



seit 1558

Friedrich-Schiller-Universität Jena

Physikalisch-Astronomische Fakultät

Theoretisch-Physikalisches Institut

Masterarbeit

Fixpunkt-Struktur von verallgemeinerten Gross-Neveu-Modellen in drei
Raumzeitdimensionen

Friedrich Gehring,
geboren am 24. Oktober 1989 in Schlema

Korrigierte Fassung,
Jena, den 16. September 2013

Erstgutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Holger Gies

Zweitgutachter: Dr. rer. nat. Lukas Janssen

Gehring, Friedrich

Fixpunkt-Struktur von verallgemeinerten Gross-Neveu-Modellen in drei Raumzeitdimensionen

Masterarbeit, Physikalisch-Astronomische Fakultät

Friedrich-Schiller-Universität Jena, September 2013

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1. Einleitung | 5 |
| 2. Grundlagen | 8 |
| 2.1. Funktionale Renormierungsgruppe | 8 |
| 2.1.1. Effektive Wirkung | 8 |
| 2.1.2. Renormierungsgruppen-Flussgleichung | 9 |
| 2.2. Kritisches Verhalten und Fixpunkte | 13 |
| 2.2.1. Trunkierung der effektiven Wirkung | 14 |
| 2.2.2. Bestimmung der Betafunktionen | 15 |
| 2.2.3. Fixpunkte | 16 |
| 3. Das verallgemeinerte Gross-Neveu-Modell | 18 |
| 3.1. Herleitung aus Symmetrieprinzipien | 18 |
| 3.1.1. Klassifikation der Operatoren | 18 |
| 3.1.2. Zwei-Fermi-Terme | 21 |
| 3.1.3. Vier-Fermi-Terme | 23 |
| Terme mit Singulett-Flavorstruktur | 23 |
| Terme mit Dublett-Flavorstruktur | 24 |
| 3.2. Ansatz für die mittlere effektive Wirkung | 26 |
| 3.3. Berechnung der Flussgleichungen | 27 |
| 3.3.1. Allgemeine Flussgleichungen | 31 |
| 3.3.2. Spezialfall $N_f = 1$ | 31 |
| 3.4. Invariante Unterräume | 32 |
| 3.5. Untersuchung der Fixpunkte | 34 |
| 3.5.1. Grundlegende Eigenschaften | 34 |
| 3.5.2. Allgemeines Verhalten | 35 |
| 3.5.3. Fixpunkte in den invarianten Unterräumen | 36 |
| Unterraum g_S - g_P | 36 |
| Unterraum g_P - g_V (analog zum Unterraum g_P - g_T) | 38 |
| Unterraum g_S^D - g_V^D | 40 |
| 3.5.4. Untersuchung der Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung | 42 |
| 3.6. Untersuchung des Flusses | 46 |
| 3.6.1. Untersuchung des Flusses mit Startwerten auf einer Achse | 46 |
| 3.6.2. Singulettbasis | 46 |
| 3.6.3. Dublettbasis | 47 |
| 3.6.4. Untersuchung des Flusses beginnend vom Fixpunkt \mathcal{C}_V | 49 |
| 3.7. Untersuchung der Massenterme | 57 |
| 3.7.1. Mögliche Massenterme | 57 |
| 3.7.2. Bestimmung der Winkel | 58 |
| 3.7.3. Klassifikation der Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung | 59 |

| | |
|---|------------|
| 4. Allgemeine Formel für die Flussgleichung einer effektiven Wirkung mit Vier-Fermi-Termen | 62 |
| 4.1. Ansatz für die mittlere effektive Wirkung | 62 |
| 4.2. Projektor auf einen Vier-Fermi-Term | 63 |
| 4.3. Anwendung auf die Flussgleichung | 64 |
| 4.4. Allgemeine Formel für die Koeffizientenmatrizen | 65 |
| 5. Zusammenfassung | 67 |
| 6. Verbindung zu anderen Arbeiten und Ausblick | 68 |
| Anhang | 71 |
| A. Konventionen | 73 |
| A.1. Einheiten und Massendimension | 73 |
| A.2. Euklidische Raumzeit | 73 |
| A.3. Fouriertransformation, Deltafunktion und funktionale Ableitung | 73 |
| B. Dirac-Algebra | 75 |
| C. Fierztransformation | 76 |
| C.1. Vollständige Basis der Dirac-Algebra | 76 |
| C.2. Invariante Terme | 77 |
| D. Schwellwertfunktionen | 79 |
| E. Flussgleichung für die Wellenfunktionsrenormierung | 81 |
| F. Berechnung der Phasendiagramme | 83 |
| G. Parametrisierung der Achsen im Theorieraum | 85 |
| G.1. Parametrisierung in der Standardbasis | 85 |
| G.2. Parametrisierung in der Fierzbasis | 85 |
| H. Umsetzung der Vier-Fermi-Formel mit Mathematica | 87 |
| H.1. Initialisierung | 87 |
| H.2. Festlegung des Ansatzes und Berechnung der Projektionsmatrix | 88 |
| H.3. Berechnung der Koeffizientenmatrizen | 88 |
| H.4. Ausgabe der Flussgleichungen | 89 |
| Literaturverzeichnis | 93 |
| Danksagung | 99 |
| Selbstständigkeitserklärung | 101 |

1. Einleitung

Als Forscher bin ich tief beeindruckt durch die Ordnung und die Schönheit, die ich im Kosmos finde, sowie im Inneren der materiellen Dinge. Und als Beobachter der Natur kann ich den Gedanken nicht zurückweisen, dass hier eine höhere Ordnung der Dinge im Voraus existiert. Es ist hier eine Intelligenz auf einer höheren Ebene vorgegeben, jenseits der Existenz des Universums selbst.

Carlo Rubbia, Nobelpreisträger und ehemaliger Leiter des CERN [1]

Graphen ist ein vielversprechendes Material der aktuellen Forschung. Bei Graphen handelt es sich um eine spezielle Modifikation des Kohlenstoffs. Man bezeichnet damit eine monoatomare Schicht aus Kohlenstoff, wobei die Atome in Form eines sechseckigen Gitters angeordnet sind, das an eine Honigwabe erinnert.

Dieses Material wurde zum ersten Mal 1947 von P. R. Wallace theoretisch beschrieben [2]. Seinerzeit betrachtete er Graphen als Baustein für ein Modell von Graphit, das aus übereinandergestapelten Schichten von Graphen besteht.

Als wesentlich schwieriger erwies sich die experimentelle Herstellung dieses Materials. Diese gelang erst 2004 durch eine Gruppe um A. Geim und K. Novoselov mit einer überraschend einfachen Technik [3]. Die beiden Forscher erhielten für diese Entdeckung 2010 den Nobelpreis für Physik [4].

Seitdem es möglich ist Graphen herzustellen, wird an diesem Material sowohl auf experimenteller als auch auf theoretischer Seite intensiv geforscht. Zum aktuellen Stand der theoretischen Forschung sei auf den Übersichtsartikel [5] verwiesen.

Graphen zeigt einige bemerkenswerte Eigenschaften, die es für die Forschung wie für die Anwendung interessant machen. Seine Ladungsträgerbeweglichkeit ist 100-mal so hoch wie die von Silizium [6, 7]. Damit gibt es Anlass zur Hoffnung aus diesem Halbleitermaterial Transistoren mit sehr hoher Taktfrequenz bauen zu können. Bisher wurde bereits ein Transistor mit einer Taktfrequenz von 100 GHz entwickelt [8], Taktfrequenzen im Bereich von 500 bis 1000 GHz scheinen möglich [6].

Weiterhin ist Graphen das Material mit der höchsten bekannten Zugfestigkeit, welche etwa 125-mal so hoch wie die von Stahl ist [9, 4]. Das bietet die Möglichkeit der Anwendung in superharten Verbundwerkstoffen [10]. Auf Grund seiner geringen Dicke ist Graphen lichtdurchlässig und eignet sich daher z. B. für den Einsatz in „Touchscreens“ [4]. Wegen seiner Zweidimensionalität besitzt Graphen ein sehr hohes Oberfläche-zu-Masse-Verhältnis, weshalb es sich zum Detektieren chemischer Substanzen oder als Material für sogenannte Superkondensatoren eignet [4, 11].

Auch für die Spintronic wird Graphen als vielversprechendes Material angesehen. Da in Kohlenstoff die Spin-Bahn-Kopplung sowie der Kernspin sehr gering sind, scheint es in Verbindung mit der hohen Leitfähigkeit ein ideales Material zu sein, um zusammen mit dem Spin weitere Informationen zu transportieren [4, 12].

Es gibt weitere interessante Anwendungen wie Solarzellen oder Graphenoxid als Wasserfilter. Zweilagiges Graphen besitzt eine Bandlücke, die sich durch elektrische Felder durchstimmen lässt [13].

Viele der elektronischen Eigenschaften werden durch die außergewöhnliche Dispersionsrelation der Elektronen in Graphen bestimmt: Das Valenz- und das Leitungsband von Graphen berühren

sich im Impulsraum an den sechs Eckpunkten der Brillouin-Zone. Diese Punkte bezeichnet man als K-Punkte oder Dirac-Punkte, von denen nur zwei voneinander unabhängig sind. Die Dispersionsrelation in der Nähe dieser Punkte ist linear, die Elektronen befinden sich in sogenannten Dirac-Kegeln, wie in Abbildung 1.1 gezeigt. Demzufolge lassen sie sich als relativistische, masselose

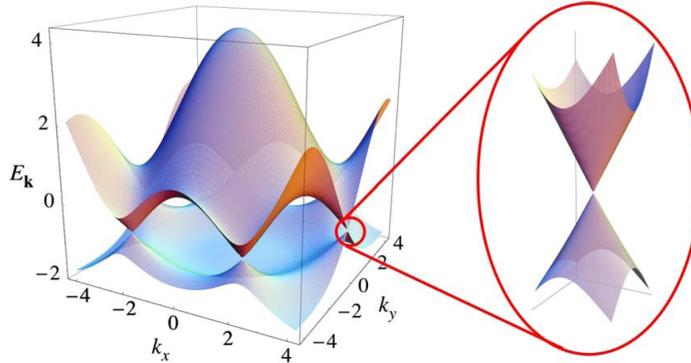


Abbildung 1.1.: Dispersionsrelation von Graphen: Valenz- und Leitungsband berühren sich an den sechs Dirac-Punkten. Die lineare Dispersionsrelation in der Nähe dieser Punkte ist vergrößert gezeigt. Quelle: [5].

se Fermionen beschreiben. Ihre Geschwindigkeit ist die Fermigeschwindigkeit, welche etwa $\frac{1}{300}$ der Lichtgeschwindigkeit beträgt [5].

Damit wird Graphen insbesondere zu einem System, in dem sich Effekte der relativistischen Quantenmechanik untersuchen lassen, ohne dazu riesige Beschleuniger zu benötigen. Man kann damit z. B. einen anomalen Quanten-Hall-Effekt, sowie das Klein-Paradoxon [14] beobachten [5, 10]. Bei letzterem erhält man eine Situation, bei der nahezu vollständige Transmission durch eine Potentialbarriere auftritt.

Nichtsdestotrotz bleibt die theoretische Beschreibung von Graphen eine Herausforderung, die Gegenstand aktueller Forschung ist. Insbesondere interessiert man sich für Phasenübergänge, bei denen man Graphen beispielsweise zwischen dem leitenden und dem nichtleitenden Zustand schalten kann, sogenannte Halbleiter-Isolator-Quantenphasenübergänge [15, 16]. Solche Phasenübergänge sind für den potentiellen Einsatz in Transistoren oder anderen elektronischen Schaltelementen interessant [17].

Wie auch in den Quellen [18, 19, 15, 20, 21, 22] sollen in dieser Arbeit die elektronischen Anregungen von Graphen mit Hilfe einer (2+1)-dimensionalen relativistischen Quantenfeldtheorie beschrieben werden. Die effektive Feinstrukturkonstante α für die Fermigeschwindigkeit $v_F = \frac{c}{300}$ liegt in der Größenordnung von 1 [19], so dass es sich um ein stark gekoppeltes System handelt. Damit ergibt sich die Möglichkeit, dass sich ein Kondensat aus Exzitonen bildet. Diese erzeugen eine Bandlücke am Dirac-Punkt, wodurch man einen Mott-Isolator erhält [19, 15, 20].

Aus der Sichtweise der Quantenfeldtheorie formuliert man dieses Phänomen so: Durch die Bildung eines chiralen Kondensats wird eine globale chirale Symmetrie spontan gebrochen, so dass man einen Grundzustand erhält, der diese Symmetrie nicht mehr realisiert.

Dieses Phänomen wurde im Rahmen des (2+1)-dimensionalen Thirring-Modells [23] in der Arbeit [20] mit einer chiralen $U(2N_f)$ -Symmetrie bereits ausführlich betrachtet. Dabei steht N_f für die Anzahl der Fermionen und $U(N)$ bezeichnet die unitäre Gruppe über einem Hilbertraum der Dimension N . Der Artikel [24] nennt ebenfalls ein Modell für Graphen mit chiraler $U(2N_f)$ -Symmetrie, deren spontaner Bruch eine Bandlücke im Spektrum der Quasiteilchen erzeugt.

In dieser Arbeit soll nun der allgemeinere Fall einer $U(N_f) \otimes U(N_f)$ -symmetrischen Theorie untersucht werden, in der die $U(2N_f)$ -Symmetrie als Spezialfall enthalten ist. Da diese Theorie aus

dem Gross-Neveu-Modell [25] hergeleitet wird, soll sie als verallgemeinertes Gross-Neveu-Modell bezeichnet werden.

Das Modell wird auf rein fermionischem Niveau betrachtet; detailliertere Untersuchungen mit Hilfe der Methode der Bosonisierung wurden zeitgleich von meiner Kollegin Julia Borchardt für einen Spezialfall dieses Modells durchgeführt, deren Arbeit „RG flows of 3d chiral fermion systems with collective degrees of freedom“ in Kürze zur Verfügung stehen wird.

Die Vergrößerung der Symmetrie bietet einen besseren Überblick über den Theorieraum des Modells und damit neue Einsichten in dessen kritisches Verhalten. So gelang es im Rahmen dieser Arbeit, Veränderungen im Verhalten der Fixpunkte festzustellen, die erst in diesem Modell sichtbar werden.

In Kapitel 2 werden zunächst die mathematischen Grundlagen diskutiert. Danach wird in Abschnitt 3.1 das verallgemeinerte Gross-Neveu-Modell aus allgemeinen Symmetrieprinzipien abgeleitet. Ausgehend davon werden dann in Abschnitt 3.3 die zugehörigen Flussgleichungen der Vier-Fermi-Kopplungskonstanten aufgestellt. Die folgenden Abschnitte widmen sich der Untersuchung des korrespondierenden Theorieraums, insbesondere dessen Fixpunkt-Struktur (Abschnitt 3.5). Dabei wird ein Schwerpunkt auf die Fixpunkte mit einer relevanten Richtung gelegt (Abschnitt 3.5.4). In Kapitel 4 schließt die Arbeit mit einer verallgemeinerten Rechenvorschrift zum Aufstellen der Flussgleichungen für beliebige Vier-Fermi-Terme.

2. Grundlagen

Im Folgenden sollen ausschließlich fermionische Theorien im Rahmen der Funktionalintegralquantisierung besprochen werden.

Des Weiteren wird die Diskussion auf euklidische Feldtheorien beschränkt¹. Diese erhält man aus den Theorien im Minkowski-Raum durch eine Wick-Rotation². Wir wollen voraussetzen, dass man anschließend die Minkowski-wertigen Korrelationsfunktionen durch analytische Fortsetzung der euklidischen erhalten kann.

Die verwendeten Herleitungen beziehen sich, soweit nicht anders angegeben, auf die Quellen [20, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33].

2.1. Funktionale Renormierungsgruppe

2.1.1. Effektive Wirkung

Alle physikalisch relevanten Informationen einer Quantenfeldtheorie erhält man aus den *Korrelationsfunktionen*. Um diese in der Sprache der Funktionalintegralquantisierung berechnen zu können, definiert man das erzeugende Funktional für rein fermionische Theorien

$$Z[\eta, \bar{\eta}] := \int_{\Lambda} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S[\psi, \bar{\psi}] + \int d^d x [\bar{\eta}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)\eta(x)]}. \quad (2.1)$$

$\bar{\psi}$ und ψ sind die fermionischen Spinor-Felder, die in der euklidischen Feldtheorie als unabhängige Feldvariablen betrachtet werden, η bzw. $\bar{\eta}$ sind die zugehörigen Quellen. Beide Felder sind Grassmann-wertig, erhalten also ein negatives Vorzeichen bei Vertauschung.

Wir wollen annehmen, dass das Funktionalintegral $\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}$ durch einen *UV-Cutoff* Λ reguliert ist, was durch den Index Λ am Integral gekennzeichnet wird.

Die Korrelationsfunktionen erhält man mittels folgender Vorschrift (nach [29]):

$$\langle \bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n) \psi(y_1) \dots \psi(y_n) \rangle = \frac{1}{Z[0]} \prod_{i=1}^n \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \eta(x_i)} \prod_{j=1}^n \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\eta}(y_j)} Z[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}. \quad (2.2)$$

Auf Grund der Grassmann-Eigenschaften der beteiligten Felder muss für eine Funktionalableitung stets angegeben werden, ob sie von links oder rechts wirkt, was durch darübergestellte Pfeile gekennzeichnet wird.

Das *Schwingerfunktional*, das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Korrelationsfunktionen, ist wie folgt definiert:

$$W[\eta, \bar{\eta}] := \ln Z[\eta, \bar{\eta}]. \quad (2.3)$$

Durch eine Legendre-Transformation erhält man die *effektive Wirkung*

$$\Gamma[\bar{\Psi}, \Psi] := \sup_{\eta, \bar{\eta}} \left(\int d^d x [\bar{\eta}(x)\Psi(x) - \bar{\Psi}(x)\eta(x)] - W[\eta, \bar{\eta}] \right). \quad (2.4)$$

¹s. Anhang A.2

²s. z. B. [26]

Die effektive Wirkung (2.4) ist das erzeugende Funktional der vollen Vertizes bzw., was gleichbedeutend ist, der ein-Teilchen-irreduziblen (1PI) Korrelationsfunktionen [29]. Für gegebene $\bar{\Psi}$ und Ψ sind die Quellen $\eta = \eta_{\text{sup}}$ bzw. $\bar{\eta} = \bar{\eta}_{\text{sup}}$, für die in Gleichung (2.4) das Supremum angenommen wird, die zugehörigen konjugierten Variablen. Die Felder $\bar{\Psi}$ und Ψ beschreiben somit die Felderwartungswerte in Anwesenheit der konjugierten Quellen $\bar{\eta}$ und η :

$$\Psi(x) := \langle \psi(x) \rangle_{\eta, \bar{\eta}} = \frac{\overrightarrow{\delta} W}{\delta \bar{\eta}(x)}, \quad \bar{\Psi}(x) := \langle \bar{\psi}(x) \rangle_{\eta, \bar{\eta}} = \frac{\overrightarrow{\delta} W}{\delta \eta(x)}. \quad (2.5)$$

Obige Formeln lassen sich etwas kompakter schreiben, indem man die Felder wie folgt zusammenfasst³ [32]:

$$\theta(p) = \begin{pmatrix} \psi(p) \\ \bar{\psi}^T(-p) \end{pmatrix}, \quad J(p) = \begin{pmatrix} \bar{\eta}^T(-p) \\ \eta(p) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\theta^T(-p) = (\psi^T(-p), \bar{\psi}(p)), \quad J^T(-p) = (\bar{\eta}(p), \eta^T(-p)). \quad (2.7)$$

Führt man weiterhin das verallgemeinerte Skalarprodukt

$$\int J^T \theta := \int d^d x J^T(x) \theta(x) = \int d^d x [\bar{\eta}(x) \psi(x) - \bar{\psi}(x) \eta(x)] \quad (2.8)$$

ein, so schreibt sich die effektive Wirkung

$$\Gamma[\phi] = \sup_J \left(\int J^T \phi - W[J] \right) \quad \text{mit } \phi(x) := \langle \theta(x) \rangle_J = \frac{\overrightarrow{\delta} W[J]}{\delta J^T(x)}. \quad (2.9)$$

Bildet man die Ableitung der effektiven Wirkung bei der Quelle $J = J_{\text{sup}}$, für die das Supremum angenommen wird, erhält man die Quantenbewegungsgleichung:

$$\frac{\overrightarrow{\delta} \Gamma[\phi]}{\delta \phi^T(x)} = \int d^d y \left[\frac{\overrightarrow{\delta} J^T(y)}{\delta \phi^T(x)} \phi(y) - \frac{\overrightarrow{\delta} J^T(y)}{\delta \phi^T(x)} \underbrace{\frac{\overrightarrow{\delta} W[J]}{\delta J^T(y)}}_{=\phi(y)} - \frac{\overrightarrow{\delta} \phi^T(y)}{\delta \phi^T(x)} J(y) \right] = -J(x). \quad (2.10)$$

Auf Grund der Grassman-Natur der Felder erhält man ein zusätzliches Minuszeichen gegenüber dem skalaren Fall (vgl. [27]). Damit kann man nun folgende wichtige Identität ableiten:

$$\begin{aligned} \int d^d z \left[\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \phi^T(x)} \Gamma[\phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \phi(z)} \cdot \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J^T(z)} W[J] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta J(y)} \right] &\stackrel{(2.9, 2.10)}{=} \int d^d z \left[-\frac{\delta J(x)}{\delta \phi(z)} \cdot \frac{\delta \phi(z)}{\delta J(y)} \right] \\ &= -\frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = -\delta^{(d)}(x - y). \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.1.2. Renormierungsgruppen-Flussgleichung

Die Renormierungsgruppe beschreibt Transformationen von einer Längenskala zu einer anderen. Sie stellt eine konzeptionelle Verbindung zwischen der Quantenfeldtheorie und der statistischen Physik dar. Im Folgenden soll der Wilsonsche Zugang zur Renormierungsgruppe dargestellt werden [34, 35, 36].

³Hier kann man prinzipiell auch weitere Felder ergänzen, wie z. B. ein Skalarfeld φ oder Eichfelder.

In der Quantenfeldtheorie spielen Fluktuationen des Systems eine entscheidende Rolle. Um eine Theorie zu lösen, integriert man üblicherweise über alle Fluktuationen. So erhält man ein Ergebnis, das alle quantenfeldtheoretischen Effekte beinhaltet. Nun können diese Fluktuationen auf verschiedenen Längenskalen bzw., was äquivalent ist, mit verschiedenen Impulsen auftreten.

Die Idee von Wilson basiert nun darauf, nicht alle Fluktuationen auf einmal auszuintegrieren, sondern stattdessen Impulsschale für Impulsschale. Dabei beginnt man mit der (klassischen) mikroskopischen Wirkung S bei einer UV-Cutoff-Skala $k = \Lambda$. Ausgehend davon integriert man schrittweise die Fluktuationen aus bis zum Impuls $k = 0$ und erreicht dort die volle effektive (Quanten-)Wirkung Γ .

Jede Integration über eine Impulsschale der Dicke dk stellt einen infinitesimalen Renormierungsgruppenschritt dar. Dazwischen erhält man jeweils eine *mittlere effektive Wirkung* Γ_k , die von der Impulsskala k abhängt und die kontinuierlich von S nach Γ interpoliert. Sie enthält alle Fluktuationen mit Impulsen $k \lesssim |p| \leq \Lambda$ und soll folgenden Bedingungen genügen:

$$\lim_{k \rightarrow \Lambda} \Gamma_k = S, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k = \Gamma. \quad (2.12)$$

Die Entwicklung von Γ_k wird durch eine sogenannte Renormierungsgruppen-Flussgleichung beschrieben. Hier soll die Wetterich-Gleichung verwendet werden, die einen nicht-störungstheoretischen Zugang zur funktionalen Renormierungsgruppe liefert [37]. Dazu soll zunächst ein k -abhängiges IR-reguliertes erzeugendes Funktional definiert werden:

$$Z_k[J] \equiv e^{W_k[J]} := \int_{\Lambda} \mathcal{D}\theta \, e^{-S[\theta] - \Delta S_k[\theta] + \int J^T \theta}. \quad (2.13)$$

Den Erwartungswert eines beliebigen Operators $A(\theta)$ in Anwesenheit der Quelle J berechnet man dann wie folgt:

$$\langle A(\theta) \rangle_J = \frac{1}{Z_k[J]} \int_{\Lambda} \mathcal{D}\theta \, A(\theta) e^{-S[\theta] - \Delta S_k[\theta] + \int J^T \theta}. \quad (2.14)$$

Die mittlere effektive Wirkung geht durch eine modifizierte Legendre-Transformation aus dem Schwingerfunktional W_k hervor:

$$\Gamma_k[\phi] = \sup_J \left(\int J^T \phi - W_k[J] \right) - \Delta S_k[\phi] \quad \text{mit } \phi(x) := \langle \theta(x) \rangle_J = \frac{\vec{\delta} W_k[J]}{\delta J^T(x)}. \quad (2.15)$$

Wir wollen annehmen, dass das Feld ϕ unabhängig von der Skala k ist, was auch im Weiteren der Fall sein wird. Daraus folgt, dass die Quelle J im Allgemeinen k -abhängig sein wird.

Die Definitionen wurden jeweils um den Regulatorterm

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \phi^T(-p) R_k(p) \phi(p) \quad (2.16)$$

ergänzt. Dieser enthält den *Regulator* R_k , der im fermionischen Fall folgende Matrixstruktur aufweist:

$$R_k(p) = \begin{pmatrix} 0 & -R_{\psi,k}^T(-p) \\ R_{\psi,k}(p) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Für den Regulator sollen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\lim_{\frac{k^2}{p^2} \rightarrow 0} R_k(p) = 0, \quad (2.18)$$

$$\lim_{k \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} R_k(p) \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

$$\lim_{\frac{p^2}{k^2} \rightarrow 0} R_k(p) > 0. \quad (2.20)$$

Die erste Bedingung (2.18) besagt, dass der Regulator im Infraroten verschwindet und man somit für $k \rightarrow 0$ die volle effektive Wirkung Γ erhält. Die zweite Bedingung (2.19) stellt sicher, dass man im Ultravioletten ($k \rightarrow \infty$) die mikroskopische Wirkung S erhält, wie sich mit Hilfe einer Sattelpunktsnäherung zeigen lässt [30]. Die letzte Bedingung (2.20) sorgt dafür, dass der Regulatorterm tatsächlich im IR regularisiert. Er wirkt dort wie ein zusätzlicher effektiver Massenterm und verhindert damit für masselose Theorien das Auftreten von Infrarotdivergenzen.

