FRIEDRICH-SCHILLER-
UNIVERSITÄT
JENA

Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut

Bachelorarbeit

Jessica Schrön

Relativistische Luttinger-Fermionen in verschiedenen Dimensionen

---

Betreuer: Prof. Dr. Holger Gies

Jena, 30.09.2025

Erstgutachter: Prof. Dr. Holger Gies
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut

Zweitgutachterin: M. Sc. Marta Picciau
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Quantenfeldtheorie stellt eine wichtige Methode der Physik dar, um Theorien zu entwickeln, welche Quantenmechanik und spezielle Relativitätstheorie vereint. Unter anderem ist eine wichtige Anwendung, die Beschreibung von Elementarteilchen, welche nun als Anregung eines quantisierten Feldes interpretiert werden können. Auch in der Physik der kondensierten Materie oder Kosmologie, sowie bei der Beschreibung von Vielkörpersystemen, wird die Quantenfeldtheorie genutzt [1, 2].
In dieser Arbeit soll die Feldtheorie der relativistischen Luttinger-Fermionen in verschiedenen Dimensionen beschrieben werden.
Die Luttinger-Theorie wurde zuerst von J. M. Luttinger vorgestellt. Dieser suchte dabei nach einem nicht-relativistischen Hamiltonian zur Beschreibung der Anregung von Halbleitern in einem Magnetfeld [3].
Indem die Algebra dieser Theorie relativistisch verallgemeinert wird, können störungstheoretisch renormierbare Quantenfeldtheorien konstruiert werden, womit sich neue Möglichkeiten im Bereich der Hochenergiephysik ergeben [4]. Ein interessantes Phänomen der Teilchenphysik liegt in der asymptotischen Freiheit, für die es bislang für rein fermionische Materie in 4 Dimensionen kein Beispiel gab. Besonders selbstwechselwirkende Luttinger-Fermionen liefern einen neuen Ansatz, Theorien mit solchen Eigenschaften zu konstruieren [5].
Anwendung hat die ursprüngliche nicht-relativistische Variante dieser Teilchen bereits in der Festkörperphysik zur Beschreibung von Spin-Bahn-gekoppelten Materialien mit quadratischen Bandberührungen [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]. Besonders interessant ist dabei der Fall der Band-Inversion in Halbleitern bei sehr starker Spin-Bahn-Kopplung [13]. Auch bei der Untersuchung von Quanten-Spin-Flüssigkeiten ist die eichsymmetrische Luttinger-Theorie von Bedeutung [14].
In dieser Arbeit wird die Theorie der relativistischen Luttinger-Fermionen näher beleuchtet. Dafür wird zu Beginn auf wichtige theoretische Grundlagen eingegangen, welche nötig sind, um mit dem Luttinger-Formalismus arbeiten zu können. Es werden zudem die Dirac-Gleichung und analoge wichtige Eigenschaften dieser erläutert.
Für die Luttinger-Theorie wird zunächst die Konstruktion des Hamiltonians und wichtige Eigenschaften des Tensors $G_{\mu\nu}$ sowie der Spinmetrik beschrieben. Auch die vorausgesetzte Invarianz der Theorie unter Lorentz- und Spin-Basen-Transformation wird beschrieben. Auf diesen Grundlagen können im Anschluss Repräsentationen der Abrikosov-Algebra-erfüllenden Elemente von $G_{\mu\nu}$ berechnet und die Spinmetrik für $d = 2, ..., 5$ Dimensionen bestimmt werden. Während die relativistische Version der Abrikosov-Algebra prinzipiell durch geeignete komplexifizierende Wick-Rotation der nicht-relativistischen Algebra [9, 10, 11, 12] gefolgert werden kann, ist die Spinmetrik ein neues Element. Diese ist für die Konstruktion von relativistischen Theorien von Fermionen wesentlich.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Notation

In dieser Arbeit werden die *natürlichen Einheiten* benutzt, mit

$$\hbar = c = 1. \tag{2.1}$$

Für die kovariante Ableitung wird die Notation

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \tag{2.2}$$

verwendet. Zudem besitzt die Metrik der Minkowski-Raumzeit die Signatur

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+, -, -, ...). \tag{2.3}$$

Es sei zu beachten, dass nach der Einsteinschen Summenkonvention über doppelte Indizes summiert wird, sodass

$$a_i \cdot b_i \equiv \sum_i a_i b_i \tag{2.4}$$

gilt, wobei über fett gedruckte Indizes nicht summiert wird.

2.2 Variationsprinzip klassischer Felder

Um relativistische Feldgleichungen untersuchen zu können, wird zunächst das Variationsprinzip für klassische Felder näher betrachtet. Das Funktional S ist eine Funktion des Feldes und hat folgende Form

$$S[\phi] = \int_V d^d x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{2.5}$$

Wobei ϕ das Feld und V das Integrationsvolumen im Minkowski-Raum ist. $\mathcal{L}$ ist die *Lagrange-Dichte*. Diese ist die Dichte der Lagrangefunktion

$$L = \int d^{d-1} x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \tag{2.6}$$

Somit ist

$$S = \int dt L. \tag{2.7}$$

Mit der Forderung, die Wirkung extremal werden zu lassen, kann die Euler-Lagrange-Gleichung aufgestellt werden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0. \tag{2.8}$$

Besitzt das Feld mehrere Komponenten lautet diese

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} = 0, \tag{2.9}$$

mit $i = 1, .., N$ [1, 15].

2.3 Lorentztransformation

Als *Lorentztransformation* wird die Transformation von Raum-Zeit-Koordinaten bezeichnet. Die Transformationsmatrix erfüllt dabei

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}, \tag{2.10}$$

bzw. in Matrixnotation:

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \tag{2.11}$$

Raum-Zeit-Vektoren v^μ werden damit dergestalt transformiert, dass

$$v^\mu \to v^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu \tag{2.12}$$

gilt. Lorentztransformationen erhalten das Skalarprodukt

$$v \cdot w = g_{\mu\nu} v^\nu w^\mu = v^\mu w_\mu \tag{2.13}$$

im Minkowski-Raum.

Alle Lorentztransformationen, die die Gleichung (2.10) erfüllen, bilden die Gruppe der *homogenen Lorentztransformationen* $\mathrm{O}(3, 1)$.

Für ein mehrkomponentiges Feld ϕ_i mit $i = 1, .., N$ gilt

$$\phi'_i(x') = D(\Lambda)_i{}^j \phi_j(x), \tag{2.14}$$

mit $D(\Lambda) \in \mathrm{O}(3, 1)$. $D(\Lambda)$ ist dabei eine Darstellung der Lorentztransformation Λ in Form einer $N \times N$ Matrix, welche auf Felder wirkt.

Lorentztransformationen, deren 00-Komponente $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ ist, werden *orthochron* und analog jene mit $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ *nicht orthochron* genannt.

Wird die Determinante von Gleichung (2.11) gebildet, ergibt sich

$$\det \Lambda^T \det g \det \Lambda = \det g, \tag{2.15}$$

sodass

$$\det \Lambda = \pm 1 \tag{2.16}$$

gelten muss.
Die Gruppe der Lorentztransformationen SO$(3,1)$ sind damit alle Transformationen mit $\det \Lambda = 1$. Jene Transformationen mit $\det \Lambda = 1$ und ${\Lambda^0}_0 \geq 1$ bilden die Gruppe der eigentlichen Lorentztransformationen, auf welche sich üblicherweise beschränkt wird, da diese die Richtung der Zeit und die Händigkeit des Koordinatensystems beibehalten.
Generell können endliche Lorentztransformationen in Form von Elementen einer Lie-Gruppe dargestellt werden, deren Erzeugende eine Lie-Algebra erfüllen [1, 2, 16].

2.4 Spinor

2.4.1 Grundlagen

Spinoren sind wichtig, um Felder und damit Elementarteilchen zu beschreiben.
Ein Spinor ξ ist ein komplexes zwei-komponentiges Objekt, das wie folgt transformiert [17]:

$$\xi \to \xi' = D(\Lambda)\xi, \tag{2.17}$$

wobei $D(\Lambda)$ zu einer Darstellung der Lorentz-Gruppe mit halbzahligem Spin gehört.
Für eine Spin-$\frac{1}{2}$ Darstellung der Lorentz-Gruppe mit $(0, \frac{1}{2})$, kann die Repräsentation der Lorentztransformation in drei Dimensionen mit

$$D(\Lambda) = \exp\left[\frac{\mu}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} - \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma})\right] \tag{2.18}$$

gefunden werden. $-\vec{\theta} := (\epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12})$ und $-\vec{\omega} = (\epsilon_{10}, \epsilon_{20}, \epsilon_{30})$ sind Vektoren der Parameter $\epsilon^{\mu\nu}$ der Lorentztransformation und $\vec{\sigma}$ die Pauli-Matrizen. $\epsilon^{\mu\nu}$ ist dabei eine antisymmetrische Matrix. Hierbei bilden derartige Matrizen aus Gleichung (2.18) die SL$(2, \mathbb{C})$ Gruppe.
Das Feld ξ wird damit SL$(2, \mathbb{C})$-*Spinor* genannt.
Spinoren, die mit einer Transformationsmatrix vom Typ

$$D(\Lambda) = \exp\left[\frac{\mu}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} + \vec{\omega} \cdot \vec{\sigma})\right] \tag{2.19}$$

transformieren, werden als η bezeichnet und gehören der $(\frac{1}{2}, 0)$-Darstellung an, d.h. der komplex konjugierten Repräsentation der Spin $\frac{1}{2}$-Darstellung der Lorentz-Gruppe. [1, 2, 18, 19].

2.4.2 Dirac-Spinor

Da die spätere Konstruktion der Luttinger-Theorie in Teilen analog zur Dirac-Theorie verläuft, wird diese vorerst genauer betrachtet, um jene Parallelen aufzuzeigen. Dazu wird zunächst der *Dirac-Spinor* eingeführt:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \eta^{\dot{\alpha}}(x) \\ \xi_\alpha(x) \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

wobei $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$ ist. Der Dirac-Spinor gehört damit zur $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentz-Gruppe.
In chiraler Darstellung können die chiralen Projektionsoperatoren P_R und P_L

$$P_\mathrm{R} = \frac{1+\gamma_5}{2} \qquad P_\mathrm{L} = \frac{1-\gamma_5}{2}, \tag{2.21}$$

definiert werden, wobei γ_5 eine Dirac-Matrix ist. Der rechtshändige und linkshändige Spinor ψ_R und ψ_L, lassen sich also als

$$\psi_\mathrm{R} := P_\mathrm{R}\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_\alpha \end{pmatrix} \qquad \psi_\mathrm{L} := P_\mathrm{L}\psi = \begin{pmatrix} \eta^{\dot{\alpha}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

schreiben, sodass

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_\mathrm{L}(x) \\ \psi_\mathrm{R}(x) \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

ist. Zusätzlich werden für die Dirac-Theorie, die γ- bzw. Dirac-Matrizen benötigt. Wiederum in chiraler Darstellung können diese als

$$\gamma^i := \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

geschrieben werden, wobei $i = 1, 2, 3$ ist. Zwei weitere Dirac-Matrizen γ^0 und γ^5, können als

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

und

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{2.26}$$

definiert werden.

