute Lesende können sowohl dieses, als auch das vorangegangene Kapitel ohne Weiteres überspringen. Die verwendete Notation ist nahe der in der Literatur üblichen. Es sei angemerkt, dass alle hier ermittelten Resultate mit den bekannten Ergebnissen übereinstimmen.

Die Untersuchung des teilweise bosonisierten GROSS-NEVEU-Modells findet in Anlehnung an [8] statt. Von besonderem Interesse ist der Fluss der Energielücke zwischen Grundzustand und erstem angeregten Zustand sowie der Stark-Kopplungs-Limes.

2 Grundlagen

2.1 Die Flussgleichung der Funktionalen Renormierungsgruppe

Alle physikalischen Informationen einer Quantenfeldtheorie sind in ihren Korrelationsfunktionen

$$\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle := \mathcal{N} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{-S[\varphi]} \quad (2.1)$$

enthalten. Der Normierungsfaktor \mathcal{N} wird durch die Forderung $\langle \mathbb{1} \rangle = 1$ festgelegt und lässt eine Interpretation der Erwartungswerte als Wahrscheinlichkeiten zu. Als n -Punkt-Funktion bezeichnet man die Korrelationsfunktion von n Quantenfeldern an verschiedenen Raumzeitpunkten $\varphi(x_i)$, welche per Definition als Funktionalintegral des Produktes der Feldoperatoren, gewichtet mit der Wirkung $S[\varphi]$, berechnet wird. Führt man den Quellterm $\int J\varphi = \int d^Dx J(x)\varphi(x)$ ein, so ist

$$Z[J] \equiv e^{W[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int J\varphi} \quad (2.2)$$

das erzeugende Funktional, welches alle n -Punkt-Funktionen enthält. Sie lassen sich aus $Z[J]$ mittels Funktionalableitung gewinnen

$$\langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right)_{J=0}. \quad (2.3)$$

In (2.2) ist zudem das SCHWINGER-Funktional $W[J] = \ln Z[J]$ als erzeugendes Funktional aller zusammenhängenden n -Punkt-Funktionen definiert. Da sich alle nicht zusammenhängenden Korrelationsfunktionen als Produkte Zusammenhängender darstellen lassen, ist $W[J]$ eine effizientere Angabe aller Informationen der entsprechenden Quantenfeldtheorie. Noch effizienter ist die LEGENDRE-Transformierte des SCHWINGER-Funktional, die Effektive Wirkung

$$\Gamma[\phi] = \sup_J \left(\int J\phi - W[J] \right). \quad (2.4)$$

An dieser Stelle lässt sich der Zusammenhang der „klassischen“ Felder ϕ und der Quantenfelder φ ermitteln. Bildet man die Funktionalableitung $\delta\Gamma[\phi]/\delta J(x)$ für $J = J_{\text{sup}}$ (also für jenen Quellterm J , für welchen auf der rechten Seite von (2.4) das Supremum

gefunden wird), so erhält man

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta}{\delta J(x)} \left(\int J\phi - W[J] \right) = \underbrace{\left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \int_y J(y)\phi \right)}_{=\phi(x)} - \left(\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \right),$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \stackrel{(2.3)}{=} \langle \varphi \rangle_J. \quad (2.5)$$

Demnach stellt ϕ den Erwartungswert von φ in Anwesenheit der Quelle J dar. Unter Verwendung von (2.5) lässt sich die Funktionalableitung von $\Gamma[\phi]$ bei $J = J_{\text{sup}}$ berechnen, was auf

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = - \int_y \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}}_{=\phi(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(x)} + \int_y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(x)} \phi(y) + J(x) = J(x) \quad (2.6)$$

führt. Diese Gleichung ist die Quanten-Bewegungsgleichung¹. Sie beschreibt, wie $\Gamma[\phi]$ die Dynamik der Erwartungswerte bestimmt, alle Quantenfluktuationen berücksichtigend.

Nun soll ein zusätzlicher Parameter k eingeführt werden, welcher die Skalenabhängigkeit beschreibt. Ausgehend vom (UV regularisierten) erzeugenden Funktional in (2.2) wird das IR regularisierte erzeugende Funktional

$$Z_k[J] \equiv e^{W_k[J]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J\varphi} \quad (2.7)$$

definiert, welches den zusätzlichen Term

$$\Delta S_k[\varphi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \varphi(-p) R_k(p) \varphi(p) \quad (2.8)$$

enthält. $R_k(p)$ ist die sogenannte Regulator Funktion. Sie soll den drei Gleichungen

$$\lim_{p^2/k^2 \rightarrow 0} R_k(p) > 0, \quad (2.9)$$

$$\lim_{k^2/p^2 \rightarrow 0} R_k(p) = 0, \quad (2.10)$$

$$\lim_{k^2 \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} R_k(p) \longrightarrow \infty \quad (2.11)$$

genügen. Gleichung (2.9) garantiert die IR Regularisierung und (2.10) liefert $Z_{k \rightarrow 0}[J] = Z[J]$. Gleichung (2.11) lässt eine Sattelpunktsnäherung im entsprechenden Grenzfall zu, sodass für große Skalen die Effektive Wirkung in die klassische Wirkung übergeht.

¹Damit ist es möglich eine nichtlineare Funktional Differentialgleichung zur Berechnung der Effektiven Wirkung anzugeben. Mit (2.2), (2.4) und (2.6) gilt: $e^{-\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left\{-S[\phi + \varphi] + \int \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} \varphi\right\}$, wobei die Integrationsvariable auf der rechten Seite gemäß $\varphi \rightarrow \varphi + \phi$ verschoben wurde.

Um schließlich die Flussgleichung herleiten zu können, ist es noch nötig die Ableitung von $W_k[J]$ nach dem skalenabhängigen Parameter k zu untersuchen. Dazu werden die Abkürzungen

$$t = \ln\left(\frac{k}{\Lambda}\right), \quad \partial_t = k \frac{d}{dk} \quad (2.12)$$

benutzt. Unter Verwendung der entsprechenden Definitionen und Änderung der Integrationsreihenfolge findet man

$$\begin{aligned} \partial_t W_k[J] &= \frac{1}{Z_k[J]} \frac{\partial Z_k[J]}{\partial t} = \frac{1}{Z_k[J]} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J\varphi} (-\partial_t \Delta S_k[\varphi]) \\ &= \frac{1}{Z_k[J]} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J\varphi} \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \varphi(-p) \partial_t R_k(p) \varphi(p) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \partial_t R_k(p) \underbrace{\left(\frac{1}{Z_k[J]} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(-p) \varphi(p) e^{-S[\varphi] - \Delta S_k[\varphi] + \int J\varphi} \right)}_{\substack{= \frac{\delta^2 Z_k[J]}{\delta J[-p] \delta J[p]} \\ = \langle \varphi(-p) \varphi(p) \rangle_J}} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \partial_t R_k(p) \langle \varphi(-p) \varphi(p) \rangle_J. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Subtrahiert man vom auftretenden Erwartungswert noch die beiden Erwartungswerte $\langle \varphi(\pm p) \rangle$, entspricht er der zusammenhängenden Zwei-Punkt-Funktion $G_k(-p, p)$, zusammengefasst gilt

$$\partial_t W_k[J] = -\frac{1}{2} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \partial_t R_k(p) \left(G_k(-p, p) + \langle \varphi(-p) \rangle_J \langle \varphi(p) \rangle_J \right). \quad (2.14)$$

Die interpolierende Wirkung wird analog zur Effektiven Wirkung eingeführt, jedoch als eine modifizierte LEGENDRE-Transformierte

$$\Gamma_k[\phi] = \sup_J \left(\int J\phi - W_k[J] \right) - \Delta S_k[\phi]. \quad (2.15)$$

Der gegenüber (2.4) auftretende extra Term $\Delta S_k[\phi]$ wird in (2.15) wieder abgezogen. Wie zuvor in (2.5) lässt sich auch hier für $J = J_{\text{sup}}$

$$\phi = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x)} = \langle \varphi \rangle_J \quad (2.16)$$

feststellen. Für die Quanten-Bewegungsgleichung gilt hingegen

$$\frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(x)} = \underbrace{\frac{\delta}{\delta \phi(x)} \left(\int J\phi - W_k[J] \right)}_{=J(x)} - \frac{\delta \Delta S_k[\phi]}{\delta \phi(x)} \stackrel{(2.8)}{=} J(x) - (R_k \phi)(x). \quad (2.17)$$

Stellt man (2.17) nach $J(x)$ um und leitet ein weiteres mal nach ϕ ab, so erhält man

$$\frac{\delta J(x)}{\delta \phi(y)} = \underbrace{\frac{\delta^2 \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)}}_{\equiv \Gamma_k^{(2)}(x,y)} + R_k(x, y). \quad (2.18)$$

Weiterhin lässt sich die Funktionalableitung von ϕ nach J bestimmen als

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)} \stackrel{(2.16)}{=} \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \equiv G_k(y - x). \quad (2.19)$$