Mit Hilfe der Fouriertransformation⁴ lässt sich der Regulatorterm auch wie folgt schreiben:

$$\Delta S_k[\phi] = \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \phi^T(x) R_k(x, y) \phi(y) \quad (2.21)$$

$$\text{mit } R(x, y) := R_k(x - y) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} R_k(p) e^{ip(x-y)}. \quad (2.22)$$

Zur Untersuchung des Verhaltens der mittleren effektiven Wirkung Γ_k in Abhängigkeit von der Skala k betrachtet man üblicherweise deren Änderung mit der sogenannten *Renormierungsgruppenzeit*

$$t := \ln \frac{k}{\Lambda}, \quad \Rightarrow \partial_t = k \frac{d}{dk} \quad (2.23)$$

und die zugehörige Skalenableitung ∂_t . Betrachtet man zunächst deren Wirkung auf das Schwingerfunktional W_k , so erhält man bei fester Quelle J :

$$\begin{aligned} \partial_t W_k[J] \Big|_J &= \frac{\partial_t Z_k[J]}{Z_k[J]} \stackrel{(2.13)}{=} \frac{1}{Z_k[J]} \int_{\Lambda} \mathcal{D}\theta (-\partial_t \Delta S_k[\theta]) e^{-S[\theta] - \Delta S_k[\theta] + \int J^T \theta} \\ &\stackrel{(2.14)}{=} - \langle \partial_t \Delta S_k[\theta] \rangle \stackrel{(2.21)}{=} - \frac{1}{2} \left\langle \int d^d x \int d^d y \theta^T(x) \partial_t R_k(x, y) \theta(y) \right\rangle \\ &= - \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \left[(\partial_t R_k(x, y))_{ij} \langle -\theta_j(y) \theta_i^T(x) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Indizes i und j der in der Gleichung enthaltenen Matrizen bezeichnen alle vorkommenden Indizes, sowohl die der Feldtypen, wie in Gleichung (2.17), die Lorentzindizes der Dirac-Spinoren, sowie ggf. auftretende Flavorindizes.

Der *volle, verbundene Propagator* zur Skala k ist wie folgt definiert [33]:

$$\begin{aligned} G_k(x, y) &:= \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J^T(x)} W_k[J] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta J(y)} \\ &= \frac{1}{Z_k[J]} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J^T(x)} Z_k[J] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta J(y)} - \frac{1}{Z_k[J]} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J^T(x)} Z_k[J] \cdot Z_k[J] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta J(y)} \frac{1}{Z_k[J]} \\ &\stackrel{(2.13), (2.14)}{=} \langle \theta(x) (-\theta^T(y)) \rangle - \langle \theta(x) \rangle \langle -\theta^T(y) \rangle \\ &\stackrel{(2.15)}{=} - \langle \theta(x) \theta^T(y) \rangle + \phi(x) \phi^T(y). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Setzt man diese Beziehung in Gleichung (2.24) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \partial_t W_k[J] \Big|_J &= - \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \left[(\partial_t R_k(x, y))_{ij} (G_k(y, x))_{ji} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \underbrace{(\partial_t R_k(x, y))_{ij} \phi_j(y) \phi_i^T(x)}_{= -\phi^T(x) \partial_t R_k(x, y) \phi(y)} \\ &\stackrel{(2.21)}{=} - \frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y \text{Tr} [\partial_t R_k(x, y) G_k(y, x)] - \partial_t \Delta S_k[\phi]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

⁴s. Anhang A.3

Die Spur läuft über alle auftretenden Indizes, die die Feld-, Flavor- oder Lorentzstruktur bezeichnen.

Weiterhin gelte folgende Definition für den matrixwertigen Operator der $(n+m)$ -Punkt-Funktion [28]:

$$\Gamma_k^{(n,m)}[\phi] := \overbrace{\frac{\vec{\delta}}{\delta\phi^\Gamma} \cdots \frac{\vec{\delta}}{\delta\phi^\Gamma}}^{n \text{ mal}} \Gamma_k[\phi] \overbrace{\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi} \cdots \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi}}^{m \text{ mal}}. \quad (2.27)$$

Damit erhält man insbesondere für die (1+1)-Punkt-Funktion im Ortsraum die folgende Beziehung, wenn man sie für die Quelle $J = J_{\text{sup}}$ auswertet⁵, ähnlich wie in Gleichung (2.10):

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(1,1)}[\phi](x, y) &:= \frac{\vec{\delta}}{\delta\phi^\Gamma(x)} \Gamma[\phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi(y)} \\ &\stackrel{(2.15)}{=} -\frac{\delta J(x)}{\delta\phi(y)} - \frac{\vec{\delta}}{\delta\phi^\Gamma(x)} \Delta S_k[\phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta\phi(y)} - R_k(x, y). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Eigenschaft $R_k^\Gamma(x-y) = -R_k(y-x)$ ausgenutzt, die aus der Definition (2.17) und Gleichung (2.22) folgt.

Analog zu Gleichung (2.11) kann man nun ableiten:

$$\begin{aligned} -\delta^{(d)}(x-y) &= -\frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = \int d^d z \left[-\frac{\delta J(x)}{\delta\phi(z)} \cdot \frac{\delta\phi(z)}{\delta J(y)} \right] \\ &\stackrel{(2.15), (2.28)}{=} \int d^d z \left[\frac{\vec{\delta}}{\delta\phi^\Gamma(x)} \Gamma[\phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi(z)} + R_k(x, z) \right] \frac{\vec{\delta}}{\delta J^\Gamma(z)} W_k[J] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta J(y)} \\ &\stackrel{(2.25)}{=} \int d^d z \left[\Gamma_k^{(1,1)}[\phi] + R_k \right](x, z) \cdot G_k(z, y). \end{aligned} \quad (2.29)$$

In Operatorschreibweise lautet diese Beziehung⁶:

$$-\mathbb{1} = \left(\Gamma_k^{(1,1)}[\phi] + R_k \right) G_k. \quad (2.30)$$

D. h. der inverse Operator zum Propagator G_k ist die Summe $-(\Gamma_k^{(1,1)}[\phi] + R_k)$. Damit erhält man schließlich die Flussgleichung für Γ_k , die *Wetterich-Gleichung* [37], indem man die mittlere effektive Wirkung (2.15) an der Stelle⁵ $J = J_{\text{sup}}$ für festes ϕ nach der Renormierungsgruppenzeit t ableitet:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\phi] &= \int (\partial_t J^\Gamma) \phi - \int d^d x \frac{\partial J^\Gamma(x)}{\partial t} \underbrace{\frac{\vec{\delta} W_k[J]}{\delta J^\Gamma(x)}}_{=\phi(x)} - \partial_t W_k[J] \Big|_J - \partial_t \Delta S_k[\phi] \\ &= -\partial_t W_k[J] \Big|_J - \partial_t \Delta S_k[\phi] \\ &\stackrel{(2.26)}{=} \frac{1}{2} \int_p \text{Tr} [\partial_t R_k(p) G_k(p)] \\ &\stackrel{(2.30)}{=} \boxed{\frac{1}{2} \text{STr} \left[\partial_t R_k \cdot \left(\Gamma_k^{(1,1)}[\phi] + R_k \right)^{-1} \right]}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

⁵ J_{sup} bezeichnet die Quelle, für die in Gleichung (2.15) das Supremum angenommen wird.

⁶ Das Minuszeichen ist der Grassmann-Natur der fermionischen Felder geschuldet und tritt für skalare Felder nicht auf.

Im letzten Schritt wurde der Operator „STr“, die sogenannte „Super“-Spur, eingeführt [38]. Er berücksichtigt ein zusätzliches Minuszeichen für die fermionischen Felder und steht für die Spurbildung im Feld-, Flavor- und Impulsraum.

Der Regulator R_k erfüllt zwei Funktionen: Zum einen liefert er auf Grund der Eigenschaft (2.20) für $p^2 \ll k^2$ einen zusätzlichen Massenterm im inversen Propagator $-(\Gamma_k^{(1,1)}[\phi] + R_k)^{-1}$. Damit schirmt er mögliche Infrarotdivergenzen masseloser Theorien ab, da in ihnen $\Gamma_k^{(1,1)}$ für verschwindende Impulse p verschwinden kann und somit der inverse Propagator ohne den Regulator divergieren würde.

Zum anderen wird die UV-Regularisierung durch den Ausdruck $\partial_t R_k(p^2)$ im Zähler erreicht. Nach den Bedingungen (2.18, 2.19) liegt dessen überwiegender Träger auf einer ausgeschmierten Impulsschale nahe $p^2 \simeq k^2$. Damit realisiert dieser Term die Wilsonsche Idee des Ausintegrierens der Fluktuationen Impulsschale für Impulsschale. Beide Eigenschaften erkennt man in Abbildung 2.1.

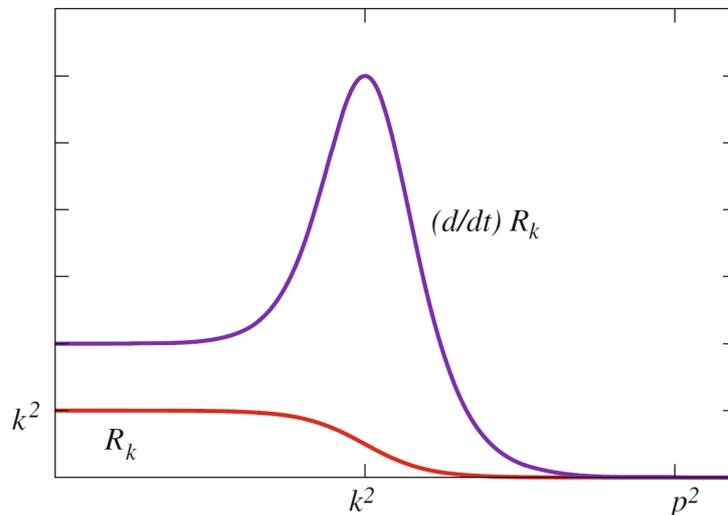


Abbildung 2.1.: Qualitative Darstellung einer möglichen Regulatorfunktion $R_k(p^2)$ und dem ihrer Skalenableitung $\partial_t R_k(p^2)$. Quelle: [27].

Die Lösung der Flussgleichung ergibt eine Renormierungsgruppen-Trajektorie im *Raum aller Theorien*. Damit bezeichnet man den Raum aller Wirkungsfunktionale, der durch alle möglichen Operatoren aufgespannt wird, die unter einer bestimmten Symmetrie invariant sind. Die beiden Enden der Theorie sind durch die Randbedingungen (2.12) gegeben.

2.2. Kritisches Verhalten und Fixpunkte

Der dargestellte Formalismus der funktionellen Renormierungsgruppe eignet sich insbesondere zur Betrachtung kritischer Phänomene, wie Phasenübergängen oder chiraler Symmetriebrechung. Die Methoden zu deren Untersuchung sollen im Folgenden kurz beschrieben werden. Insbesondere ist man häufig an den Fixpunkten der Flussgleichung interessiert. Diese stellen skaleninvariante Theorien dar und bestimmen das kritische Verhalten.

2.2.1. Trunkierung der effektiven Wirkung

Die Wetterich-Gleichung lässt sich nur für sehr spezielle Fälle exakt lösen⁷. In allen anderen Fällen bietet sie dennoch die Möglichkeit Näherungsverfahren jenseits der Störungstheorie anzuwenden, indem man geeignete Trunkierungen für die effektive Wirkung verwendet.

Im Allgemeinen werden im Laufe des Renormierungsgruppenflusses all diejenigen Feldfunktionen in der effektiven Wirkung erzeugt, die mit der Symmetrie der zu Grunde liegenden Theorie verträglich sind. Typischerweise werden damit unendlich viele Terme in der effektiven Wirkung auftreten. Um dennoch effektiv rechnen zu können, wählt man aus dieser Menge einige Terme aus und vernachlässigt die anderen, was man als *Trunkierung* bezeichnet.

In dieser Arbeit soll die sogenannte *Operatorentwicklung* verwendet werden. Dabei konstruiert man die effektive Wirkung aus Operatoren mit zunehmender Massendimension⁸. Beschränkt man sich insbesondere auf Ableitungsoperatoren, spricht man von der *Ableitungsentwicklung*. Bei dieser ergänzt man die effektive Wirkung schrittweise durch Terme, die höhere Ableitungen der Felder enthalten. Auf dem Niveau der ersten Ordnung in den Ableitungen schreibt sich dieser Ansatz für eine rein fermionische Theorie (nach [27]):

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] = \int d^d x \left[V_k(\bar{\psi}, \psi) + Z_k(\bar{\psi}, \psi) \bar{\psi} i \gamma_\mu \partial_\mu \psi + O(\partial^2) \right]. \quad (2.32)$$

Dabei bezeichnet V_k ein effektives Potential, Z_k die sogenannte *Wellenfunktionsrenormierung* und es wurde der kanonische kinetische Term für fermionische Theorien $\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial_\mu \psi$ eingeführt⁹, der die Gammamatrizen γ_μ enthält, die in Abschnitt 3.1.1 ausführlich diskutiert werden.

Entwickelt man zusätzlich das effektive Potential V_k nach Operatoren mit zunehmender Massendimension, so entspricht das einer Entwicklung nach Feldfunktionen mit einer wachsenden Anzahl an Feldern. Hier soll eine Trunkierung gewählt werden, die Terme berücksichtigt, die bis zu vier fermionische Felder enthalten, sogenannte *Vier-Fermi-Terme*. Damit die Wirkung ein Skalar ist, muss jeder Dirac-Spinor ψ mit dem dirac-konjugierten Spinor $\bar{\psi}$ kontrahiert werden, so dass nur Terme mit einer geraden Anzahl fermionischer Felder auftreten können.

Durch die Vernachlässigung höherer Terme in der effektiven Wirkung tritt zwangsläufig ein Fehler auf. In Abbildung 2.2 ist dargestellt, dass die trunkierte Wirkung nicht mehr die korrekte effektive Wirkung $\Gamma_{k=0}$ im Infraroten erreicht. Weiterhin ist sie anders als die volle effektive Wirkung abhängig vom gewählten Regulator.

Es bleibt ein schwieriges Problem, diese Fehler zu bestimmen oder zu minimieren. Eine Möglichkeit bietet das Studium der Ergebnisse beim Hinzunehmen höherer Terme in die Trunkierung. Wenn die gewählte Trunkierung geeignet ist, sollte der Einfluss höherer Terme gering sein. Eine geringfügige Änderung bei Hinzunahme bestimmter Terme bietet jedoch keine Garantie, dass es nicht andere Terme mit starkem Einfluss geben kann.

Eine andere Möglichkeit die Verlässlichkeit einer Trunkierung zu überprüfen, bildet die Regulatorabhängigkeit. Während die volle effektive Wirkung bei $k = 0$ unabhängig vom gewählten Regulator ist, gilt das im Allgemeinen nicht mehr für die trunkierte. Physikalische Messwerte sollten jedoch unabhängig vom gewählten Regulator sein. Sollten die Ergebnisse sich stark mit der Wahl des Regulators verändern, weist das auf eine ungeeignete Trunkierung hin. Die Stärke bei einer Veränderung des Regulators kann als Maß für die Güte einer Trunkierung verwendet werden.

Ebenso lässt sich die Regulatorabhängigkeit ausnutzen, um den Renormierungsgruppenfluss einer gegebenen Theorie zu optimieren. Der Fluss ist optimiert, wenn die Ergebnisse der physikalischen

⁷s. z. B. [39, 40].

⁸s. Anhang A.1.

⁹Es gelte die Einsteinsche Summenkonvention, dass über gleichnamige Indizes summiert wird.

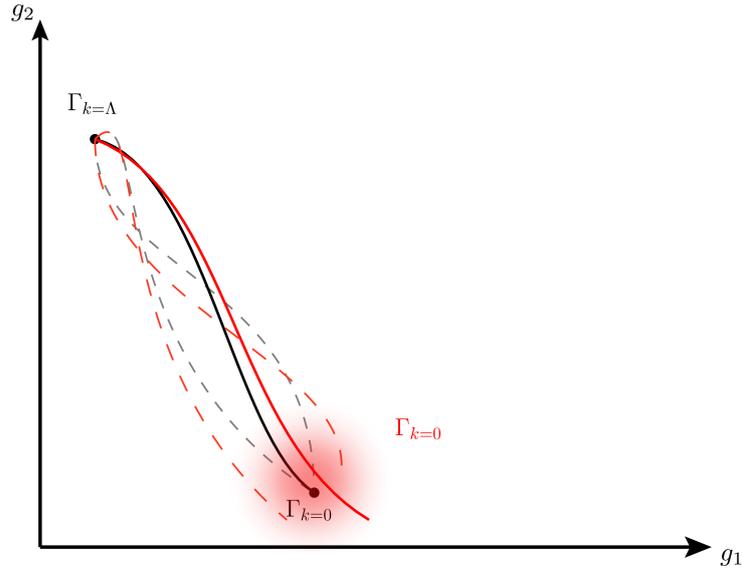


Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung der Renormierungsgruppentrajektorie im Raum der beiden Kopplungen g_1 und g_2 . Schwarz ist der Fluss der vollen mittleren effektiven Wirkung, rot der der trunkierten dargestellt. Die gestrichelten Linien entsprechen Flüssen mit anderen Regulatoren. Quelle: [32].

Messwerte möglichst nahe an den tatsächlichen Werten liegen. Die zugehörige Trajektorie im Raum aller Theorien beschreibt den kürzesten Weg zwischen der UV-Theorie bei $k = \Lambda$ und der vollen Theorie bei $k = 0$ [41, 42].

2.2.2. Bestimmung der Betafunktionen

Für einen trunkierten Ansatz erhält man in der Wirkung vor jedem Term Kopplungskoeffizienten g_i , die in einem Vektor \mathbf{g} zusammengefasst werden können. Wird der Theorieraum durch die Feldoperatoren aufgespannt, so kann man die Kopplungskoeffizienten als die zugehörigen Koordinaten betrachten.

Die Änderung der Kopplungskoeffizienten mit der Renormierungsgruppenzeit wird durch die sogenannten *Betafunktionen* oder Gell-Mann-Low-Gleichungen beschrieben:

$$\partial_t \mathbf{g} =: \boldsymbol{\beta}(\mathbf{g}). \quad (2.33)$$

Bei der Untersuchung einer bestimmten Theorie ist man häufig an der konkreten Form der Betafunktionen interessiert, aus denen man dann auch die Fixpunkte extrahieren kann. Zu deren Bestimmung schreibt man die Wetterich-Gleichung (2.31) geeigneterweise in der folgenden Form:

$$\partial_t \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \ln \left(\Gamma_k^{(1,1)}[\phi] + R_k \right) \right]. \quad (2.34)$$

Die Ableitung $\tilde{\partial}_t$ beschreibt eine Skalenableitung, die nur auf die k -Abhängigkeit der Regulatorfunktion wirkt. Formal lässt sie sich schreiben als

$$\tilde{\partial}_t := \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\partial R_k(p)}{\partial t} \frac{\delta}{\delta R_k(p)}. \quad (2.35)$$

Es erweist sich als technisch günstig den inversen, regularisierten Propagator $(\Gamma_k^{(1,1)}[\phi] + R_k)$ in die feldunabhängige *Propagatormatrix* \mathcal{P}_k , die auch den Regulatorterm enthält, und die feldabhängige *Fluktuationsmatrix* \mathcal{F}_k zu zerlegen:

$$\Gamma_k^{(1,1)}[\phi] + R_k = \mathcal{P}_k + \mathcal{F}_k. \quad (2.36)$$

Damit kann man die Wetterich-Gleichung in der Form (2.34) gemäß folgender Vorschrift nach Potenzen des feldabhängigen Anteils entwickeln:

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k &= \frac{1}{2} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \ln (\mathcal{P}_k + \mathcal{F}_k) \right] = \frac{1}{2} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \ln \mathcal{P}_k \right] - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \left(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k \right)^n \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \ln \mathcal{P}_k \right] + \frac{1}{2} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \left(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k \right) \right] - \frac{1}{4} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \left(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k \right)^2 \right] \pm \dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

Mit Hilfe dieser Entwicklung lässt sich die rechte Seite der Wetterich-Gleichung als Summe von Potenzen der Feldoperatoren ausdrücken. Setzt man auf der linken Seite den Ansatz ein, so liefert ein Koeffizientenvergleich die Betafunktionen (2.33). Alternativ kann man auch geeignete Projektionsvorschriften verwenden (vgl. Abschnitt 4.2).

2.2.3. Fixpunkte

Die *Fixpunkte* einer Theorie sind dadurch definiert, dass sich die Theorie an diesem Punkt im Theorieraum unter einer Renormierungsgruppentransformation nicht ändert. D. h. die zugehörige Theorie ist skaleninvariant.

Im Rahmen einer gewählten Trunkierung kann ein Fixpunkt stets durch einen Vektor \mathbf{g}^* der Kopplungskoeffizienten dargestellt werden. Ein Fixpunkt ist dadurch gekennzeichnet, dass dort die Betafunktionen verschwinden:

$$\beta(\mathbf{g}^*) = \partial_t \mathbf{g} \Big|_{\mathbf{g}^*} = 0. \quad (2.38)$$

Linearisiert man die Betafunktion in der Nähe des Fixpunkts, so erhält man die *Stabilitätsmatrix* B_{ij} :

$$\beta_i := \partial_t g_i = B_{ij} (g_j - g_j^*) + O((g_j - g_j^*)^2), \quad \text{mit } B_{ij} := \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{\mathbf{g}=\mathbf{g}^*}. \quad (2.39)$$

Diagonalisiert man die Stabilitätsmatrix, so ergeben die negativen Eigenwerte die sogenannten *kritischen Exponenten* Θ^I :

$$B_{ij} V_j^I = -\Theta^I V_i^I. \quad (2.40)$$

Die zugehörigen (Rechts-)Eigenvektoren V^I kennzeichnen die Richtungen des Renormierungsgruppenflusses (*RG-Richtungen*) in der Nähe des Fixpunkts.

Die kritischen Exponenten erlauben nun eine Charakterisierung der physikalischen Parameter der entsprechenden skaleninvarianten Theorie. Für die Kopplungen erhält man folgende Lösung der Flussgleichungen im linearisierten Fixpunktgebiet [31]:

$$g_i = g_i^* + \sum_I C^I V_i^I \left(\frac{k_0}{k} \right)^{\Theta^I}. \quad (2.41)$$

Die Integrationskonstanten C^I definieren die Anfangsbedingungen bei der Referenzskala k_0 . Anhand des Vorzeichens des kritischen Exponenten klassifiziert man die zugehörige Richtung:

- irrelevante Richtungen, $\Theta^I < 0$: Die Richtung ist im Infraroten ($k \rightarrow 0$) unterdrückt und spielt damit für die makroskopische Physik keine Rolle¹⁰.
- relevante Richtungen, $\Theta^I > 0$: Die Richtung wächst zum Infraroten hin an und bestimmt somit die makroskopische Physik.
- marginale Richtung, $\Theta^I = 0$: Das konkrete Verhalten dieser Richtung wird durch Terme höherer Ordnung in der Entwicklung um den Fixpunkt bestimmt.

Die Anzahl der relevanten Richtungen legt die Anzahl der physikalischen Parameter fest, die bestimmt werden müssen, um eine makroskopische Theorie eindeutig zu beschreiben. Eine Theorie hat Vorhersagekraft, wenn diese Anzahl endlich ist.

Die konkrete Lage der Fixpunkte hängt vom Renormierungsschema, also dem gewählten Cutoff und dem Regulator, ab und kann somit keine physikalische Information enthalten. Die Existenz eines Fixpunkts und seine kritischen Exponenten sind jedoch davon unabhängig.

Man unterscheidet drei Arten von Fixpunkten [32]:

- Stabile Fixpunkte: Es sind alle $\Theta^I < 0$. Theorien, die im Einzugsbereich dieses Fixpunkts starten, nähern sich diesem in Richtung Infrarot immer mehr an, er ist IR-attraktiv. Dazu gehört insbesondere der Gauß'sche Fixpunkt $\mathbf{g}^* = 0$, der mit \mathcal{O} bezeichnet werden soll. Er kennzeichnet die freie Theorie ohne Wechselwirkung.
- Instabile Fixpunkte: Es sind alle $\Theta^I > 0$. Theorien, die im Einzugsbereich dieses Fixpunkts starten, entfernen sich in Richtung IR immer weiter von ihm, er ist IR-repulsiv.
- Generische Fixpunkte: Es gibt sowohl Richtungen mit $\Theta^I > 0$ als auch $\Theta^I < 0$. Besonders interessant sind die Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung, da die zugehörigen Theorien durch die Festlegung eines einzigen physikalischen Parameters eindeutig charakterisiert sind. Generische Fixpunkte bestimmen auch die Phasengrenzen zwischen den Bereichen mit unterschiedlichem Infrarotverhalten.

Eine solche Grenze bezeichnet man als *Separatrix*, sie stellt im Allgemeinen eine Hyperfläche dar, deren Dimension geringer ist als die des Theorieraums. Sie verläuft von einem generischen Fixpunkt zu einem anderen oder ins Unendliche. Auf den beiden Seiten erhält man ein unterschiedliches Attraktivitätsverhalten, der Fluss entfernt sich in unterschiedliche Richtungen von der Separatrix.

¹⁰Kleine Impulse k sind über die Fouriertransformation mit großen Längenskalen verknüpft.

3. Das verallgemeinerte Gross-Neveu-Modell

Den Ausgangspunkt der Untersuchungen stellt das Gross-Neveu-Modell [25, 31] in $d = 2 + 1$ Raumzeitdimensionen dar. Es beschreibt die Quantenfeldtheorie von N_f Flavours relativistischer, masseloser Fermionen. Das Modell ist in drei Raumzeitdimensionen nicht eindeutig definiert. Es gibt eine Darstellung mit zweikomponentigen Weyl-Spinoren [43, 44], sowie eine mit vierkomponentigen Dirac-Spinoren [31], beide werden als „Gross-Neveu-Modell“ bezeichnet. In Anlehnung an [15] sollen hier vierkomponentige Spinoren verwendet werden, die die Felder beschreiben, die zu den elektronischen Moden in der Nähe der beiden unterschiedlichen Dirac-Punkte gehören. Folglich soll auf die Darstellung in [31] Bezug genommen werden. Die zugehörige euklidische Wirkung lautet:

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int d^d x \left\{ \sum_{a=1}^{N_f} \bar{\psi}^a i \not{\partial} \psi^a + \frac{\bar{g}}{2N_f} \sum_{a,b=1}^{N_f} (\bar{\psi}^a \psi^a) (\bar{\psi}^b \psi^b) \right\} =: \int_x \left\{ \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{\bar{g}}{2N_f} (\bar{\psi} \psi)^2 \right\}. \quad (3.1)$$

Es ist $\not{\partial} := \gamma_\mu \partial_\mu$ mit den unten definierten Gammamatrizen, \bar{g} bezeichnet eine dimensionsbehaftete Kopplungskonstante. Die oberen lateinischen Indizes a, b, c, \dots nummerieren den Flavor der Fermionen von 1 bis N_f . Es wurde die Abkürzung $\int_x := \int d^d x$ für das Integral über die d -dimensionale Euklidische Raumzeit verwendet. Im Folgenden soll die Einsteinsche Summenkonvention verwendet werden, d. h., bei doppelt vorkommenden Indizes ist damit implizit die zugehörige Summe gemeint.

3.1. Herleitung aus Symmetrieprinzipien

Gesucht ist die maximale Erweiterung dieser Wirkung, die die gleichen Symmetrien erfüllt, wie die Wirkung des Gross-Neveu-Modells. Alle Terme mit der gleichen Symmetrie können prinzipiell durch den Renormierungsgruppenfluss erzeugt werden. Insbesondere wollen wir ein Modell konstruieren, das eine $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie erfüllt.

3.1.1. Klassifikation der Operatoren

Um die zugehörigen Operatoren zu klassifizieren, führen wir zunächst eine Darstellung der *Dirac-Algebra*¹

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1}_{d_\gamma} \quad (3.2)$$

ein². Dabei ist $\mathbb{1}_{d_\gamma}$ die $d_\gamma \times d_\gamma$ Einheitsmatrix, wobei d_γ die Dimension der Dirac-Algebra bezeichnet. In unserem Fall mit vierkomponentigen Dirac-Spinoren ist $d_\gamma = 4$ und wir wählen eine reduzible 4×4 Darstellung für die Gammamatrizen, konkret die sog. chirale Darstellung:

$$\gamma_\mu = \sigma_2 \otimes \sigma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_\mu \\ i\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

$\{\sigma_\mu\}_{\mu=1,2,3}$ bezeichnen die Paulimatrizen, die die Eigenschaft $\sigma_\mu \sigma_\nu = \delta_{\mu\nu} \sigma_0 + i\epsilon_{\mu\nu\tau} \sigma_\tau$ erfüllen, wobei $\mu, \nu, \tau = 1, 2, 3$ und $\sigma_0 = \mathbb{1}_2$ die 2×2 -Einheitsmatrix ist. Die unteren griechischen Lorenzindizes

¹s. auch Anhang B

²Mit der geschweiften Klammer wird der Antikommutator bezeichnet $\{A, B\} := AB + BA$.