Die γ-Matrizen erfüllen die sogenannte *Clifford-Algebra* im Minkowski-Raum mit

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1} \qquad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{2.27}$$

Die Clifford-Algebra ist invariant unter Lorentztransformation

$$\gamma^\mu \to \gamma^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu, \tag{2.28}$$

da

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \to \{\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu\} &= \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu + \Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu\Lambda^\nu{}_\mu\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\ &= 2\Lambda^\mu{}_\nu\Lambda^\nu{}_\mu g^{\mu\nu}\mathbb{1} \\ &= 2g^{\nu\mu}\mathbb{1} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\end{aligned} \tag{2.29}$$

ist, wobei $\Lambda^\mu{}_\nu \in \mathrm{SO}(1,3)$ ist.
Es können noch weitere Darstellungen der γ-Matrizen gefunden werden, welche die Clifford-Algebra erfüllen. Der Wechsel zwischen diesen Darstellungen wird als *Spin-Basen-Transformation* bezeichnet mit

$$\gamma^\mu \to \tilde{\gamma^\mu}' = S^{-1}\gamma^\mu S, \tag{2.30}$$

wobei $S \in \mathrm{SL}(d_\gamma, \mathbb{C})$ ist.
Unter Spin-Basen-Transformation gilt für die Clifford-Algebra:

$$\begin{aligned}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \to \{S^{-1}\gamma^\mu S, S^{-1}\gamma^\nu S\} &= S^{-1}\gamma^\mu SS^{-1}\gamma^\nu S + S^{-1}\gamma^\nu SS^{-1}\gamma^\mu S \\ &= S^{-1}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\nu)S \\ &= S^{-1}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}S \\ &= 2g^{\mu\nu}S^{-1}\mathbb{1}S = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\},\end{aligned} \tag{2.31}$$

sodass diese ebenfalls invariant unter Spin-Basen-Transformation ist. Zusätzlich zu erwähnen sei, dass γ^5 mit allen anderen Dirac-Matrizen antikommutiert:

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \qquad \mu \neq 5. \tag{2.32}$$

Da das Skalarprodukt aus $\psi^\dagger\psi$ nicht lorentzinvariant ist, wird der *Dirac-konjugierte Spinor* eingeführt:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger h, \tag{2.33}$$

wobei h die *Spinmetrik* ist. Für die Dirac-Theorie entspricht diese der Dirac-Matrix γ^0 [1, 2, 19].

2.5 Dirac-Gleichung

Zunächst entwickelten Oskar Klein und Walter Gordon eine relativistische Verallgemeinerung der Schrödingergleichung, die *Klein-Gordon-Gleichung*

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \tag{2.34}$$

Jedoch ergab sich das Problem der negativen Energielösung aufgrund der quadratischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E(\vec{p}) = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \tag{2.35}$$

Um dieses Problem zu lösen, forderte Paul Dirac die Linearität der Zeitableitung [2].
Die Wirkung kann wie folgt aufgestellt werden:

$$S_\mathrm{D} = \int d^4x (i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi). \tag{2.36}$$

Mit der Variation dieser Wirkung kann die Dirac-Gleichung gefunden werden:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}} S_D &\stackrel{!}{=} 0 \\ \rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) &= 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Damit die Dirac-Theorie forminvariant unter Wechsel des Bezugssystems mit konstanten Dirac-Matrizen ist, wird gefordert, dass bei einer Lorentztransformation Λ gleichzeitig auch eine Spin-Basen-Transformation S durchgeführt wird. D.h. es wird zunächst eine Lorentztransformation (LT) durchgeführt und im Anschluss eine Spin-Basen-Transformation (SBT) angewendet, sodass die Dirac-Matrizen in jedem Lorentzsystem die gleiche Form haben:

$$\gamma^\mu \stackrel{\mathrm{LT}}{\rightarrow} \gamma^{\mu\prime} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \stackrel{\mathrm{SBT}}{\rightarrow} \tilde{\gamma}^{\mu\prime} = S^{-1}\Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu S \stackrel{!}{=} \gamma^\mu. \tag{2.38}$$

Damit kann auch

$$S\gamma^\mu S^{-1} \stackrel{!}{=} \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{2.39}$$

geschrieben werden, wobei auch die Notation

$$S_\mathrm{Lor}^{-1}\gamma^\mu S_\mathrm{Lor} \stackrel{!}{=} \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{2.40}$$

verwendet werden kann, mit $S_\mathrm{Lor} = S^{-1}$ und $S_\mathrm{Lor} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. S_Lor sind dann jene Lorentztransformationen, welche die Dirac-Matrizen wieder zurück in die originale Form transformieren.
Gleichung (2.40) definiert implizit eine Einbettung von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ in $\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$.
Gleiche Überlegung kann nun auch mit den Spinoren durchgeführt werden. Es ergibt sich für ψ folgende Transformation:

$$\psi \stackrel{\mathrm{LT}}{\rightarrow} \psi' \stackrel{\mathrm{SBT}}{\rightarrow} \tilde{\psi}' = S_\mathrm{Lor}\psi. \tag{2.41}$$

Folglich transformiert $\psi^\dagger$ wie

$$\psi^\dagger \stackrel{\mathrm{LT}}{\rightarrow} \psi'^\dagger \stackrel{\mathrm{SBT}}{\rightarrow} \tilde{\psi}'^\dagger = [S_\mathrm{Lor}\psi]^\dagger = \psi^\dagger S_\mathrm{Lor}^\dagger. \tag{2.42}$$

Für die Dirac-Gleichung gilt dann mit $\partial^\mu \overset{\mathrm{LT}}{\to} \partial'^\nu = \Lambda^\nu{}_\lambda \partial^\lambda$:

$$
\begin{aligned}
0 = (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = (i\gamma^\mu g_{\mu\nu}\partial^\nu - m)\psi \overset{\mathrm{LT}}{\to} & (i\gamma^\mu g_{\mu\nu}\partial'^\nu - m)\psi' \\
&= (i\gamma^\mu g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\lambda \partial^\lambda - m) S_{\mathrm{Lor}}\psi \\
&= S_{\mathrm{Lor}}(iS_{\mathrm{Lor}}^{-1}\gamma^\mu S_{\mathrm{Lor}} g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\lambda \partial^\lambda - m)\psi \\
&\overset{(2.40)}{=} S_{\mathrm{Lor}}(i\Lambda^\mu{}_\kappa \gamma^\kappa g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\lambda \partial^\lambda - m)\psi \\
&= S_{\mathrm{Lor}}(i[g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\kappa \Lambda^\nu{}_\lambda]\gamma^\kappa \partial^\lambda - m)\psi \\
&= S_{\mathrm{Lor}}(ig_{\kappa\lambda}\gamma^\kappa \partial^\lambda - m)\psi \\
&= S_{\mathrm{Lor}}\underbrace{(i\gamma^\kappa \partial_\kappa - m)\psi}_{=0} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

womit diese invariant unter Lorentztransformation ist.
Damit auch die Wirkung invariant bleibt, muss

$$
\bar\psi \overset{\mathrm{LT}}{\to} \bar\psi' \overset{\mathrm{SBT}}{\to} \tilde{\bar\psi}' = \bar\psi S_{\mathrm{Lor}}^{-1}
\tag{2.44}
$$

gelten. Dafür wird die Spinmetrik benötigt, welche für allgemeine Spin-Basen-Transformationen

$$
(S^\dagger)^{-1} h = hS
\tag{2.45}
$$

erfüllen muss - wobei im Allgemeinen $S^\dagger \neq S^{-1}$ ist - sodass

$$
\bar\psi \to \bar\psi S_{\mathrm{Lor}}^{-1} = \psi^\dagger h S_{\mathrm{Lor}}^{-1} \overset{(2.45)}{=} \psi^\dagger S_{\mathrm{Lor}}^\dagger h \overset{(2.42)}{=} \psi^\dagger h = \bar\psi
\tag{2.46}
$$

gelten kann. Damit kann gezeigt werden, dass auch die Wirkung invariant bleibt:

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{D}} &= \int d^4x (i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi) = \int d^4x (i\bar\psi\gamma^\mu g_{\mu\nu}\partial^\nu\psi - m\bar\psi\psi) \\
&\overset{\mathrm{LT}}{\to} \int d^4x (i\bar\psi'\gamma^\mu g_{\mu\nu}\partial'^\nu\psi' - m\bar\psi'\psi') \\
&= \int d^4x (i\bar\psi S_{\mathrm{Lor}}^{-1}\gamma^\mu g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\lambda\partial^\lambda S_{\mathrm{Lor}}\psi - m\bar\psi S_{\mathrm{Lor}}^{-1} S_{\mathrm{Lor}}\psi) \\
&= \int d^4x (i\bar\psi S_{\mathrm{Lor}}^{-1} S_{\mathrm{Lor}}^{-1}\gamma^\mu S_{\mathrm{Lor}} g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\lambda\partial^\lambda S_{\mathrm{Lor}}\psi - m\bar\psi\psi) \\
&= \int d^4x (i\bar\psi S_{\mathrm{Lor}}^{-1}\Lambda^\mu{}_\kappa\gamma^\kappa g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\lambda\partial^\lambda S_{\mathrm{Lor}}\psi - m\bar\psi\psi) \\
&= \int d^4x (i\bar\psi S_{\mathrm{Lor}}^{-1} S_{\mathrm{Lor}} g_{\kappa\lambda}\gamma^\kappa\partial^\lambda\psi - m\bar\psi\psi) \\
&= \int d^4x (i\bar\psi\gamma^\kappa\partial_\kappa\psi - m\bar\psi\psi) = \int d^4x (i\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar\psi\psi).
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

Letztlich ist auch das Skalarprodukt $\bar\psi\psi$ invariant unter Spin-Basen-Transformation, ebenso wie Lorentzinvariant:

$$
\bar\psi\psi = \psi^\dagger h\psi \to \psi^\dagger S_{\mathrm{Lor}}^\dagger {S_{\mathrm{Lor}}^\dagger}^{-1} h S_{\mathrm{Lor}}^{-1} S_{\mathrm{Lor}}\psi = \psi^\dagger h\psi = \bar\psi\psi.
\tag{2.48}
$$

Dies ist wichtig zur Berücksichtigung der Freiheitsgrade der Fermionen in der Wirkung [1, 2, 19, 20].