Nun können (2.18) und (2.19) genutzt werden, um die Gleichung

$$\delta(x - y) = \frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = \int d^D z \frac{\delta J(x)}{\delta \phi(z)} \frac{\delta \phi(z)}{\delta J(y)} = \int d^D z \left(\Gamma_k^{(2)}(x, z) + R_k(x, z) \right) G_k(y - z) \quad (2.20)$$

zu erhalten. Formuliert man den selben Zusammenhang in Form von Operatoren, gelangt man zu

$$\mathbb{1} = \left(\Gamma_k^{(2)} + R_k \right) G_k \iff G_k = \left(\Gamma_k^{(2)} + R_k \right)^{-1}. \quad (2.21)$$

Die Flussgleichung ist schließlich die partielle Ableitung der interpolierenden Wirkung nach dem Skalenparameter k für $J = J_{\text{sup}}$ und festgehaltenem ϕ (erneut werden die Abkürzungen (2.12) benutzt):

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\phi] &= \partial_t \left(\int J \phi \right) - \partial_t W_k[J] - \partial_t \Delta S_k[\phi] \\ &\stackrel{(2.14)}{=} \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \partial_t R_k(q) \left(G_k(-q, q) + \phi(-q) \phi(q) \right) - \partial_t \Delta S_k[\phi] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \partial_t R_k(q) G_k(-q, q) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \partial_t R_k(q) G_k(-q, q) \\ &\stackrel{(2.20)}{\stackrel{(2.21)}{=}} \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k \right]^{-1} \partial_t R_k \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Die so hergeleitete WETTERICH-Gleichung lässt sich ebenfalls für Fermionen finden, mit dem Unterschied, dass ein zusätzlicher Faktor (-1) auftritt. In der letzten Zeile wird die Superspur (STr) statt der normalen Spur (Tr) verwendet. Sie beachtet den Unterschied zwischen Bosonen und Fermionen, summiert über diskrete Indizes und wirkt ebenfalls auf Differentialoperatoren.

2.2 Fermionen und GRASSMANN-Zahlen

In der Natur vorkommende Teilchen lassen sich in Bosonen und Fermionen unterteilen.² Bosonen genügen der BOSE-EINSTEIN-Statistik, haben gemäß des Spin-Statistik-Theorems ganzzahligen Spin³ und ihre Operatoren erfüllen die Kommutatorrelation. Fermionen hingegen genügen der FERMI-DIRAC-Statistik, haben halbzahliges Spin und ihre Operatoren erfüllen die Antikommutatorrelation.

Um eine Feldtheorie für Fermionen zu konstruieren, ist die zugehörige Wirkung anzugeben. Da fermionische Variablen antikommutieren sollen, ist eine solche Wirkung nicht, wie für Bosonen, mit komplexen Zahlen formulierbar (Fermionen haben kein klassisches Analogon). Stattdessen ist es nötig GRASSMANN-Zahlen zu verwenden. In Vorbereitung auf die Untersuchung fermionischer Theorien sollen daher die wichtigsten Eigenschaften erläutert werden.

Sei $\{\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n\}$ eine Menge von GRASSMANN-Zahlen. Dann gilt für je zwei dieser Zahlen die Antikommutatorrelation

$$\eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0, \quad i, j \in \{1, 2 \dots n\}. \quad (2.23)$$

Insbesondere folgt daraus, dass GRASSMANN-Zahlen nilpotent sind, das heißt es gilt

$$\eta_i^k = 0, \quad \text{für alle } i \text{ und } k > 1. \quad (2.24)$$

Die Taylor-Entwicklung einer Funktion von einer GRASSMANN-Variablen nimmt dann die einfache Gestalt

$$f(\eta) = c_0 + c_1 \eta \quad (2.25)$$

an. Für die Exponentialfunktion gilt insbesondere

$$\exp(\eta) = 1 + \eta. \quad (2.26)$$

Für GRASSMANN-Zahlen lassen sich ebenfalls Differentiation und Integration wie für komplexe Zahlen definieren. Da die einzelnen Variablen jedoch antikommutieren, ist eine von links auf einen Ausdruck wirkende Ableitung nicht gleich der von rechts wirkenden Ableitung. Soll beispielsweise die Produktregel der Differentiation angewendet werden, müssen die Terme für jeden abzuleitenden Ausdruck richtig angeordnet werden.

²Dies gilt nicht in zwei Raumdimensionen. Hier sind auch Anyonen möglich – also Teilchen mit weder halb- noch ganzzahligem Spin.

³Der Spin von Bosonen nimmt nur ganzzahlige Vielfache des reduzierten Planckschen Wirkungsquantums \hbar an.

Konkret lässt sich

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial \eta_i}} (\eta_j \eta_k) &= \frac{\partial}{\partial \eta_i} (\eta_j \eta_k) + \frac{\partial}{\partial \eta_i} (\eta_j \eta_k) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} (\eta_j \eta_k) + \frac{\partial}{\partial \eta_i} (-\eta_k \eta_j) \\ &= \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_i} \eta_k - \frac{\partial \eta_k}{\partial \eta_i} \eta_j = \delta_{ij} \eta_k - \delta_{ik} \eta_j \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} (\eta_j \eta_k) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \eta_i}} &= (\eta_j \eta_k) \frac{\partial}{\partial \eta_i} + (\eta_j \eta_k) \frac{\partial}{\partial \eta_i} = (\eta_j \eta_k) \frac{\partial}{\partial \eta_i} + (-\eta_k \eta_j) \frac{\partial}{\partial \eta_i} \\ &= \eta_j \frac{\partial \eta_k}{\partial \eta_i} - \eta_k \frac{\partial \eta_j}{\partial \eta_i} = \delta_{ik} \eta_j - \delta_{ij} \eta_k \end{aligned} \quad (2.28)$$

feststellen. Offenbar stimmen (2.27) und (2.28) nicht überein. Es ist daher stets anzugeben, ob eine Ableitung von links oder rechts wirken soll. Allgemein kann festgestellt werden, dass Ableitungen nach GRASSMANN-Variablen wie die Variablen selbst antikommutieren

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} + \frac{\partial}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial \eta_i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \eta_i} \frac{\partial}{\partial \eta_j} = - \frac{\partial}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \quad (2.29)$$

und ebenfalls nilpotent sind (was bereits aus (2.25) hervorgeht)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 = 0. \quad (2.30)$$

Da Integration und Differentiation gegensätzliche mathematische Operationen sind, das Integral (**I**) einer (totalen) Ableitung (**D**) einer Funktion ist wieder die Funktion selbst (bis auf Randterme), lässt sich unter Beachtung von (2.30)

$$\mathbf{I} = \mathbf{D} \quad (2.31)$$

bemerken. Integrieren von GRASSMANN-Variablen entspricht also ihrer Differentiation.

Es lassen sich weitere interessante Eigenschaften ableiten, welche in dieser Arbeit aber nicht zur Anwendung kommen. Alle benötigten Relationen wurden eingeführt.

3 Anwendung der Flussgleichung

3.1 Der anharmonische Oszillator

Als ein wohlbekanntes System dient der anharmonische Oszillator, um die konkrete Verwendung der Flussgleichung zu verstehen. Im Folgenden soll dazu der Fluss der Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators bestimmt werden. Da nun statt einer allgemeinen Quantenfeldtheorie ein quantenmechanisches System behandelt wird, werden die Ersetzungen

$$\phi \rightarrow q \quad , \quad D = 1 \quad , \quad d^D x \rightarrow d\tau$$

vorgenommen. Das vorige Funktionalintegral geht über in die Pfadintegraldarstellung der Quantenmechanik.

Ausgehend von der klassischen Wirkung¹

$$S[q] = \int d\tau \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \omega^2 q^2 + \frac{\lambda}{4!} q^4}_{=:V(q)} \right) \quad (3.1)$$

wird zunächst die interpolierende Wirkung

$$\Gamma_k[q] = \int d\tau \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + V_k(q) \right) \quad (3.2)$$

als Ansatz gewählt, mit dem nun skalenabhängigen effektiven Potential V_k . Nun wird die linke und rechte Seite der Flussgleichung (2.22) bestimmt.

Für die linke Seite findet man

$$\partial_t \Gamma_k[q] = \int d\tau \partial_t V_k(q). \quad (3.3)$$

Die τ -Integration kann ausgeführt werden, wenn $q(\tau)$ als konstant angenommen wird. Sie liefert dann nur einen Zeit-Volumenbeitrag, welcher auch auf der rechten Seite der Gleichung auftaucht und darum ab hier nicht mehr mitgeschrieben wird.

¹In der gesamten Arbeit wird mit der „imaginären“ Zeit τ gerechnet. Dazu wird der (physikalische) Minkowski-Raum mittels Wick-Rotation in einen Euklidischen-Raum überführt.