μ, ν, \dots bezeichnen die Raumzeitdimension, 1 und 2 stehen für die räumlichen, 3 für die zeitliche Komponente.

Es gibt zwei weitere 4×4 Matrizen, die mit allen γ_μ und untereinander antikommutieren:

$$\gamma_4 = \sigma_1 \otimes \sigma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \sigma_3 \otimes \sigma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Zusammen mit³

$$\mathbb{1}_4, \quad \gamma_{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \text{ für } \mu < \nu, \quad i\gamma_\mu \gamma_4, \quad i\gamma_\mu \gamma_5, \quad \gamma_{45} := i\gamma_4 \gamma_5 \quad (3.5)$$

bilden diese 16 Matrizen eine vollständige Orthogonalbasis der 4×4 Dirac-Algebra:

$$(\gamma_A)_{A=1, \dots, 16} = (\mathbb{1}_4, \gamma_\mu, \gamma_4, \gamma_{\mu\nu}, i\gamma_\mu \gamma_4, i\gamma_\mu \gamma_5, \gamma_{45}, \gamma_5). \quad (3.6)$$

Denn mit den Spuridentitäten (B.5 ... B.12) lässt sich leicht zeigen:

$$\langle \gamma_A | \gamma_B \rangle := \text{Tr}(\gamma_A \gamma_B) = 4\delta_{AB}. \quad (3.7)$$

d. h., die einzelnen Basiselemente sind paarweise orthogonal und damit linear unabhängig. Da die Dimension der 4×4 Dirac-Algebra gerade 16 ist, bilden diese 16 linear unabhängigen Elemente folglich eine vollständige Basis mit der Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (\gamma_A)_{ab} (\gamma_A)_{cd} = \delta_{ad} \delta_{bc}. \quad (3.8)$$

Damit lassen sich alle Wechselwirkungsterme, die aus vierkomponentigen Dirac-Spinoren ψ und $\bar{\psi}$ aufgebaut werden, aus Bausteinen der Form $\bar{\psi} \gamma_A \psi$ zusammensetzen. Ein solcher Baustein beschreibt die Wechselwirkung zwischen zwei Fermionen, Wechselwirkungsterme für vier Fermionen erhält man aus dem Produkt zweier solcher Terme, Wechselwirkungen mit mehr Fermionen entsprechend aus höheren Produkten.

Das Analogon zur Hermitezität im Minkowskiraum ist im Euklidischen die Osterwalder-Schrader-Positivität [45]. Wir fordern, dass unsere Theorie diese erfülle und verlangen dazu, dass die Wirkung unter einer verallgemeinerten komplexen Konjugation invariant bleibt. Dabei ist der Dirac-konjugierte Spinor wie folgt definiert: $\bar{\psi} := -i\psi^\dagger \gamma_3$. Gleichzeitig ist damit eine Vorzeichenumkehr der Zeitkoordinate x_3 verbunden (vgl. Anhang A.2).⁴

Zur Zerlegung der Spinoren in einen rechts- und einen linkshändigen Anteil definieren wir folgende *chirale Projektoren*:

$$P_L := \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma_{45}), \quad P_R := \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 - \gamma_{45}). \quad (3.9)$$

Diese Projektoren wurden gewählt, da die Matrix γ_{45} laut [15] für Graphen eine besondere Rolle spielt, indem sie den Generator der Translationssymmetrie auf dem Honigwabengitter darstellt. Die Projektoren erfüllen die Eigenschaften:

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad (3.10)$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad (3.11)$$

$$P_L + P_R = \mathbb{1}_4, \quad (3.12)$$

$$P_L^\dagger = P_L, \quad P_R^\dagger = P_R. \quad (3.13)$$

³Die eckige Klammer bezeichnet den Kommutator: $[A, B] := AB - BA$.

⁴Eine ausführliche Diskussion der Konventionen findet man in [46].

Mit diesen lassen sich die Dirac-Spinoren ψ in links- und rechtshändige *Weyl-Spinoren* ψ_L und ψ_R zerlegen:

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_L, \quad (3.14)$$

$$\psi_R = P_R \psi, \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_R. \quad (3.15)$$

Wir fordern eine chirale $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie, die zugehörigen Feldtransformationen wirken unabhängig auf den links- bzw. rechtshändigen Anteil:

$$U_L(N_f) : \quad \psi_L^a \mapsto \psi_L^{a'} = U_L^{ab} \psi_L^b, \quad \bar{\psi}_L^a \mapsto \bar{\psi}_L^{a'} = \bar{\psi}_L^b (U_L^\dagger)^{ba}, \quad U_L \in U(N_f), \quad (3.16)$$

$$U_R(N_f) : \quad \psi_R^a \mapsto \psi_R^{a'} = U_R^{ab} \psi_R^b, \quad \bar{\psi}_R^a \mapsto \bar{\psi}_R^{a'} = \bar{\psi}_R^b (U_R^\dagger)^{ba}, \quad U_R \in U(N_f). \quad (3.17)$$

Bei den Matrizen U_L und U_R handelt es sich um unitäre Matrizen, es gilt also:

$$(U_L^\dagger)^{ba} U_L^{ac} = (U_R^\dagger)^{ba} U_R^{ac} = \delta^{bc}. \quad (3.18)$$

Als Spezialfall erhält man die kontinuierliche chirale Symmetrie $U^{45}(1)$:

$$\psi^a \mapsto \psi^{a'} = e^{i\alpha\gamma_{45}} \psi^a, \quad (3.19)$$

$$\bar{\psi}^a \mapsto \bar{\psi}^{a'} = \bar{\psi}^a e^{-i\alpha\gamma_{45}}. \quad (3.20)$$

Diese Vektortransformation erhält man für $U_L^{ab} = e^{i\alpha\delta^{ab}}$ und $U_R^{ab} = e^{-i\alpha\delta^{ab}}$.

Die Basiselemente aus (3.6) sollen nun gemäß ihrer Vertauschbarkeit mit γ_{45} klassifiziert werden. Zum einen gibt es Basiselemente, die mit γ_{45} kommutieren. Sie sollen in der Menge O_K zusammengefasst werden, so dass gilt: $[O_K, \gamma_{45}] = 0$. Diese Beziehung wird von folgenden Operatoren erfüllt:

$$O_K = \{\mathbb{1}_4, \gamma_\mu, \gamma_{\mu\nu}, \gamma_{45}\}. \quad (3.21)$$

Zum anderen gibt es Basiselemente, die mit γ_{45} antikommutieren. Diese sollen unter der Menge O_{AK} zusammengefasst werden, $\{O_{AK}, \gamma_{45}\} = 0$, und sind wie folgt gegeben:

$$O_{AK} = \{\gamma_4, i\gamma_\mu\gamma_4, i\gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5\}. \quad (3.22)$$

Da γ_{45} mit jeder einzelnen Gammamatrix entweder vertauscht oder antivertauscht, gilt das auch für Produkte der Matrizen, so dass sich alle Basiselemente in genau eine dieser beiden Mengen einordnen lassen.

Da sich die Projektoren P_L und P_R nur im Vorzeichen von γ_{45} unterscheiden gelten folgende Identitäten:

$$O_K P_{L/R} = P_{L/R} O_K, \quad (3.23)$$

$$O_{AK} P_{L/R} = P_{R/L} O_{AK}. \quad (3.24)$$

Auf Grund der Orthogonalität der Projektoren (3.11) folgt:

$$\bar{\psi}_L O_K \psi_R = \bar{\psi}_L O_K \psi_R = 0, \quad (3.25)$$

$$\bar{\psi}_L O_{AK} \psi_L = \bar{\psi}_R O_{AK} \psi_R = 0. \quad (3.26)$$

Weiterhin gilt

$$\gamma_{45} P_{L/R} = \pm P_{L/R}. \quad (3.27)$$

Das motiviert folgende Definition

$$\text{sgn}(Y) := \begin{cases} +1, & \text{für } Y = L, \\ -1, & \text{für } Y = R, \end{cases} \quad (3.28)$$

und impliziert

$$\gamma_{45}\psi_Y = \text{sgn}(Y)\psi_Y, \quad (3.29)$$

$$\gamma_4\psi_Y = i \text{sgn}(Y)\gamma_5\psi_Y, \quad (3.30)$$

$$\gamma_5\psi_Y = -i \text{sgn}(Y)\gamma_4\psi_Y. \quad (3.31)$$

Weiterhin gilt

$$\gamma_{45}\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}\gamma_{45} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha}\gamma_\alpha, \quad (3.32)$$

wie man durch Fallunterscheidung zeigen kann. Das führt zur Identität

$$\gamma_{\mu\nu}\psi_Y = -\text{sgn}(Y)\epsilon_{\mu\nu\alpha}\gamma_\alpha\psi_Y. \quad (3.33)$$

Aus den Gleichungen (3.25, 3.26) folgt mit (3.12):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^a O_K \psi^a &= (\bar{\psi}_L^a + \bar{\psi}_R^a) O_K (\psi_L^a + \psi_R^a) \\ &= \bar{\psi}_L^a O_K \psi_L^a + \bar{\psi}_R^a O_K \psi_R^a, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^a O_{AK} \psi^a &= (\bar{\psi}_L^a + \bar{\psi}_R^a) O_{AK} (\psi_L^a + \psi_R^a) \\ &= \bar{\psi}_L^a O_{AK} \psi_R^a + \bar{\psi}_R^a O_{AK} \psi_L^a. \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.1.2. Zwei-Fermi-Terme

Für das Verhalten der einzelnen Summanden aus den Gleichungen (3.34, 3.35) unter einer $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformation (3.16, 3.17) erhält man:

$$\bar{\psi}_L^{a'} O_K \psi_L^{a'} = \bar{\psi}_L^b (U_L^\dagger)^{ba} O_K U_L^{ac} \psi_L^c = \bar{\psi}_L^a O_K \psi_L^a. \quad (3.36)$$

Der Operator O_K wirkt nur auf die Spinorindizes, jedoch nicht auf die Flavorindizes a, b, c , so dass die komplexe Zahl U_L^{ac} an ihm vorbeigezogen werden kann. Mit Gleichung (3.18) erhält man dann obige Transformationseigenschaft. Diese besagt, dass der Term $\bar{\psi}_L^a O_K \psi_L^a$ invariant unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformationen ist. Analog gilt das für den Term $\bar{\psi}_R^a O_K \psi_R^a$. Damit ist insbesondere auch der kinetische Term

$$\bar{\psi}^a i \not{\partial} \psi^a = \bar{\psi}_L^a i \gamma_\mu \partial_\mu \psi_L^a + \bar{\psi}_R^a i \gamma_\mu \partial_\mu \psi_R^a \quad (3.37)$$

invariant, da es sich um eine globale Symmetrie mit konstanten Matrizen U_L und U_R handelt, die folglich mit der Ableitung ∂_μ vertauschen.

Die Terme, die einen der Operatoren O_{AK} enthalten, transformieren wie folgt:

$$\bar{\psi}_L^{a'} O_{AK} \psi_R^{a'} = \bar{\psi}_L^b (U_L^\dagger)^{ba} O_{AK} U_R^{ac} \psi_R^c = \bar{\psi}_L^b (U_L^\dagger)^{ba} U_R^{ac} O_{AK} \psi_R^c. \quad (3.38)$$

Im Allgemeinen gilt $(U_L^\dagger)^{ba} U_R^{ac} \neq \delta^{bc}$, da U_L und U_R voneinander unabhängige Transformationsmatrizen sind. Demzufolge sind die Terme $\bar{\psi}_L^a O_{AK} \psi_R^a$ und analog $\bar{\psi}_R^a O_{AK} \psi_L^a$ nicht invariant unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformationen.

Auf dem Niveau der Weyl-Spinoren verbleiben also die Zwei-Fermi-Terme mit den Operatoren O_K als Invarianten der Transformation. Auf Grund der Gleichungen (3.29, 3.33) sind diese jedoch nicht voneinander unabhängig, vielmehr stimmen die Terme mit $O_K = \gamma_{45}$ mit denen mit $O_K = \mathbb{1}_4$, sowie die mit $O_K = \gamma_{\mu\nu}$ mit denen mit $O_K = \gamma_\mu$ bis auf einen Vorfaktor überein. Als unabhängige Zwei-Fermi-Terme auf Weyl-Spinorniveau verbleiben die acht Terme: $\bar{\psi}_L^a \psi_L^a$, $\bar{\psi}_L^a \gamma_\mu \psi_L^a$, $\mu = 1 \dots 3$ und die gleichen Terme mit der Struktur R-R.

Für die Terme auf Dirac-Spinorniveau gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{a'} O_K \psi^{a'} &\stackrel{(3.34)}{=} \bar{\psi}_L^{a'} O_K \psi_L^{a'} + \bar{\psi}_R^{a'} O_K \psi_R^{a'} \\ &\stackrel{(3.36)}{=} \bar{\psi}_L^a O_K \psi_L^a + \bar{\psi}_R^a O_K \psi_R^a \\ &= \bar{\psi}^a O_K \psi^a. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die Terme $\bar{\psi}^a O_K \psi^a$ sind invariant unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformationen. Sie lassen sich unter Benutzung der Gleichungen (3.29, 3.33) wie folgt in Weyl-Spinoren zerlegen:

$$\bar{\psi}^a \psi^a = \bar{\psi}_L^a \psi_L^a + \bar{\psi}_R^a \psi_R^a, \quad (3.40)$$

$$\bar{\psi}^a \gamma_{45} \psi^a = \bar{\psi}_L^a \psi_L^a - \bar{\psi}_R^a \psi_R^a, \quad (3.41)$$

$$\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^a = \bar{\psi}_L^a \gamma_\mu \psi_L^a + \bar{\psi}_R^a \gamma_\mu \psi_R^a, \quad (3.42)$$

$$\bar{\psi}^a \gamma_{\mu\nu} \psi^a = -\epsilon_{\mu\nu\alpha} (\bar{\psi}_L^a \gamma_\alpha \psi_L^a - \bar{\psi}_R^a \gamma_\alpha \psi_R^a). \quad (3.43)$$

Dabei ist jeweils jeder einzelne Summand invariant. Terme der Form $\bar{\psi}^a O_{AK} \psi^a$ transformieren wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^{a'} O_{AK} \psi^{a'} &\stackrel{(3.35)}{=} \bar{\psi}_L^{a'} O_{AK} \psi_R^{a'} + \bar{\psi}_R^{a'} O_{AK} \psi_L^{a'} \\ &\stackrel{(3.38)}{=} \bar{\psi}_L^b (U_L^\dagger)^{ba} U_R^{ac} O_{AK} \psi_R^c + \bar{\psi}_R^b (U_R^\dagger)^{ba} U_L^{ac} O_{AK} \psi_L^c. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Da im Allgemeinen $(U_L^\dagger)^{ba} U_R^{ac} \neq \delta^{bc}$, $(U_R^\dagger)^{ba} U_L^{ac} \neq \delta^{bc}$, sind die Terme $\bar{\psi}^a O_{AK} \psi^a$ nicht invariant unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformationen.

Nun soll zusätzlich zur $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie eine diskrete chirale \mathbb{Z}_2 -Symmetrie sowie Paritätssymmetrie gefordert werden⁵, da diese ebenfalls vom Gross-Neveu-Modell (3.1) erfüllt werden. Die diskrete chirale \mathbb{Z}_2 -Symmetrie lautet:

$$\mathbb{Z}_2^5: \quad \psi^a \mapsto \psi^{a'} = \gamma_5 \psi^a, \quad \bar{\psi}^a \mapsto \bar{\psi}^{a'} = -\bar{\psi}^a \gamma_5. \quad (3.45)$$

Die Paritätssymmetrie \mathcal{P} ist gemäß [21] gegeben durch

$$\mathcal{P}: \quad \psi^a(x) \mapsto \psi^{a'}(x) = P_\zeta \psi^a(\hat{x}), \quad \bar{\psi}^a(x) \mapsto \bar{\psi}^{a'}(x) = \bar{\psi}^a(\hat{x}) P_\zeta^\dagger. \quad (3.46)$$

In zwei räumlichen Dimensionen wird bei der Paritätstransformation nur eine räumliche Koordinate invertiert, sonst wäre es eine Rotation [47]. Es gelte folgende Vorschrift: $x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, x_2, x_3) =: \hat{x}$. Bei P_ζ handelt es sich um eine unitäre Matrix $P^\dagger P = \mathbb{1}$, die durch

$$P_\zeta = \frac{1}{2} [(1 + \zeta) \gamma_1 \gamma_4 + i(1 - \zeta) \gamma_1 \gamma_5] \quad \text{mit } |\zeta| = 1 \quad (3.47)$$

gegeben ist. Das Verhalten der unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie invarianten Zwei-Fermi-Dirac-Termen ist in Tabelle 3.1 angegeben.

⁵Weitere Symmetrien wie die Ladungskonjugation \mathcal{C} und die Zeitumkehr \mathcal{T} , die das Gross-Neveu-Modell ebenfalls erfüllt, werden hier aus Gründen der Zweckmäßigkeit nicht zusätzlich betrachtet. Die beiden oben geforderten Symmetrien werden bereits von keinem der Zwei-Fermi-Terme erfüllt, so dass sie ausreichen, um alle Massenterme auszuschließen.

| | \mathbb{Z}_2^5 | \mathcal{P} |
|---------------------------------------|--|---|
| $\bar{\psi}^a \psi^a$ | $-\bar{\psi}^a \psi^a$ | $\bar{\psi}^a \psi^a$ |
| $\bar{\psi}^a \gamma_{45} \psi^a$ | $\bar{\psi}^a \gamma_{45} \psi^a$ | $-\bar{\psi}^a \gamma_{45} \psi^a$ |
| $\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^a$ | $\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^a$ | $\bar{\psi}^a \hat{\gamma}_\mu \psi^a$ |
| $\bar{\psi}^a \gamma_{\mu\nu} \psi^a$ | $-\bar{\psi}^a \gamma_{\mu\nu} \psi^a$ | $\bar{\psi}^a \hat{\gamma}_{\mu\nu} \psi^a$ |

Tabelle 3.1.: Eigenschaften von Zwei-Fermi-Termen unter diskreten Transformationen. Für die Paritätstransformation sind die Argumente der transformierten Felder $\hat{x} = (-x_1, x_2, x_3)$. Es gilt $\hat{\gamma}_\mu = (-\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ und $\hat{\gamma}_{\mu\nu} = (-\gamma_{12}, -\gamma_{13}, \gamma_{23})$.

Man erkennt, dass es keinen Zwei-Fermi-Term gibt, der unter allen geforderten Symmetrietransformationen invariant ist. Demzufolge können in der Wirkung, die diese Symmetrien erfüllt keine Massenterme auftreten. Deshalb sollen sie im Folgenden nicht weiter diskutiert werden.

Wegen $\hat{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^\mu} = (-\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$, gilt $\hat{\partial}_\mu \hat{\gamma}_\mu = \partial_\mu \gamma_\mu$, so dass der kinetische Term $\bar{\psi}^a i \not{\partial} \psi^a$ invariant unter allen Transformationen ist.

3.1.3. Vier-Fermi-Terme

Zur Konstruktion von Vier-Fermi-Termen aus Zwei-Fermi-Termen gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten: Terme mit *Singulett-Flavorstruktur* $(\bar{\psi}^a O \psi^a)(\bar{\psi}^b Q \psi^b)$ oder mit *Dublett-Flavorstruktur*⁶ $(\bar{\psi}^a O \psi^b)(\bar{\psi}^b Q \psi^a)$. Beide Schreibweisen der Wechselwirkungsterme sind über die Fierztransformation miteinander verknüpft (s. Anhang C.1).

Um durch Produktbildung invariante Terme zu erhalten, ist es sinnvoll entweder zwei bzgl. einer bestimmten Symmetrie invariante Zwei-Fermi-Terme zu einem Vier-Fermi-Term zu verbinden, so dass das Produkt ebenfalls invariant ist oder zwei invariante Terme miteinander zu multiplizieren in der Hoffnung, dass das Produkt invariant wird. Nicht invariant ist in jedem Fall das Produkt aus einem invarianten und einem nicht invarianten Term.

Terme mit Singulett-Flavorstruktur

Für die Terme mit Singulett-Flavorstruktur heißt das, dass die Operatoren O und Q entweder beide aus O_K oder beide aus O_{AK} stammen müssen, da die zugehörigen Zwei-Fermi-Terme invariant bzw. nicht invariant unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformationen sind. Damit die Terme zusätzlich invariant unter Lorentztransformationen sind, muss stets über die Lorentzindizes summiert werden.

Für die Terme mit Operatoren aus O_K gibt es damit folgende Kombinationsmöglichkeiten:

$$(\bar{\psi}^a O_K \psi^a)(\bar{\psi}^b O_K \psi^b) =: (\bar{\psi}^a O_K \psi^a)^2, \quad (3.48)$$

$$(\bar{\psi}^a \psi^a)(\bar{\psi}^b \gamma_{45} \psi^b), \quad \epsilon_{\mu\alpha\beta} (\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^a)(\bar{\psi}^b \gamma_{\alpha\beta} \psi^b). \quad (3.49)$$

Fordert man zusätzlich die diskrete chirale \mathbb{Z}_2^5 - und die Paritätssymmetrie, so erkennt man anhand von Tabelle 3.1, dass die letzten beiden Terme (3.49) unter diesen Transformationen nicht invariant sind. Für die quadratischen Terme (3.48) gilt das hingegen schon. Da sich die transformierten Terme

⁶Die Bezeichnung „Dublett“ soll lediglich den Unterschied zur Singulett-Flavorstruktur deutlich machen. Dabei ist nicht gemeint, dass die Terme als Dublett transformieren. Der Begriff ist stattdessen als „Nicht-Singulett“-Struktur zu verstehen.

in Tabelle 3.1 nur durch das Vorzeichen von den ursprünglichen unterscheiden, ist ihr Quadrat⁷ unter den diskreten Symmetrien invariant⁸.

Für die Terme mit den Operatoren aus O_{AK} gilt:

$$(\bar{\psi}^a O_{AK} \psi^a)(\bar{\psi}^b O_{AK} \psi^b) = (\bar{\psi}_L^a O_{AK} \psi_R^a)^2 + 2(\bar{\psi}_L^a O_{AK} \psi_R^a)(\bar{\psi}_R^b O_{AK} \psi_L^b) + (\bar{\psi}_R^a O_{AK} \psi_L^a)^2. \quad (3.50)$$

Laut Gleichung (3.38) ist keiner der Summanden einzeln invariant, sondern sie enthalten stets das Produkt der Transformationsmatrizen U_L und U_R , das sich auch in der Summe nicht heraushebt. Folglich gibt es mit Singulett-Flavorstruktur keine Vier-Fermi-Terme mit Operatoren aus O_{AK} , die invariant unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie sind.

Insgesamt verbleiben vier Vier-Fermi-Terme mit Singulett-Flavorstruktur, die unter allen geforderten Symmetrietransformationen invariant sind und wie folgt gekennzeichnet werden sollen:

$$S := (\bar{\psi}^a \psi^a)^2, \quad (3.51)$$

$$P := (\bar{\psi}^a \gamma_{45} \psi^a)^2, \quad (3.52)$$

$$V := (\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^a)^2, \quad (3.53)$$

$$T := \frac{1}{2} (\bar{\psi}^a \gamma_{\mu\nu} \psi^a)^2. \quad (3.54)$$

Die Symbole S, P, T, V stehen für den Skalar-, Pseudoskalar-, Vektor- bzw. Tensorkanal⁹. Diese Terme bilden die *Singulett-Basis*

$$\mathbf{B}^S := (S, P, V, T) \quad (3.55)$$

im, wie nun festgestellt, vierdimensionalen Theorieraum der Vier-Fermi-Wechselwirkungsterme.

Terme mit Dublett-Flavorstruktur

Hier sollen zunächst nur Terme mit $O = Q$ betrachtet werden. Es wird sich zeigen, dass diese Betrachtung ausreichend ist. Analog zu den Gleichungen (3.35, 3.34) gilt

$$\bar{\psi}^a O \psi^b = \begin{cases} \bar{\psi}_L^a O \psi_L^b + \bar{\psi}_R^a O \psi_R^b, & \text{für } O \in O_K, \\ \bar{\psi}_L^a O \psi_R^b + \bar{\psi}_R^a O \psi_L^b, & \text{für } O \in O_{AK}. \end{cases} \quad (3.56)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}^a O_K \psi^b)(\bar{\psi}^b O_K \psi^a) &= (\bar{\psi}_L^a O_K \psi_L^b)(\bar{\psi}_L^b O_K \psi_L^a) + 2(\bar{\psi}_L^a O_K \psi_L^b)(\bar{\psi}_R^b O_K \psi_R^a) \\ &\quad + (\bar{\psi}_R^a O_K \psi_R^b)(\bar{\psi}_R^b O_K \psi_R^a), \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}^a O_{AK} \psi^b)(\bar{\psi}^b O_{AK} \psi^a) &= (\bar{\psi}_L^a O_{AK} \psi_R^b)(\bar{\psi}_L^b O_{AK} \psi_R^a) + 2(\bar{\psi}_L^a O_{AK} \psi_R^b)(\bar{\psi}_R^b O_{AK} \psi_L^a) \\ &\quad + (\bar{\psi}_R^a O_{AK} \psi_L^b)(\bar{\psi}_R^b O_{AK} \psi_L^a). \end{aligned} \quad (3.58)$$

⁷Für den Vektor- und Tensorterm $\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^a$ bzw. $\bar{\psi}^a \gamma_{\mu\nu} \psi^a$ ist darunter gleichzeitig die Summe über die Lorenzindizes μ, ν zu verstehen, so dass sich das Vorzeichen jedes einzelnen Summanden aufhebt.

⁸Gleiches gilt für die Ladungskonjugations \mathcal{C} und die Zeitumkehrsymmetrie \mathcal{T} da diese auch nur das Vorzeichen der einzelnen Zwei-Fermi-Terme ändern. Denn dabei handelt es sich um die Multiplikation mit gewissen Produkten aus Gammamatrizen, die mit den einzelnen Operatoren entweder vertauschen oder antivertauschen, so dass sich ggf. nur das Vorzeichen ändert. Vgl. auch die Definitionen und Tabellen in [48, 22, 20].

⁹Der Tensorterm T wurde mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ versehen um eine Doppelzählung zu vermeiden. Die Summe über die Indizes μ und ν läuft laut Konvention für jeden Index von 1 bis 3. Es gilt allerdings $\gamma_{\mu\nu} = -\gamma_{\nu\mu}$, quadriert sind damit die Summanden unter Vertauschung von μ und ν identisch, unabhängige Elemente der Basis sind jedoch nur $\gamma_{\mu\nu}$ mit $\mu < \nu$.