2.6 Spinmetrik

Die Spinmetrik wurde bereits in Abschnitt 2.5 verwendet, um die Forminvarianz der Dirac-Theorie mit Gleichung (2.45) zu gewährleisten.
Mit weiteren Anforderungen an die Dirac-Theorie können zusätzliche Eigenschaften der Spinmetrik gefunden werden.
Neben der Invarianz von $\bar{\psi}\psi$ muss dieses Skalarprodukt reell sein, damit die resultierende Wirkung eine unitäre Zeitevolution ermöglicht. Dafür wird der Massenterm der Wirkung der Dirac-Gleichung untersucht. Da dieser ebenfalls reell sein soll, kann folgende Betrachtung gemacht werden:

$$\begin{aligned} S_\mathrm{m} &\overset{(2.36)}{=} -m\int d^4x\bar{\psi}\psi \\ &= -m\int d^4x\psi^\dagger h\psi \\ S_\mathrm{m} &\overset{!}{=} S_\mathrm{m}^* \\ &= \left[-m\int d^4x\psi^\dagger h\psi\right]^* \\ &= -m\int d^4x\psi^\dagger h^\dagger\psi, \end{aligned} \tag{2.49}$$

womit gezeigt ist, dass für einen reellen Massenterm der Wirkung, die Spinmetrik hermitesch sein muss:

$$h = h^\dagger. \tag{2.50}$$

Mit dieser Bedingung ist auch $\bar{\psi}\psi$ reell:

$$[\bar{\psi}\psi]^* = [\psi^\dagger h\psi]^* = \psi^\dagger h^\dagger\psi = \psi^\dagger h\psi = \bar{\psi}\psi. \tag{2.51}$$

Gleiche Betrachtung kann mit dem kinetischen Term der Wirkung gemacht werden, da auch dieser reell sein soll:

$$\begin{aligned} S_\mathrm{kin} &\overset{(2.36)}{=} i\int d^4x\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ &= i\int d^4x\psi^\dagger h\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ S_\mathrm{kin} &\overset{!}{=} S_\mathrm{kin}^* \\ &= \left[i\int d^4x\psi^\dagger h\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right]^* \\ &= -i\int d^4x\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}h^\dagger\psi \\ &\overset{p.I.}{=} \underbrace{-i\int_{\partial\Omega} d\sigma_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}h^\dagger\psi}_{=0} + i\int d^4x\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}h^\dagger\partial_\mu\psi \\ &\Rightarrow h\gamma^\mu \overset{!}{=} \gamma^{\mu\dagger}h^\dagger \overset{(2.50)}{=} \gamma^{\mu\dagger}h. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Der Oberflächenterm über den Rand $\partial\Omega$ des Raum-Zeit-Volumens Ω fällt dabei weg, da die Wirkung im Unendlichen verschwinden soll.
Somit muss

$$\gamma^\mu = h^{-1}\gamma^{\mu\dagger} h \tag{2.53}$$

gelten. Zusätzlich wird angenommen, dass

$$|\det h| = 1 \tag{2.54}$$

ist, damit eine Skalierung von $\bar{\psi}$ relativ zu ψ vermieden wird. Mit Gleichungen (2.50), (2.53) und (2.54) ist die Spinmetrik bis auf ein Vorzeichen eindeutig bestimmt. Insbesondere Gleichungen (2.53) und (2.54) werden durch $h = \gamma^0$ erfüllt [16, 19, 20, 21, 22, 23].

3 Relativistische Luttinger-Fermionen

In der Quantenfeldtheorie gibt es das Phänomen der asymptotischen Freiheit. Dabei gibt es eine Änderung der Wechselwirkungsstärke bei verschiedenen Energien. Während bei niedrigen Energien starke Wechselwirkung vorliegt, werden Teilchen bei hohen Energien frei und interagieren immer schwächer.
Für fermionische Materie lag bislang keine Theorie vor, welche in 4 Dimensionen asymptotische Freiheit liefert. Luttinger-Fermionen können ein erstes Beispiel für asymptotische Freiheit in einer reinen fermionischen Theorie sein [24, 25, 26].

3.1 Konstruktion des Hamiltonian

Der folgende Abschnitt basiert auf der Konstruktion von I. Herbut und L. Janssen [9], siehe auch [5, 19, 20, 23].
Die nicht-relativistische Luttinger-Theorie kann mit der Annahme, dass der Hamiltonian quadratisch vom Impuls abhängt, wie folgt konstruiert werden:

$$H^2 = p^4 \mathbb{1}. \tag{3.1}$$

Damit kann der Ansatz

$$H = \sum_{i,j=1}^{d} G_{ij} p_i p_j \tag{3.2}$$

gewählt werden. In Gleichung (3.1) eingesetzt, folgt somit

$$H^2 = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} (G_{ij} p_i p_j)^2 + \sum_{\substack{j,a \\ j \neq a}} p_i^2 p_j p_a G_{ij} G_{ia} \right) + \sum_{\substack{i,j,k,l \\ i \neq k}} p_i p_k p_j p_l G_{ij} G_{kl}. \tag{3.3}$$

G_{ij} ist dabei ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Da H^2 nur aus geraden Ordnungen von p besteht, müssen die zweite und dritte Summe unter bestimmten Bedingungen verschwinden. Die zweite Summe muss damit für $j \neq a$ und die Dritte für $i = j \wedge k \neq l$
und $i \neq j \wedge k \neq l \wedge (i, j) \neq (k, l)$ verschwinden. Zusätzliche Bedingungen an G_{ij} sind zum einen die Normierung mit $G_{\boldsymbol{ii}}^2 = 1$ und zum anderen die verschwindende Spur mit $G^i{}_i = \delta^{ij} G_{ij}$, wobei δ^{ij} das Kronecker-Delta ist. Über fett gedruckte Indizes wird hierbei nicht summiert.
Durch Umformungen können folgende Antikommutatoren gefunden werden:

$$\{G_{\boldsymbol{ii}}, G_{kl}\} = 0 \qquad k \neq l \tag{3.4a}$$

$$\{G_{ij}, G_{kl}\} = 0 \qquad i \neq j \wedge k \neq l \wedge (i, j) \neq (k, l) \tag{3.4b}$$

$$\{G_{\boldsymbol{ii}}, G_{\boldsymbol{jj}}\} = -\frac{2}{d-1} \delta_{\boldsymbol{ii}} \delta_{\boldsymbol{jj}} \qquad i \neq j \tag{3.4c}$$

$$\{G_{\boldsymbol{ii}}, G_{\boldsymbol{ii}}\} = 2. \tag{3.4d}$$

Es gilt zudem, dass $G_{\mu\nu}$ symmetrisch mit $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ ist.
Für den nicht-relativistischen Fall kann eine Algebra, die sogenannte Abrikosov-Algebra

$$\{G_{ij}, G_{kl}\} = -\frac{2}{d-1}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{d}{d-1}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \tag{3.5}$$

gefunden werden [27, 28].
Für den relativistischen Fall in der Minkowski-Raumzeit folgt mit $G_{ij} \to G_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, .., d-1$

$$\{G_{\mu\nu}, G_{\kappa\lambda}\} = -\frac{2}{d-1}g_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda} + \frac{d}{d-1}(g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}). \tag{3.6}$$

Hier gelten die gleichen Eigenschaften der Normierung, Symmetrie und Spurbedingung, wobei diese nun als $G^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$ geschrieben wird.
Der kinetische Term des Luttinger-Operators kann also letztlich als

$$G_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu}\psi = 0 \tag{3.7}$$

geschrieben werden, was eine Feldgleichung für freie Luttinger-Fermionen darstellt.
Eine Bedingung an diesen Operator ist, dass dessen Quadrat dem quadrierten Klein-Gordon-Operator entspricht:

$$(G_{\mu\nu}\partial^{\mu}\partial^{\nu})^2 \overset{(2.34)}{=} (\partial^{\mu}\partial_{\mu})^2. \tag{3.8}$$

3.2 Eigenschaften von $G_{\mu\nu}$

3.2.1 Dimension

Da $G_{\mu\nu}$ ein d-dimensionaler, symmetrischer Lorentz-Tensor ist, gibt es $\frac{1}{2}d(d-1)$ unabhängige, nicht-diagonale Elemente. Auf der Diagonalen gäbe es d Elemente, da $G_{\mu\nu}$ jedoch spurlos ist, sind es nur $d-1$ Elemente. Somit braucht es genau

$$d_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}d(d-1) + (d-1) = (d-1)\cdot\left(\frac{1}{2}d + 1\right) \tag{3.9}$$

unabhängige, anti-kommutierende Elemente, die die Algebra (3.6) erfüllen und den Raum der $G_{\mu\nu}$-Matrizen aufspannen.
Da Gleichung (3.6) eine Clifford-Algebra darstellt, können die Elemente von $G_{\mu\nu}$ mit den γ-Matrizen konstruiert werden. Die Dimensionalität der γ-Matrizen d_γ gibt die Dimension der Elemente der Clifford-Algebra an und lässt sich damit wie folgt darstellen:

$$d_\gamma = 2^{\lfloor \frac{d_e}{2} \rfloor}, \tag{3.10}$$

wobei $\lfloor\cdot\rfloor$ der Abrundungsoperator ist, mit [29]

$$\lfloor r \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq r\} \in \mathbb{Z}. \tag{3.11}$$

Damit gibt es bspw. für $d = 3$, $d_{\mathrm{e}} = 5$ unabhängige, anti-kommutierende Elemente. Die Dimension der γ-Matrizen ist damit $d_\gamma = 4$ [4, 19, 20, 29].