Für die rechte Seite wird zunächst $\Gamma_k^{(2)}$ berechnet. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma_k^{(2)} &= \frac{\delta^2 \Gamma_k[q]}{\delta q(\tau_2) \delta q(\tau_1)} = \frac{\delta}{\delta q(\tau_2)} \frac{\delta}{\delta q(\tau_1)} \int d\tau \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + V_k(q) \right) \\
&= \frac{\delta}{\delta q(\tau_2)} \int d\tau \left(\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - \tau_1) \right) \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \tau} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - \tau_1) \right) \right] + \underbrace{\frac{\partial V_k(q)}{\partial q}}_{\equiv V'_k(q)} \delta(\tau - \tau_1) \right) \\
&= \int d\tau \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \delta(\tau - \tau_2) \delta(\tau - \tau_1) + V_k''(q) \delta(\tau - \tau_2) \delta(\tau - \tau_1) \right) \\
&= \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + V_k''(q) \right) \delta(\tau_1 - \tau_2) \\
&\stackrel{(*)}{=} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + V_k''(q) \right) \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(\tau_1 - \tau_2)} \\
&= \int \frac{dp}{2\pi} p^2 e^{ip(\tau_1 - \tau_2)} + \int \frac{dp}{2\pi} V_k''(q) e^{ip(\tau_1 - \tau_2)} \\
&\stackrel{(**)}{=} \int \frac{dp}{2\pi} \underbrace{\left(p^2 + V_k''(q) \right)}_{\equiv (\mathcal{F} \Gamma_k^{(2)})(p)} e^{ip(\tau_1 - \tau_2)} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

In (*) wurde zunächst Gebrauch von der Fourier-Darstellung der Delta-Distribution gemacht. Dadurch findet man in (**) einen Ausdruck für die Fourier-Transformierte \mathcal{F} von $\Gamma_k^{(2)}$. Dieses Resultat wird sehr nützlich sein, um den Fluss des effektiven Potentials zu bestimmen.

Um Fortzufahren ist ein geeigneter Regulator für die weitere Untersuchung zu wählen. Für den anharmonischen Oszillator ist $R_k(p) = (k^2 - p^2)\theta(k^2 - p^2)$ geeignet und nach gewissen Kriterien optimiert [9, 10], da er sowohl einfach zu verwenden ist, als auch die Stabilität der Flussgleichung für numerische Integration verbessert. Die partielle Ableitung von $R_k(p)$ nach $t = \ln(k/\Lambda)$ lautet dann

$$\partial_t R_k(p) = k \frac{d}{dk} (k^2 - p^2)\theta(k^2 - p^2) = 2k^2\theta(k^2 - p^2). \tag{3.5}$$

Die Flussgleichung für das effektive Potential des anharmonischen Oszillator ist damit

gegeben durch

$$\begin{aligned}\partial_t V_k(q) &= \frac{1}{2} \int \frac{dp}{2\pi} \left(\frac{2k^2 \theta(k^2 - p^2)}{(p^2 + V_k''(q)) + (k^2 - p^2) \theta(k^2 - p^2)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k dp \left(\frac{k^2}{V_k''(q) + k^2} \right) = \frac{k^3}{\pi(V_k''(q) + k^2)},\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dk} V_k(q) = \frac{k^2}{\pi(V_k''(q) + k^2)}.\quad (3.7)$$

Da letztlich der Fluss der Grundzustandsenergie berechnet werden soll, ist eine Entwicklung von $V_k(q)$ nach Potenzen von q nützlich. Im Grenzfall $k \rightarrow \Lambda$ soll wieder das klassische Potential V , welches eine gerade Funktion ist, aus V_k hervorgehen. Es ist daher gerechtfertigt, auch V_k nur mit geraden Potenzen anzusetzen, da die Flussgleichung diese Paritätssymmetrie erhält.

$$V_k(q) = E_k + \frac{1}{2} \omega_k^2 q^2 + \frac{1}{4!} \lambda_k q^4 + \dots\quad (3.8)$$

Die Koeffizienten wurden so angelegt, dass aus einem Vergleich mit (3.1) die Randbedingungen

$$\lim_{k \rightarrow \Lambda} E_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \Lambda} \omega_k = \omega, \quad \lim_{k \rightarrow \Lambda} \lambda_k = \lambda\quad (3.9)$$

hervorgehen. Es handelt sich also um die skalenabhängige Frequenz ω_k und die skalenabhängige Kopplungsstärke λ_k . Die Interpretation von E_k als skalenabhängige Grundzustandsenergie ist jedoch nicht ohne Weiteres möglich. Dies wird ersichtlich, wenn man die rechte Seite von (3.7) ebenfalls in Potenzen von q entwickelt. Gemeinsam mit (3.8) führt das auf

$$\frac{d}{dk} \left(E_k + \frac{1}{2} \omega_k^2 q^2 + \frac{1}{4!} \lambda_k q^4 + \dots \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{k^2}{k^2 + \omega_k^2} - \frac{k^2 \lambda_k}{2(k^2 + \omega_k^2)^2} q^2 + \frac{k^2 \lambda_k^2}{4(k^2 + \omega_k^2)^3} q^4 + \dots \right).\quad (3.10)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich drei gekoppelte Differentialgleichungen. Integriert man die Differentialgleichung für E_k bis zum UV-Cutoff $k = \Lambda$, erhält man, statt der erwarteten Grundzustandsenergie $E_\Lambda = 0$, einen von Λ abhängigen Beitrag. Da ein Potential aber stets nur bis auf eine additive Konstante festgelegt ist, stellt dieser Beitrag kein Problem dar. Er kann subtrahiert werden, indem die Differentialgleichung für E_k im Folgenden angepasst wird. Der so bestimmte Fluss von $E_{0,k}$ kann als Grundzustandsenergie

gie des Systems verstanden werden. Zu lösen ist also das Differentialgleichungssystem²

$$\frac{d}{dk} E_{0,k} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{k^2}{k^2 + \omega_k^2} - 1 \right), \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dk} \omega_k^2 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{k^2 \lambda_k}{(k^2 + \omega_k^2)^2} \right), \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dk} \lambda_k = \frac{6}{\pi} \left(\frac{k^2 \lambda_k^2}{(k^2 + \omega_k^2)^3} \right). \quad (3.13)$$

Für den Fall, dass alle drei auftretenden Parameter skalenabhängig sind, sind keine analytischen Lösungen des Differentialgleichungssystems bekannt. Die Ergebnisse der numerischen Integration sind in Abb. 3.1 dargestellt.

Farbe	Skalenparameter k			Kopplungsstärke $\lambda_{k=\Lambda}$
	Oben	Mitte Links	Mitte Rechts	
	0	0	0	0
	0,5	0,5	5	1
	1	2	10	2
	1,5	4	20	3
	4	10	50	5
	$\Lambda = 10.000$	10.000	10.000	10

Tab. 3.1: Erklärung zu den in Abb. 3.1 verwendeten Farben.

Die oberen Abbildungen in Abb. 3.1 zeigen das Potential $V_k(q)$, links für verschwindende Kopplung $\lambda_{k=\Lambda} = 0$, rechts für $\lambda_{k=\Lambda} = 10$. Damit stellt das linke Bild den harmonischen Oszillator dar. Es lässt sich gut erkennen, wie die Störung des harmonischen Oszillators durch einen Term $\sim q^4$ sowohl die Grundzustandsenergie bei $q = 0$ hebt, als auch die Form des Potentials beeinflusst. Lediglich im (klassischen) Grenzfall $k \rightarrow \Lambda$ stimmen die Grundzustandsenergien mit $E_{0,k=\Lambda} = 0$ überein. Wie erwartet liegt die Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators für $k = 0$ bei $\frac{1}{2}$.

Die beiden mittleren Abbildungen stellen den Fluss von $E_{0,k}$ und ω_k dar. Besonders für große Kopplungsstärken λ_k weist sich die Methode der Flussgleichung als nützliches Werkzeug heraus, das störungstheoretische Rechnungen hier versagen.

Zuletzt zeigen die unteren Abbildungen, wie ω_k und λ_k bei kleinen Skalen verlaufen. Man beachte hier die Skalierung der x -Achse. Quanteneffekte scheinen nur sehr nahe um $k = 0$ eine Rolle zu spielen, beide Parameter nähern sich schnell ihrem klassischen Wert an.

²Terme höherer Ordnung ($\sim q^6$ oder höher) würden in (3.13) auftreten und werden hier der Einfachheit halber ignoriert.

Die Wahl von $\Lambda = 10.000$ ist daher willkürlich, größere Werte von Λ führen zu nahezu identischen Ergebnissen. Für praktische Zwecke ist die Wahl von $\Lambda = 10.000$ bereits nahe am physikalischen Limes $\Lambda \rightarrow \infty$, der die (unregularisierte) Quantenmechanik beschreibt.