Es sind gerade diejenigen Terme unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformationen invariant, bei denen in der Summe über a bzw. b die Felder ψ und $\bar{\psi}$ jeweils mit gleicher Händigkeit (L bzw. R) auftreten. D. h., die beiden obigen Terme sind nicht invariant, da sie jeweils Summanden mit Summen der Art $\psi_L^b \bar{\psi}_R^b \neq \psi_L^{b'} \bar{\psi}_R^{b'}$ enthalten. Allerdings gilt auf Grund der Gleichungen (3.29 ... 3.33), dass Terme der Form $(\bar{\psi}_X O \psi_Y)(\bar{\psi}_W O \psi_V)$ bis auf ein Vorzeichen äquivalent zu Termen $(\bar{\psi}_X O' \psi_Y)(\bar{\psi}_W O' \psi_V)$ sind, sofern die Operatoren wie in Tabelle 3.2 gewählt werden.

| O | O' | Vorzeichen | |
|--------------------------------------|------------------------|--------------------------------|------------|
| γ_{45} | $\mathbb{1}_4$ | $\text{sgn}(Y) \text{sgn}(V)$ | } O_K |
| $\frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{\mu\nu}$ | γ_μ | $\text{sgn}(Y) \text{sgn}(V)$ | |
| γ_5 | γ_4 | $-\text{sgn}(Y) \text{sgn}(V)$ | } O_{AK} |
| $i\gamma_\mu \gamma_5$ | $i\gamma_\mu \gamma_4$ | $-\text{sgn}(Y) \text{sgn}(V)$ | |

Tabelle 3.2.: Äquivalenz von Termen der Form $(\bar{\psi}_X O \psi_Y)(\bar{\psi}_W O \psi_V)$ und $(\bar{\psi}_X O' \psi_Y)(\bar{\psi}_W O' \psi_V)$ mit dem zugehörigen Vorzeichen.

Damit lässt sich der in Gleichung (3.57) nicht invariante Summand $2(\bar{\psi}_L^a O_K \psi_L^b)(\bar{\psi}_R^b O_K \psi_R^a)$ kompensieren, indem man eine geeignete Linearkombination mit äquivalenten Termen bildet, so dass er sich in der Summe aufhebt. Es gilt

$$\begin{aligned} 2(\bar{\psi}_L^a O'_K \psi_L^b)(\bar{\psi}_R^b O'_K \psi_R^a) &= 2 \text{sgn}(L) \text{sgn}(R) (\bar{\psi}_L^a O_K \psi_L^b)(\bar{\psi}_R^b O_K \psi_R^a) \\ &= -2(\bar{\psi}_L^a O_K \psi_L^b)(\bar{\psi}_R^b O_K \psi_R^a). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Demzufolge hebt sich dieser Term in der Summe $(\bar{\psi}^a O'_K \psi^b)(\bar{\psi}^b O'_K \psi^a) + (\bar{\psi}^a O_K \psi^b)(\bar{\psi}^b O_K \psi^a)$ gerade weg. Damit erhält man aus Tabelle 3.2 folgende invariante Linearkombinationen.

$$\begin{aligned} S^D &:= (\bar{\psi}^a \psi^b)(\bar{\psi}^b \psi^a) + (\bar{\psi}^a \gamma_{45} \psi^b)(\bar{\psi}^b \gamma_{45} \psi^a) \\ &= 2(\bar{\psi}_L^a \psi_L^b)(\bar{\psi}_L^b \psi_L^a) + 2(\bar{\psi}_R^a \psi_R^b)(\bar{\psi}_R^b \psi_R^a), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} V^D &:= (\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^b)(\bar{\psi}^b \gamma_\mu \psi^a) + \frac{1}{2}(\bar{\psi}^a \gamma_{\mu\nu} \psi^b)(\bar{\psi}^b \gamma_{\mu\nu} \psi^a) \\ &= 2(\bar{\psi}_L^a \gamma_\mu \psi_L^b)(\bar{\psi}_L^b \gamma_\mu \psi_L^a) + 2(\bar{\psi}_R^a \gamma_\mu \psi_R^b)(\bar{\psi}_R^b \gamma_\mu \psi_R^a). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die Bezeichnung ist ähnlich wie für die Singulett-Flavorstruktur, S steht für Skalar- und V für Vektorkanal, das hochgestellte D kennzeichnet die Dublett-Flavorstruktur. An der Zerlegung in Weyl-Spinoren sieht man unmittelbar die Invarianz beider Terme unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformationen.

In Gleichung (3.58) sind die Summanden $(\bar{\psi}_L^a O_{AK} \psi_R^b)(\bar{\psi}_L^b O_{AK} \psi_R^a)$ und $(\bar{\psi}_R^a O_{AK} \psi_L^b)(\bar{\psi}_R^b O_{AK} \psi_L^a)$ nicht invariant unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformationen. Sie weisen die Vorzeichenstruktur $-\text{sgn}(R) \text{sgn}(R) = -1$ bzw. $-\text{sgn}(L) \text{sgn}(L) = -1$ auf. Der invariante Summand $2(\bar{\psi}_L^a O_{AK} \psi_R^b)(\bar{\psi}_R^b O_{AK} \psi_L^a)$ hingegen besitzt die Vorzeichenstruktur $-\text{sgn}(R) \text{sgn}(L) = +1$. Demzufolge kompensieren sich auch hier die invarianten Terme in der Summe $(\bar{\psi}^a O'_{AK} \psi^b)(\bar{\psi}^b O'_{AK} \psi^a) + (\bar{\psi}^a O_{AK} \psi^b)(\bar{\psi}^b O_{AK} \psi^a)$ und man erhält folgende invariante Linearkombinationen

$$\begin{aligned} P^D &:= (\bar{\psi}^a \gamma_4 \psi^b)(\bar{\psi}^b \gamma_4 \psi^a) + (\bar{\psi}^a \gamma_5 \psi^b)(\bar{\psi}^b \gamma_5 \psi^a) \\ &= 4(\bar{\psi}_L^a \gamma_4 \psi_R^b)(\bar{\psi}_R^b \gamma_4 \psi_L^a), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} A^D &:= (\bar{\psi}^a i\gamma_\mu \gamma_4 \psi^b)(\bar{\psi}^b i\gamma_\mu \gamma_4 \psi^a) + (\bar{\psi}^a i\gamma_\mu \gamma_5 \psi^b)(\bar{\psi}^b i\gamma_\mu \gamma_5 \psi^a) \\ &= 4(\bar{\psi}_L^a i\gamma_\mu \gamma_4 \psi_R^b)(\bar{\psi}_R^b i\gamma_\mu \gamma_4 \psi_L^a). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Die Bezeichnungen P und A steht für den Pseudoskalar- bzw. Axialvektorkanal, der Index D für die Dublett-Flavorstruktur. Die Invarianz unter $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrietransformationen ergibt sich unmittelbar aus der Zerlegung in Weyl-Spinoren. Die Invarianz unter den diskreten Symmetrien wird deutlich, indem man die Terme mit Hilfe der Fierztransformation (s. Anhang C.2) als Summe von Singulett-Termen schreibt, von denen jeder für sich invariant ist.

Insgesamt erhält man also vier invariante Vier-Fermi-Terme auf Dirac-Spinorniveau mit Dublett-Flavorstruktur. Diese korrespondieren mit den im vorigen Abschnitt gefundenen vier Termen mit Singulett-Flavorstruktur. Da sich beide Formen mit Hilfe der Fierztransformation aus Anhang C.2 ineinander umrechnen lassen, bilden auch die Dublett-Terme eine Basis im vierdimensionalen Vier-Fermi-Theorieraum mit den geforderten Symmetrien. Folglich kann es nicht mehr als vier voneinander unabhängige Vier-Fermi-Terme mit Dublett-Flavorstruktur geben, die o. g. bilden bereits eine vollständige Basis. Das rechtfertigt die anfängliche Beschränkung auf Produktterme mit identischen Operatoren O und Q . Die zugehörige *Dublett-Basis*, soll wie folgt gekennzeichnet werden:

$$\mathbf{B}^D := (S^D, P^D, V^D, T^D). \quad (3.64)$$

3.2. Ansatz für die mittlere effektive Wirkung

Als Ansatz für die mittlere effektive Wirkung Γ_k wählt man üblicherweise formal den gleichen Ansatz wie für die klassische Wirkung S , wobei diese alle mit der gewählten Symmetrie vertäglichen Terme mit bis zu vier fermionischen Feldern enthalten soll. Zusätzlich lässt man skalenabhängige Kopplungskonstanten $g = g(k)$ zu. Der Skalenabhängigkeit trägt man auch für den kinetischen Term Rechnung, indem man als Vorfaktor eine im Allgemeinen ebenfalls skalenabhängige Wellenfunktionsrenormierung $Z_\psi = Z_\psi(k)$ einführt. Damit im Grenzfall $k \rightarrow \Lambda$ wieder die klassische Wirkung entsteht (s. Gleichung (2.12)), muss gelten:

$$\lim_{k \rightarrow \Lambda} Z_\psi(k) = 1. \quad (3.65)$$

Als Wechselwirkungsterme sind alle Terme erlaubt, die die geforderten Symmetrien erfüllen. Damit entfallen laut Abschnitt 3.1.2 alle Zwei-Fermi-Massenterme. Wir wählen als Trunkierung, dass höchstens Vier-Fermi-Terme zugelassen werden. Demzufolge kommen die Terme (3.51 . . . 3.54) mit Singulett-Flavorstruktur, bzw. die Terme (3.60 . . . 3.63) mit Dublett-Flavorstruktur in Betracht. Beide stellen äquivalente Beschreibung des Theorieraums dar. Wir wählen als Standardbasis die Singulett-Basis \mathbf{B}^S (3.55) und rechnen fortan bevorzugt in dieser. Als Ansatz für die effektive Wirkung erhält man damit den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] &= \int d^d x \left\{ Z_\psi \bar{\psi}^a i \not{\partial} \psi^a + \frac{\bar{g}_S}{2N_f} (\bar{\psi}^a \psi^a) (\bar{\psi}^b \psi^b) + \frac{\bar{g}_P}{2N_f} (\bar{\psi}^a \gamma_{45} \psi^a) (\bar{\psi}^b \gamma_{45} \psi^b) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{g}_V}{2N_f} (\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^a) (\bar{\psi}^b \gamma_\mu \psi^b) + \frac{\bar{g}_T}{2N_f} \frac{1}{2} (\bar{\psi}^a \gamma_{\mu\nu} \psi^a) (\bar{\psi}^b \gamma_{\mu\nu} \psi^b) \right\} \\ &= \int_x \left\{ Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{\bar{g}_S}{2N_f} S + \frac{\bar{g}_P}{2N_f} P + \frac{\bar{g}_V}{2N_f} V + \frac{\bar{g}_T}{2N_f} T \right\}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Dabei wird über die Indizes a und b von 1 bis N_f summiert, sowie über μ, ν von 1 bis 3. Der Ausdruck $\int_x := \int d^d x$ steht für das Integral über die d -dimensionale Euklidische Raumzeit.

Alternativ zu obiger Formulierung der effektiven Wirkung mit Termen mit Singulett-Flavorstruktur, kann man die effektive Wirkung auch aus Termen mit Dublett-Flavorstruktur aufbauen. Die

entsprechende effektive Wirkung lautet:

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] = \int_x \left\{ Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{\bar{g}_S^D}{2N_f} S^D + \frac{\bar{g}_P^D}{2N_f} P^D + \frac{\bar{g}_V^D}{2N_f} V^D + \frac{\bar{g}_A^D}{2N_f} A^D \right\}. \quad (3.67)$$

Die Fierztransformationen zwischen den Wechselwirkungstermen ist in Anhang C.2 angegeben.

Beide Schreibweisen der Wechselwirkungsterme bilden jeweils eine Basis im Raum der Vier-Fermi-Terme mit den geforderten Symmetrien. Folglich sind die Gleichungen (3.66) und (3.67) äquivalente Beschreibungen der gleichen Theorie. Setzt man beide Ansätze gleich, so erhält man unter Beachtung der Fierztransformationen der Wechselwirkungsterme die Fierztransformationen der Kopplungskonstanten, die ebenfalls in Anhang C.2 angegeben sind.

3.3. Berechnung der Flussgleichungen

Ausgehend vom Ansatz Gleichung (3.66) lässt sich die Flussgleichung für die gegebene effektive Wirkung aufstellen. Um diese zu berechnen, soll zunächst die effektive Wirkung (3.66) wie folgt aufgeteilt werden:

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] := Z_\psi \Gamma_Z + \frac{\bar{g}_S}{2N_f} \Gamma_S + \frac{\bar{g}_P}{2N_f} \Gamma_P + \frac{\bar{g}_V}{2N_f} \Gamma_V + \frac{\bar{g}_T}{2N_f} \Gamma_T := Z_\psi \Gamma_Z + \sum_{i=1}^4 \frac{\bar{g}_i}{2N_f} \Gamma_i. \quad (3.68)$$

Es gelte folgende Zuordnung:

$$(\bar{g}_i) := (\bar{g}_S, \bar{g}_P, \bar{g}_V, \bar{g}_T). \quad (3.69)$$

Dabei ist

$$\Gamma_Z = \int d^d x \bar{\psi}^a i \not{\partial} \psi^a. \quad (3.70)$$

Die Terme $\Gamma_S, \Gamma_P, \Gamma_V, \Gamma_T$ sind dabei alle von der Form

$$\Gamma_i = \int d^d x B_i^S = \int d^d x (\bar{\psi}^a O_i \psi^a) (\bar{\psi}^b O_i \psi^b) \quad \text{mit } (O_i) = \left(\mathbb{1}_4, \gamma_{45}, \gamma_\mu, \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{\mu\nu} \right). \quad (3.71)$$

Führt man für alle enthaltenen fermionischen Felder eine Fouriertransformation¹⁰ durch, so lautet dieser Term:

$$\Gamma_i = \int_{p_{j=1}}^3 \left(\bar{\psi}^a(p_1) O_i \psi^a(p_2) \right) \left(\bar{\psi}^b(p_3) O_i \psi^b(p_1 + p_3 - p_2) \right). \quad (3.72)$$

Dabei wurden die Konventionen $\int_p := \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$ und $\int_{p_{j=1}}^n := \prod_{j=1}^n \int_{p_j}$ verwendet. Die vollständige effektive Wirkung nach der Fouriertransformation schreibt sich also:

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] = -Z_\psi \int_p \bar{\psi}^a(p) \not{p} \psi^a(p) + \sum_i \frac{\bar{g}_i}{2N_f} \Gamma_i. \quad (3.73)$$

Zur Berechnung der Flussgleichung (2.31) benötigt man nun die zweite funktionale Ableitung

$$\Gamma_k^{(1,1)}[\phi](p, q) = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \phi^T(-p)} \Gamma_k[\phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \phi(q)}. \quad (3.74)$$

¹⁰s. Anhang A.3

Dabei ist¹¹

$$\phi(p) := \begin{pmatrix} \psi_1(p) \\ \vdots \\ \psi_{N_f}(p) \\ \bar{\psi}_1^T(-p) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_{N_f}^T(-p) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \psi_1(p) \\ \vdots \\ \psi_{N_f}(p) \\ \bar{\psi}_1^T(-p) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_{N_f}^T(-p) \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

und

$$\phi^T(-p) := (\psi_j^T(-p), \bar{\psi}_j(p)) := (\psi_1^T(-p), \dots, \psi_{N_f}^T(-p), \bar{\psi}_1(p), \dots, \bar{\psi}_{N_f}(p)). \quad (3.76)$$

Man erhält also folgende Form für $\Gamma_k^{(1,1)}$:

$$\Gamma_k^{(1,1)mn}[\bar{\psi}, \psi](p, q) = \begin{pmatrix} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi^{mT}(-p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^n(q)} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi^{mT}(-p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^{nT}(-q)} \\ \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi^m(p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^n(q)} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\psi^m(p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi^{nT}(-q)} \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Die enthaltenen Ableitungen sollen bei konstanten Feldern ausgewertet werden. Die Gleichungen gelten für beliebige Arten der Felder, man kann also den für die Rechnung günstigsten Fall verwenden. Da wir zunächst nur an den Flussgleichungen für die Kopplungskonstanten \bar{g}_i interessiert sind, können wir konstante Felder annehmen, da die Wechselwirkungsterme (im Gegensatz zum kinetischen Term) keine Ableitungen enthalten. Die Felder sollen im Ortsraum konstant sein, es gilt also:

$$\psi^j(x) = \Psi^j = \text{konst.}, \quad \bar{\psi}^j(x) = \bar{\Psi}^j = \text{konst.}, \quad \forall j = 1, \dots, N_f, \quad (3.78)$$

$$\Leftrightarrow \psi^j(p) = \Psi^j (2\pi)^d \delta^{(d)}(p), \quad \bar{\psi}^j(p) = \bar{\Psi}^j (2\pi)^d \delta^{(d)}(p), \quad \forall j = 1, \dots, N_f. \quad (3.79)$$

Der Regulator R_k wirkt als IR-Cutoff, indem er einen zusätzlichen Massenterm erzeugt. Wir verlangen daher, dass der Regulator bezüglich der Felder eine Matrixstruktur aufweist, die ähnlich den üblichen Massentermen zur Propagatormatrix \mathcal{P}_k beiträgt (vgl. Gleichung (2.17)) [32, 49]. Außerdem soll er die chirale Symmetrie erhalten. Deshalb verwenden wir den sogenannten spektral adjustierten Regulator, der diagonal im Impuls- und Flavorraum ist:

$$R_k^{mn}(p, q) = \begin{pmatrix} 0 & -Z_\psi \not{p}^T r_\psi \\ -Z_\psi \not{p} r_\psi & 0 \end{pmatrix} \delta^{mn} (2\pi)^d \delta^{(d)}(p - q), \quad (3.80)$$

mit der dimensionslosen fermionischen Regulator-Formfunktion r_ψ . Mit den Rechenregeln (A.12, A.13) ergeben sich dann die folgenden Ergebnisse für die Matrizen \mathcal{P}_k und \mathcal{F}_k aus Gleichung (2.36): $\Gamma_k^{(1,1)} + R_k = \mathcal{P}_k + \mathcal{F}_k$,

$$\mathcal{P}_k^{mn}(p, q) = \begin{pmatrix} 0 & -Z_\psi \not{p}^T (1 + r_\psi) \\ -Z_\psi \not{p} (1 + r_\psi) & 0 \end{pmatrix} \delta^{mn} (2\pi)^d \delta^{(d)}(p - q), \quad (3.81)$$

$$\mathcal{F}_k^{mn}(p, q) = \begin{pmatrix} F_{11}^{mn} & F_{12}^{mn} \\ F_{21}^{mn} & F_{22}^{mn} \end{pmatrix} (2\pi)^d \delta^{(d)}(p - q), \quad (3.82)$$

¹¹Der Übersichtlichkeit halber sind hier die lateinischen Flavorindizes unten an den Feldern notiert.

mit

$$F_{11}^{mn} = - \sum_i \frac{\bar{g}_i}{N_f} O_i^T \bar{\Psi}^{mT} \bar{\Psi}^n O_i, \quad (3.83)$$

$$F_{12}^{mn} = \sum_i \frac{\bar{g}_i}{N_f} \left[O_i^T \bar{\Psi}^{mT} \Psi^{nT} O_i^T - \delta^{mn} (\bar{\Psi}^a O_i \Psi^a) O_i^T \right], \quad (3.84)$$

$$F_{21}^{mn} = \sum_i \frac{\bar{g}_i}{N_f} \left[O_i \Psi^m \bar{\Psi}^n O_i + \delta^{mn} (\bar{\Psi}^a O_i \Psi^a) O_i \right], \quad (3.85)$$

$$F_{22}^{mn} = - \sum_i \frac{\bar{g}_i}{N_f} O_i \Psi^m \bar{\Psi}^{nT} O_i^T. \quad (3.86)$$

Es gilt $F_{12}^{mn} = -(F_{21}^{mn})^T$. Man erhält weiterhin:

$$(\mathcal{P}_k^{-1})^{mn}(p, q) = \frac{\delta^{mn} (2\pi)^d \delta^{(d)}(p - q)}{Z_\psi (1 + r_\psi) p^2} \begin{pmatrix} 0 & -\not{p} \\ -\not{p}^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Bildet man nun die Superspur von $(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^2$ um das Ergebnis in die Wetterich-Gleichung in der Form (2.37) einzusetzen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{STr}[(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^2] = & - \int_p \frac{2V}{Z_\psi^2 (1 + r_\psi)^2 p^4} \sum_{i,j} \left\{ \frac{\bar{g}_i \bar{g}_j}{N_f^2} \left[(\bar{\Psi}^a O_j \not{p} O_i \Psi^a)^2 - (\bar{\Psi}^a O_i \not{p} O_j \Psi^a) (\bar{\Psi}^b O_j \not{p} O_i \Psi^b) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2(\bar{\Psi}^a O_i \Psi^a) (\bar{\Psi}^b O_j \not{p} O_i \not{p} O_j \Psi^b) + N_f (\bar{\Psi}^a O_i \Psi^a) (\bar{\Psi}^b O_j \Psi^b) \text{Tr}(\not{p} O_i \not{p} O_j) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Diese Beziehung gilt für jeden Ansatz der Form (3.68) mit quadratischen Vier-Fermi-Termen mit allgemeinen Operatoren O_i . Dabei ist $V = \int d^d x$ das dreidimensionale Raumzeitvolumen. Zur Auswertung verwendet man die folgende Identität:

$$\int_p p_\mu p_\nu f(p^2) = \int_p \frac{p^2}{d} f(p^2) \delta_{\mu\nu}. \quad (3.89)$$

Weiterhin führt man dimensionslose renormierte Kopplungskonstanten ein, gemäß:

$$g_i = Z_\psi^{-2} k^{d-2} \bar{g}_i, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.90)$$

Dabei gelte folgende Zuordnung:

$$\mathbf{g} := (g_1, g_2, g_3, g_4) := (g_S, g_P, g_V, g_T). \quad (3.91)$$

Die Flussgleichung für die Kopplungskonstanten erhält man aus Gleichung (2.37):

$$\partial_t \Gamma_k = -\frac{1}{4} \text{STr}[\tilde{\partial}_t (\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^2] + \dots = -\frac{1}{4} \tilde{\partial}_t \text{STr}[(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^2] + \dots \quad (3.92)$$

Die Ableitung $\tilde{\partial}_t$ wirkt nur auf die k -Abhängigkeit der Regulatorfunktion R_k , respektive r_ψ (s. Gleichung (2.35)) und sie vertauscht mit der Bildung der Superspur STr .

Zum Fluss der Kopplungskonstanten \mathbf{g} trägt nur der Term $\text{STr}[\tilde{\partial}_t (\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^2]$ bei. Aus der Struktur der Fluktuationsmatrix \mathcal{F}_k (3.82 ... 3.86) wird deutlich, dass dies der einzige Summand in (2.37) ist, der Terme der Form $(\bar{\psi}^a O_i \psi^a)^2$ enthalten kann. Da sich die Flussgleichungen der Kopplungskonstanten aus einem Koeffizientenvergleich vor diesen Termen ergeben, genügt es hier die

Wetterich-Gleichung in der in Gleichung (3.92) angegebenen Form zu betrachten und die weiteren Terme aus Gleichung (2.37) zu vernachlässigen.

Weiter gilt:

$$\tilde{\partial}_t \int_p \frac{1}{p^2(1+r_\psi)^2} = -4v_d k^{d-2} \ell_1^{(F)d}(0; \eta_\psi). \quad (3.93)$$

Dabei ist $v_d := [2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)]^{-1}$, speziell $v_3 = (8\pi^2)^{-1}$. Die *Schwellwertfunktion* für Ein-Loop-Diagramme masseloser Fermionen wird mit $\ell_1^{(F)d}(0; \eta_\psi)$ bezeichnet (s. Anhang D), $\eta_\psi = -\partial_t \ln Z_\psi$ heißt *anomale Dimension*.

Mit Hilfe der Beziehungen (3.88 ... 3.93) erhält man durch Einsetzen in Gleichung (3.92) für die rechte Seite der Flussgleichung den Ausdruck:

$$\partial_t \Gamma_k \Big|_\Psi = \frac{2v_d V Z_\psi^2}{N_f^2 k^{d-2}} \ell_1^{(F)d}(0; \eta_\psi) \sum_{i=1}^4 B_i^S \sum_{j,l=1}^4 g_j A_{jl}^i g_l. \quad (3.94)$$

Als Vier-Fermi-Terme treten nur die im Ansatz (3.66) vorkommenden Basiselemente ($B_i^S = (S, P, V, T)$) auf (ausgewertet bei konstanten Feldern (3.78)), wie die explizite Rechnung zeigt. Das liegt daran, dass der Ansatz alle mit der Symmetrie verträglichen Singulett-Terme enthält. Die Symmetrie bleibt unter Renormierungsgruppentransformationen erhalten, d. h., beim Fließen der mittleren effektiven Wirkung besitzt diese stets nur Terme, die die gegebene Symmetrie erfüllen. Eventuell auftretende Dublett-Terme können mittels Fierztransformationen¹² in Terme mit Singulett-Struktur transformiert werden. Somit kann man den Fluss auf dem Niveau der gewählten Trunkierung mit Vier-Fermi-Termen o. B. d. A. stets durch die Singulett-Terme ausdrücken, da diese eine vollständige Basis im Theorieraum mit der zugehörigen Symmetrie bilden.

Theorien, die diese Eigenschaft erfüllen, bezeichnet man als *fierz-vollständig*. Für diese Theorien schreibt sich der Fluss, wie in Gleichung (3.94), andernfalls kommen im Allgemeinen zusätzlicher Terme hinzu, nämlich alle diejenigen die ebenfalls durch die Symmetrie erlaubt sind. Da im Ansatz (3.66) alle mit den vorgegeben Symmetrien verträglichen Vier-Fermi-Terme berücksichtigt wurden, handelt es sich bei der betrachteten Theorie um eine *fierz-vollständige*.

Für die symmetrischen *Koeffizientenmatrizen* A_{jl}^i erhält man

$$(A_{jl}^1) = \begin{pmatrix} -d_\gamma N_f + 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_{jl}^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -d_\gamma N_f + 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

$$(A_{jl}^3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & d_\gamma N_f + 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_{jl}^4) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & d_\gamma N_f + 2 \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

$d_\gamma = 4$ ist die Anzahl der Komponenten der Dirac-Fermionen $\psi, \bar{\psi}$.