3.2.2 Konstruktion

Da der Raum der $G_{\mu\nu}$-Matrizen mit den γ-Matrizen aufgespannt werden kann, kann der Ansatz

$$G_{\mu\nu} = a^A_{\mu\nu}\gamma^A \tag{3.12}$$

gewählt werden, wobei $a^A_{\mu\nu}$ ein symmetrischer Vorfaktor in Form eines Tensors zweiter Stufe, mit $a^A_{\mu\nu} = a^A_{\nu\mu}$ und $A = 1, ..., d_\mathrm{e}$, ist. Die γ-Matrizen erfüllen die euklidische Clifford-Algebra $\{\gamma^A, \gamma^B\} = 2\delta^{AB}$. Um die Vorfaktoren der einzelnen Elemente von $G_{\mu\nu}$ zu bestimmen, können folgende Fälle mit Hilfe der Algebra (3.6), mit $\kappa = \mu$ und $\lambda = \nu$ betrachtet werden:

$$\mu = \nu: \qquad \{G_{\boldsymbol{\mu\mu}}, G_{\boldsymbol{\mu\mu}}\} = 2G^2_{\boldsymbol{\mu\mu}} = -\frac{2}{d-1}g^2_{\boldsymbol{\mu\mu}} + 2\cdot\frac{d}{d-1}g^2_{\boldsymbol{\mu\mu}} = 2 \tag{3.13a}$$

$$(\mu,\nu) = (0,j): \qquad \{G_{0j}, G_{0j}\} = 2G^2_{0j} = -\frac{d}{d-1} \tag{3.13b}$$

$$(\mu,\nu) = (i, j \neq i): \qquad \{G_{ij}, G_{ij}\} = 2G^2_{ij} = \frac{d}{d-1}. \tag{3.13c}$$

Da $G^2_{0j} < 0$, kann G_{0j} antihermitesch und die Vorfaktoren a^A_{0j} imaginär gewählt werden. Wird Gleichung (3.12) in Gleichung (3.13) eingesetzt, folgt für $a^A_{\boldsymbol{\mu\mu}}$:

$$\{G_{\boldsymbol{\mu\mu}}, G_{\boldsymbol{\mu\mu}}\} = \{a^A_{\boldsymbol{\mu\mu}}\gamma^A, a^A_{\boldsymbol{\mu\mu}}\gamma^A\} = (a^A_{\boldsymbol{\mu\mu}})^2\{\gamma^A,\gamma^A\} = 2\sum_A (a^A_{\boldsymbol{\mu\mu}})^2 = 2. \tag{3.14}$$

Für G_{0j} wird eine Kontraktion von a^A_{0j} durchgeführt, indem $\mu = A$ gesetzt wird. Zusätzlich sei zu beachten, dass a^A_{0j} imaginär sein muss, sodass $G_{0j} = ia_j\gamma^j$ ist. Damit ergibt sich

$$\{G_{0j}, G_{0j}\} = \{ia_j\gamma^j, ia_j\gamma^j\} = -2\sum_j a^2_j = -\frac{d}{d-1}. \tag{3.15}$$

Analoges Vorgehen kann für G_{ij} verwendet werden, sodass die Vorfaktoren für alle Einträge von $G_{\mu\nu}$ zusammengefasst folgend gewählt werden können [4, 5, 19, 20, 23]:

$$\mu = \nu: \qquad \sum_A (a^A_{\boldsymbol{\mu\mu}})^2 = 1 \tag{3.16a}$$

$$(\mu,\nu) = (0,j): \qquad \sum_A (a^A_{0j})^2 = \sum_j (ia_j)^2 = -\frac{d}{2(d-1)} \tag{3.16b}$$

$$(\mu,\nu) = (i, j\neq i): \qquad \sum_A (a^A_{ij})^2 = \sum_i a^2_i = \frac{d}{2(d-1)}. \tag{3.16c}$$

3.3 Symmetrien der Luttinger-Theorie

Die kinetische Wirkung in d Dimensionen kann nach der Konstruktion des Hamiltonians in Abschnitt 3.1 als

$$S_{\text{kin}} = \int d^dx[\bar{\psi}G_{\mu\nu}(i\partial^\mu)(i\partial^\nu)\psi] \tag{3.17}$$

geschrieben werden.

Auch die Luttinger-Theorie soll analog zur Dirac-Theorie unitär und invariant unter Spin-Basen- und Lorentztransformation sein. Somit kann das gleiche Vorgehen wie in Abschnitt 2.5 gewählt werden, um dies zu gewährleisten.

Es kann gezeigt werden, dass die Algebra in Gleichung (3.6) separat invariant unter Lorentztransformation

$$G_{\mu\nu} \to G'_{\mu\nu} = G_{\kappa\lambda}\Lambda^\kappa{}_\mu\Lambda^\lambda{}_\nu, \tag{3.18}$$

mit $\Lambda \in \mathrm{SO}(1, d-1)$ und Spin-Basen-Transformation

$$G_{\mu\nu} \to SG_{\mu\nu}S^{-1}, \tag{3.19}$$

mit $S \in \mathrm{SL}(d_\gamma, \mathbb{C})$, ist:

$$\begin{aligned}
\{G_{\mu\nu}, G_{\kappa\lambda}\} &\to \{G_{\kappa\lambda}\Lambda^\kappa{}_\mu\Lambda^\Lambda{}_\nu, G_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\kappa\Lambda^\nu{}_\nu\} \\
&= G_{\kappa\lambda}\Lambda^\kappa{}_\mu\Lambda^\Lambda{}_\nu G_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\kappa\Lambda^\nu{}_\nu + G_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\kappa\Lambda^\nu{}_\nu G_{\kappa\lambda}\Lambda^\kappa{}_\mu\Lambda^\Lambda{}_\nu \\
&= \{G_{\mu\nu}, G_{\kappa\lambda}\}\Lambda^\kappa{}_\lambda\Lambda^\lambda{}_\nu\Lambda^\mu{}_\kappa\Lambda^\nu{}_\nu \\
&= \left[-\frac{2}{d-1}g_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda} + \frac{d}{d-1}(g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})\right]\Lambda^\kappa{}_\lambda\Lambda^\lambda{}_\nu\Lambda^\mu{}_\kappa\Lambda^\nu{}_\nu \\
&= -\frac{2}{d-1}g_{\kappa\lambda}g_{\mu\nu} + \frac{d}{d-1}(g_{\kappa\mu}g_{\lambda\nu} + g_{\kappa\nu}g_{\lambda\mu}) \\
&= -\frac{2}{d-1}g_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda} + \frac{d}{d-1}(g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}) = \{G_{\mu\nu}, G_{\kappa\lambda}\},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\{G_{\mu\nu}, G_{\kappa\lambda}\} &\to \{SG_{\mu\nu}S^{-1}, SG_{\kappa\lambda}S^{-1}\} \\
&= SG_{\mu\nu}S^{-1}SG_{\kappa\lambda}S^{-1} + SG_{\kappa\lambda}S^{-1}SG_{\mu\nu}^{-1} \\
&= S\{G_{\mu\nu}, G_{\kappa\lambda}\}S^{-1} \\
&= S\left[-\frac{2}{d-1}g_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda} + \frac{d}{d-1}(g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})\right]S^{-1} \\
&= \left[-\frac{2}{d-1}g_{\mu\nu}g_{\kappa\lambda} + \frac{d}{d-1}(g_{\mu\kappa}g_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa})\right]SS^{-1} = \{G_{\mu\nu}, G_{\kappa\lambda}\}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Es wird auch hier wieder zunächst eine Lorentztransformation und folgend eine Spin-Basen-Transformation durchgeführt, sodass

$$G_{\mu\nu} \overset{\text{LT}}{\to} G'_{\mu\nu} = G_{\kappa\lambda}\Lambda^\kappa{}_\mu\Lambda^\lambda{}_\nu \overset{\text{SBT}}{\to} SG_{\kappa\lambda}\Lambda^\kappa{}_\mu\Lambda^\lambda{}_\nu S^{-1} \overset{!}{=} G_{\mu\nu} \tag{3.22}$$

gilt.

Auch hier kann $S^{-1} = S_{\mathrm{Lor}}$ definiert werden, damit sich

$$S_{\mathrm{Lor}} G_{\mu\nu} S_{\mathrm{Lor}}^{-1} = G_{\kappa\lambda} \Lambda^{\kappa}{}_{\mu} \Lambda^{\lambda}{}_{\nu} \tag{3.23}$$

schreiben lässt. Die Menge aller S_{Lor}, welche Gleichung (3.22) erfüllen und die lorentztransformierte Matrix $G_{\mu\nu}$ wieder zurück transformieren, bilden eine $\mathrm{SO}(1, d-1)$-Untergruppe von $\mathrm{SL}(d_\gamma, \mathbb{C})$. Damit geht also auch die Transformation von $\psi \to S_{\mathrm{Lor}}\psi$ und $\bar{\psi} \to \bar{\psi} S_{\mathrm{Lor}}^{-1}$ einher, sowie die Transformation der Spinmetrik äquivalent zu Gleichung (2.45). Damit kann analog zu Abschnitt 2.5 gezeigt werden, dass die Bewegungsgleichung massebehafteter Luttinger-Fermionen forminvariant bleibt:

$$\begin{aligned}
0 = (-G_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu - m^2)\psi &= (-G_{\mu\nu} g^{\mu\alpha}\partial_\alpha g^{\nu\beta}\partial_\beta - m^2)\psi \\
&\overset{\mathrm{LT}}{\to} (-G_{\mu\nu} g^{\mu\alpha}\partial'_\alpha g^{\nu\beta}\partial'_\beta - m^2)\psi' \\
&= (-G_{\mu\nu} g^{\mu\alpha}\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\partial_\rho g^{\nu\beta}\Lambda^{\varphi}{}_{\beta}\partial_\varphi - m^2) S_{\mathrm{Lor}}\psi \\
&= S_{\mathrm{Lor}}(-S_{\mathrm{Lor}} G_{\mu\nu} S_{\mathrm{Lor}}^{-1} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\partial_\rho\Lambda^{\varphi}{}_{\beta}\partial_\varphi - m^2)\psi \\
&= S_{\mathrm{Lor}}(-G_{\kappa\lambda}\Lambda^{\kappa}{}_{\mu}\Lambda^{\lambda}{}_{\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\partial_\rho\Lambda^{\varphi}{}_{\beta}\partial_\varphi - m^2)\psi \\
&= S_{\mathrm{Lor}}\underbrace{(-G_{\kappa\lambda}\partial^\kappa\partial^\lambda - m^2)\psi}_{=0} = 0.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Gleiches gilt für die Wirkung:

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{L}} &= \int d^dx [\bar{\psi} G_{\mu\nu}(i\partial^\mu)(i\partial^\nu)\psi - m^2\bar{\psi}\psi] \\
&= -\int d^dx [\bar{\psi}' G_{\mu\nu} g^{\mu\alpha}\partial_\alpha g^{\nu\beta}\partial_\beta\psi' - m^2\bar{\psi}'\psi'] \\
&\overset{\mathrm{LT}}{\to} -\int d^dx [\bar{\psi} S_{\mathrm{Lor}}^{-1} G_{\mu\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\partial_\rho\Lambda^{\varphi}{}_{\beta}\partial_\varphi S_{\mathrm{Lor}}\psi - m^2\bar{\psi} S_{\mathrm{Lor}}^{-1} S_{\mathrm{Lor}}\psi] \\
&= -\int d^dx [\bar{\psi} S_{\mathrm{Lor}}^{-1} S_{\mathrm{Lor}} G_{\mu\nu} S_{\mathrm{Lor}}^{-1} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\Lambda^{\varphi}{}_{\beta}\partial_\rho\partial_\varphi S_{\mathrm{Lor}}\psi - m^2\bar{\psi}\psi] \\
&= -\int d^dx [\bar{\psi} S_{\mathrm{Lor}}^{-1} G_{\kappa\lambda}\Lambda^{\kappa}{}_{\mu}\Lambda^{\lambda}{}_{\nu} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}\Lambda^{\varphi}{}_{\beta}\partial_\rho\partial_\varphi S_{\mathrm{Lor}}\psi - m^2\bar{\psi}\psi] \\
&= -\int d^dx [\bar{\psi} S_{\mathrm{Lor}}^{-1} S_{\mathrm{Lor}} G_{\kappa\lambda}\partial^\kappa\partial^\lambda\psi - m^2\bar{\psi}\psi] \\
&= -\int d^dx [\bar{\psi} G_{\kappa\lambda}\partial^\kappa\partial^\lambda\psi - m^2\bar{\psi}\psi].
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Analog zu Abschnitt 2.6 können nun wichtige Eigenschaften der Spinmetrik bestimmt werden. Da der Massenterm der Wirkung reell sein soll, kann an folgender Rechnung, äquivalent zur Dirac-Theorie, erkannt werden, dass h hermitesch sein muss, mit:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{m}} &= -m^2 \int d^4x \bar{\psi}\psi \\ &= -m^2 \int d^4x \psi^\dagger h \psi \\ S_{\mathrm{m}} &\stackrel{!}{=} S_{\mathrm{m}}^* \\ &= \left[-m^2 \int d^4x \psi^\dagger h \psi\right]^* \\ &= -m^2 \int d^4x \psi^\dagger h^\dagger \psi, \\ &\Rightarrow h = h^\dagger. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Es können neben dem hier genutzten Massenterm noch weitere Massenterme konstruiert werden [5]. Für die weitere Betrachtung sind diese jedoch nicht wichtig.
Auch der kinetische Term der Wirkung soll die gleiche Bedingung erfüllen, sodass:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{kin}} &= \int d^dx (\bar{\psi} G_{\mu\nu})((i\partial^\mu)(i\partial^\nu)\psi) \\ &= -\int d^dx ((\bar{\psi} G_{\mu\nu})(\partial^\mu \partial^\nu \psi)) \\ S_{\mathrm{kin}} &\stackrel{!}{=} S_{\mathrm{kin}}^* \\ S_{\mathrm{kin}}^* &= \left[-\int d^dx ((\bar{\psi} G_{\mu\nu})(\partial^\mu \partial^\nu \psi))\right]^* \\ &= -\int d^dx ((\partial^\mu \partial^\nu \psi^\dagger)(G_{\mu\nu}^\dagger \bar{\psi}^\dagger)) \\ &\stackrel{\text{p.I.}}{=} \int d^dx ((\partial^\nu \psi^\dagger)(G_{\mu\nu}^\dagger \partial^\mu \bar{\psi})) \\ &= -\int d^dx (\psi^\dagger G_{\mu\nu}^\dagger \partial^\mu \partial^\nu \bar{\psi}^\dagger) \\ &= -\int d^dx (\psi^\dagger G_{\mu\nu}^\dagger \partial^\mu \partial^\nu h^\dagger \psi) \\ &= -\int d^dx (\psi^\dagger G_{\mu\nu}^\dagger h^\dagger \partial^\mu \partial^\nu \psi) \\ &\Rightarrow G_{\mu\nu}^\dagger h^\dagger \stackrel{!}{=} h G_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

wobei die Oberflächenterme aufgrund der Randbedingungen an die Felder verschwinden. Weiterhin können damit wichtige (Anti-)Kommutator-Regeln gefunden werden. Dafür werden erneut die Elemente von $G_{\mu\nu}$ einzeln betrachtet. Wie bereits in Abschnitt 3.2.2 erwähnt, soll G_{0j} antihermitesch sein, d.h. $G_{0j}^\dagger = -G_{0j}$.

Damit folgt aus Gleichung (3.27):

$$\begin{aligned} G_{0j} &= h^{-1}G_{0j}^{\dagger}h^{\dagger} = -h^{-1}G_{0j}h^{\dagger} = -h^{-1}G_{0j}h \\ &\Rightarrow \{h, G_{0j}\} = 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

sowie

$$\begin{aligned} G_{ij} &= h^{-1}G_{ij}^{\dagger}h^{\dagger} = h^{-1}G_{ij}h \\ &\Rightarrow [h, G_{ij}] = 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

und

$$\begin{aligned} G_{\boldsymbol{\mu\mu}} &= h^{-1}G_{\boldsymbol{\mu\mu}}^{\dagger}h^{\dagger} = h^{-1}G_{\boldsymbol{\mu\mu}}h \\ &\Rightarrow [h, G_{\boldsymbol{\mu\mu}}] = 0, \end{aligned} \tag{3.30}$$

wobei G_{ij} und $G_{\boldsymbol{\mu\mu}}$ hermitesch sind. [4, 5, 16, 19, 20, 23].

3.4 Physikalische Bedeutung der Spinmetrik

Gesucht ist eine Repräsentation des Paritätoperators im Spinor-Raum.
Eine Paritätstransformation entspricht einer Raumspiegelung, wobei Spinoren folgendermaßen transformieren:

$$\psi'(\vec{x}', t) = \psi(-\vec{x}, t) = S_{\mathrm{P}}\psi(\vec{x}, t). \tag{3.31}$$

S_{P} ist dabei die gesuchte Matrix-Repräsentation des Paritätoperators.
Allgemein kann eine Raumspiegelung von Vektoren als uneigentliche Lorentztransformation

$$P = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{3.32}$$

dargestellt werden. Somit kann

$$\begin{aligned} G_{\kappa\lambda}\Lambda^{\kappa}{}_{\mu}\Lambda^{\lambda}{}_{\nu} &= S_{\mathrm{P}}G_{\mu\nu}S_{\mathrm{P}}^{-1} \\ a_{\kappa\lambda}^{A}\Lambda^{\kappa}{}_{\mu}\Lambda^{\lambda}{}_{\nu}\gamma^{A} &= a_{\mu\nu}^{B}S_{\mathrm{P}}\gamma^{B}S_{\mathrm{P}}^{-1} \end{aligned} \tag{3.33}$$

geschrieben werden. Für G_{0j} gilt dann

$$\begin{aligned} ia_j\Lambda^{\kappa}{}_{\mu}\Lambda^{\lambda}{}_{\nu}\gamma^{j} = -ia_j\gamma^{j} = -G_{0j} = S_{\mathrm{P}}G_{0j}S_{\mathrm{P}}^{-1} \\ \Rightarrow \{S_{\mathrm{P}}, G_{0j}\} = 0, \end{aligned} \tag{3.34}$$

sowie analog für G_{ij} und $G_{\boldsymbol{\mu\mu}}$:

$$[S_{\mathrm{P}}, G_{ij}] = 0 = [S_{\mathrm{P}}, G_{\boldsymbol{\mu\mu}}]. \tag{3.35}$$

S_{P} erfüllt dabei die gleichen Bedingungen, die auch für die Spinmetrik gelten (Gleichung (3.28), (3.29) und (3.30)). Somit kann P als Linearkombination möglicher Spinmetriken in d Dimensionen, dargestellt werden. Unter anderem kann auch $P = h$ gesetzt werden, sodass deutlich wird, dass die Spinmetrik die Parität des Spinors in $d = 4$ ändert [23].

4 Repräsentationen der Spinmetrik und Elemente von $G_{\mu\nu}$

In Abschnitt 3.2 sind die Eigenschaften von $G_{\mu\nu}$ aufgezeigt, sodass diese nun für verschiedene Dimensionen genauer bestimmt werden können und damit die Algebra (3.6) konstruiert werden kann.
Für die Konstruktion der Elemente von $G_{\mu\nu}$ wird Gleichung (3.12) verwendet. Damit kann als Ansatz

$$\mu = \nu : \qquad G_{\boldsymbol{\mu\mu}} = \sum_A a^A_{\boldsymbol{\mu\mu}} \gamma^A \tag{4.1a}$$

$$(\mu, \nu) = (0, j) : \qquad G_{0j} = i \sum_j a_j \gamma^j \tag{4.1b}$$

$$(\mu, \nu) = (i, j \neq i) : \qquad G_{ij} = \sum_n a_n \gamma^n \tag{4.1c}$$

gewählt werden.
Um eine geeignete Spinmetrik zu finden, welche dafür sorgt, dass sowohl der kinetische Term, als auch der Massenterm der Wirkung reell ist, müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein, welche in Abschnitt 3.3 genauer beschrieben sind:

$$h = h^\dagger, \tag{4.2}$$

sowie

$$\mu = \nu : \qquad [h, G_{\boldsymbol{\mu\mu}}] = 0 \tag{4.3a}$$

$$(\mu, \nu) = (0, j) : \qquad \{h, G_{0j}\} = 0 \tag{4.3b}$$

$$(\mu, \nu) = (i, j \neq i) : \qquad [h, G_{ij}] = 0. \tag{4.3c}$$

4.1 (1+1) Dimensionen

Für $d = 2$ ergeben sich $d_\mathrm{e} = 2$ unabhängige, anti-kommutierende Elemente um die Algebra (3.6) aufzuspannen.
Für G_{01} kann der Vorfaktor $a_1 = 1$ gewählt werden, da nach Gleichung (3.16)

$$\sum_{j=1}^{1}(ia_j)^2 = -a_1^2 = -\frac{2}{2(2-1)} \overset{(3.16b)}{=} -1 \tag{4.4}$$

gilt. Aufgrund der Symmetrie von $G_{\mu\nu}$ ist folglich auch G_{10} gefunden.
Für die Diagonalelemente kann mit $\boldsymbol{\mu} = 0$

$$\begin{gathered}\sum_{A=2}(a_{00}^A)^2 = (a_{00}^2)^2 \overset{(3.16a)}{=} 1 \\ \Rightarrow a_{00} = 1\end{gathered} \tag{4.5}$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit gewählt werden, sodass $G_{00} = \gamma^2$ ist. Da $G_{\mu\nu}$ spurlos sein soll, gilt

$$\begin{gathered}g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = G_{00} - G_{11} = 0 \\ \Rightarrow G_{00} = G_{11}.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Zusammengefasst ist eine mögliche Repräsentation der Algebra (3.6) gefunden mit

$$G_{01} = G_{10} = i\gamma^1 \tag{4.7a}$$

$$G_{00} = G_{11} = \gamma^2. \tag{4.7b}$$

Diese Darstellung entspricht der Wick-rotierten Version der nicht-relativistischen Algebra [9].
Die Spinmetrik kann als $h = \gamma^2$ gewählt werden. Es lässt sich zeigen, dass Gleichungen (4.2) und (4.3) erfüllt sind:

$$h^\dagger = (\gamma^2)^\dagger = \gamma^2 = h \tag{4.8a}$$

$$[h, G_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}}] = [\gamma^2, \gamma^2] = \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^2 = 0 \tag{4.8b}$$

$$\{h, G_{0j}\} = \{\gamma^2, i\gamma^1\} = i(\gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2) = 2i\delta^{21}\mathbb{1} = 0, \tag{4.8c}$$

wobei $\gamma^A = (\gamma^A)^\dagger$ bei Gleichung (4.8a) genutzt wird.
Es ist also eine Spinmetrik gefunden, welche für die Forminvarianz der Luttinger-Theorie in $d = 1 + 1$ Dimensionen sorgt.
Es kann somit festgestellt werden, dass die Spinmetrik, ähnlich wie in der Dirac-Theorie, in den Raum der $d_\mathrm{e} = 2$ Elemente der Abrikosov-Algebra hinein passt.