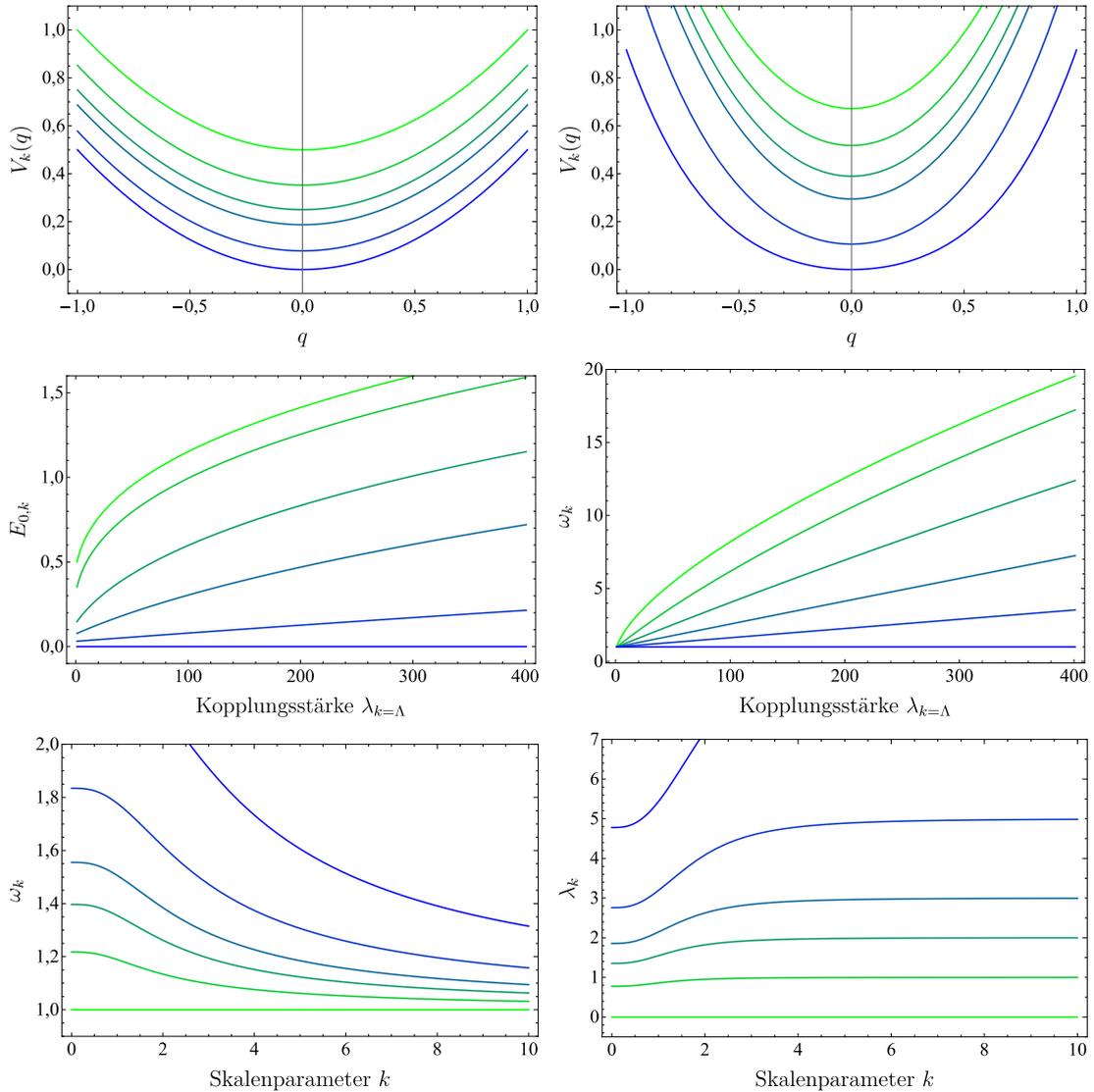


Abb. 3.1: Fluss des Potentials $V_k(q)$, der Grundzustandsenergie $E_{0,k}$, der Frequenz ω_k und der Kopplungsstärke λ_k für den anharmonischen Oszillator. Die numerische Lösung des Differentialgleichungssystems (3.11)-(3.13) wurde mittels Wolfram Mathematica Version: 11.3.0.0 durchgeführt. Als UV-Cutoff wurde $\Lambda = 10.000$, als Randbedingungen $\omega_{k=\Lambda} = 1$ und $\lambda_{k=\Lambda} \in \{0, 1 \dots 400\}$ verwendet. Erklärungen zu den verwendeten Farben finden sich in Tab. 3.1.

3.2 Der fermionische harmonische Oszillator

Um die Unterschiede für Theorien mit fermionischen Freiheitsgraden zu verstehen, wird im Folgenden der fermionische harmonische Oszillator als einfaches Modell untersucht.³ Die zugehörige Wirkung kann als

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d\tau \left\{ -i\bar{\psi}\dot{\psi} - i\omega\bar{\psi}\psi \right\} \quad (3.14)$$

geschrieben werden. Die Felder ψ und $\bar{\psi}$ sind GRASSMANN-wertige Funktionen und können als unabhängige Variablen behandelt werden. Führt man das Feld $\Psi = (\psi, \bar{\psi})^T$ ein, lässt sich (3.14) umschreiben in

$$S[\bar{\psi}, \psi] = -\frac{i}{2} \int d\tau \left\{ \Psi^T \mathbf{K} \Psi + \Psi^T \mathbf{M} \Psi \right\}, \quad (3.15)$$

wobei außerdem die Matrizen

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_\tau \\ \partial_\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

definiert wurden. Der kinetische Term wird durch \mathbf{K} , der Frequenzterm⁴ durch \mathbf{M} beschrieben. Um (3.14) aus (3.15) zu erhalten, wird der kinetische Term einmal partiell integriert

$$-\frac{i}{2} \int d\tau \left\{ \Psi^T \mathbf{K} \Psi \right\} = -\frac{i}{2} \int d\tau \left\{ \psi\dot{\bar{\psi}} + \bar{\psi}\dot{\psi} \right\} \stackrel{\text{p.I.}}{=} -\frac{i}{2} \int d\tau \left\{ -\dot{\psi}\bar{\psi} + \bar{\psi}\dot{\psi} \right\} = -i \int d\tau \bar{\psi}\dot{\psi}. \quad (3.17)$$

Im letzten Schritt wurde die Antikommutator-Vertauschungsrelation von GRASSMANN-Zahlen ausgenutzt. Der Frequenzterm wird analog gefunden. Die interpolierende Wirkung

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] = -\frac{i}{2} \int d\tau \left\{ \Psi^T \mathbf{K} \Psi + \mathbf{U}_k(\Psi) \right\} \quad (3.18)$$

enthält das skalenabhängige Potential \mathbf{U}_k , mit der Entwicklung

$$\mathbf{U}_k(\Psi) = -2iE_k + \Psi^T \begin{pmatrix} 0 & -\omega_k \\ \omega_k & 0 \end{pmatrix} \Psi \quad (3.19)$$

nach Potenzen des Feldes Ψ . Aufgrund der Eigenschaften von GRASSMANN-Zahlen treten keine höheren Potenzen auf und da im Grenzfall $k \rightarrow \Lambda$ wieder die Wirkung S aus der interpolierenden Wirkung Γ_k hervorgehen soll, treten keine linearen Terme auf. Die linke Seite der WETTERICH-Gleichung (2.22) lautet damit

$$\partial_t \Gamma_k = -\frac{i}{2} \int d\tau \partial_t \mathbf{U}_k(\Psi) = -\frac{i}{2} \int d\tau \left(-2i \partial_t E_k + \Psi^T \begin{pmatrix} 0 & -\partial_t \omega_k \\ \partial_t \omega_k & 0 \end{pmatrix} \Psi \right). \quad (3.20)$$

³Einen tieferen Einblick erhält man unter anderem in [11] und [12], in beiden Arbeiten wurde die Flussgleichung auf Supersymmetrische Feldtheorien angewandt.

⁴In der Teilchenphysik entspricht der Frequenzterm einem Masseterm.