Für die linke Seite der Flussgleichung ergibt sich aus dem Ansatz (3.68) für die Auswertung bei konstanten Feldern (3.78) und dimensionslosen Kopplungen (3.90) folgender Ausdruck:

$$\partial_t \Gamma_k \Big|_\Psi = \frac{Z_\psi^2 V}{2N_f k^{d-2}} \sum_i \left[(2 - d - 2\eta_\psi) g_i B_i^S + B_i^S \partial_t g_i \right]. \quad (3.97)$$

¹²s. Anhang C

Es bleibt die linke und die rechte Seite (3.94, 3.97) der Flussgleichung gleichzusetzen. Das Ergebnis projiziert man auf das Basiselement B_i^S , d. h., man führt einen Koeffizientenvergleich vor B_i^S durch, und erhält so die Flussgleichungen für die einzelnen Kopplungskonstanten g_i in der Form

$$\partial_t g_i = (2\eta_\psi + d - 2)g_i + \frac{4v_d}{N_f} \ell_1^{(F)d}(0; \eta_\psi) \sum_{j,l} g_j A_{jl}^i g_l. \quad (3.98)$$

Wie in Anhang E gezeigt, gilt für die gewählte Trunkierung $Z_\psi \equiv 1 = \text{konst.}$ und damit $\eta_\psi = -\partial_t \ln Z_\psi \equiv 0$. Durch eine erneute Umskalierung der Kopplungskonstanten gemäß

$$g_i \mapsto g_i / (4v_d \ell_1^{(F)d}(0; 0)) \quad (3.99)$$

entfällt die Regulatorabhängigkeit und die Flussgleichungen lauten nunmehr

$$\partial_t g_i = (d - 2)g_i + \frac{1}{N_f} \sum_{j,l} g_j A_{jl}^i g_l \quad (3.100)$$

3.3.1. Allgemeine Flussgleichungen

Für $d = 3$ Raumzeitdimensionen ergeben sich aus den konkreten Koeffizientenmatrizen (3.95, 3.96) mit $d_\gamma = 4$ folgende Flussgleichungen:

$$\beta_S = \partial_t g_S = g_S + \frac{1}{N_f} \left[(-4N_f + 2)g_S^2 + g_S(2g_P + 6g_V + 6g_T) + 8g_V g_T \right] \quad (3.101)$$

$$\beta_P = \partial_t g_P = g_P + \frac{1}{N_f} \left[(-4N_f + 2)g_P^2 + g_P(2g_S + 6g_V + 6g_T) + 4g_V^2 + 4g_T^2 \right] \quad (3.102)$$

$$\beta_V = \partial_t g_V = g_V + \frac{1}{N_f} \left[\frac{4N_f + 2}{3} g_V^2 + g_V \left(-\frac{2}{3} g_S + 2g_P + \frac{2}{3} g_T \right) + \frac{8}{3} g_S g_T \right] \quad (3.103)$$

$$\beta_T = \partial_t g_T = g_T + \frac{1}{N_f} \left[\frac{4N_f + 2}{3} g_T^2 + g_T \left(-\frac{2}{3} g_S + 2g_P + \frac{2}{3} g_V \right) + \frac{8}{3} g_S g_V \right] \quad (3.104)$$

Die Flussgleichungen lassen sich ebenfalls für die Kopplungskonstanten

$$\mathbf{g}^D := (g_1^D, g_2^D, g_3^D, g_4^D) := (g_S^D, g_P^D, g_V^D, g_A^D) \quad (3.105)$$

der fierztransformierten effektiven Wirkung (3.67) aufstellen. Diese gehen aus den zugehörigen überstrichenen Größen $\bar{\mathbf{g}}^D$ durch die gleichen Umskalierung wie die Singulett-Kopplungen mit den Faktoren (3.90) und (3.99) hervor. Die Fierztransformation in Anhang C.2 gilt für \mathbf{g}^D ebenso wie für $\bar{\mathbf{g}}^D$, da sich dabei um eine lineare Transformation handelt und sich \mathbf{g}^D nur um skalare Faktoren von $\bar{\mathbf{g}}^D$ unterscheidet. Damit erhält man die Flussgleichungen der Dublett-Kopplungen durch Fierztransformation der obenstehenden. Weil diese etwas komplizierter und nicht besonders anschaulich sind, soll hier auf ihre Angabe verzichtet werden.

3.3.2. Spezialfall $N_f = 1$

Für $N_f = 1$ gibt es keinen Unterschied zwischen den Termen mit Singulett- und Dublett-Flavorstruktur. Es gilt:

$$S^D = (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_{45}\psi)^2 = S + P, \quad (3.106)$$

$$V^D = (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}(\bar{\psi}\gamma_{\mu\nu}\psi)^2 = V + T. \quad (3.107)$$

Unter Verwendung der Fierztransformation aus Anhang C.2 erhält man damit für den Fall $N_f = 1$ folgende zusätzliche Fierzidentität:

$$T = -3S - 3P - V. \quad (3.108)$$

Setzt man diese in den Ansatz ein, kann man den Tensor kanal entfernen, so dass der Ansatz nur noch drei linear unabhängige Terme enthält:

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] = \int_x \left\{ Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{\bar{g}_S}{2N_f} S + \frac{\bar{g}_P}{2N_f} P + \frac{\bar{g}_V}{2N_f} V + \frac{\bar{g}_T}{2N_f} T \right\} \quad (3.109)$$

$$= \int_x \left\{ Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{\bar{g}_S - 3\bar{g}_T}{2N_f} S + \frac{\bar{g}_P - 3\bar{g}_T}{2N_f} P + \frac{\bar{g}_V - \bar{g}_T}{2N_f} V \right\} \quad (3.110)$$

$$=: \int_x \left\{ Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{\bar{g}_S^F}{2N_f} S + \frac{\bar{g}_P^F}{2N_f} P + \frac{\bar{g}_V^F}{2N_f} V \right\}. \quad (3.111)$$

Das entspricht einer Transformation auf Kopplungskonstanten¹³ $\mathbf{g}^F = (g_S^F, g_P^F, g_V^F)$ unter Ausnutzung der Fierzidentität für $N_f = 1$ gemäß

$$g_S^F := g_S - 3g_T, \quad g_P^F := g_P - 3g_T, \quad g_V^F := g_V - g_T. \quad (3.112)$$

Für die zugehörigen Beta-Funktionen gilt:

$$\beta_S^F := \partial_t g_S^F = \partial_t g_S - 3\partial_t g_T = \beta_S - 3\beta_T \quad (3.113)$$

und analog für β_P^F und β_V^F . Berechnet man diese, so zeigt sich, dass das Ergebnis tatsächlich unabhängig von g_T ist, also nur von den angesetzten Kopplungen g_S^F , g_P^F und g_V^F abhängt. Ihre Flussgleichungen lauten¹⁴:

$$\beta_S^F = \partial_t g_S^F = g_S^F + 2g_S^F(-g_S^F + g_P^F - g_V^F), \quad (3.114)$$

$$\beta_P^F = \partial_t g_P^F = g_P^F + 2g_P^F(-g_P^F + g_S^F + 3g_V^F) + 4g_V^F(g_V^F - 2g_S^F), \quad (3.115)$$

$$\beta_V^F = \partial_t g_V^F = g_V^F + 2g_V^F \left(g_V^F - \frac{5}{3}g_S^F + g_P^F \right). \quad (3.116)$$

3.4. Invariante Unterräume

Als *invarianten Unterraum* des Theorieraums versteht man einen Unterraum, in dem man verbleibt, wenn man die Kopplungen ausgehend von einem Anfangswert in diesem Unterraum fließen lässt. Es lässt sich zeigen, dass jede Gerade durch den Ursprung und einen der Fixpunkte in der Trunkierung mit Vier-Fermi-Termen stets einen invarianten Unterraum des Theorieraums darstellt (s. Abschnitt 3.5.1). Darüber hinaus können jedoch weitere invariante Unterräume existieren.

Bei näherer Betrachtung der Flussgleichungen stellt man fest, dass mindestens sechs offensichtliche invariante Unterräume existieren. Man erhält diese dadurch, dass man einige Kopplungen in der Flussgleichung Null setzt. Werden sie von den anderen Kopplungen nicht erzeugt, d. h., verschwindet die Betafunktion der entsprechenden Kopplungen identisch, so handelt es sich um einen invarianten Unterraum.

Die hier auftretenden invarianten Unterräume sind:

¹³Dabei sollen wieder die Umskalierungen (3.90, 3.99) berücksichtigt werden.

¹⁴Die Flussgleichungen (3.114 ... 3.116) sind völlig analog zu den Gleichungen (71 ... 73) in [15, Kap. IV.C.], wenn man die Transformationen $g_{D2} = g_P^F - 2g_V^F$, $g_{C1} = g_S^F - g_V^F$ und $g_\alpha = -g_V^F$ verwendet und die unterschiedliche Skalierung beachtet (zusätzlicher Faktor -3).

1. $\mathbf{g} = (g_S, 0, 0, 0)$: Der Raum der nur aus der Gross-Neveu-Wirkung gebildet wird. Die zugehörige Theorie wird durch das Gross-Neveu-Modell beschrieben [31]. Er soll als Gross-Neveu-Unterraum oder Unterraum g_S bezeichnet werden.
2. $\mathbf{g} = (0, g_P, 0, 0)$: Raum in dem nur die Pseudoskalar-Wechselwirkung auftritt. Bezeichnung: Unterraum g_P
3. $\mathbf{g} = (g_S, g_P, 0, 0)$: invarianter Unterraum aus Skalar- und Pseudoskalarkopplung. Bezeichnung: Raum g_S - g_P
4. $\mathbf{g} = (0, g_P, g_V, 0)$: invarianter Unterraum aus Pseudoskalar- und Vektorkopplung. Dieser entspricht dem vervollständigten Modell, das die gleichen Symmetrien wie das Thirring-Modell besitzt, wie es in [20, Kap. 4] beschrieben wird. Er soll im Folgenden als thirring-artiger Raum bzw. Raum g_P - g_V bezeichnet werden.
5. $\mathbf{g} = (0, g_P, 0, g_T)$: invarianter Unterraum aus Pseudoskalar- und Tensorkopplung. Bezeichnung: Raum g_P - g_T .
6. $\mathbf{g}^D = (g_S^D, 0, g_V^D, 0)$: Dieser invariante Unterraum zeigt sich in der vollständig fierztransformierten Basis \mathbf{B}^D . Setzt man in dieser die Kopplungen $g_P^D = g_A^D = 0$ so erhält man den invarianten Unterraum g_S^D - g_V^D .

Die ersten beiden Fälle sind eindimensional und entsprechen dem Typ Unterraum, der durch die Verbindungsgerade zwischen Ursprung und einem Fixpunkt gebildet wird. Da sie außerdem beide im Raum g_S - g_P enthalten sind, sowie der Unterraum g_P auch in den anderen beiden anderen Unterräumen, sollen sie im Folgenden nicht gesondert betrachtet werden.

In den einzelnen Unterräumen vereinfachen sich die nichtverschwindenden Flussgleichungen in folgender Weise:

- zu 3.: Raum g_S - g_P - g_V

$$\beta_S = \partial_t g_S = g_S + \frac{1}{N_f} \left[(-4N_f + 2)g_S^2 + 2g_S g_P \right] \quad (3.117)$$

$$\beta_P = \partial_t g_P = g_P + \frac{1}{N_f} \left[(-4N_f + 2)g_P^2 + 2g_P g_S \right] \quad (3.118)$$

- zu 4.: Raum g_P - g_V ¹⁵:

$$\beta_P = \partial_t g_P = g_P + \frac{1}{N_f} \left[(-4N_f + 2)g_P^2 + 6g_P g_V + 4g_V^2 \right] \quad (3.119)$$

$$\beta_V = \partial_t g_V = g_V + \frac{1}{N_f} \left[\frac{4N_f + 2}{3} g_V^2 + 2g_P g_V \right] \quad (3.120)$$

- zu 5.: Die Gleichungen für den Raum g_P - g_T sind exakt die gleichen, wie für den Raum g_P - g_V (3.119, 3.120), wenn man überall g_V durch g_T ersetzt. Folglich sind auch die Fixpunkte und alle anderen Ergebnisse völlig analog zum Raum g_P - g_V , so dass im Folgenden nur dieser untersucht werden soll. Die Ergebnisse für den Raum g_P - g_T erhält man dann, indem man die Werte für g_V denen für g_T zuordnet.

¹⁵Diese Flussgleichungen sind identisch mit den Gleichungen (4.36, 4.37) in [20, Kap. 4] unter Beachtung der um den Faktor 4 unterschiedlichen Skalierung.

- zu 6.: Hier müssen sowohl die Kopplungskonstanten als auch die Beta-Funktionen in die vierztransformierte Basis umgerechnet werden. Das Ergebnis lautet:

$$\beta_S^D = \partial_t g_S^D = g_S^D + \frac{1}{-g_V N_f} \left[-5(g_S^D)^2 + (4N_f - 6)g_S^D g_V^D + (4N_f + 3)(g_V^D)^2 \right] \quad (3.121)$$

$$\beta_V^D = \partial_t g_V^D = g_V^D + \frac{1}{3N_f} \left[(2N_f - 7)(g_S^D)^2 + (8N_f - 10)g_S^D g_V^D + (14N_f - 7)(g_V^D)^2 \right] \quad (3.122)$$

3.5. Untersuchung der Fixpunkte

Aus den Flussgleichungen erhält man die Fixpunkte durch Nullsetzen aller Betafunktionen

$$\beta_i := \partial_t g_i = 0 \quad \forall i. \quad (3.123)$$

Jeder Fixpunkt beschreibt damit einen Punkt im Theorieraum, an dem die zugehörige Theorie skaleninvariant ist. Der Fluss verändert die Theorie nicht, sie bleibt auf allen Skalen die gleiche. Im Folgenden sollen die Lage und das Verhalten der Fixpunkte in Abhängigkeit der Flavorzahl N_f untersucht werden.

3.5.1. Grundlegende Eigenschaften

Die berechneten Betafunktionen (3.101 . . . 3.104), und allgemeiner alle Betafunktionen für die Kopplungen einer Theorie mit ausschließlich Vier-Fermi-Wechselwirkungstermen, sind von der folgenden quadratischen Form¹⁶ in den Kopplungskonstanten¹⁷:

$$\beta_i = (d - 2)g_i + g_k A_{kl}^i g_l \quad (3.124)$$

Die Matrix A_{kl}^i ist symmetrisch in den unteren Indizes. Die zugehörige Stabilitätsmatrix B_{ij} am Fixpunkt \mathbf{g}^* mit $\beta_i(\mathbf{g}^*) = 0, \forall i$, lautet:

$$B_{ij} := \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{\mathbf{g}^*} = (d - 2)\delta_{ij} + 2g_k^* A_{kj}^i \quad (3.125)$$

Multipliziert man diese mit dem zugehörigen Fixpunktvektor $\mathbf{g}^* \neq 0$, ergibt sich unter Benutzung der Fixpunktgleichung $\beta_i(\mathbf{g}^*) = 0$ und (3.124):

$$B_{ij} g_j^* = (d - 2)g_i^* + 2g_k^* A_{kj}^i g_j^* = -(d - 2)g_i^* \quad (3.126)$$

Daraus folgt, dass jeder Fixpunktvektor ein Eigenvektor der Stabilitätsmatrix mit dem kritischen Exponent $\Theta = d - 2$ ist¹⁸ [50]. Eine Ausnahme bildet der Gauß'sche Fixpunkt mit $\mathbf{g}^* = 0$. Für $d = 3$ Raumzeitdimensionen besitzt folglich jeder wechselwirkende Fixpunkt mit $\mathbf{g}^* \neq 0$ mindestens eine relevante Richtung mit dem kritischen Exponenten 1. Der zugehörige Eigenvektor ist der Fixpunktvektor \mathbf{g}^* selbst. Die relevante Richtung zeigt also entlang der Verbindungsgerade zwischen dem Ursprung und dem Fixpunkt.

Weiterhin lässt sich zeigen, dass diese Gerade stets einen invarianten Unterraum darstellt. Sie lässt sich wie folgt parametrisieren:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{g}^* \quad (3.127)$$

¹⁶Das folgt aus den Gleichungen (3.88) und (3.97).

¹⁷Vgl. Gleichung (3.100). Der für diese Ableitung unbedeutende Vorfaktor N_f^{-1} , soll durch eine Umskalierung der Matrix $A_{jl}^i \mapsto N_f A_{jl}^i$ eliminiert werden.

¹⁸Das entspricht einem Eigenwert von $\lambda = -(d - 2)$.

Wertet man die Betafunktionen entlang dieser Geraden aus so erhält man:

$$\beta_i(\lambda \mathbf{g}^*) = (d-2)\lambda g_i^* + \lambda^2 g_k^* A_{kj}^i g_j^* = (d-2)(\lambda - \lambda^2)g_i^* \quad (3.128)$$

d. h., die Ableitung auf der Geraden zeigt wiederum entlang der Geraden: $\beta(\lambda \mathbf{g}^*) \propto \mathbf{g}^*$. Startet man also mit dem Fluss auf dieser Geraden, so wird man stets auf dieser bleiben, folglich handelt es sich um einen invarianten Unterraum.

3.5.2. Allgemeines Verhalten

Die Werte der Kopplungen g_i an den Fixpunkten wurden in Abhängigkeit der Flavorzahl N_f aus den Gleichungen (3.101, 3.104) numerisch berechnet. Es zeigen sich vier ausgezeichnete Werte von N_f mit besonderen Eigenschaften, an denen sich das Verhalten der Fixpunkte verändert. Diese sind $N_f = 1, \frac{4}{3}, 6$ und ein Wert etwa¹⁹ bei $a \approx 3.76237$. Außerdem ergibt sich ein wechselhaftes Verhalten für $N_f < 1$.

Die Bereiche mit unterschiedlichem Verhalten der Fixpunkte sind in Tabelle 3.3 angegeben. Darin sind die Anzahl der Lösungen der Fixpunktgleichung angegeben, sowie der Anteil davon, der rein reell ist und damit physikalisch eine Rolle spielt. Außerdem wurde die Anzahl der Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung angegeben, da diese für mögliche Theorien in der Anwendung am interessantesten sind. Im Allgemeinen erwartet man $2^4 = 16$ Lösungen der vier quadratischen Fixpunktgleichungen.

| N_f | Anzahl Fixpunkte | davon reell | Anzahl FP mit genau einer relevanten Richtung |
|-------------------|------------------|-------------|---|
| <0.3 | 16 | 16 | 4 |
| 0.3 - 0.5 | 16 | 16 | 2 |
| 0.5 | 12 | 12 | 2 |
| 0.5 - 0.93 | 16 | 16 | 3 |
| 0.93 - 1 | 16 | 16 | 5 |
| 1 | 7 | 7 | 3 |
| $1 - \frac{4}{3}$ | 16 | 16 | 4 |
| $\frac{4}{3}$ | 16 | 16 | 5 |
| $\frac{4}{3} - a$ | 16 | 12 | 3 |
| a | 16 | 16 | 5 |
| $a - 6$ | 16 | 16 | 4 |
| 6 | 16 | 16 | 6 |
| > 6 | 16 | 16 | 4 |
| ∞ | 16 | 16 | 4 |

Tabelle 3.3.: Anzahl der Fixpunkte in Abhängigkeit von N_f

Abgesehen vom Verhalten für $N_f < 1$ fällt Folgendes auf:

1. Für $N_f = 1$ muss man wegen der Fierzidentität (3.108) Fixpunktgleichungen nur für die drei Kopplungen \mathbf{g}^F lösen. Es ergeben sich 7 Fixpunkte, von denen 3 genau eine relevante Richtung besitzen. Aus den drei quadratischen Fixpunktgleichungen erwartet man $2^3 = 8$ Lösungen, von denen einer im Unendlichen liegt.

¹⁹Der exakte Wert lautet $a = \frac{1}{9} \left(-4 + \sqrt[3]{9872 - 144\sqrt{3345}} + 2\sqrt[3]{2(617 + 9\sqrt{3345})} \right) \approx 3.76237203$.

2. Zwischen $\frac{4}{3}$ und a sind vier der Fixpunkte komplex und damit unphysikalisch, so dass sich die Zahl der zu untersuchenden Fixpunkte auf 12 erniedrigt. Das betrifft insbesondere die Werte $N_f = 2$ und 3.
3. Bei den Werten $\frac{4}{3}$, a und 6 gibt es Veränderungen in der Anzahl der relevanten Richtungen bestimmter Fixpunkte (s. Abschnitt 3.5.4). An diesen Punkten tritt ein Übergang von einer relevanten in eine irrelevante Richtung oder umgekehrt auf. Exakt an dem Punkt ist die Richtung gerade marginal. Da einige der Fixpunkte am Übergang zusammenfallen, ist die Anzahl der Fixpunkte mit einer relevanten Richtung jeweils erhöht.
4. Für $N_f > 6$ erhält man 16 reelle Fixpunkte, von denen 4 genau eine relevante Richtung besitzen. Die Berechnungen für große N_f legen nahe, dass sich an diesem Verhalten für zunehmendes N_f nichts mehr ändert.
5. Im Grenzfall $N_f \rightarrow \infty$ bleibt dieses Verhalten bestehen. Hier entkoppeln die vier Flussgleichungen (3.101 . . . 3.104) vollständig. Die Flussgleichung jeder Kopplung hängt nur noch von dieser Kopplung selbst ab. Die daraus erhaltenen Werte der Kopplungen mit verschwindendem Fluss betragen 0 und $\frac{1}{4}$ sowohl für g_S als auch g_P , sowie 0 und $-\frac{3}{4}$ jeweils für g_V und g_T . Damit bilden die 16 Fixpunkte für $N_f \rightarrow \infty$ die Ecken eines vierdimensionalen Hyperkubus mit den „äußeren“ Ecken $\mathbf{g} = (0, 0, 0, 0)$ und $\mathbf{g} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$.

3.5.3. Fixpunkte in den invarianten Unterräumen

Unterraum g_S - g_P

Im Unterraum g_S - g_P erhält man vier Fixpunkte aus den Gleichungen (3.117, 3.118). Sie sind für jedes reelle $N_f > 0$ definiert, außer für $N_f = \frac{1}{2}$, dort existieren die Fixpunkte \mathcal{S} und \mathcal{P} nicht, sowie $N_f = 1$, wo \mathcal{SP} nicht definiert ist. Die Fixpunkte sind stets reell und lauten:

$$\mathcal{O} : (0, 0, 0, 0), \quad (3.129)$$

$$\mathcal{S} : \left(\frac{N_f}{4N_f - 2}, 0, 0, 0 \right), \quad (3.130)$$

$$\mathcal{P} : \left(0, \frac{N_f}{4N_f - 2}, 0, 0 \right), \quad (3.131)$$

$$\mathcal{SP} : \left(\frac{N_f}{4(N_f - 1)}, \frac{N_f}{4(N_f - 1)}, 0, 0 \right). \quad (3.132)$$

\mathcal{O} ist der Gauß'sche Fixpunkt, die anderen drei \mathcal{S} , \mathcal{P} , \mathcal{SP} sind nicht-Gauß'sche Fixpunkte, die danach benannt wurden, welche Kopplungen bei ihnen ungleich Null sind. Abbildung 3.1 zeigt die Lage der Fixpunkte in der Ebene g_S - g_P für verschiedene Werte von N_f . Die zugehörigen kritischen Exponenten und RG-Richtungen als (negative) Eigenwerte und Eigenvektoren der Stabilitätsmatrix

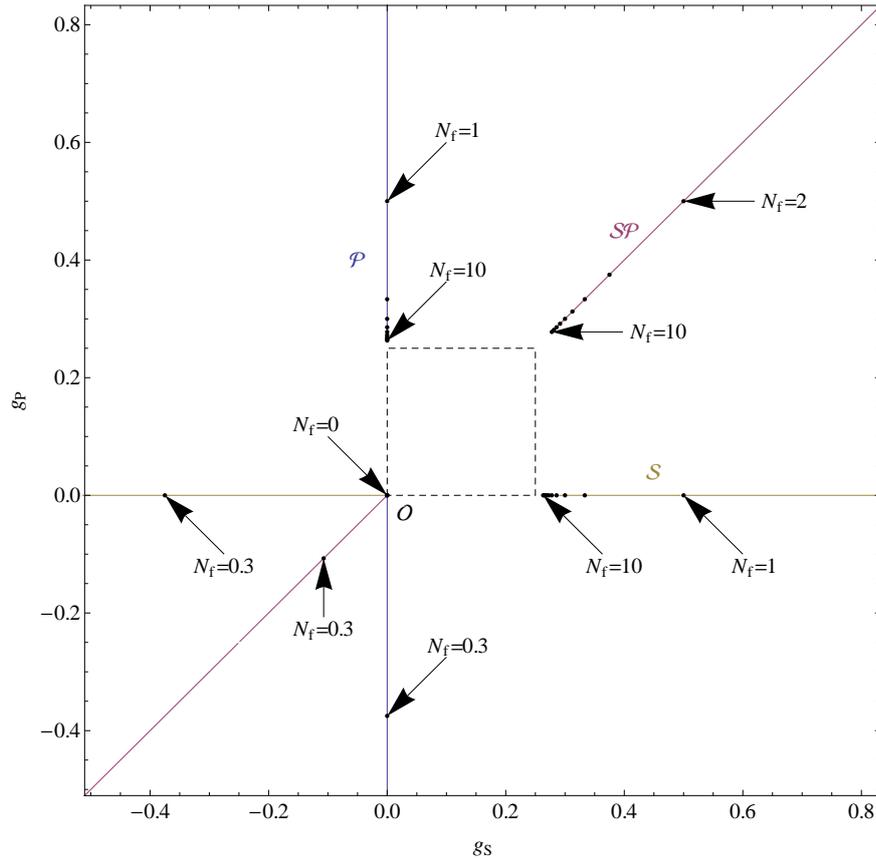


Abbildung 3.1.: Lage der Fixpunkte in der Ebene g_S - g_P für $0 \leq N_f \leq 10$. Es sind Fixpunkte bei bestimmten Werten von N_f gekennzeichnet, um die Richtung der Entwicklung mit N_f deutlich zu machen. Für $N_f \rightarrow \infty$ liegen die Fixpunkte auf den Ecken eines Rechtecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$ und $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (gestrichelt).

für alle vier betrachteten Kopplungen lauten:

| Fixpunkt | kritische Exponenten | zugehörige RG-Richtungen |
|----------------|--|--|
| \mathcal{O} | $-1, -1, -1, -1$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| \mathcal{S} | $1, \frac{2N_f}{1-2N_f}, \frac{2N_f}{1-2N_f}, \frac{8-6N_f}{6N_f-3}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{6}{4N_f-1} \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4N_f-1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ |
| \mathcal{P} | $1, \frac{2N_f}{1-2N_f}, \frac{2N_f}{1-2N_f}, \frac{2N_f}{1-2N_f}$ | $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4N_f-1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ |
| \mathcal{SP} | $1, \frac{1}{3(N_f-1)} - 1, -\frac{N_f}{N_f-1}, \frac{N_f}{N_f-1}$ | $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{2N_f-1} \\ \frac{3}{2N_f-1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ |

Das Verhalten der kritischen Exponenten in Abhängigkeit von N_f ist in den Diagrammen 3.2 auf Seite 38 und 3.3 auf Seite 39 dargestellt.

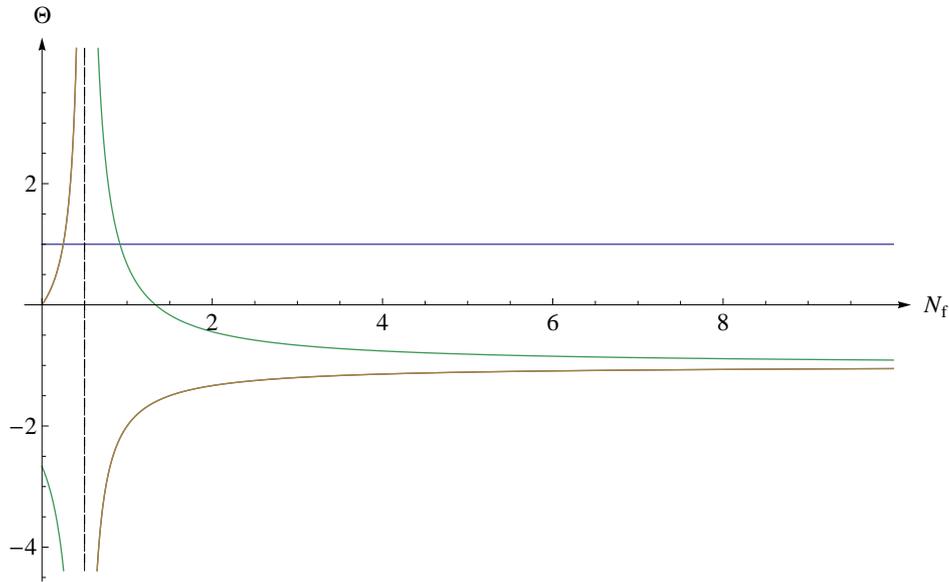


Abbildung 3.2.: Kritische Exponenten Θ in Abhängigkeit von N_f für den Fixpunkt \mathcal{S} . Die ockerfarbene Linie ist zweifach entartet.