4.2 (2+1) Dimensionen

Analog zu Abschnitt 4.1 kann eine Repräsentation in $d = 3$ Dimensionen gefunden werden. Nach Gleichung (3.9) gibt es $d_\mathrm{e} = 5$ unabhängige, anti-kommutierende Elemente von $G_{\mu\nu}$. Für die Elemente G_{0j}, kann der Vorfaktor a_j wie folgt gewählt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1,2} (ia_j)^2 = - \sum_{j=1,2} a_j^2 &\overset{(3.16b)}{=} \frac{3}{4} \\ a_j &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Für G_{12} kann analog

$$\begin{aligned} \sum_{n=3} a_n^2 = a_3^2 &\overset{(3.16b)}{=} \frac{3}{4} \\ \Rightarrow a_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

gefunden werden.
Zur Bestimmung der Diagonalelemente wird zunächst betrachtet, dass $G_{\mu\nu}$ spurlos sein soll. Dafür wird der Ansatz $G_{00} = \gamma^4$ verwendet:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} &= G_{00} - G_{11} - G_{22} \\ &= \gamma^4 - (a_{11}^4 \gamma^4 + a_{11}^5 \gamma^5) - (a_{22}^4 \gamma^4 + a_{22}^5 \gamma^5) \\ &= \gamma^4 (1 - a_{11}^4 - a_{22}^4) - \gamma^5 (a_{11}^5 + a_{22}^5) = 0 \end{aligned} \tag{4.11a}$$

$$\Rightarrow (1 - a_{11}^4 - a_{22}^4) \overset{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad a_{11}^5 \overset{!}{=} -a_{22}^5. \tag{4.11b}$$

Somit folgt

$$a_{11}^4 = a_{22}^4 = \frac{1}{2}. \tag{4.12}$$

Mit Gleichung (3.16) kann a_{11}^5 und damit auch a_{22}^5 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{A=4,5} (a_{11}^A)^2 = (a_{11}^4)^2 + (a_{11}^5)^2 &= 1 \\ \overset{(4.12)}{=} \frac{1}{4} + (a_{11}^5)^2 &= 1 \\ \Rightarrow a_{11}^5 = \frac{\sqrt{3}}{2} &= -a_{22}^5. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Zusammengefasst ergeben sich die Algebra-erzeugenden Elemente zu

$$G_{0j} = i\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma^j \qquad j = 1, 2 \tag{4.14a}$$
$$G_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma^3 \tag{4.14b}$$
$$G_{00} = \gamma^4 \tag{4.14c}$$
$$G_{11} = \frac{1}{2}\gamma^4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma^5 \tag{4.14d}$$
$$G_{22} = \frac{1}{2}\gamma^4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma^5. \tag{4.14e}$$

Zur Überprüfung von G_{00}, G_{11} und G_{22} kann der Antikommutator

$$\{G_{\boldsymbol{\mu\mu}}, G_{\boldsymbol{\nu\nu}}\} = 2G_{\boldsymbol{\mu\mu}}G_{\boldsymbol{\nu\nu}} = 2a^A_{\boldsymbol{\mu\mu}}a^A_{\boldsymbol{\nu\nu}} = -\frac{2}{d-1}g_{\boldsymbol{\mu\mu}}g_{\boldsymbol{\nu\nu}} = -1 \tag{4.15}$$

verwendet werden. Exemplarisch folgt für G_{11} und G_{22}:

$$\{G_{11}, G_{22}\} = 2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -1 \overset{(4.15)}{=} -1. \tag{4.16}$$

Analog kann dies auch für alle anderen Diagonalelemente durchgeführt werden, wobei deutlich wird, dass diese Repräsentation alle Bedingungen erfüllt. Diese Darstellung entspricht wiederum einer Wick-rotierten Version der euklidischen Abrikosov-Algebra [9].
Es kann nun auch die Spinmetrik h in $d = 3$ bestimmt werden. Es fällt auf, dass diese nicht aus lediglich einer Dirac-Matrix bestehen kann, da damit entweder die Anti- oder die Kommutatorbedingung mit den Elementen von $G_{\mu\nu}$ nicht erfüllt wäre. Eine weitere Idee ist es, die Spinmetrik aus dem Produkt von γ^1 und γ^2 zu konstruieren, wobei schnell auffällt, dass dieses nicht hermitesch ist. Um dies zu garantieren, wird die imaginäre Einheit i an das Produkt multipliziert, sodass gezeigt werden kann, dass $h = i\gamma^1\gamma^2$ die Bedingungen (4.2) und (4.3) erfüllt:

$$h^\dagger = (i\gamma^1\gamma^2)^\dagger = -i(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger = -i\gamma^2\gamma^1 = i\gamma^1\gamma^2 = h \tag{4.17a}$$
$$[h, G_{\boldsymbol{\mu\mu}}] \propto [i\gamma^1\gamma^2, \gamma^A] = i\gamma^1\gamma^2\gamma^A - \gamma^A i\gamma^1\gamma^2 = i(\gamma^1\gamma^2\gamma^A - \gamma^1\gamma^2\gamma^A) = 0 \tag{4.17b}$$
$$\{h, G_{01}\} \propto \{i\gamma^1\gamma^2, \gamma^1\} = i(\gamma^1\gamma^2\gamma^1 + \gamma^1 i\gamma^1\gamma^2) = i(-\gamma^2 + \gamma^2) = 0 \tag{4.17c}$$
$$[h, G_{12}] \propto [i\gamma^1\gamma^2, \gamma^3] = i(\gamma^1\gamma^2\gamma^3 - \gamma^3 i\gamma^1\gamma^2) = i(\gamma^1\gamma^2\gamma^3 - \gamma^1\gamma^2\gamma^3) = 0, \tag{4.17d}$$

wobei $A = 4, 5$ ist und gleiche Rechnung von (4.17c) analog für G_{02} gilt.
Auch in $d = 3$ passt die Spinmetrik in einen durch die Abrikosov-Algebra aufgespannten Raum in irreduzibler Darstellung hinein. Aus der Konstruktion wird deutlich, dass h bis auf ein Vorzeichen eindeutig ist.

4.3 (3+1) Dimensionen

Mit $d = 4$ und $d_e = 9$ ergibt sich folgende Darstellung der Elemente von $G_{\mu\nu}$ [4]:

$$G_{0j} = \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^j \qquad j = 1, 2, 3 \tag{4.18a}$$

$$G_{12} = \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^4 \tag{4.18b}$$

$$G_{23} = \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^5 \tag{4.18c}$$

$$G_{31} = \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^6 \tag{4.18d}$$

$$G_{00} = \gamma^7 \tag{4.18e}$$

$$G_{11} = \frac{1}{3}\gamma^7 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\gamma^8 \tag{4.18f}$$

$$G_{22} = \frac{1}{3}\gamma^7 - \frac{\sqrt{2}}{3}\gamma^8 + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^9 \tag{4.18g}$$

$$G_{33} = \frac{1}{3}\gamma^7 - \frac{\sqrt{2}}{3}\gamma^8 - \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma^9. \tag{4.18h}$$

Erkennbar ist nun, dass nach Gleichung (3.10), $d_\gamma = 16$ ist. Wird nun eine geeignete Spinmetrik gesucht, fällt auf, dass $\{h, G_{0j}\} = 0$ nur erfüllt sein kann, wenn die Spinmetrik aus einem Produkt von γ-Matrizen aufgebaut wird, welches ungerade ist und nur $\gamma^4, ..., \gamma^9$ enthält, damit dieses mit $\gamma^1, ..., \gamma^3$ antikommutiert. Sobald jedoch eine der genannten Dirac-Matrizen nicht im Produkt vertreten ist, wird der Kommutator $[h, G_{ij}] = [h, G_{\boldsymbol{\mu\mu}}] = 0$ nicht erfüllt. Da $\gamma^4, ..., \gamma^9$ jedoch eine gerade Anzahl an Dirac-Matrizen ist, tritt ein Widerspruch auf und es wird deutlich, dass keine Spinmetrik in einer $d_\gamma = 16$-Darstellung gefunden werden kann.
Damit muss eine andere Repräsentation gefunden werden, wobei die Kleinste $d_\gamma = 32$ entspricht, was damit die irreduzible Darstellung der relativistischen Theorie in $d = 4$ Dimensionen darstellt. Damit ergibt sich sowohl γ^{10} als verwendbare Dirac-Matrix, als auch γ^{11}, da auch $d_e = 11$ in Gleichung (3.10) eingesetzt, $d_\gamma = 32$ liefert.
Es kann nun eine geeignete Spinmetrik mit

$$h = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^* \tag{4.19}$$

gefunden werden. Auch

$$\bar{h} = i\gamma^4\gamma^5\gamma^6\gamma^7\gamma^8\gamma^9\gamma^* \tag{4.20}$$

ist möglich, wobei $\gamma^* = \gamma^{10}, \gamma^{11}$ ist.

Exemplarisch kann für h mit $\gamma^* = \gamma^{10}$ auch hier gezeigt werden, dass alle Bedingungen (4.2) und (4.3) erfüllt sind:

$$h^\dagger = (\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10})^\dagger = \gamma^{10}\gamma^3\gamma^2\gamma^1 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10} = h \tag{4.21a}$$

$$\begin{aligned}[h, G_{\boldsymbol{\mu\mu}}] = [h, G_{ij}] &\propto [\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10}, \gamma^A] = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10}\gamma^A - \gamma^A\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10} \\ &= \gamma^A\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10} - \gamma^A\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10} = 0, \quad A = 4, ..., 9\end{aligned} \tag{4.21b}$$

$$\begin{aligned}\{h, G_{01}\} &\propto \{\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10}, \gamma^1\} = \gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10} + \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^{10}\gamma^1 \\ &= \gamma^2\gamma^3\gamma^{10} - \gamma^2\gamma^3\gamma^{10} = 0.\end{aligned} \tag{4.21c}$$

Gleichung (4.21c) gilt analog für G_{02} und G_{03}.
Jede Linearkombination von h und $\bar{h}$ erfüllt (4.2) und (4.3) ebenfalls mit $h' = \alpha h + \beta\bar{h}$, wobei $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ist, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ [23, 4].