Wie in (3.3) lässt sich auch in (3.20) die τ -Integration direkt ausführen und man erhält einen zusätzlichen Faktor, welcher ebenso auf der rechten Seite auftritt und erneut unterdrückt wird. Weiterhin ist $\Gamma_k^{(2)}$ die zweite Funktionalableitung der interpolierenden Wirkung nach Ψ , also nach den beiden Feldern ψ und $\bar{\psi}$ und nimmt die Gestalt einer Matrix an

$$\Gamma_k^{(2)} = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\Psi} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Psi} = \begin{pmatrix} \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{11} & \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{12} \\ \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{21} & \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

mit den Einträgen

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{11} &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi}, & \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{22} &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}}, \\ \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{12} &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}}, & \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{21} &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Diagonaleinträge verschwinden offenbar, für die beiden Gegendiagonaleinträge gilt hingegen

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{21} &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(\tau_2)} \left(-\frac{i}{2} \int d\tau \{ \Psi^T \mathbf{K} \Psi + \mathbf{U}_k(\Psi) \} \right) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(\tau_1)} \\ &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(\tau_2)} \left(-i \int d\tau \{ \bar{\psi}\dot{\psi} - 2iE_k + \omega_k \bar{\psi}\psi \} \right) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(\tau_1)} \\ &= -i \int d\tau \left\{ \delta(\tau - \tau_2) \partial_\tau \delta(\tau - \tau_1) + \omega_k \delta(\tau - \tau_2) \delta(\tau - \tau_1) \right\} \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} \underbrace{(p - i\omega_k)}_{\equiv \mathcal{F}(\Gamma_k^{(2)})_{21}(p)} e^{ip(\tau_1 - \tau_2)}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \left(\Gamma_k^{(2)}\right)_{12} &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi(\tau_2)} \left(-\frac{i}{2} \int d\tau \{ \Psi^T \mathbf{K} \Psi + \mathbf{U}_k(\Psi) \} \right) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(\tau_1)} \\ &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi(\tau_2)} \left(-i \int d\tau \{ \bar{\psi}\dot{\psi} - 2iE_k + \omega_k \bar{\psi}\psi \} \right) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(\tau_1)} \\ &= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi(\tau_2)} \left(-i \int d\tau \{ \psi\dot{\bar{\psi}} - 2iE_k - \omega_k \psi\bar{\psi} \} \right) \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(\tau_1)} \\ &= -i \int d\tau \left\{ \delta(\tau - \tau_2) \partial_\tau \delta(\tau - \tau_1) - \omega_k \delta(\tau - \tau_2) \delta(\tau - \tau_1) \right\} \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} \underbrace{(p + i\omega_k)}_{\equiv \mathcal{F}(\Gamma_k^{(2)})_{12}(p)} e^{ip(\tau_1 - \tau_2)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Im Impulsraum hat $\Gamma_k^{(2)}$ also die einfache Darstellung

$$\Gamma_k^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & p - i\omega_k \\ p + i\omega_k & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Der Regulator ist ebenfalls als 2×2 -Matrix zu wählen. Eine geeignete Wahl stellt

$$R_k^\Psi = \begin{pmatrix} 0 & p \cdot r(p) \\ p \cdot r(p) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

dar. Die Funktion $r(p)$ wird später passend festgelegt, sodass R_k^Ψ die Bedingungen (2.9) bis (2.11) erfüllt. Aus den letzten beiden Gleichungen lässt sich einfach die GREENSche Funktion berechnen, es gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)} + R_k^\Psi &= \begin{pmatrix} 0 & (r(p) + 1)p - i\omega_k \\ (r(p) + 1)p + i\omega_k & 0 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k^\Psi \right]^{-1} &= \frac{1}{(r(p) + 1)^2 p^2 + \omega_k^2} \begin{pmatrix} 0 & (r(p) + 1)p - i\omega_k \\ (r(p) + 1)p + i\omega_k & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Für die partielle Ableitung des Regulators lautet zudem

$$\partial_t R_k^\Psi = \begin{pmatrix} 0 & p \cdot \partial_t r(p) \\ p \cdot \partial_t r(p) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Multipliziert man nun (3.27) und (3.28), erhält man die Gleichung

$$\left[\Gamma_k^{(2)} + R_k^\Psi \right]^{-1} \partial_t R_k^\Psi = \partial_t r(p) \begin{pmatrix} \frac{(r(p)+1)p^2 - i\omega_k p}{(r(p)+1)^2 p^2 + \omega_k^2} & 0 \\ 0 & \frac{(r(p)+1)p^2 + i\omega_k p}{(r(p)+1)^2 p^2 + \omega_k^2} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Zuletzt wird die Regulatorfunktion $r(p)$ definiert. Für das vorliegende Problem eignet sich insbesondere der LITIM-Regulator $r(p) = (\sqrt{k^2/p^2} - 1) \cdot \theta(1 - p^2/k^2)$, siehe [9, 10], mit der Ableitung $\partial_t r(p) = k/p \cdot \theta(1 - p^2/k^2)$. Die rechte Seite der WETTERICH-Gleichung (2.22) lautet damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k^\Psi \right]^{-1} \partial_t R_k^\Psi \right\} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \left[\Gamma_k^{(2)} + R_k^\Psi \right]^{-1} \partial_t R_k^\Psi \right\} \\ &= -\int \frac{dp}{2\pi} \partial_t r(p) \frac{(r(p) + 1)p^2}{(r(p) + 1)^2 p^2 + \omega_k^2} \\ &= -\int_k^k \frac{dp}{2\pi} \frac{k^2}{k^2 + \omega_k^2} = -\frac{k^3}{\pi(k^2 + \omega_k^2)}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Zusammen mit (3.20) führt das auf den Fluss des Potentials U_k . Die Frequenz ω_k zeigt offenbar keine Skalenabhängigkeit, lediglich die Differentialgleichung für E_k ist nicht trivial. Auch im fermionischen Fall stellt E_k jedoch nicht die Grundzustandsenergie dar, es muss wie zuvor beim anharmonischen Oszillator ein konstanter Beitrag ergänzt werden. Man erhält schließlich das Differentialgleichungssystem

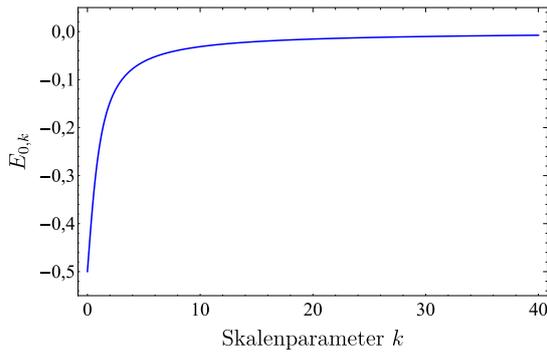


Abb. 3.2: Fluss der Grundzustandsenergie $E_{0,k}$ des fermionischen Oszillators. Als UV-Cutoff wurde $\Lambda = 1.000$, als Randbedingungen $\omega_{k=\Lambda} = 1$ verwendet.

Flussgleichung zuverlässig Ergebnisse erzielen. Aufgrund des sehr simplen Modells ist es nicht sinnvoll, weitere Aspekte der Lösung zu studieren. Stattdessen soll im folgenden Kapitel eine Verallgemeinerung des fermionischen harmonischen Oszillators betrachtet werden.

$$\frac{d}{dk} E_{0,k} = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{k^2}{k^2 + \omega_k^2} - 1 \right), \quad (3.31)$$

$$\frac{d}{dk} \omega_k = 0. \quad (3.32)$$

Erneut wurde Wolfram Mathematica zur numerischen Integration genutzt.⁵ Der Fluss der Grundzustandsenergie ist in Abb. 3.2 dargestellt. Für $k = 0$ beträgt sie wie erwartet $-\frac{1}{2}$ ($\hbar = \omega = 1$) und nähert sich bei wachsendem k schnell 0 an.

Es lassen sich also auch bei fermionischen Theorien mit der Methode der

⁵Eine analytische Lösung existiert offenbar ebenso mit $E_{0,k} = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(k) - 0,5$.

4 Das GROSS-NEVEU-Modell

4.1 HUBBARD-STRATONOVICH-Transformation

Als Verallgemeinerung soll ein weiterer Term mit $(\bar{\psi}\psi)^2$ Abhängigkeit zu (3.14) hinzugefügt werden. Das ist jedoch nicht ohne Weiteres möglich, da es sich bei ψ weiterhin um GRASSMANN-Zahlen handelt. Daher ist es nötig ψ^α als α -Tupel von GRASSMANN-Zahlen einzuführen. Das GROSS-NEVEU-Modell mit der Wirkung

$$S_{\text{GN}}[\bar{\psi}^\alpha, \psi^\alpha] = \int d^d x \left\{ -i\bar{\psi}^\alpha \not{\partial} \psi^\alpha + \frac{g}{2N_f} (\bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha)^2 \right\} \quad (4.1)$$

dient als Ausgangspunkt. Betrachtet man die Bilinearform $(\bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha)$ genauer, so stellt man fest, dass sie wie ein Skalar transformiert. Durch diese Beobachtung wird die Definition der skalaren Größe $\sigma = \frac{ih}{m^2 N_f} (\bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha)$ motiviert. Setzt man $g = h^2/m^2$ lässt sich (4.1) als

$$S_{\text{PB}}[\bar{\psi}^\alpha, \psi^\alpha, \sigma] = \int d^d x \left\{ -i\bar{\psi}^\alpha \not{\partial} \psi^\alpha - ih\sigma \bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha + \frac{N_f}{2} m^2 \sigma^2 \right\} \quad (4.2)$$

schreiben. Diese Formulierung enthält nun einen YUKAWA-Term mit Kopplungskonstante h , welcher die Interaktion der fermionischen und bosonischen Felder beschreibt. Der Übergang (4.1) \rightarrow (4.2), welcher eine nicht-lineare fermionische Wirkung in eine bilineare Wirkung überführt, ist bekannt als HUBBARD-STRATONOVICH-Transformation. Man spricht auch von einer teilweise bosonisierten Theorie. Es ist zu beachten, dass anstelle von g nun die beiden Größen h und m auftreten. Ohne die Definition von g wirken diese unabhängig voneinander, was sie offenbar nicht sind. In Rechnungen, welche es erfordern konkrete Werte für h und m einzusetzen, ist daher auf eine konsistente Wahl der entsprechenden Größen zu achten.