Die Abhängigkeit der kritischen Exponenten des Fixpunkts \mathcal{P} ist ähnlich der des Fixpunkts \mathcal{S} , nur dass dort die grüne Linie in Abbildung 3.2 fehlt und dafür die ockerfarbene Linie dreifach statt zweifach entartet ist. Es gibt also einen qualitativen Unterschied zwischen beiden Fixpunkten: Im Rahmen des verallgemeinerten Gross-Neveu-Modells unterscheiden sie sich in einem der vier kritischen Exponenten.

Besonders interessant sind die Nulldurchgänge der kritischen Exponenten. Solche beobachtet man für den vierten kritischen Exponenten von \mathcal{S} (grün in Abbildung 3.2), sowie für den zweiten von \mathcal{SP} (magenta in Abbildung 3.3). Beide treten für den Wert $N_f = \frac{4}{3}$ auf. An diesem Punkt geht jeweils einer der kritischen Exponenten vom Positiven ins Negative über, d. h., die zugehörige Richtung ändert sich von relevant zu irrelevant.

Der Fixpunkt \mathcal{S} besitzt für $0 \leq N_f < \frac{1}{2}$ drei relevante Richtungen, da die ockerfarbene Linie in Abbildung 3.2 zweifach entartet ist. Bei $N_f = \frac{1}{2}$ divergieren die kritischen Exponenten, bis auf die Konstante 1. Für $\frac{1}{2} < N_f < \frac{4}{3}$, besitzt der Fixpunkt zwei relevante Richtungen, oberhalb von $N_f = \frac{4}{3}$ nur noch eine. An der Stelle $N_f = \frac{4}{3}$ ist eine Richtung marginal.

Der Fixpunkt \mathcal{P} zeigt ebenfalls eine Divergenz der nichttrivialen Fixpunkte bei $N_f = \frac{1}{2}$. Unterhalb davon hat er vier relevante Richtungen, oberhalb davon nur noch eine.

Für den Fixpunkt \mathcal{SP} gilt: Für $0 \leq N_f < 1$ gibt es zwei relevante Richtungen. Bei $N_f = 1$ divergieren die nichttrivialen kritischen Exponenten. Der Fixpunkt existiert für diesen Fall nicht (bzw. liegt im Unendlichen). Für $1 < N_f < \frac{4}{3}$ hat der Fixpunkt drei relevante Richtungen, bei $N_f = \frac{4}{3}$ wird eine davon marginal, oberhalb davon irrelevant, so dass er für $N_f > \frac{4}{3}$ nur noch zwei relevante Richtungen besitzt.

Unterraum g_P-g_V (analog zum Unterraum g_P-g_T)

Wie in Abschnitt 3.4 erwähnt, zeigen die invarianten Unterräume g_P-g_V und g_P-g_T sowohl qualitativ als auch quantitativ das gleiche Verhalten bezüglich der Fixpunkte. Deshalb soll hier nur der

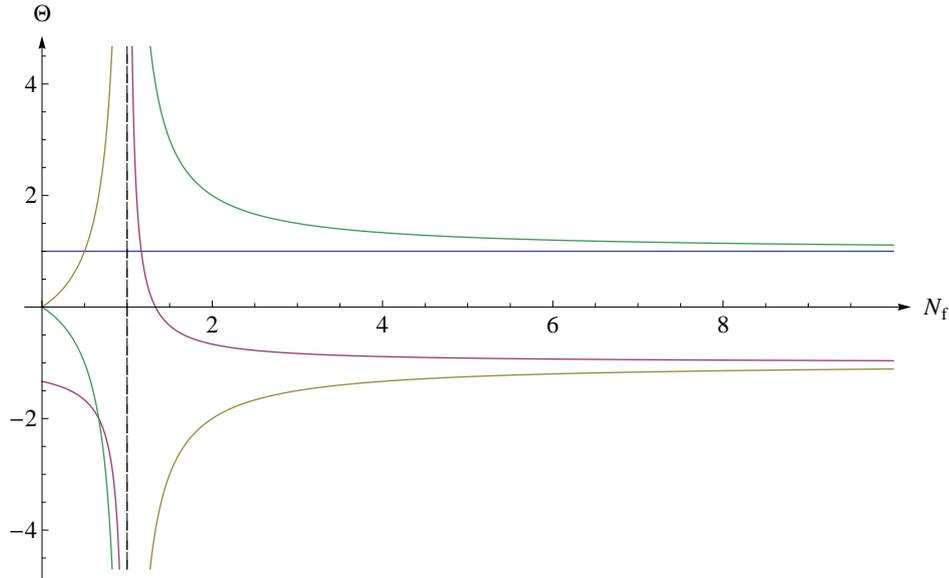


Abbildung 3.3.: Kritische Exponenten Θ in Abhängigkeit von N_f für den Fixpunkt \mathcal{SP} .

Unterraum g_P - g_V diskutiert werden. Die Ergebnisse für g_P - g_T erhält man völlig analog, indem man überall g_V durch g_T ersetzt.

Durch Nullsetzen der Flussgleichungen (3.119, 3.120) erhält man vier Fixpunkte²⁰. Sie sind für jedes reelle $N_f > 0$ außer $N_f = \frac{1}{2}$ definiert und lauten in Abhängigkeit von N_f :

$$\mathcal{O} : (0, 0, 0, 0), \quad (3.133)$$

$$\mathcal{P} : \left(0, \frac{N_f}{4N_f - 2}, 0, 0\right), \quad (3.134)$$

$$\mathcal{B}_V : \left(0, \frac{N_f(2N_f^2 - 7N_f + (2N_f + 1)\sqrt{N_f(N_f + 28) + 16 + 4})}{4(2N_f(2N_f^2 + N_f + 4) - 5)}, -\frac{3N_f(4N_f^2 + N_f + \sqrt{N_f(N_f + 28) + 16 + 4})}{4(2N_f(2N_f^2 + N_f + 4) - 5)}, 0\right), \quad (3.135)$$

$$\mathcal{C}_V : \left(0, \frac{N_f(2N_f^2 - 7N_f - (2N_f + 1)\sqrt{N_f(N_f + 28) + 16 + 4})}{4(2N_f(2N_f^2 + N_f + 4) - 5)}, -\frac{3N_f(4N_f^2 + N_f - \sqrt{N_f(N_f + 28) + 16 + 4})}{4(2N_f(2N_f^2 + N_f + 4) - 5)}, 0\right). \quad (3.136)$$

Der Gauß'sche Fixpunkt \mathcal{O} , wie auch der Fixpunkt \mathcal{P} liegen ebenso in diesem invarianten Unterraum. Zusätzlich treten die Fixpunkte \mathcal{B}_V und \mathcal{C}_V auf²¹, bei letzterem handelt es sich um den sogenannten Thirring-Fixpunkt. Die Lage der Fixpunkte ist in Abbildung 3.4 auf Seite 40 dargestellt. Die zugehörigen kritischen Exponenten und Richtungen lassen sich ebenfalls analytisch berechnen, indem man die Stabilitätsmatrix für alle vier Kopplungen diagonalisiert, die erhaltenen Ausdrücke sind jedoch recht umfangreich. Für die beiden Fixpunkte \mathcal{B}_V und \mathcal{C}_V ist die Abhängigkeit der kritischen Exponenten von N_f in den Diagrammen 3.5 auf Seite 41 und 3.6 auf Seite 42 dargestellt. Der Fixpunkt \mathcal{P} wurde bereits im vorherigen Abschnitt besprochen.

Man beobachtet jeweils einen Nulldurchgang eines kritischen Exponenten für $N_f = 6$. An dieser Stelle erniedrigt sich die Anzahl der relevanten Richtungen bei beiden Fixpunkten jeweils um eins.

Die nichttrivialen kritischen Exponenten des Fixpunkts \mathcal{B}_V divergieren bei $N_f = \frac{1}{2}$, darunter besitzt der Fixpunkt zwei relevante Richtungen. Zwischen $N_f = \frac{1}{2}$ und $N_f = 6$ treten drei relevante

²⁰Diese Fixpunkte stimmen mit denen aus [20, Kap. 4] überein. Dabei wurde jedoch eine leicht andere Skalierung vorgenommen, so dass die dortigen Werte der Fixpunkte gegenüber obigen um den Faktor 4 größer sind. Die Bezeichnung für \mathcal{B} und \mathcal{C} wurde übernommen (unter Ergänzung des Indexes V zur Unterscheidung der invarianten Unterräume), der dort genannte Fixpunkt \mathcal{A} ist mit \mathcal{P} identisch.

²¹Die analogen Fixpunkte im Unterraum g_P - g_T sollen mit \mathcal{B}_T und \mathcal{C}_T bezeichnet werden.

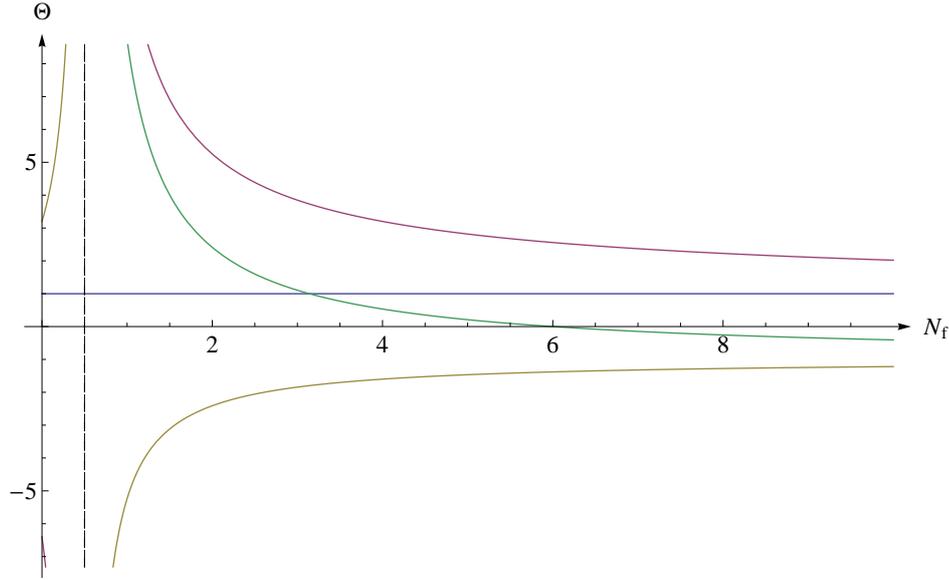


Abbildung 3.5.: Kritische Exponenten Θ in Abhängigkeit von N_f für den Fixpunkt \mathcal{B}_V .

und reell. Sie lauten:

$$\mathcal{O} : (0, 0, 0, 0), \quad (3.137)$$

$$\mathcal{SP} : \left(\frac{N_f}{8(1-N_f)}, 0, \frac{N_f}{8(1-N_f)}, 0 \right), \quad (3.138)$$

$$\mathcal{D} : \left(\frac{N_f(N_f(17N_f + \sqrt{N_f(N_f+56)+64+16}) - 8\sqrt{N_f(N_f+56)+64+44})}{16(N_f-1)(N_f(N_f+2)+10)}, 0, \right. \\ \left. \frac{N_f(-7N_f^2 + 4N_f + (N_f+4)\sqrt{N_f(N_f+56)+64-52})}{16(N_f(N_f^2+N_f+8)-10)}, 0 \right), \quad (3.139)$$

$$\mathcal{E} : \left(\frac{N_f(N_f(17N_f - \sqrt{N_f(N_f+56)+64+16}) + 8\sqrt{N_f(N_f+56)+64+44})}{16(N_f-1)(N_f(N_f+2)+10)}, 0, \right. \\ \left. \frac{N_f(-7N_f^2 + 4N_f - (N_f+4)\sqrt{N_f(N_f+56)+64-52})}{16(N_f(N_f^2+N_f+8)-10)}, 0 \right). \quad (3.140)$$

Der Fixpunkt \mathcal{SP} liegt ebenfalls in diesem Unterraum, da für $g_P^D = g_A^D = 0$ gilt, dass $g_S = g_P = \frac{1}{2}(-g_S^D - 3g_V^D)$. Die angegebenen Koordinaten unterscheiden sich von denen in Gleichung (3.132), da sie sich auf die Kopplungskonstanten \mathbf{g}^D in der vollständig fierztransformierten Basis beziehen.

Außerdem gilt in diesem Unterraum $g_V = g_T = \frac{1}{2}(-g_S^D + g_V^D)$. Damit weisen alle Fixpunkte, die in diesem Unterraum liegen, in der Singulett-Basis \mathbf{B}^S mit den Kopplungskonstanten $\mathbf{g} = (g_S, g_P, g_V, g_T)$ die Struktur (a, a, b, b) auf. Dabei sind nur für \mathcal{D} und \mathcal{E} die Werte der Kopplungen g_V und g_T ungleich Null.

Die Lage der Fixpunkte im Unterraum $g_S^D - g_V^D$ ist in Abbildung 3.7 auf Seite 43 in Abhängigkeit von N_f dargestellt. Man erkennt, dass es einen Wert N_f gibt, für den der Fixpunkt \mathcal{D} auf der Achse g_S^D liegt, das ist gerade für $N_f = 3.5$ der Fall.

Die kritischen Exponenten und Richtungen lassen sich ebenfalls analytisch ermitteln, auf ihre Angabe soll der Übersichtlichkeit halber verzichtet werden. Das Verhalten der kritischen Exponenten der Fixpunkte \mathcal{D} und \mathcal{E} ist in den Abbildungen 3.8 auf Seite 44 und 3.9 auf Seite 45 dargestellt. Das entsprechende Diagramm für den Fixpunkt \mathcal{SP} findet man im Abschnitt zum Unterraum $g_S - g_P$.

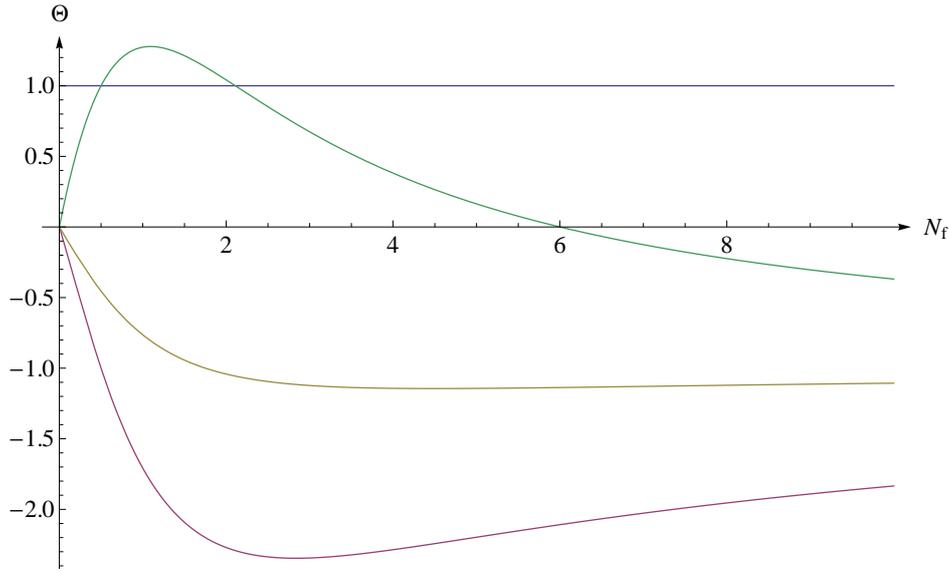


Abbildung 3.6.: Kritische Exponenten Θ in Abhängigkeit von N_f für den Fixpunkt \mathcal{C}_V .

Beide Fixpunkte weisen jeweils einen entarteten kritischen Exponenten auf. Für den Fixpunkt \mathcal{D} ist das der Exponent, der für alle N_f negativ ist (ockerfarben in Abbildung 3.8) und für \mathcal{E} der größte kritische Exponent für $N_f > 1$ (grün in Abbildung 3.9).

Ein kritischer Exponent des Fixpunkts \mathcal{D} besitzt einen Nulldurchgang bei $N_f = a \approx 3.8$.²² Dort ändert sich die Zahl der relevanten Richtungen von eins auf zwei, direkt bei a ist die zugehörige Richtung marginal.

Die kritischen Exponenten (außer dem trivialen Exponenten 1) des Fixpunkts \mathcal{E} divergieren bei $N_f = 1$, dort ist der Fixpunkt nicht definiert. Unterhalb davon besitzt er eine, oberhalb vier relevante Richtungen.

3.5.4. Untersuchung der Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung

Für die Anwendung besonders interessant sind Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung. Die Anzahl der relevanten Richtungen ist gleich der Anzahl der physikalischen Parameter, die festgelegt werden müssen, um eine Theorie vollständig zu bestimmen. Somit genügt für sie die Angabe eines Parameters.

Wie in Abschnitt 3.5.1 gezeigt, besitzt jeder Fixpunkt außer dem Gauß'schen Fixpunkt stets mindestens eine relevante Richtung. Diese gehört zum kritischen Exponenten 1 und zeigt in Richtung des Fixpunkts. Die Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung besitzen also nur diesen kritischen Exponenten größer als Null, alle anderen Richtungen sind irrelevant bzw. ggf. marginal.

Die Betrachtung soll in der Basis \mathbf{B}^S mit den Kopplungen $\mathbf{g} = (g_S, g_P, g_V, g_T)$ durchgeführt werden. Des Weiteren beschränken wir uns hier und im Folgenden auf den Bereich $N_f \geq 1$, da nur dieser physikalisch sinnvoll ist:

- Für $N_f = 1$ gibt es 4 Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung für die Kopplungskonstanten \mathbf{g} . Einer davon ist der Fixpunkt $\mathcal{P} = (0, -\frac{1}{2}, 0, 0)$ mit den kritischen Exponenten $(-2, -2, -2, 1)$. Bei den drei anderen sind alle vier Kopplungen von Null verschieden.

²²Für den exakten Wert von a s. Fußnote 19 auf Seite 35.

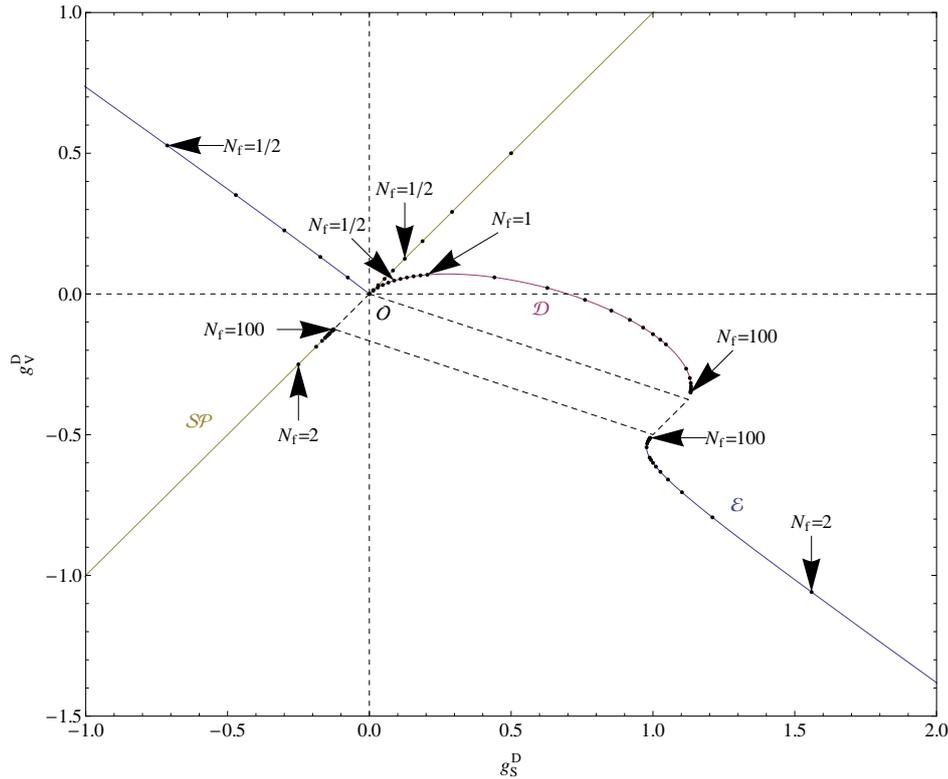


Abbildung 3.7.: Lage der Fixpunkte in der Ebene $g_S^D - g_V^D$ für $0 \leq N_f \leq 100$. Es sind Fixpunkte bei bestimmten Werten von N_f gekennzeichnet, um die Richtung der Entwicklung mit N_f deutlich zu machen. Für $N_f \rightarrow \infty$ liegen die Fixpunkte auf den Ecken eines Parallelogramms (gestrichelt).

Ein weiterer ist der Fixpunkt $\mathcal{D} = \left(-\frac{9}{44}, -\frac{9}{44}, -\frac{3}{44}, -\frac{3}{44}\right)$ mit den kritischen Exponenten $(-1, -1, -1, 1)$.

Die anderen beiden Fixpunkte haben unregelmäßige Werte der Kopplungen, zeigen jedoch im Verhältnis zueinander eine gewisse Übereinstimmung. Sie unterscheiden sich nur in der Reihenfolge der Werte von g_V und g_T , haben also die Form (c, d, e, f) bzw. (c, d, f, e) mit $f > 0$, $e < 0$, und besitzen beide die gleichen kritischen Exponenten. Sie sollen mit \mathcal{F} bzw. \mathcal{G} bezeichnet werden. Für $N_f = 1$ lauten die Werte:

$$c = -\frac{15}{44}(\sqrt{5} - 3), d = \frac{1}{22}(28 - 13\sqrt{5}), e = -\frac{3}{22}(3 - \sqrt{5}), f = \frac{5}{44}(3 - \sqrt{5}) \quad (3.141)$$

und die kritischen Exponenten

$$5 - 3\sqrt{5}, \frac{5}{3}(\sqrt{5} - 3), 1, \sqrt{5} - 3. \quad (3.142)$$

Berücksichtigt man die Fierzidentität (3.108) für $N_f = 1$ und betrachtet die Fixpunkte in den Kopplungen \mathbf{g}^F , so ergeben sich drei Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung. Sie

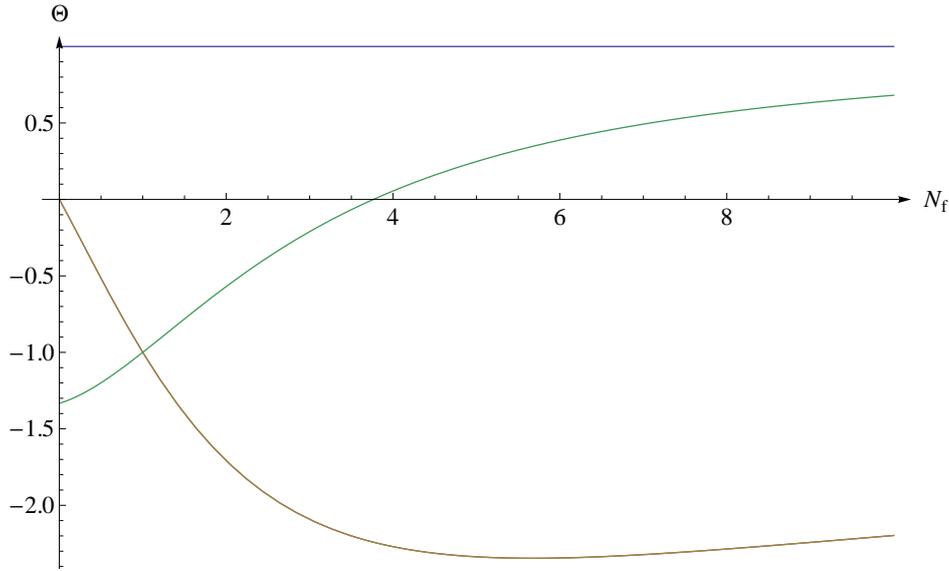


Abbildung 3.8.: Kritische Exponenten Θ in Abhängigkeit von N_f für den Fixpunkt \mathcal{D} . Die ockerfarbene Linie ist zweifach entartet.

lauten

$$\mathcal{P} : \mathbf{g}^{\mathbf{F}} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \quad (3.143)$$

$$\mathcal{F} : \mathbf{g}^{\mathbf{F}} = \left(0, \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}), \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 3)\right) \quad (3.144)$$

$$\mathcal{G} : \mathbf{g}^{\mathbf{F}} = \left(-\frac{3}{4}(\sqrt{5} - 3), \frac{5}{2} - \sqrt{5}, \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})\right) \quad (3.145)$$

Mit den passenden Werten für g_T sind sie identisch mit den oben genannten Fixpunkten in den Kopplungen \mathbf{g} .²³

- Für $1 < N_f < \frac{4}{3}$ gibt es 4 Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung. Bei einem davon handelt es sich um den Fixpunkt \mathcal{P} . Ein weiterer ist der Fixpunkt \mathcal{D} . Bei diesem sind jeweils die Werte der Kopplungen g_S und g_P bzw. g_V und g_T gleich, er hat also die Form (a, a, b, b) . Die verbleibenden zwei Fixpunkte \mathcal{F} bzw. \mathcal{G} besitzen die Form wie oben angegeben.
- Für $N_f = \frac{4}{3}$ treten 5 Fixpunkte mit einer relevanten Richtung auf. Einer ist $\mathcal{P} = (0, 0.4, 0, 0)$ mit den kritischen Exponenten $(-1.6, -1.6, -1.6, 1)$, ein anderer \mathcal{D} von der Form (a, a, b, b) . Die verbleibenden drei Fixpunkte sind entartet bei $\mathbf{g} = (0.4, 0, 0, 0)$. Dabei handelt es sich um die Fixpunkte \mathcal{S} , \mathcal{F} und \mathcal{G} . Für sie ist eine Richtung marginal, die kritischen Exponenten lauten $(-1.6, -1.6, 1, 0)$. Wie in Abschnitt 3.5.3 erwähnt, geht der Fixpunkt \mathcal{S} für $N_f = \frac{4}{3}$ von zwei zu einer relevanten Richtung über, die anderen beiden von einer zu zwei.
- Für N_f zwischen $\frac{4}{3}$ und a gibt es nur noch drei Fixpunkte mit einer relevanten Richtung. Die beiden Fixpunkte \mathcal{F} und \mathcal{G} werden komplex und entwickeln zwei relevante Richtungen. Der Fixpunkt \mathcal{S} hingegen hat nun und im Weiteren nur noch eine relevante Richtung, wie in Abschnitt 3.5.3 beschrieben. Die Fixpunkte \mathcal{P} und \mathcal{D} in der Form (a, a, b, b) verbleiben.

²³Mit der Transformation wie in Fußnote 14 auf Seite 32 sind sie ebenfalls identisch zu den Fixpunkten aus [15, Kap. IV.C.]. Dabei entsprechen sich A und \mathcal{P} , C und \mathcal{F} , sowie E und \mathcal{G} . Der dort genannte Fixpunkt D mit zwei relevanten Richtungen entspricht in unserer Nomenklatur dem Fixpunkt \mathcal{S} .

Für den Unterraum g_P - g_V bedeutet das, dass der Fixpunkt \mathcal{C}_V für $N_f \rightarrow \infty$ zum reinen Thirring-Modell [23] gehört²⁴.

3.6. Untersuchung des Flusses

3.6.1. Untersuchung des Flusses mit Startwerten auf einer Achse

Zunächst sollen Theorien untersucht werden, die als Startwert nur eine einzige Kopplung besitzen, die drei anderen Kopplungen werden Null gesetzt. D. h., die UV-Wirkung besteht aus einem einzigen Wechselwirkungskanal. Im Verlauf des Flusses in Richtung IR können die anderen Wechselwirkungen erzeugt werden, d. h., die anderen Kopplungen treten zusätzlich auf.