4.4 (4+1) Dimensionen

Da $d_\mathrm{e} = 14$ ist, gibt es in $d = 5$ Dimensionen 14 unabhängige, anti-kommutierende Elemente von $G_{\mu\nu}$. Die Dimension der γ-Matrizen ergibt sich dann zu $d_\gamma = 128$.
Auch hier können die Vorfaktoren $a^A_{\mu\nu}$ berechnet werden, um eine mögliche Darstellung von $G_{\mu\nu}$ zu erhalten. Für G_{0j} gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1,2,3,4} (ia_j)^2 &\overset{(3.16b)}{=} -\frac{5}{8} \\ \Rightarrow a_j &= \sqrt{\frac{5}{8}}\end{aligned} \tag{4.22}$$

und analog für G_{ij}:

$$\begin{aligned}\sum_{n=5,...,10} (a_n)^2 &\overset{(3.16c)}{=} \frac{5}{8} \\ \Rightarrow a_n &= \sqrt{\frac{5}{8}}.\end{aligned} \tag{4.23}$$

G_{00} wird hier als γ^{11} gewählt. Da auch hier die Spur verschwinden soll, können folgende Bedingungen gefunden werden:

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = G_{00} - G_{11} - G_{22} - G_{33} - G_{44} \tag{4.24a}$$

$$\Rightarrow (1 - a^{11}_{11} - a^{11}_{22} - a^{11}_{33} - a^{11}_{44}) \overset{!}{=} 0 \tag{4.24b}$$

$$(a^{12}_{11} + a^{12}_{22} + a^{12}_{33} + a^{12}_{44}) \overset{!}{=} 0 \tag{4.24c}$$

$$(a^{13}_{11} + a^{13}_{22} + a^{13}_{33}) \overset{!}{=} 0 \tag{4.24d}$$

$$(a^{14}_{11} + a^{14}_{22}) \overset{!}{=} 0. \tag{4.24e}$$

Damit ist $a^{11}_{11} = a^{11}_{22} = a^{11}_{33} = a^{44}_{11} = \frac{1}{4}$. Mit der Normierungsbedingung (3.16a), folgt für G_{11}:

$$\begin{aligned}\sum_{A=11,12} (a^A_{11})^2 = (a^{11}_{11})^2 + (a^{12}_{11})^2 &= \frac{1}{16} + (a^{12}_{11})^2 \overset{(3.16a)}{=} 1 \\ \Rightarrow a^{12}_{11} &= \frac{\sqrt{15}}{4}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

Damit kann weiterhin

$$\begin{aligned} a^{12}_{22} + a^{12}_{33} + a^{12}_{44} &= -a^{12}_{11} \\ \Rightarrow a^{12}_{11} = a^{12}_{22} = a^{12}_{33} &= -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{12} \end{aligned} \tag{4.26}$$

gefunden werden, sodass für G_{22}

$$\begin{aligned} \sum_{A=11,12,13} (a^A_{22})^2 = (a^{11}_{22})^2 + (a^{12}_{22})^2 + (a^{13}_{22})^2 &= \frac{1}{16} + \frac{15}{144} + (a^{13}_{22})^2 = 1 \\ \Rightarrow a^{13}_{33} &= \sqrt{\frac{5}{6}} \end{aligned} \tag{4.27}$$

gilt. Analog wird für G_{33} und G_{44} vorgegangen, sodass die Elemente von $G_{\mu\nu}$ insgesamt

$$G_{0j} = i\sqrt{\frac{5}{8}}\gamma^j \qquad j = 1,2,3,4 \tag{4.28a}$$

$$G_{12} = \sqrt{\frac{5}{8}}\gamma^5 \quad G_{13} = \sqrt{\frac{5}{8}}\gamma^6 \quad G_{14} = \sqrt{\frac{5}{8}}\gamma^7 \tag{4.28b}$$

$$G_{23} = \sqrt{\frac{5}{8}}\gamma^8 \quad G_{24} = \sqrt{\frac{5}{8}}\gamma^9 \quad G_{34} = \sqrt{\frac{5}{8}}\gamma^{10} \tag{4.28c}$$

$$G_{00} = \gamma^{11} \tag{4.28d}$$

$$G_{11} = \frac{1}{4}\gamma^{11} + \frac{\sqrt{15}}{4}\gamma^{12} \tag{4.28e}$$

$$G_{22} = \frac{1}{4}\gamma^{11} - \frac{\sqrt{15}}{12}\gamma^{12} + \sqrt{\frac{5}{6}}\gamma^{13} \tag{4.28f}$$

$$G_{33} = \frac{1}{4}\gamma^{11} - \frac{\sqrt{15}}{12}\gamma^{12} - \frac{\sqrt{30}}{12}\gamma^{13} + \sqrt{\frac{5}{8}}\gamma^{14} \tag{4.28g}$$

$$G_{44} = \frac{1}{4}\gamma^{11} - \frac{\sqrt{15}}{12}\gamma^{12} - \frac{\sqrt{30}}{12}\gamma^{13} - \sqrt{\frac{5}{8}}\gamma^{14} \tag{4.28h}$$

sind. Auch hier kann die Probe mit $\{G_{\boldsymbol{\mu\mu}}, G_{\boldsymbol{\nu\nu}}\} = 2a^A_{\boldsymbol{\mu\mu}}a^A_{\boldsymbol{\nu\nu}} = -\frac{1}{2}g_{\boldsymbol{\mu\mu}}g_{\boldsymbol{\nu\nu}}$ durchgeführt werden, wobei sich zeigt, dass die gefundenen Elemente auch diese Bedingungen erfüllen.
Gleichungen (4.28a - 4.28h) repräsentieren erstmals eine explizite Darstellung der Abrikosov-Algebra in einer $d = 5$ dimensionalen Raumzeit auf Basis einer euklidischen Dirac-Algebra.
Als Spinmetrik kann das Produkt $h = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ gefunden werden. Hierbei sind alle Forderungen an die Spinmetrik erfüllt:

$$h^\dagger = (\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4)^\dagger = \gamma^4\gamma^3\gamma^2\gamma^1 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = h \tag{4.29a}$$

$$\begin{aligned} [h, G_{\boldsymbol{\mu\mu}}] = [h, G_{ij}] &\propto [\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \gamma^A] = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\gamma^A - \gamma^A\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 \\ &= \gamma^A\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 - \gamma^A\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = 0 \end{aligned} \tag{4.29b}$$

$$\begin{aligned} \{h, G_{01}\} &\propto \{\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \gamma^1\} = \gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 + \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4\gamma^1 \\ &= \gamma^2\gamma^3\gamma^4 - \gamma^2\gamma^3\gamma^4 = 0, \end{aligned} \tag{4.29c}$$

wobei $A = 5, ..., 14$ ist. $\{h, G_{0j}\}$ kann analog für $j = 2,3,4$ gezeigt werden. Ähnlich wie in $d = 3$, wird aus der Konstruktion deutlich, dass die Spinmetrik bis auf ein Vorzeichen eindeutig ist, sofern sich auf den durch $G_{\mu\nu}$ aufgespannten Raum beschränkt wird.

Die Matrix γ^{15}, welche ebenfalls in der $d_\gamma = 128$-dimensionalen euklidischen Dirac-Algebra enthalten ist, wird für die Spinmetrik nicht benötigt.

5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit konnten fundamentale Eigenschaften der relativistischen Luttinger-Theorie aufgezeigt werden. Insbesondere wurde der wichtige kinetische Term und die zugrundeliegende Abrikosov-Algebra in $d = 2, 3, 4, 5$ Raumzeit-Dimensionen explizit konstruiert.
Dafür wurden zunächst wichtige quantenfeldtheoretische Grundlagen näher betrachtet. Unter anderem wurden die Lorentztransformationen und damit die Lorentz-Gruppe erläutert und die Spinor-Felder eingeführt. Damit war es möglich, vorerst die Dirac-Theorie genauer zu betrachten, da viele Rechnungen und Methoden ähnlich auf den Luttinger-Formalismus angewendet werden können. Es wurde deutlich gemacht, dass die vorausgesetzte Lorentz- und Spin-Basen-Symmetrie wichtige Bedingungen an die Dirac-Matrizen und die Spinoren stellen. Besonders wichtig ist die Erkenntnis, dass erst dann ein lorentzinvariantes Skalarprodukt vorliegt, wenn ein Dirac-konjugierter Spinor $\bar{\psi} = \psi^\dagger h$ eingeführt wird, wobei h die Spinmetrik darstellt.
Die Spinmetrik wurde daraufhin näher erläutert, da diese Gegenstand der Berechnungen im Rahmen der Luttinger-Theorie sein wird. Es konnte festgestellt werden, dass h hermitesch sein muss, damit ein reeller Massenterm der Dirac-Wirkung vorhanden ist. Analog muss auch der kinetische Term reell sein, sodass sich Kommutator- und Antikommutator Relationen mit den Dirac-Matrizen ergaben.
Mit diesen Grundlagen konnte also die relativistische Luttinger-Theorie betrachtet werden. Dafür wurde die aus dem nicht-relativistischen Hamiltonian gefolgerte Abrikosov-Algebra (3.6) relativistisch verallgemeinert. Es konnte festgestellt werden, dass diese, analog zur Clifford-Algebra, invariant unter Lorentz- und Spin-Basen-Transformation ist. Folgend wurde die relativistische Wirkung der freien Theorie konstruiert. Es konnte gezeigt werden, dass auch diese, sowie die Bewegungsgleichung gleiche Symmetrien aufweisen, wenn $G_{\mu\nu}$ entsprechend transformiert. Dieser symmetrische Tensor konnte im Anschluss genauer untersucht und wesentliche Eigenschaften aufgezeigt werden. Mit Hilfe der Symmetrie, der Bedingung einer verschwindenden Spur und der Algebra, konnten mit dem Ansatz $G_{\mu\nu} = a^A_{\mu\nu}\gamma^A$, die Vorfaktoren für $d = 2, .., 5$ Dimensionen explizit bestimmt und somit die d_e unabhängigen, anti-kommutierenden Elemente von $G_{\mu\nu}$ konstruiert werden. Auch konnten hier, analog zur Dirac-Theorie, Kommutator und Antikommutator Relationen von $G_{\mu\nu}$ und der Spinmetrik gefunden werden. Letztlich konnte erkannt werden, dass die Spinmetrik in $d = 4$ die Parität der Spinoren ändert, auf welche diese wirkt, was eine wesentliche physikalische Bedeutung darstellt.
Ziel der Arbeit war es, die Spinmetrik in verschiedenen Dimensionen zu berechnen, da diese ein wesentliches zusätzliches Element der relativistischen Theorie darstellt, das nicht aus einer nicht-relativistischen euklidischen Theorie gefolgert werden kann. Die Spinmetrik definiert ein inneres Produkt auf dem Raum der Felder, mit dessen Hilfe reelle Wirkungen im Minkowski-Raum definiert werden können, was Voraussetzung für eine unitäre Zeitevolution ist. Es ergibt sich, dass es für $d = 2$ Dimensionen nur eine Dirac-Matrix braucht, um eine geeignete Spinmetrik zu konstruieren. Für $d = 3$ Dimensionen muss h ein geeignetes Produkt von Algebra-Elementen sein, damit h hermitesch bleibt. Besonders interessant ist der Fall in $d = 4$ Dimensionen. Hierbei ergibt sich, dass es keine Spinmetrik in einer $d_\gamma = 16$ dimensionalen Repräsentation geben kann, wobei d_γ=16 zwar die irreduzible Darstellung der Abrikosov-Algebra, jedoch nicht der relativistischen Luttinger-Theorie ist. Die kleinste mögliche irreduzible Darstellung ist somit