In [8] wurde auf dieser Grundlage die interpolierende Wirkung

$$\Gamma[\bar{\psi}^\alpha, \psi^\alpha, \sigma] = \int d^d x \left\{ \frac{N_f}{2} Z_\sigma (\partial_\mu \sigma)^2 + iZ_\psi \bar{\psi}^\alpha \not{\partial} \psi^\alpha - ih\sigma \bar{\psi}^\alpha \psi^\alpha + N_f U(\sigma^2) \right\} \quad (4.3)$$

in $2 < d < 4$ Raumdimensionen untersucht. $Z_{\sigma, \psi}$ sind Renormierungsgrößen und es tritt hier ein kinetischer Term für das σ -Feld auf. Mithilfe der Definition der dimensionslosen Größen

$$u(\rho) = k^{-d} U(\sigma), \quad \rho = \frac{Z_\sigma}{2} k^{2-d} \sigma^2, \quad \tilde{h}^2 = \frac{k^{d-4}}{Z_\sigma Z_\psi^2} h^2 \quad (4.4)$$

konnte die Flussgleichung für das dimensionslose Potential $u(\rho)$ sowie die dimensionslose YUKAWA-Kopplung \tilde{h} gefunden werden. Diese lauten

$$\begin{aligned} \partial_t u(\rho) \Big|_\rho &= -du(\rho) + (d-2+\eta_\sigma)(\partial_\rho u(\rho))\rho - 2d_\gamma \nu_d l_0^{(F)d} \left(2\tilde{h}^2 \rho; \eta_\psi \right) \\ &\quad + \frac{1}{N_f} 2\nu_d l_0^d \left((\partial_\rho u(\rho)) + 2\rho(\partial_\rho^2 u(\rho)); \eta_\sigma \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\partial_t \left(\tilde{h}^2 \right) = (d-4+2\eta_\psi + \eta_\sigma) \tilde{h}^2 + \frac{1}{N_f} 8\nu_d \tilde{h}^4 l_{1,1}^{(FB)d} \left(0, \frac{m^2}{Z_\sigma k^2}; \eta_\psi, \eta_\sigma \right). \quad (4.6)$$

Die auftretenden Größen sind in [8] ausführlich beschrieben, werden hier jedoch nicht im Detail benötigt.

In Anlehnung an diese Arbeit soll eine ähnliche Wirkung in einer Dimension untersucht werden. Dazu werden die Renormierungsgrößen $Z_\sigma = Z_\psi = 1$ gesetzt und der kinetische Term für das bosonische Feld $\sim (\partial_\mu \sigma)^2$ wird entfernt. Zudem wird nun der Parameter $N_f = 1$ aus Gründen der Einfachheit gewählt, auch wenn dies im GROSS-NEVEU-Modell (4.1) ein exzeptioneller Wert ist. Dies führt auf den Ansatz

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi, \sigma] = \int d\tau \left\{ -i\bar{\psi}\dot{\psi} - ih_k \sigma \bar{\psi}\psi + U_k(\sigma) \right\} \quad (4.7)$$

für die interpolierende Wirkung einer eindimensionalen, teilweise bosonisierten, GROSS-NEVEU-artigen Theorie. Sowohl h_k , als auch U_k sollen skalenabhängig sein. Im Grenzfall $k \rightarrow \Lambda$ soll $U_\Lambda = \frac{m^2}{2}\sigma^2$ gelten. Mit $\omega = h_k \sigma$ und verschwindendem U_k würde (4.7) wieder mit (3.14), dem fermionischen Oszillator, übereinstimmen.

4.2 Herleitung der Flussgleichung

Statt wie zuvor die Flussgleichung für das System herzuleiten, können die oben stehenden Gleichungen (4.5) und (4.6) verwendet werden. Dazu ist es nötig, die dimensionslosen Größen wieder durch dimensionsbehaftete zu ersetzen. Zuvor werden noch die entsprechenden Werte der Parameter und Funktionen eingesetzt. Man gelangt damit zu

$$\partial_t u(\rho) \Big|_\rho = -u(\rho) - (\partial_\rho u(\rho))\rho + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{1+2\tilde{h}^2\rho} + \frac{1}{1+(\partial_\rho u(\rho)) + 2\rho(\partial_\rho^2 u(\rho))} \right], \quad (4.8)$$

$$\partial_t \left(\tilde{h}^2 \right) = -3\tilde{h}^2 + \frac{4}{\pi} \tilde{h}^4 \left[\left(1 + \frac{m_k^2}{k^2} \right)^{-1} + \left(1 + \frac{m_k^2}{k^2} \right)^{-2} \right]. \quad (4.9)$$

Die linken Seiten der Gleichungen lauten unter Einsetzung von (4.4)

$$\begin{aligned}\partial_t u(\rho) \Big|_\rho &= \partial_t \left[\frac{1}{k} U_k(\sigma) \right]_\rho = -\frac{1}{k} U_k(\sigma) + \frac{1}{k} \partial_t [U_k(\sigma)]_\rho \\ &= -\frac{1}{k} U_k(\sigma) + \frac{1}{k} \left(\partial_t [U_k(\sigma)]_\sigma - \partial_\rho U_k(\sigma) \partial_t \rho \right) \\ &= -u(\rho) + \partial_k U_k(\sigma) \Big|_\sigma - (\partial_\rho u(\rho)) \rho,\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\partial_t (\tilde{h}^2) = \partial_t \left[\frac{h_k^2}{k^3} \right] = -3 \frac{h_k^2}{k^3} + \frac{1}{k^3} \partial_t (h_k^2) = -3\tilde{h}^2 + \frac{1}{k^3} \partial_t (h_k^2).\tag{4.11}$$

Es ist außerdem nützlich, die zweite Ableitung von U_k nach σ umzuschreiben in Ableitungen von u nach ρ , womit man die Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} U_k(\sigma) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} U_k(\sigma) \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \rho} k u(\rho) \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(k^2 \sigma \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho) \right) \\ &= k^2 \partial_\rho u(\rho) + k^2 \sigma \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \partial_\rho^2 u(\rho) = k^2 \partial_\rho u(\rho) + 2\rho k^2 \partial_\rho^2 u(\rho)\end{aligned}\tag{4.12}$$

erhält. Das ist, bis auf einen Faktor k^2 , der Ausdruck im zweiten Nenner von (4.8). Fässt man alles zusammen, so erhält man die beiden Differentialgleichungen

$$\partial_k U_k = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{k^2}{k^2 + h_k^2 \sigma^2} + \frac{k^2}{k^2 + \partial_\sigma^2 U_k} \right],\tag{4.13}$$

$$\partial_k (h_k^2) = \frac{4}{\pi} \frac{h_k^4}{k^4} \left[\left(1 + \frac{m_k^2}{k^2} \right)^{-1} + \left(1 + \frac{m_k^2}{k^2} \right)^{-2} \right].\tag{4.14}$$

Da Potential U_k wird, wie zuvor, in gerade Potenzen von σ um $\sigma_0 = 0$ entwickelt,

$$U_k(\sigma) = E_{0,k} + \frac{m_k^2}{2} \sigma^2 + \frac{\lambda_{4,k}}{4!} \sigma^4 + \frac{\lambda_{6,k}}{6!} \sigma^6 + \mathcal{O}(\sigma^8),\tag{4.15}$$

wobei die ersten beiden Koeffizienten unter Berücksichtigung des Grenzfalls $k \rightarrow \Lambda$ benannt wurden. Alle Koeffizienten können skalenabhängig sein. Eingesetzt in (4.13) und die rechte Seite ebenfalls in eine Reihe entwickelt, ergibt sich

$$\begin{aligned}\partial_k U_k &= \partial_k \left(E_{0,k} + \frac{m_k^2}{2} \sigma^2 + \frac{\lambda_{4,k}}{4!} \sigma^4 + \frac{\lambda_{6,k}}{6!} \sigma^6 + \mathcal{O}(\sigma^8) \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{k^2}{k^2 + m_k^2} - 1 \right) + \left(\frac{h_k^2}{k^2} - \frac{\lambda_{4,k} k^2}{2(k^2 + m_k^2)^2} \right) \sigma^2 \right. \\ &\quad + \left(-\frac{h_k^4}{k^4} - \frac{k^2 \lambda_{6,k} (k^2 + m_k^2) - 6k^2 \lambda_{4,k}^2}{24(k^2 + m_k^2)^3} \right) \sigma^4 \\ &\quad \left. + \left(\frac{h_k^6}{k^6} + \frac{k^2 \lambda_{4,k} \lambda_{6,k} (k^2 + m_k^2) - 3k^2 \lambda_{4,k}^3}{24(k^2 + m_k^2)^4} \right) \sigma^6 + \mathcal{O}(\sigma^8) \right].\end{aligned}\tag{4.16}$$

Die hier durch Koeffizientenvergleich der ersten mit den weiteren Zeilen ermittelten Differentialgleichungen können nun für verschiedene Startbedingungen numerisch gelöst und anschließend untersucht werden.