Startet man auf der Achse mit einer einzigen Kopplung, so findet der Fluss abhängig vom Startwert in verschiedenen Phasen statt. Jede dieser Phasengrenzen wird durch einen Fixpunkt bestimmt, die Separatrix zu diesem Fixpunkt stellt die Phasengrenze dar. Damit gibt es einen kritischen Startwert, für den man entlang der Separatrix genau zu diesem Fixpunkt fließt. Abweichungen von diesem kritischen Wert nach oben oder unten führen jeweils in unterschiedliche Phasen des Theorieraums.

3.6.2. Singulettbasis

Es soll nun untersucht werden, welcher Fixpunkt das Verhalten des Flusses für welche Startkopplung bestimmt. Zunächst soll die Singulettbasis \mathbf{B}^S betrachtet werden. D. h., startet man auf einer bestimmten Achse des Theorieraums, so ist impliziert, dass die verbleibenden drei Kopplungen in der Basis $\mathbf{g} = (g_S, g_P, g_V, g_T)$ Null gesetzt werden.

Start auf der Achse g_S

Auf dieser Achse liegt stets der Fixpunkt \mathcal{S} mit der Koordinate $g_S^C = \frac{N_f}{4N_f - 2}$. Dies ist der kritische Wert, der die Phasen voneinander trennt. Unterhalb von g_S^C fließt man in den Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} , oberhalb divergiert die Kopplung g_S .

Einen weiteren kritischen Wert gibt es nicht, auch für negative Startwerte g_S fließt man stets in den Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} . Der Grund dafür ist, dass die Achse g_S einen invarianten Unterraum darstellt. Somit bleibt man für Startwerte auf dieser Achse auch stets auf dieser, es wird keine weitere Kopplung erzeugt. Innerhalb des invarianten Unterraums existieren nur die beiden Fixpunkte \mathcal{S} und \mathcal{O} , die folglich das gesamte Verhalten des Flusses bestimmen.

Der Fixpunkt \mathcal{S} hat für $N_f < \frac{4}{3}$ zwei und für $N_f > \frac{4}{3}$ eine relevante Richtung. Diese eine relevante Richtung ist stets vorhanden und zeigt entlang der Achse g_S .

Der invariante Unterraum entspricht dem reinen Gross-Neveu-Modell in der Formulierung nach [31] dessen kritisches Verhalten in diesem Artikel ausführlich diskutiert wird.

Start auf der Achse g_P

Bei der Achse g_P handelt es sich ebenso um einen invarianten Unterraum. Er besitzt zwei Fixpunkte, den Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} und den Fixpunkt \mathcal{P} mit $g_P^C = \frac{N_f}{4N_f - 2}$. Dieser hat stets genau eine relevante Richtung entlang der Achse g_P . Das Verhalten ist analog zum Fall für g_S : Für $g_P < g_P^C$ fließt man stets zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} , auch für negative Werte g_P . Für $g_P > g_P^C$ divergiert die Kopplung g_P .

²⁴Vgl. auch [20, Kap. 4.4]

Auch dieser Unterraum entspricht einem reinen Gross-Neveu-Modell, allerdings der Formulierung in [43, 44], wo auch dessen kritisches Verhalten beschrieben wird.

In Abbildung 3.10a ist das Phasendiagramm des invarianten Unterraum g_S - g_P exemplarisch für $N_f = 2$ angegeben. Daran kann man sowohl das Verhalten auf der Achse g_S , als auch auf der Achse g_P ablesen.

Start auf der Achse g_V

In diesem Fall ist die Achse g_V kein invarianter Unterraum, wohl aber die Ebene g_P - g_V . Startet man auf der Achse g_V so bleibt die Trajektorie des Flusses stets in dieser Ebene. Es gibt einen kritischen Wert g_V^C der eine Phasengrenze markiert. Die zugehörigen Werte sind in Tabelle 3.4 angegeben.

| N_f | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|---------|
| g_V^C | -0.2751 | -0.4554 | -0.551 | -0.604 | -0.6377 | -0.6594 | -0.6746 |

Tabelle 3.4.: Kritische Startwerte g_V^C , die die Phasengrenze auf der Achse g_V markieren, für unterschiedliche Werte von N_f .

Die Phasengrenze wird vom Fixpunkt \mathcal{C}_V bestimmt. Startet man exakt am kritischen Wert g_V^C , so fließt man zu diesem. Oberhalb dieses Wertes fließt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} , unterhalb divergieren die Kopplungen g_P und g_V . Der Fixpunkt \mathcal{C}_V hat für $N_f < 6$ zwei und für $N_f > 6$ eine relevante Richtung. Eine relevante und eine irrelevante Richtung davon liegen stets im invarianten Unterraum g_P - g_V .

Für einen Startwert $g_V > 0$ fließt man ebenfalls in den Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} . Denn alle Fixpunkte im invarianten Unterraum g_P - g_V befinden sich in der unteren Halbebene $g_V \leq 0$. Damit ist der Gauß'sche Fixpunkt mit ausschließlich irrelevanten Richtungen der bestimmende Fixpunkt für die obere Halbebene $g_V > 0$.

Abbildung 3.10b zeigt das Verhalten des Flusses im invarianten Unterraum g_P - g_V exemplarisch für $N_f = 2$.

Start auf der Achse g_T

Das Verhalten beim Start auf der Achse g_T ist vollkommen analog zu dem bei Start auf der Achse g_V . Hier befindet sich die Trajektorie des Flusses im invarianten Unterraum g_P - g_T , der vollständig äquivalent zu g_P - g_V ist.

3.6.3. Dublettbasis

Nun soll die vollständig fierztransformierte Basis \mathbf{B}^D betrachtet werden. D. h., für den Startwert auf einer Achse werden die verbleibenden drei Kopplungen des Vektors $\mathbf{g}^D = (g_S^D, g_P^D, g_V^D, g_A^D)$ Null gesetzt.

Start auf der Achse g_S^D

Startet man auf der Achse g_S^D , so befindet man sich im invarianten Unterraum g_S^D - g_V^D und damit bleibt auch die Trajektorie des Flusses in diesem Unterraum. Zur Beschreibung des typischen Verhaltens sind in Abbildung 3.11 zwei typische Phasendiagramme für verschiedene Werte N_f angegeben. Für $N_f = 3.5$ liegt der Fixpunkt \mathcal{D} gerade auf der Achse g_S^D . Dadurch gibt es einen qualitativen Unterschied zwischen $N_f < 3.5$ und $N_f > 3.5$.

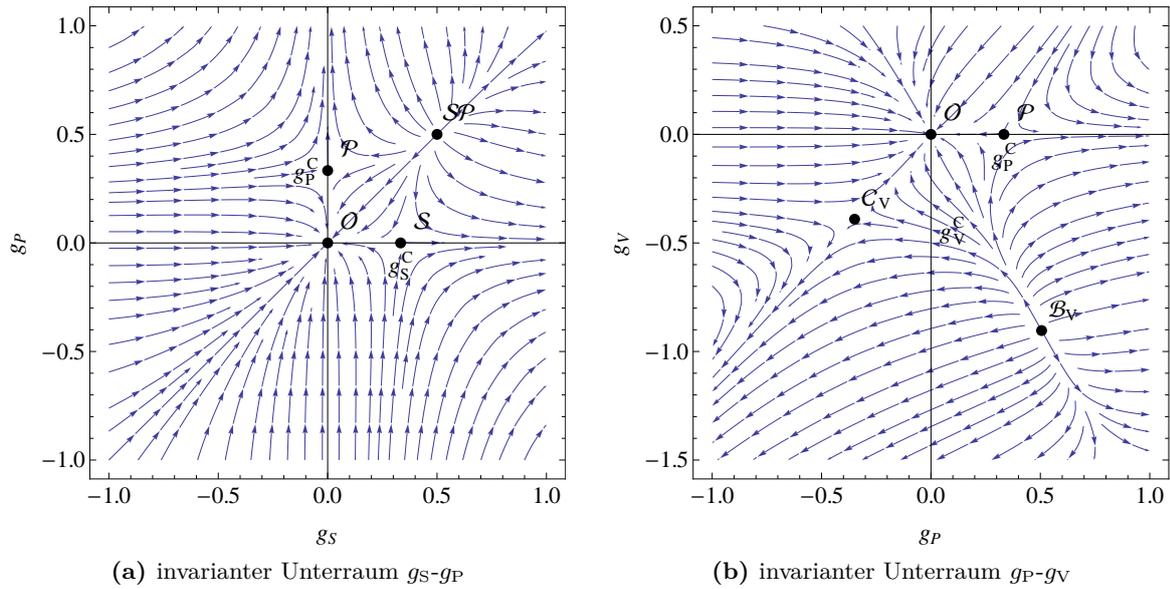


Abbildung 3.10.: Phasendiagramme des Flusses für $N_f = 2$. Die Pfeilrichtung kennzeichnet den Fluss in Richtung IR.

Für $N_f < 3.5$ gibt es nur eine kritische Kopplung g_S^{DC} , diese wird durch den Fixpunkt \mathcal{D} bestimmt. Dieser hat für $N_f < a \approx 3.8$ eine, darüber zwei relevante Richtungen. Unterhalb von g_S^{DC} und auch für negative Startwerte fließt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} . Oberhalb divergieren die Kopplungen g_S^D und g_V^D .

Für $N_f = 3.5$ wird die Kopplung g_V^D nicht angeregt, weil der Fixpunkt \mathcal{D} auf der Achse g_S^D liegt. D. h., für diesen speziellen Wert von N_f bildet die Achse g_S^D einen invarianten Unterraum.

Für $N_f > 3.5$ ist das Verhalten für positive g_S^D analog zum Fall $N_f < 3.5$ mit einer kritischen Kopplung $g_{S_1}^{DC}$. Für negative Startwerte g_S^D gibt es nun eine weitere kritische Kopplung $g_{S_2}^{DC}$, die vom Fixpunkt \mathcal{SP} bestimmt wird. Er besitzt in diesem Bereich von N_f zwei relevante Richtungen. Für $g_S^D > g_{S_2}^{DC}$ fließt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} , für $g_S^D < g_{S_2}^{DC}$ divergieren g_S^D und g_V^D .

Start auf der Achse g_P^D

Startet man mit der Kopplung g_P^D , so gibt es im Allgemeinen zwei kritische Werte $g_{P_{1/2}}^{DC}$, die eine Phasengrenze festlegen. Liegt man zwischen diesen kritischen Werten, so fließt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} ; beginnt man betragsmäßig darüber, divergieren alle Kopplungen. Es gilt $g_{P_1}^{DC} < 0$ und $g_{P_2}^{DC} > 0$.

Das Verhalten an den kritischen Kopplungen wird in Abhängigkeit von N_f von verschiedenen Fixpunkten bestimmt. Für $N_f = 1$ fließt man für $g_{P_1}^{DC} \approx -0.2703$ zum Fixpunkt \mathcal{F} mit genau einer relevanten Richtung. Für $g_{P_2}^{DC} \approx 0.8271$ fließt man zum Fixpunkt \mathcal{G} ebenfalls mit genau einer relevanten Richtung. Für $N_f \geq 2$ fließt man für $g_{P_1}^{DC}$ zum Fixpunkt \mathcal{S} und für $g_{P_2}^{DC}$ zum Fixpunkt \mathcal{P} , die jeweils genau eine relevante Richtung besitzen.

Start auf der Achse g_V^D

Beim Start auf der Achse g_V^D befindet man sich ebenfalls im invarianten Unterraum $g_S^D - g_V^D$ mit Beispieldiagrammen in Abbildung 3.11. Im Allgemeinen gibt es eine kritische Kopplung g_V^{DC} , die

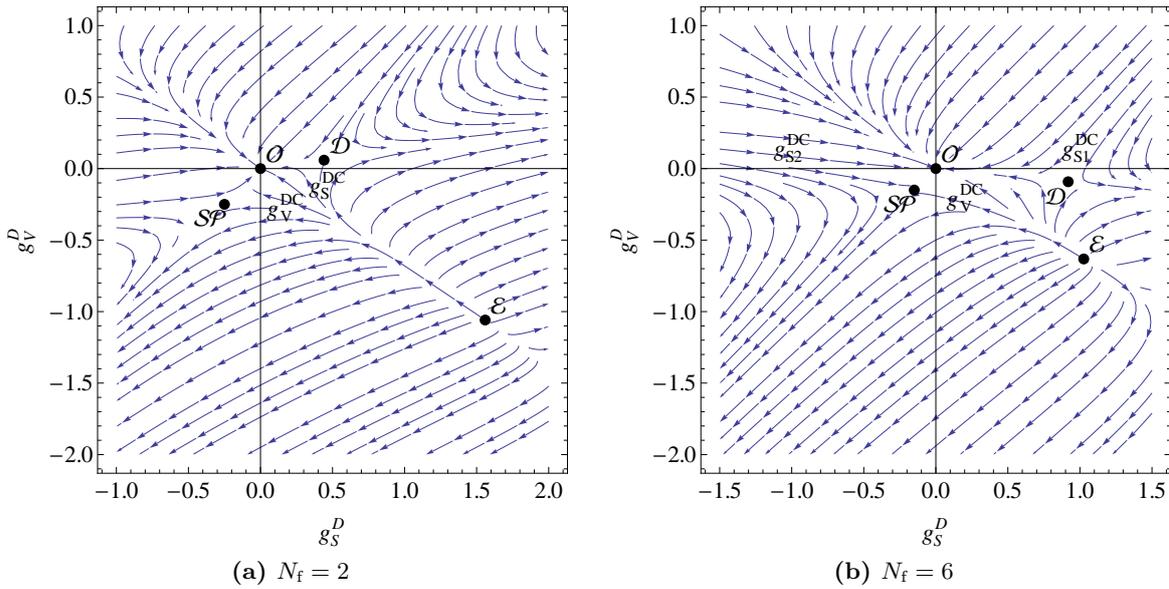


Abbildung 3.11.: Phasendiagramme des Flusses im invarianten Unterraum $g_S^D - g_V^D$. Die Pfeilrichtung kennzeichnet den Fluss in Richtung IR.

eine Phasengrenze markiert. Direkt bei der kritischen Kopplung fließt man zum Fixpunkt \mathcal{SP} . Für $N_f < \frac{4}{3}$ hat dieser drei relevante Richtungen, für höhere Flavorzahlen noch zwei. Da die verbleibende irrelevante Richtung jedoch stets im invarianten Unterraum $g_S^D - g_V^D$ liegt, zeigt der Fixpunkt in diesem dennoch ein attraktives Verhalten. Für $g_V^D > g_V^{DC}$ und für positive Werte von g_S^D gelangt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} , unterhalb der kritischen Kopplung divergieren g_S^D und g_V^D .

Eine Besonderheit weist der Fall $N_f = 1$ auf. Dort gibt es keine Phasengrenze, man strebt für alle Anfangswerte g_V^D gegen den Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} . Das liegt daran, dass in diesem Fall der Fixpunkt \mathcal{SP} nicht existiert (d. h., er liegt im Unendlichen).

Start auf der Achse g_A^D

Startet man mit der Kopplung g_A^D , so gibt es in Allgemeinen zwei kritische Werte $g_{A1/2}^{DC}$, die eine Phasengrenze festlegen. Liegt man zwischen diesen kritischen Werten, so fließt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} ; beginnt man betragsmäßig darüber, divergieren alle Kopplungen. Es gilt $g_{A1}^{DC} < 0$ und $g_{A2}^{DC} > 0$.

Ähnlich wie beim Start auf der Achse g_P^D ergibt sich auch hier ein abweichendes Verhalten für $N_f = 1$. In diesem Fall fließt man für $g_{A1}^{DC} \approx -0.1632$ zum Fixpunkt \mathcal{G} . Für $g_{A2}^{DC} \approx 0.2724$ gelangt man zum Fixpunkt \mathcal{P} .

Für $N_f \geq 2$ fließt man für g_{A1}^{DC} zum Fixpunkt \mathcal{S} und für g_{A2}^{DC} zum Fixpunkt \mathcal{P} .

3.6.4. Untersuchung des Flusses beginnend vom Fixpunkt \mathcal{C}_V

Beginnt man mit einer Theorie, deren Anfangsparameter sich in einer Umgebung des Fixpunkts \mathcal{C}_V befinden, so kann sich der Fluss der Kopplungskonstanten abhängig von den Anfangswerten in verschiedene Bereiche des Theorieraums entwickeln.

Dieser Fixpunkt ist insbesondere deshalb interessant, weil er laut [20, 15] das kritische Verhalten des $U(2N_f)$ -symmetrischen Thirring-Modells bestimmt, wie auch in Abschnitt 3.6.2 für den Start

auf der Thirring-Achse g_V dargestellt. Zudem ändert sich die Anzahl seiner relevanten Richtungen mit N_f , was für die Interpretation von numerischen Simulationen, wie in [51], wichtig sein kann.

Vorgehensweise

Zur genaueren Untersuchung dieses Verhaltens wurde eine Störung in Richtung der beiden für $N_f < 6$ relevanten Richtungen um den Fixpunkt \mathcal{C}_V herum angenommen und der daraus entstehende Fluss betrachtet. Dazu wurde in der Ebene, die den Fixpunkt \mathcal{C}_V enthält und von den beiden relevanten Richtungen aufgespannt wird, eine Störung um den Fixpunkt herum in Form eines Kreises mit dem Radius $\varepsilon = 10^{-3}$ vorgegeben, wie in Abbildung 3.12 auf Seite 50 dargestellt. Die

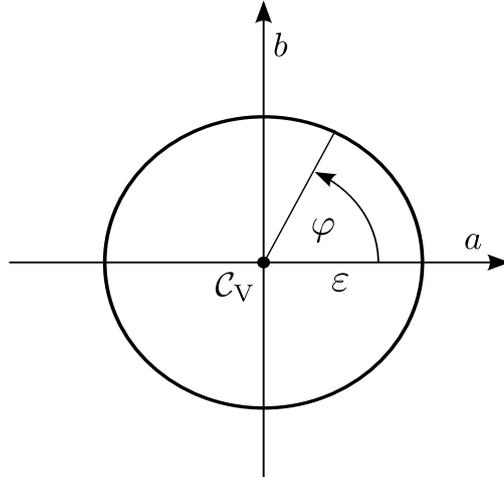


Abbildung 3.12.: Parametrisierung der Störung in a und b um den Fixpunkt \mathcal{C}_V

beiden relevanten Richtungen sollen mit \mathbf{s} und \mathbf{t} bezeichnet werden und sie lauten in Abhängigkeit von N_f :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2N_f-1} \\ \frac{1}{2N_f-1} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-N_f + \sqrt{(N_f+28)N_f+16+4}}{6N_f} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.146)$$

Die Richtung \mathbf{s} ist nur für $N_f < 6$ relevant, bei $N_f = 6$ marginal und für $N_f > 6$ irrelevant. Die Richtung \mathbf{t} gehört zum kritischen Exponent 1 und zeigt in die gleiche Richtung wie der Ortsvektor des Fixpunkts \mathcal{C}_V . Die Ebene um den Fixpunkt \mathcal{C}_V herum soll als Ebene $\mathcal{C}_V\text{-}\mathbf{s}\text{-}\mathbf{t}$ bezeichnet werden und wird wie folgt aufgespannt:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\mathcal{C}_V}^* + a \hat{\mathbf{s}} + b \hat{\mathbf{t}}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \hat{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}, \hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|}. \quad (3.147)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{g}_{\mathcal{C}_V}^*$ den Vektor der Kopplungen \mathbf{g} am Fixpunkt \mathcal{C}_V . Die Koordinaten in Richtung \mathbf{s} bzw. \mathbf{t} sind durch a bzw. b gegeben.

Die Störung um den Fixpunkt \mathcal{C}_V wurde wie folgt parametrisiert:

$$\mathbf{g}_{\text{Start}} = \mathbf{g}_{\mathcal{C}_V}^* + \varepsilon \cos \varphi \hat{\mathbf{s}} + \varepsilon \sin \varphi \hat{\mathbf{t}}, \quad \hat{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}, \hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|}, \quad (3.148)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi), \quad \varepsilon = 10^{-3}. \quad (3.149)$$

Dabei ist zu beachten, dass der Theorieraum (vermutlich) keine Metrik besitzt. Da die Lage der Fixpunkte im Theorieraum abhängig vom Regularisierungsschema und folglich nicht universell ist, gilt das auch für Abstände und Winkel. Demzufolge ist den folgenden Ausführungen kein quantitativer Wert beizumessen, den qualitativen Aussagen zur Existenz bestimmter Winkelbereiche hingegen schon.

Beginnend mit den Startwerten $\mathbf{g}_{\text{Start}}$ für die Kopplungen wurden die Flussgleichungen (3.101 ... 3.104) numerisch gelöst. Es genügt, die Störungen in den relevanten Richtungen zu betrachten. Störungen in den irrelevanten Richtungen sind stabil, der Fluss kehrt stets zum Fixpunkt zurück. Nimmt man eine Linearkombinationen aus Störungen in die relevanten und irrelevanten Richtungen an, so werden die irrelevanten unterdrückt und asymptotisch bewegt sich der Fluss in die relevante Richtung, so dass man auch von Beginn an nur diese betrachten kann.

Ergebnisse

In Abhängigkeit des Winkels φ ergeben sich getrennte Winkelbereiche, in denen der Fluss jeweils von einem gewissen Fixpunkt bestimmt wird. In der Regel gibt es zwei kritische Werte $\varphi_{1/2}^C$ bei denen der Fluss gerade entlang der Separatrix zwischen zwei Phasen verläuft. D. h., in exakt dieser Richtung erreicht man einem Fixpunkt mit (mindestens) einer irrelevanten Richtung. Entfernt man sich von dem kritischen Wert, so fließt man in der einen Richtung zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} , d. h., alle Kopplungen werden Null. In der anderen Richtung divergiert mindestens eine Kopplung.

Die Werte der kritischen Winkel sind in Tabelle 3.5 angegeben. Die Entwicklung des Flusses soll

| N_f | φ_1^C | φ_2^C | φ_S^D | φ_S |
|-------|---------------|---------------|------------------|----------------|
| 1 | 0.00000 | 1.77946 | $\frac{3}{2}\pi$ | 5.44 |
| 2 | 0.85759 | 2.53108 | 3.57 | $2\pi - 0.14$ |
| 3 | 0.13606 | 3.11380 | 3.45 | $2\pi - 0.04$ |
| 4 | 0.00283 | 3.14000 | 3.33 | $2\pi - 0.01$ |
| 5 | 0.00051 | 3.14109 | 3.22 | $2\pi - 0.005$ |
| 6 | 0.00029 | 3.14131 | - | - |
| 7 | 0.00020 | 3.14140 | - | - |

Tabelle 3.5.: Kritische Winkel $\varphi_{1/2}^C$ der Störung um den Fixpunkt \mathcal{C}_V sowie Grenzwinkel φ_S und φ_S^D , bei denen g_S bzw. g_S^D dominieren für unterschiedliche Werte von N_f .

hier für einige Werte von N_f diskutiert werden:

- $N_f = 1$: Beim kritischen Wert φ_1^C fließt man zum Fixpunkt

$$\mathbf{g} = \left(-\frac{15}{44} (\sqrt{5} - 3), \frac{1}{22} (28 - 13\sqrt{5}), \frac{3}{22} (\sqrt{5} - 3), -\frac{5}{44} (\sqrt{5} - 3) \right) \quad (3.150)$$

$$\approx (0.2604, -0.0486, -0.1042, 0.0868). \quad (3.151)$$

Das ist der Fixpunkt \mathcal{F} und er besitzt genau eine relevante Richtung, die folglich in die gleiche Richtung wie der Ortsvektor des Fixpunkts zeigt. Man erkennt, dass dabei die Kopplung g_S dominiert. Dieses Verhalten ist ausgeprägt für $\varphi_S \lesssim \varphi < \varphi_1^C$. Bis etwa zum Winkel φ_S wird die Kopplung g_V im Laufe des Flusses zunächst betragsmäßig kleiner, bevor sie divergiert.

Für den kritischen Wert φ_2^C erreicht man den Fixpunkt \mathcal{D} : $\mathbf{g} = \left(-\frac{9}{44}, -\frac{9}{44}, -\frac{3}{44}, -\frac{3}{44} \right) \approx (-0.2045, -0.2045, -0.0682, -0.0682)$ mit ebenfalls einer relevanten Richtung entlang des Fixpunktvektors. In der Basis \mathbf{B}^D liegt der Fixpunkt \mathcal{D} im invarianten Unterraum $g_S^D - g_V^D$, d.

h., $g_P^D = g_A^D = 0$. Die zugehörige relevante Richtung liegt ebenfalls in diesem Unterraum und zwar so, dass sie stärker in Richtung der Achse g_S^D zeigt (s. Abbildung 3.7). Betrachtet man den Fluss der Kopplungen \mathbf{g}^D und gelangt dabei in die Nähe des Fixpunkts \mathcal{D} , so divergieren zunächst nur g_S^D und g_V^D , wobei die Kopplung g_S^D dominiert. Für $\varphi_2^C < \varphi < \varphi_S^D$ divergieren g_S^D und g_V^D im Positiven und ihre Divergenz dominiert die von g_P^D und g_A^D . Oberhalb des Grenzwinkels φ_S^D divergieren sie ins Negative und g_P^D und g_A^D dominieren die Divergenz.

Für $\varphi_1^C < \varphi < \varphi_2^C$ fließt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} . Zwischen φ_S^D und φ_S divergieren alle Kopplungen gleichzeitig, keine dominiert entscheidend.

- $N_f = 2$: Für eine Störung mit dem kritischen Winkel φ_1^C erreicht man den Fixpunkt \mathcal{S} , der für $N_f = 2$ nur noch eine relevante Richtung hat. Für $N_f = 1$ besitzt er hingegen zwei und bestimmt deshalb nicht den Fluss vom Fixpunkt \mathcal{C}_V .

Entlang der relevanten Richtung des Fixpunkts \mathcal{S} divergiert allein die Kopplung g_S . D. h., für $\varphi \lesssim \varphi_1^C$ divergiert zunächst nur g_S . Die Störung in g_V geht zunächst zurück, bevor die Divergenz in g_S auch die noch schwach vorhandene Störung in g_V zum Divergieren bringt. Die typische Entwicklung der Kopplungen nahe des Winkels φ_1^C ist in Abbildung 3.13 dargestellt. In Tabelle 3.5 ist eine ungefähre untere Grenze φ_S für dieses Verhalten angegeben. Das

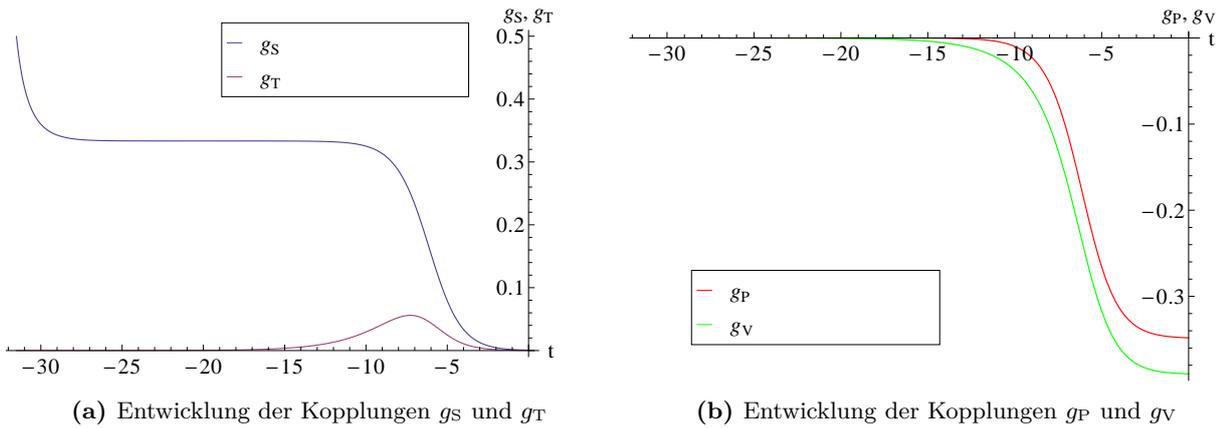


Abbildung 3.13.: Lösung der Flussgleichung Richtung IR mit $t = \ln\left(\frac{k}{\Lambda}\right)$, beginnend vom Fixpunkt \mathcal{C}_V mit einer kleinen Störung, für $N_f = 2$ nahe des kritischen Winkels φ_1^C .