$d_\gamma = 32$. Damit ergeben sich zwei zusätzliche Matrizen: γ^{10} und γ^{11}. In $d = 5$ Dimensionen konnte dann wieder eine Spinmetrik in einer $d_\gamma = 128$ dimensionalen Darstellung gefunden werden. Insbesondere die Resultate für die $d = 5$ dimensionalen Raumzeit sind originäre Ergebnisse dieser Arbeit. Es kann erkannt werden, dass die Spinmetrik in den durch $G_{\mu\nu}$ aufgespannten Raum hinein passt und ein weiteres anti-kommutierendes Element γ^{15} übrig bleibt, was für den kinetischen Term nicht benötigt wird. Dieses kann genutzt werden, um Wechselwirkungsterme oder Symmetrien zu konstruieren. Damit zeigt der $d = 5$ dimensionale Fall Ähnlichkeiten zum $d = 4$ dimensionalen Fall der Dirac-Theorie, wobei γ^5 ein solches zusätzliches Element der Algebra darstellt.

Literatur

[1] Holger Gies. *Particles and Fields - Lecture Notes*. 2021.

[2] Owe Philipsen. *Quantenfeldtheorie und das Standardmodel der Teilchenphysik - Eine Einführung*. Springer Spektrum, 2018.

[3] Joaquin Mazdak Luttinger. „Quantum Theory of Cyclotron Resonance in Semiconductors: General Theory“. In: *Physical Review*. 102, 1030 (1955).

[4] Holger Gies; Philip Heinzel; Johannes Laufkötter; Marta Picciau. „Quantum field theories of relativistic Luttinger fermions“. In: *Physical Review*. D 110, 065001 (2024).

[5] Holger Gies; Marta Picciau. „Mean-field theory for self-interacting relativistic Luttinger fermions“. In: *Physical Review*. D 111, 085001 (2025).

[6] Shuichi Murakami; Naoto Nagaosa; Shou-Cheng Zhang. „SU(2) non-Abelian holonomy and dissipationless spin current in semiconductors“. In: *Physical Review*. B 69, 235206 (2004).

[7] Yong Baek Kim; Leon Balents Eun-Gook Moon; Cenke Xu. „Non-Fermi-Liquid and Topological States with Strong Spin-Orbit Coupling“. In: *Physical Review*. Lett. 111, 206401 (2013).

[8] Lucile Savary; Eun-Gook Moon; Leoan Balents. „New Type of Quantum Criticality in the Pyrochlore Iridates“. In: *Physical Review*. X 4, 041027 (2014).

[9] Lukas Janssen; Igor F. Herbut. „Nematic quantum criticality in three-dimensional Fermi system with quadratic band touching“. In: *Physical Review*. B 92, 045117 (2015).

[10] Igor F. Herbut; Lukas Janssen. „Topological Mott Insulator in Three-Dimensional Systems with Quadratic Band Touching“. In: *Physical Review*. Lett. 113, 106401 (2014).

[11] Lukas Janssen; Igor F. Herbut. „Phase diagram of electronic systems with quadratic Fermi nodes in $2 < d < 4 : 2 + \varepsilon$ expansion, $4 - \varepsilon$ expansion, and funcitonal renormalization group“. In: *Physical Review*. Lett. 113, 106401 (2014).

[12] Shouryya Ray; Matthias Vojta; Lukas Janssen. „Quantum critical behavior of two-dimensional Fermi systems with quadratic band touching“. In: *Physical Review*. B 98, 245128 (2018).

[13] Igor Boettcher; Igor F- Herbut. „Anisotropy induces non-Fermi-liquid behavior and nematic magnetic order in three-dimensional Luttinger semimetals“. In: *Physical Review*. B 95, 075149 (2017).

[14] Santanu Dey; Joseph Maciejko. „Quantum-critical electrodynamics of Luttinger fermions“. In: *Physical Review*. B 106, 035140 (2022).

[15] Robin Santra. *Einführung in den Lagrange- und Hamilton-Formalismus*. Springer Verlag, 2022.

[16] Holger Gies. *Private Kommunikation*. 2025.

[17] Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1985.

[18] William O. Staube. „A Child's Guide to Spinors“. In: *viXra* (2017).

[19] Laura Schiffhorst. „Klassische Lösungen der Bewegungsgleichung freier relativistischer Luttinger-Fermionen“. Bachelorarbeit. Friedrich-Schiller-Universität, 2024.

[20] Johannes Laufkötter. „Const ruction of Relativistic Field Theories with Luttinger Fermions“. Bachelorarbeit. Friedrich-Schiller-Universität, 2022.

[21] Holger Gies; Stefan Lippoldt. „Fermions in gravity with local spin-base invariance“. In: *Physical Review.* D 89, 064040 (2014).

[22] H.Arthur Weldon. „Fermions without vierbeins in curved space-time“. In: *Physical Review.* D 63, 104010 (2001).

[23] Philip Heinzel. „Renormalization Group Studies of relativistic Luttinger Fermions“. Masterarbeit. Friedrich-Schiller-Universität, 2023.

[24] Marta Picciau. *Relativistic Luttinger fermions as building blocks for UV complete QFTs.* 2023. URL: `https://agenda.infn.it/event/36842/contributions/204919/attachments/109387/155397/Picciau%20San%20Miniato.pdf`.

[25] Jürgen Berges; Razvan Gurau; Thimo Preis. „Asymptotic freedom in a strongly interacting scalar quantum field theoriy in four Euclidean dimensions“. In: *Physical Review.* D 108, 016019 (2023).

[26] Jürgen Berges; Razvan Gurau; Hannes Keppler; Thimo Preis. „Coupling renormalization flow in the strongly interacting regime of an asymptotically free quantum field theory in four dimension“. In: *Physical Review.* D 63, 104010 (2024).

[27] A.A.Abrikosov. „Calculation of critical indices for zero-gap semiconductors“. In: *J.Exp.Theor.Phys.* 66. Ser. (1974).

[28] A.A. Abrikosov; S.D. Beneslavskii. „Possible Existence of Substances Intermediate Between Metals and Dielectrics“. In: *J.Exp.Theor.Phys.* 699-708 (1971).

[29] Jonas Sauer. *Skript zur Vorlesung Analysis 1.* 2022.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit - bei einer Gruppenarbeit die von mir zu verantwortenden und entsprechend gekennzeichneten Teile - selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Ich trage die Verantwortung für die Qualität des Textes sowie die Auswahl aller Inhalte und habe sichergestellt, dass Informationen und Argumente mit geeigneten wissenschaftlichen Quellen belegt bzw. gestützt werden. Die aus fremden oder auch eigenen, älteren Quellen wörtlich oder sinngemäß übernommenen Textstellen, Gedankengänge, Konzepte, Grafiken etc. in meinen Ausführungen habe ich als solche eindeutig gekennzeichnet und mit vollständigen Verweisen auf die jeweilige Quelle versehen. Alle weiteren Inhalte dieser Arbeit ohne entsprechende Verweise stammen im urheberrechtlichen Sinn von mir.

Ich weiß, dass meine Eigenständigkeitserklärung sich auch auf nicht zitierfähige, generierende KI Anwendungen (nachfolgend „generierende KI") bezieht. Mir ist bewusst, dass die Verwendung von generierender KI unzulässig ist, sofern nicht deren Nutzung von der prüfenden Person ausdrücklich freigegeben wurde (Freigabeerklärung). Sofern eine Zulassung als Hilfsmittel erfolgt ist, versichere ich, dass ich mich generierender KI lediglich als Hilfsmittel bedient habe und in der vorliegenden Arbeit mein gestalterischer Einfluss deutlich überwiegt. Ich verantworte die Übernahme der von mir verwendeter maschinell generierter Passagen in meiner Arbeit vollumfänglich selbst. Für den Fall der Freigabe der Verwendung von generierender KI für die Erstellung der vorliegenden Arbeit wird eine Verwendung in einem gesonderten Anhang meiner Arbeit kenntlich gemacht. Dieser Anhang enthält eine Angabe oder eine detaillierte Dokumentation über die Verwendung generierender KI gemäß den Vorgaben in der Freigabeerklärung der prüfenden Person. Die Details zum Gebrauch generierender KI bei der Erstellung der vorliegenden Arbeit inklusive Art, Ziel und Umfang der Verwendung sowie die Art der Nachweispflicht habe ich der Freigabeerklärung der prüfenden Person entnommen.

Ich versichere des Weiteren, dass die vorliegende Arbeit bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt wurde oder in deutscher oder einer anderen Sprache als Veröffentlichung erschienen ist.

Mir ist bekannt, dass ein Verstoß gegen die vorbenannten Punkte prüfungsrechtliche Konsequenzen haben und insbesondere dazu führen kann, dass meine Prüfungsleistung als Täuschung und damit als mit „nicht bestanden" bewertet werden kann. Bei mehrfachem oder schwerwiegendem Täuschungsversuch kann ich befristet oder sogar dauerhaft von der Erbringung weiterer Prüfungsleistungen in meinem Studiengang ausgeschlossen werden.

Jena, der 30.09.2025 . . . .

Jessica Schrön