4.3 Lösung des Systems

Als Erstes lohnt es sich, ein weiteres Mal auf Gleichung (4.13) zu schauen. Mit der bereits angemerkten Ersetzung $h_k \sigma \rightarrow \omega$ findet man erneut die Flussgleichung des fermionischen harmonischen Oszillators, falls die Ableitung des Potentials im Nenner des zweiten Terms verschwindet (was per Konstruktion im rein fermionischen Fall zutrifft). Der fermionische Oszillator ist in der Lösung also enthalten. Ebenso ist der (bosonische) anharmonische Oszillator für verschwindende YUKAWA-Kopplung $h_k \rightarrow 0$ enthalten. In diesem Fall stimmt (4.13) mit (3.7) überein, wobei der Λ -abhängige zusätzliche Term im Potential, welcher beim anharmonischen Oszillator erst noch entfernt werden musste, bereits durch Kürzung zwischen fermionischen und bosonischen Beiträgen entfällt.

Das Vorhandensein der YUKAWA-Kopplung führt nun dazu, dass der fermionische Term in (4.13) ebenfalls Beiträge zu den Termen $\sim \sigma^2$ und höherer Ordnungen in (4.16) liefert. Zusammengefasst lässt sich in den Lösungen beobachten, wie fermionische und bosonische Freiheitsgrade bei kleiner werdendem k im Wettstreit stehen.

4.3.1 Fluss der Grundzustandsenergie

Die Grundzustandsenergie $E_{0,k}$ kann in Abhängigkeit der Skalengröße k , der YUKAWA-Kopplung h_k (im Verhältnis zur Bosonen-Masse m_k) und für verschiedene Startbedingungen des Kopplungsterms $\lambda_{4,k}$ untersucht werden (siehe Abb. (4.1)). Lässt man alle Parameter (außer der Masse) im makroskopischen Grenzfall verschwinden, reduziert sich das System auf den harmonischen Oszillator und, wie zu erwarten, beträgt die Grundzustandsenergie im mikroskopischen Grenzfall $E_{0,k=0} = \frac{1}{2}$.¹ Für steigendes k sinkt $E_{0,k}$, ebenso für den Fall eines anwachsenden h_k . Das Hinzufügen von Störungen $\sim \sigma^4$ hebt $E_{0,k}$ an, wie bereits bekannt vom anharmonischen Oszillator.

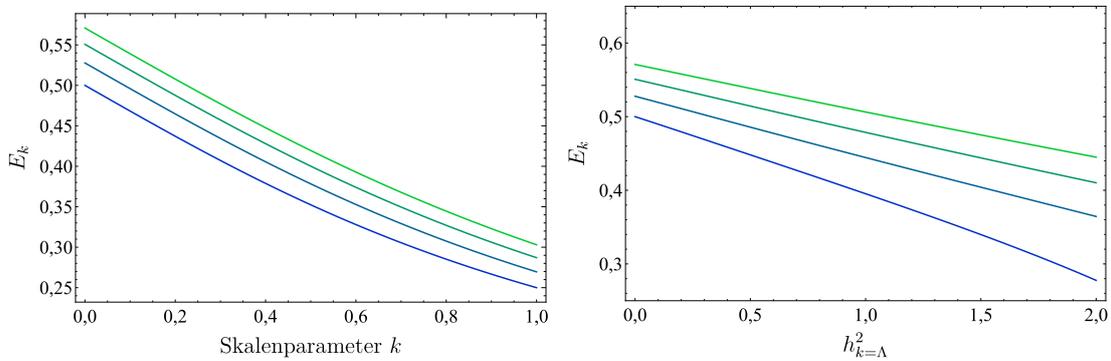


Abb. 4.1: Lösung von (4.16) und (4.14) mittels Mathematica (NDSolve) mit $\Lambda = 10.000$, $E_{0,k=\Lambda} = 0$, $m_{k=\Lambda}^2 = 1$, $h_{k=\Lambda}^2 \in \{0, 1/20 \dots 2\}$, $\lambda_{4,k=\Lambda} \in \{0, 1, 2, 3\}$ und $\lambda_{6,k=\Lambda} = 0$. Oben: Fluss von $E_{0,k}$. Unten: Abhängigkeit von $E_{0,k=0}$ vom Verhältnis $(h_{k=\Lambda}/m_{k=\Lambda})^2 (\equiv g^2)$.

¹Beim Lösen der Differentialgleichungen traten Schwierigkeiten mit der Maschinengenauigkeit für sehr kleine k auf, weshalb als untere Grenze der Integration fortan $k_{\min} = 10^{-6}$ verwendet wurde.

4.3.2 Lücke zum ersten angeregten Zustand

Die Energie des ersten angeregten Zustandes E_1 ist gegeben durch die Krümmung des Potentials am Minimum und die Energie des Grundzustandes $E_1 = E_{0,k} + U_k''(\sigma_{\min})$ [11]. Für das vorliegende Potential ist die Position des Minimums identisch mit der Null, wodurch die Berechnung sehr einfach ist. Die Energielücke zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand ist demnach gegeben durch $\Delta E = m_k^2$.

Stellt man den Fluss von $\Delta E \equiv m_k^2$ für verschiedene YUKAWA-Kopplungen dar (Abb. 4.2, oben), stellt man fest, dass die Energielücke bei eingeschaltetem h_k sinkt, bei voller Quantenwirkung sogar gänzlich verschwindet. Ohne YUKAWA-Term beträgt sie hingegen erwartungsgemäß $\Delta E = 1$ für alle k . Interessant ist ebenfalls, dass m_k^2 zunächst bei fallendem k immer steiler abfällt. Nimmt h_k jedoch Werte über m_k an, so entsteht ein lokales Minimum (nahe $k = 1/2$, unterster/blauer Graph).

Dieses Verhalten ist auch in der mittleren Grafik von Abb. 4.2 beobachtbar. Es ist die Energie des Grundzustandes (durchgezogene Linie) und des ersten angeregten Zustandes (gestichelte Linie) für unterschiedliche h_k dargestellt.

Ein verschwindender (bosonischer) Massenterm erinnert in diesem Fall an Supersymmetrie (SUSY), da per Konstruktion die fermionischen Felder masselos sind (es tritt kein quadratischer Term der ψ Felder in (4.7) auf).

Im Massenspektrum nimmt das System also den supersymmetrischen Punkt an.

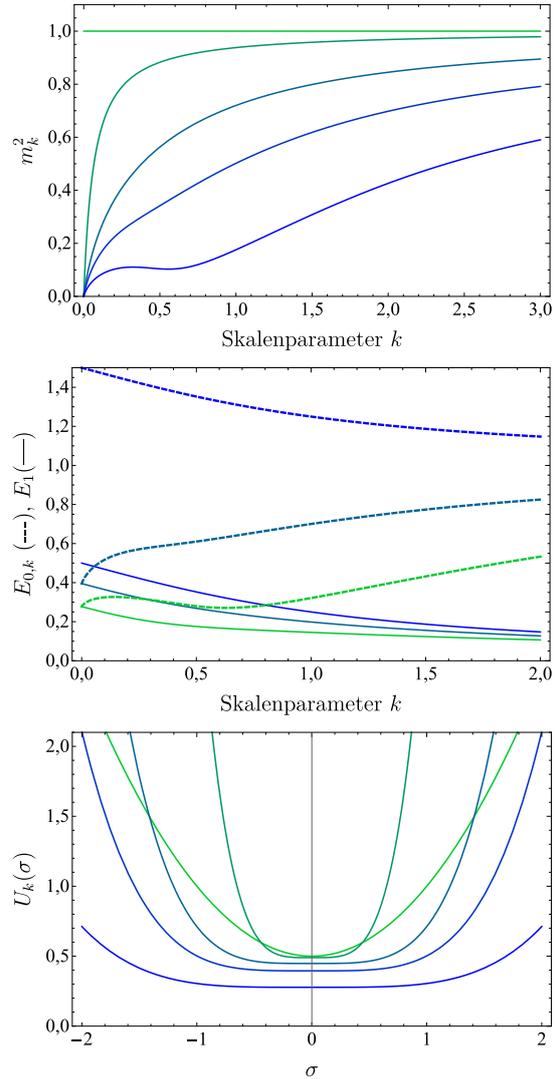


Abb. 4.2: Lösung des DGL-Systems wie in Abb. 4.1, $\lambda_{4,k=\Lambda} = 0$.

Oben: Fluss der Bosonen-Masse m_k^2 für $h_{k=\Lambda}^2 \in \{0, 1/10, 1/2, 1, 2\}$.

Mitte: Fluss von $E_{0,k}$ und E_1 für $h_{k=\Lambda}^2 \in \{0, 1, 2\}$.

Unten: Verlauf des Potentials U_k (mit Termen bis σ^4), Farben wie in oberer Grafik.

4.3.3 Verhalten im Stark-Kopplungs-Limes

Das Verhalten des bosonischen anharmonischen Oszillators ist für große Kopplungen λ wohlbekannt. Die Grundzustandsenergie hat einen asymptotischen Verlauf [4] gegen

$$E_{0,k} = \left(\frac{\lambda}{24}\right)^{1/3} [\alpha_0 + \mathcal{O}(\lambda^{-2/3})], \quad (4.17)$$

wobei die Konstante α_0 in sehr hoher Genauigkeit mittels störungstheoretischer Variationsrechnung bestimmt werden konnte [13]

$$\alpha_0 = 0,667986259(\dots). \quad (4.18)$$

Die durch Lösung der Flussgleichung (3.11) bis (3.13) gefundene Grundzustandsenergie kann ebenfalls in eine entsprechende Reihe entwickelt werden und das resultierende α_0 mit dem bekannten Wert verglichen werden [4, 14]. Die Konstante lässt sich so bis auf einen Fehler von $< 1\%$ bestätigen. Die Abhängigkeit von der Wahl des Regulators wurde ebenfalls untersucht [14].

Es ist nun möglich den Limes starker Kopplungen auch für das Modell (4.7) zu untersuchen. Dabei wurden Werte bis $\lambda_{4,k=\Lambda} = 10.000$ verwendet.²

$h_k^2/m_k^2 \equiv g^2$	0	10	50	100	500
α_0	0,66717	0,66762	0,66941	0,67142	0,67918

Tab. 4.1: Werte des führenden Koeffizienten der Entwicklung von $E_{0,k}$ gemäß (4.17) bei unterschiedlich großem g .

Bei verschwindendem YUKAWA-Term findet man auch hier α_0 mit einer Abweichung von $< 1\%$. Lässt man hohe Werte für g zu, so steigt α_0 dennoch nur gering (bis auf $\sim 2\%$ Abweichung von (4.18)). Deutlicher zeigt sich in Abb. 4.3, was hier beobachtbar ist: Bei (relativ) kleinen Kopplungsstärken $\lambda_{4,k}$ senkt ein im (Vergleich zu m_k) großes h_k die Grundzustandsenergie. Je größer der Einfluss von $\lambda_{4,k}$ wird, desto näher laufen die Graphen der Grundzustandsenergien zusammen. Es ist anzunehmen, dass sich α_0 für steigende $\lambda_{4,k}$ bei festgehaltenem h_k immer weiter dem Vergleichswert aus [13] annähert.

² $\lambda_{6,k=\Lambda}$ wurde hingegen bei Null belassen.

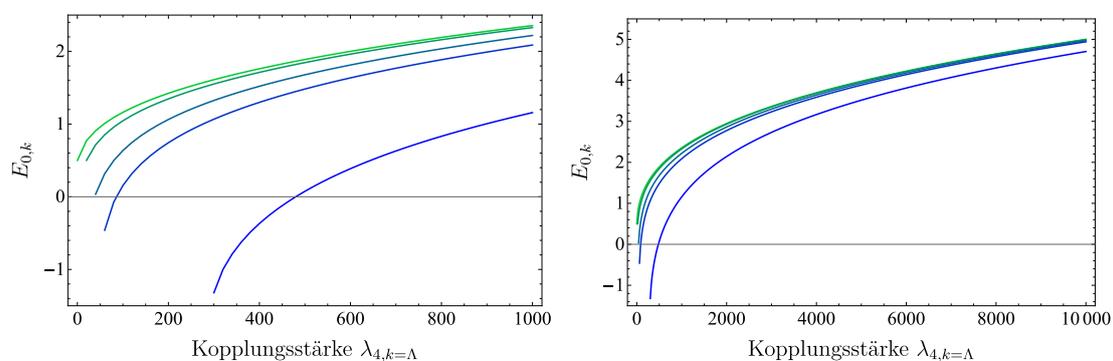


Abb. 4.3: Fluss der Grundzustandsenergie $E_{0,k=0}$ bei wachsender Kopplung $\lambda_{4,k=\Lambda}$. Die linke Grafik ist ein vergrößerter Ausschnitt des gesamten Verlaufs rechts. Als Startbedingung dient zudem $h_{k=\Lambda}^2/m_{k=\Lambda}^2 \in \{0, 10, 50, 100, 500\}$.

5 Diskussion und Ausblick

Die Anwendbarkeit der Flussgleichung in bosonischer und fermionischer Quantenmechanik konnte im ersten Anteil der Arbeit verdeutlicht werden. Vor allem die korrekten Vorhersagen bezüglich starker Kopplungen für den anharmonischen Oszillator zeigen die Nützlichkeit der Methode.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde auf Grundlage von [8] ein teilweise bosonisiertes GROSS-NEVEU-artiges Modell in einer Raumdimension eingeführt und dessen Flussgleichung hergeleitet. Die Lösung der Flussgleichung konnte numerisch ermittelt werden. Aus der Untersuchung des Flusses der Grundzustandsenergie zeigt sich, wie bosonisches und fermionisches Verhalten zusammenspielen. Beide Modelle aus dem dritten Kapitel lassen sich hier wiederfinden. Aus der Betrachtung der Energielücke zwischen Grundzustand und erstem angeregten Zustand, welche im mikroskopischen Grenzfall verschwindet, lässt sich ableiten, dass das System in Verbindung zu einer supersymmetrischen Theorie stehen könnte. Das Verhalten im Grenzfall starker (bosonischer) Kopplung scheint mit dem aus [13] übereinzustimmen, solange $\hbar_k/m_k \equiv g$ viel kleiner ist als die größte verwendete Kopplung $\lambda_{4,k}$.

In Bezug auf [8] wäre eine Verallgemeinerung der betrachteten Raumdimension auf $1 < d < 2$ interessant, ebenso wäre die Einbindung des kinetischen Terms für den bosonischen Freiheitsgrad σ möglich. Die Wahl des Regulators wurde entsprechend der Literatur getroffen. Der Einfluss verschiedener Regulatorfunktionen auf die ermittelten Ergebnisse könnte diese Arbeit weiterführen. Es ist jedoch vor allem die Beziehung zu einer supersymmetrischen Theorie, welche die Möglichkeit zur Formulierung von Anschlussfragen bietet.

Literatur

- ¹M. E. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1995).
- ²H. Gies, *Particles and Fields*, Vorlesungsnotizen, FSU Jena, 2019.
- ³H. Gies, *Quantum Field Theory*, Vorlesungsnotizen, FSU Jena, 2019.
- ⁴H. Gies, “Introduction to the functional RG and applications to gauge theories”, (2006).
- ⁵A. Das, *Field Theory, A Path Integral Approach*, 2. Aufl., Bd. 75 (World Scientific, Singapore, Hackensack, London, 2006).
- ⁶H. Gies, *Physik der Skalen: die Renormierungsgruppe*, Vorlesungsnotizen, FSU Jena, 2018.
- ⁷J. Berges, N. Tetradis und C. Wetterich, “Non-Perturbative Renormalization Flow in Quantum Field Theory and Statistical Physics”, *Physics Reports* (2000).
- ⁸J. Braun, H. Gies und D. D. Scherer, “Asymptotic safety: a simple example”, *Physical Review D* (2010).
- ⁹D. F. Litim, “Mind the gap”, *International Journal of Modern Physics A* **16** (2001).
- ¹⁰D. F. Litim, “Optimized renormalization group flows”, *Physical Review D* **64** (2001).
- ¹¹F. Synatschke, G. Bergner, H. Gies und A. Wipf, “Flow Equation for Supersymmetric Quantum Mechanics”, *Journal of High Energy Physics* (2009).
- ¹²F. Synatschke-Czerwonka, “Functional Renormalisation Group Equations for Supersymmetric Field Theories”, Diss. (FSU Jena, 2011).
- ¹³W. Janke und H. Kleinert, “Variational perturbation expansion for strong-coupling coefficients of the anharmonic oscillator”, *Physical Review* **75** (1995).
- ¹⁴R. Sondenheimer, *Die Flussgleichung der funktionalen Renormierungsgruppe in der Quantenmechanik*, Bachelorarbeit, FSU Jena, 2010.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen angefertigt habe. Die eingereichte Arbeit ist nicht anderweitig als Prüfungsleistung verwendet worden oder in deutscher oder einer anderen Sprache als Veröffentlichung erschienen.

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Benutzung zur Verfügung zu stellen.

Ort und Datum

Unterschrift