Kriterium für diesen Wert ist, dass die Kopplung g_V zunächst betragsmäßig absinkt, bevor sie divergiert. D. h., der Fluss wird zunächst noch leicht vom Fixpunkt \mathcal{S} angezogen, bevor er ins Unendliche strebt.

Der zweite kritische Wert φ_2^C führt zum Fixpunkt \mathcal{D} . Zwischen φ_1^C und φ_2^C gelangt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} , oberhalb von $\varphi = \varphi_2^C$ divergieren alle Kopplungen gleichzeitig. Ebenso wie für $N_f = 1$ gilt, dass der Fixpunkt \mathcal{D} im invarianten Unterraum g_S^D - g_V^D liegt, ebenso die zugehörige relevante Richtung, die ebenfalls stärker in Richtung der Achse g_S^D zeigt. Nahe des kritischen Winkels φ_2^C divergieren also zunächst nur g_S^D und g_V^D , wobei die Kopplung g_S^D dominiert. Die typische Entwicklung der Kopplungen in der Nähe des kritischen Winkels φ_2^C ist in Abbildung 3.14 abgebildet. Dieses Verhalten setzt sich bis etwa zu φ_S^D fort. Die Grenze wird dadurch markiert, dass bis zu diesem Winkel der Betrag von g_P^D zunächst absinkt, bevor er divergiert.

- $N_f = 3$: Das Verhalten für $N_f = 3$ ähnelt dem für $N_f = 2$. Für φ_1^C erreicht man den Fixpunkt

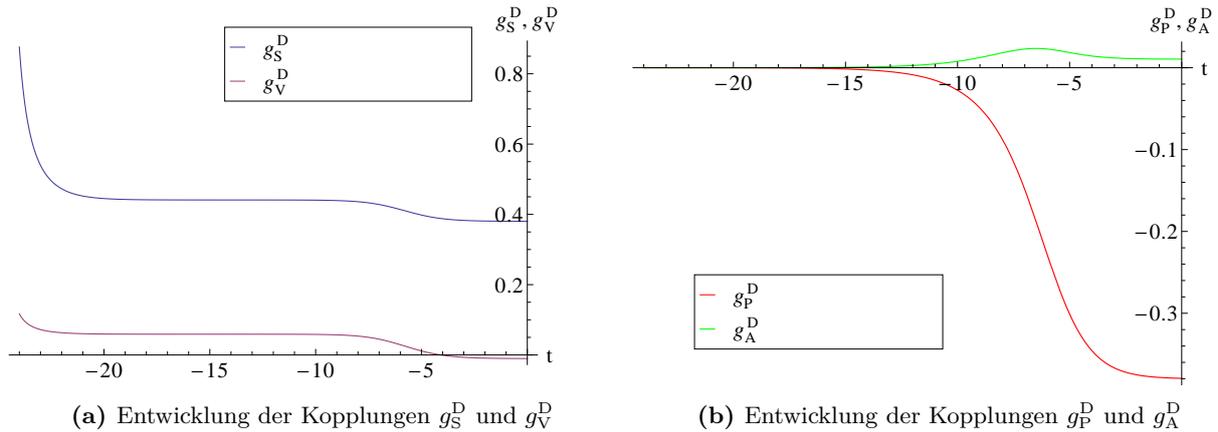


Abbildung 3.14.: Lösung der Flussgleichung in Richtung IR mit $t = \ln\left(\frac{k}{\Lambda}\right)$, beginnend vom Fixpunkt \mathcal{C}_V mit einer kleinen Störung, für $N_f = 2$ nahe des kritischen Winkels φ_2^C , für die Kopplungen \mathbf{g}^D in der Basis \mathbf{B}^D .

\mathcal{S} . Etwa im Bereich $\varphi_S < \varphi < \varphi_1^C$ dominiert g_S die Divergenz der Kopplungen, $|g_V|$ nimmt zunächst ab, analog zu Abbildung 3.13. Dieser Winkelbereich ist hier deutlich kleiner als für $N_f = 2$. Für $\varphi_1^C < \varphi < \varphi_2^C$ fließt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} . Die Grenze φ_2^C wird durch den Fixpunkt \mathcal{D} bestimmt, oberhalb davon divergieren alle Kopplungen gleichzeitig. In der Basis \mathbf{B}^D dominiert die Kopplung g_S^D die Divergenz bis zum Winkel φ_D^S .

- $N_f = 4, 5$: Mit zunehmendem N_f wird der Bereich $\varphi_S < \varphi < \varphi_1^C$, in dem g_S dominiert, zunehmend kleiner, bis er für $N_f = 5$ nur noch aus einem sehr schmalen Intervall $\varphi \lesssim \varphi_1^C$ besteht. Dieser Bereich wird weiterhin vom Fixpunkt \mathcal{S} bestimmt. Außerdem erhöht sich etwa bei $N_f = 3.76237$ die Zahl der relevanten Richtungen des Fixpunkts \mathcal{D} von eins auf zwei (s. Abbildung 3.8). Das hat zur Folge, dass man nun bei φ_2^C nicht mehr von diesem angezogen wird. Stattdessen fließt man zum Fixpunkt \mathcal{H} , bei dem alle Kopplungen angeregt sind. Dessen eine relevante Richtung zeigt in der Basis \mathbf{B}^D signifikant in Richtung g_S^D , so dass diese Kopplung nahe des kritischen Winkels am stärksten divergiert. Ihre Dominanz ist ausgeprägt bis etwa zu φ_D^S , bis dort ändert Kopplung g_P^D ihre Richtung im Laufe des Flusses.
- $N_f = 6$: Für diese Flavorzahl verringert sich die Anzahl der relevanten Richtungen des Fixpunkts \mathcal{C}_V von zwei auf eins (s. Abbildung 3.6). Die verbleibende relevante Richtung \mathbf{t} liegt im invarianten Unterraum g_P-g_V . Die zweite Richtung \mathbf{s} , die für kleinere N_f relevant war und dadurch die Störung verstärkt hat, ist nun marginal. Dadurch bleibt die Störung für φ_1^C etwa konstant. Man fließt zu keinem anderen Fixpunkt, sondern der Fluss verbleibt in der Umgebung des Fixpunkts. Gleiches gilt analog für φ_2^C .

Zwischen φ_1^C und φ_2^C fließt man wie gehabt zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} . Für $\varphi < \varphi_1^C$ oder $\varphi > \varphi_2^C$ divergieren alle Kopplungen gleichzeitig. Es gibt keinen Bereich mehr, in dem die Kopplungen g_S oder g_S^D zuerst divergieren würden.

- $N_f \geq 7$: Nun besitzt der Fixpunkt \mathcal{C}_V nur noch eine relevante Richtung, diese liegt wie der Fixpunkt im invarianten Unterraum g_P-g_V . D. h., Störungen, die in eine andere Richtung zeigen, nehmen in Richtung IR ab. Dieses Verhalten beobachtet man insbesondere an den kritischen Winkeln $\varphi_{1/2}^C$. In dem Bereich dazwischen fließt man zum Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} . Darüber bzw. darunter divergieren alle Kopplungen, wobei die Störung in Richtung \mathbf{s} zunächst

abnimmt, bevor sie von der Divergenz von g_V und g_P ebenfalls ins Unendliche gezogen wird. Es gibt keinen Bereich mehr, in dem die Kopplungen g_S oder g_S^D die Divergenz dominieren.

Phasendiagramme

In den Abbildungen 3.15 und 3.16 auf Seite 55 f. sind Phasendiagramme in der Ebene \mathcal{C}_V - \mathbf{s} - \mathbf{t} mit dem Fluss der Kopplungen in Richtung IR für unterschiedliche Werte von N_f abgebildet²⁵.

Die Phasendiagramme wurden erhalten unter der Annahme, dass die Basiselemente der Basis \mathbf{B}^S senkrecht aufeinander stehen. Da der Theorieraum keine Metrik besitzt, lässt sich darüber keine verlässliche Aussage treffen (s. auch die Diskussion in Abschnitt 3.7). Folglich lassen sich aus den Diagrammen zumindest qualitative Aussagen ableiten, man kann jedoch nicht erwarten, dass sie den Fluss quantitativ korrekt abbilden.

Sie stellen den Fluss ausgehend vom Fixpunkt \mathcal{C}_V parametrisiert durch die Koordinaten a und b dar (vgl. Gl. (3.147)). Weiterhin sind die Punkte eingezeichnet, in denen der Fluss in der dargestellten Ebene verschwindet. Das müssen nicht zwangsläufig echte Fixpunkte sein, da an ihnen lediglich der Fluss in der Ebene \mathcal{C}_V - \mathbf{s} - \mathbf{t} verschwindet, es ist jedoch möglich, dass ein Fluss aus der Ebene heraus stattfindet, der nicht dargestellt ist. Stets in der Ebene \mathcal{C}_V - \mathbf{s} - \mathbf{t} liegen der Fixpunkt \mathcal{C}_V per Definition und der Gauß'sche Fixpunkt \mathcal{O} . Denn die Richtung \mathbf{t} zeigt entlang des Ortsvektors des Fixpunkts \mathcal{C}_V , so dass der Fixpunkt \mathcal{O} stets auf der b -Achse zu finden ist.

Für $N_f = 1$ liegen zusätzlich die Fixpunkte \mathcal{D} und \mathcal{F} , die auch den Fluss beginnend von \mathcal{C}_V bestimmen, in der Ebene \mathcal{C}_V - \mathbf{s} - \mathbf{t} . Diese Ebene stellt für $N_f = 1$ einen invarianten Unterraum dar. Der Fluss aus dieser Ebene heraus verschwindet in diesem Fall.

Weiterhin bildet für $N_f = 1$ die a -Achse, d. h., die Gerade $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\mathcal{C}_V}^* + a\mathbf{s}$, einen invarianten Unterraum. Die Darstellung der zugehörigen Richtung \mathbf{s} in der Basis \mathbf{B}^D lautet: $\mathbf{s}^D = (-3, 0, -1, 0)^T$. Die Betafunktionen von g_P^D und g_A^D verschwinden. Damit stellt diese Gerade einen invarianten Unterraum dar, in dem sich die beiden Fixpunkte \mathcal{C}_V und \mathcal{F} befinden und der parallel zur ebenfalls invarianten Ebene g_S^D - g_V^D verläuft, die die Fixpunkte \mathcal{O} und \mathcal{D} enthält.

Selbstverständlich stellt auch die b -Achse einen invarianten Unterraum dar. Das gilt für alle Werte von N_f , denn dabei handelt es sich um die Verbindungsgerade des Fixpunkts \mathcal{C}_V mit dem Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} .

Für $N_f \neq 1$ enthält die Ebene \mathcal{C}_V - \mathbf{s} - \mathbf{t} keine weiteren Fixpunkte, außer \mathcal{O} und \mathcal{C}_V ; die eingezeichneten Punkte sind lediglich die Stellen, an denen der auf die Ebene projizierte Fluss verschwindet und sollen als Pseudo-Fixpunkte bezeichnet werden. An ihnen kann man gut die Änderung der Anzahl der relevanten Richtungen des Fixpunkts \mathcal{C}_V für $N_f = 6$ erkennen:

Für $N_f < 6$ sieht man, dass der Fixpunkt \mathcal{C}_V sowohl in a - also auch in b -Richtung repulsiv ist, d. h., beide Richtungen sind relevant. Strebt N_f gegen 6, so nähert sich einer der Pseudo-Fixpunkte mit offensichtlich einer relevanten und einer irrelevanten Richtung dem Fixpunkt \mathcal{C}_V immer mehr an.

Für $N_f = 6$ fallen beide Punkte zusammen, in Übereinstimmung mit der Tatsache, dass für diese Flavorzahl der Fixpunkt \mathcal{C}_V mit einem anderen Fixpunkt übereinstimmt (s. Abschnitt 3.5.4). Das Verhalten des Flusses in a -Richtung ist unbestimmt, diese Richtung ist marginal²⁶.

Für $N_f > 6$ entfernt sich der Pseudo-Fixpunkt wieder vom Fixpunkt \mathcal{C}_V . Beide Punkte haben nun ihre Eigenschaften geändert. Der Fixpunkt \mathcal{C}_V hat nunmehr nur noch eine statt zwei relevanten Richtungen, der Pseudo-Fixpunkt besitzt nun deren zwei.

²⁵Zum Vorgehen für die Erstellung der Phasendiagramme s. Anhang F.

²⁶Genauere Betrachtung des Phasendiagramms bzw. des Flusses legen nahe, dass sie in positive a -Richtung marginal relevant, in negative marginal irrelevant ist.

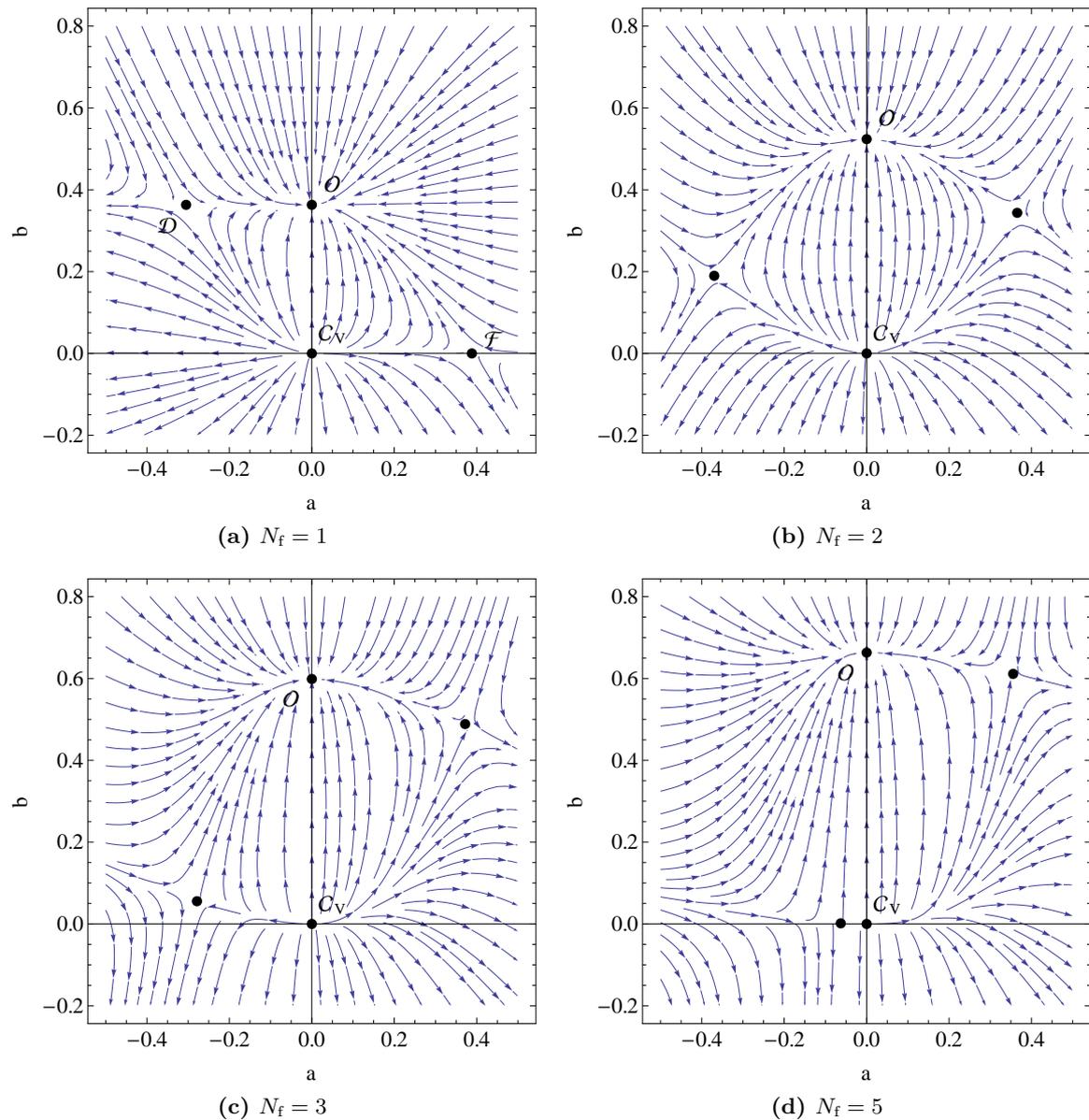


Abbildung 3.15.: Phasendiagramme des Flusses in Richtung IR in der Ebene, die den Fixpunkt \mathcal{C}_V enthält und von seinen relevanten Richtungen aufgespannt wird, für verschiedene Werte von N_f . Die Punkte, an denen der Fluss in dieser Ebene verschwindet, sind schwarz markiert. Die kritischen Winkel $\varphi_{1/2}^C$ sind die Winkel zwischen der a -Achse und den Separatritzes vom Fixpunkt \mathcal{C}_V zu den nichttrivialen Pseudo-Fixpunkten für kleine Störungen. Fortsetzung s. Abb. 3.16.

Zusammenfassung

Die Größe der Winkelbereiche, in denen ein bestimmtes Verhalten in Richtung IR auftritt, sind in Abbildung 3.17 auf Seite 56 dargestellt. Dabei wurde als Nullpunkt der Skala jeweils der Winkel φ_1^C gewählt. Die zugehörigen Winkelbereiche ergeben sich aus der Differenz der in Tabelle 3.5 angegebenen Werte zu diesem.

Die kritischen Winkel φ_1^C und φ_2^C markieren jeweils eine Phasengrenze. φ_1^C befindet sich in dem Diagramm per Definition stets an der Nulllinie, φ_2^C findet man an der oberen Grenze des blauen

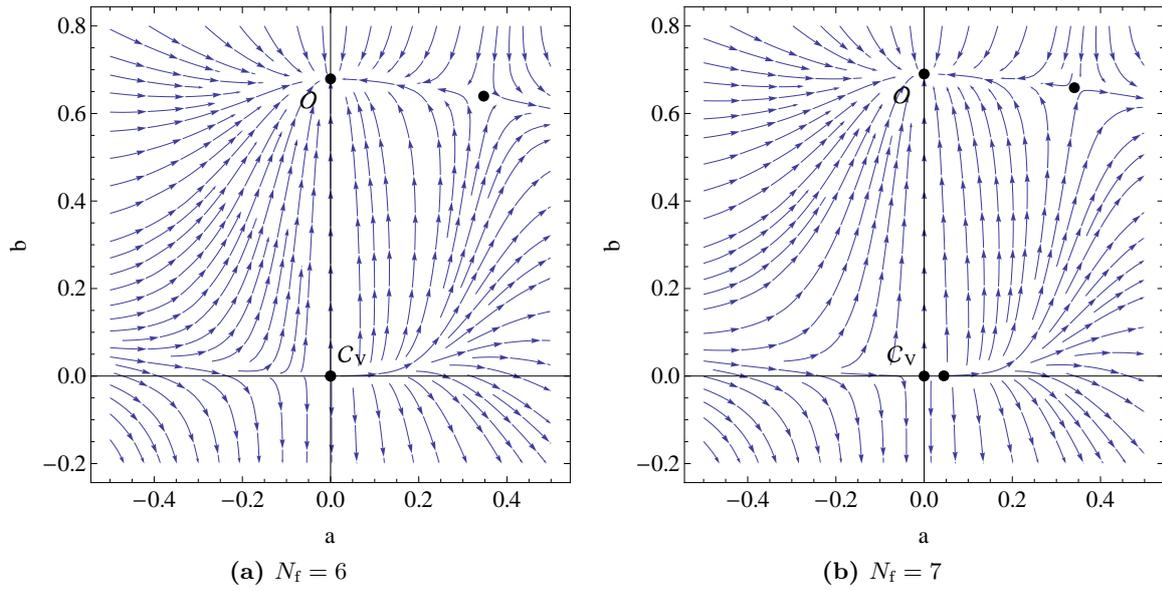


Abbildung 3.16.: Fortsetzung von Abbildung 3.15

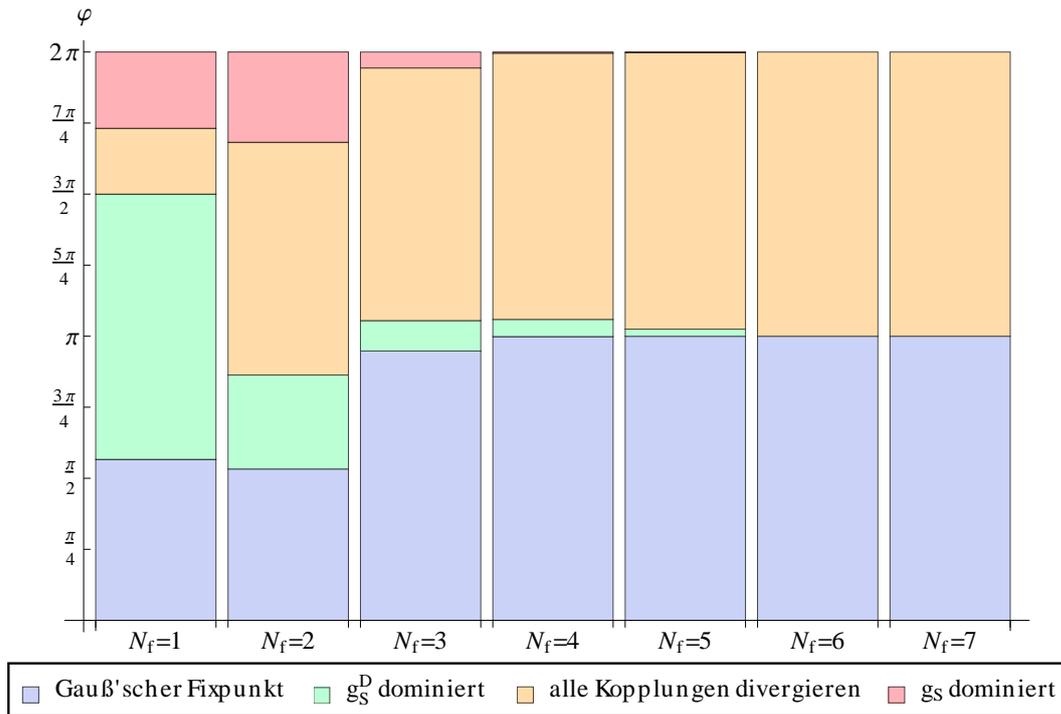


Abbildung 3.17.: Winkelbereiche mit einem bestimmten Verhalten für eine Störung in den relevanten Richtungen in einem Kreis um den Fixpunkt C_V . Nullpunkt ist der kritische Winkel φ_1^C . Der kritischen Winkel φ_2^C befindet sich an der Obergrenze des blauen Bereiches. Die Winkel φ_S^D bzw. φ_S findet man an den Obergrenzen des grünen bzw. orangenen Bereichs (s. Tabelle 3.5).

Bereiches, für den man zum Gauß'schen Fixpunkt fließt. Oberhalb von φ_2^C divergieren die Kopplungskonstanten. Dabei gibt es Bereiche, in denen eine bestimmte Kopplung dominiert, da der Fluss

von einem gewissen Fixpunkt bestimmt wird. Diese sind entsprechend angegeben.

Wichtig ist hier noch zu betonen, dass es sich dabei mehr um eine qualitative als eine quantitative Aussage handelt. Zwar sind an Hand der Balkenhöhe quantitative Vergleiche zwischen unterschiedlichen N_f möglich, die absoluten Werte der angegebenen Winkel sind jedoch mit Vorsicht zu betrachten:

Zum einen sind die Übergänge im Bereich der divergierenden Kopplungen fließend. Somit handelt es sich bei den Grenzwinkeln φ_S^D und φ^S um ungefähre Werte. Sie wurden nach einem gewissen Kriterium bestimmt, wie oben angegeben, sind jedoch nur als Näherungswerte für den Übergangsbereich anzusehen.

Zum anderen sind die angegebenen Winkelgrößen nur dann exakt, wenn die Richtungen \mathbf{s} und \mathbf{t} , wie in Abbildung 3.12 dargestellt, senkrecht aufeinander stehen. Da sich keine allgemeine Aussage über die Verhältnisse im Theorieraum treffen lässt, wurde unter dieser Annahme gerechnet. Ist sie nicht oder nur bedingt gerechtfertigt, sind die Winkelbereiche des Kreises entsprechend verzerrt oder gestaucht, so dass sich die Winkelgrößen ändern. Die qualitative Aussage zum Verhalten des Flusses bleibt jedoch bestehen.

Diese besagt, dass es für $N_f < 6$ stets einen Bereich $\varphi_S < \varphi < \varphi_1^C$ gibt, in dem die Kopplung g_S die Divergenz dominiert. Das deutet auf die Erzeugung des Massentermes $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ und damit den Bruch der chiralen \mathbb{Z}_2 -Symmetrie hin. Für $N_f \geq 2$ ist dieses Verhalten durch den Fixpunkt \mathcal{S} bestimmt, der zur Universalitätsklasse des Gross-Neveu-Modells, wie es in [31] beschrieben wird, gehört.

Weiterhin gibt es für $N_f < 6$ stets einen Bereich $\varphi_2^C < \varphi < \varphi_S^D$, in dem die Kopplung g_S^D die Divergenz dominiert. Die zugehörigen Fixpunkte sind \mathcal{D} für $N_f \leq 3$ und \mathcal{H} für $N_f \geq 4$.

Der Grund für das Auftreten dieser Winkelbereiche ist die Existenz zweier relevanter Richtungen des Fixpunkts \mathcal{C}_V für $N_f < 6$. Deshalb fließt man bei Störungen in einer bestimmten Richtung um diesen Fixpunkt herum zu anderen Fixpunkten, die das kritische Verhalten einer anderen Universalitätsklasse zeigen. D. h., befindet man sich zu Beginn nicht exakt im $U(2N_f)$ -symmetrischen thirring-artigen Unterraum g_P - g_V , so ist nicht garantiert, dass sich der Fluss zu diesem hin entwickelt. Im Gegenteil kann der Fluss für $N_f < 6$ in ganz andere Bereiche des Theorieraums führen. Für $N_f = 6$ ist eine Richtung marginal. Für größere N_f besitzt der Fixpunkt \mathcal{C}_V nur noch ein relevante Richtung, die sich im invarianten Unterraum g_P - g_V befindet. Störungen senkrecht zu diesem invarianten Unterraum sind dann irrelevant. D. h., für $N_f > 6$ ist der $U(2N_f)$ -symmetrische thirring-artige Unterraum g_P - g_V IR-attraktiv, so dass man asymptotisch ein kritisches Verhalten erhält, wie es in [20] dargestellt ist.

3.7. Untersuchung der Massenterme

Für Phasenübergänge sind insbesondere die Fixpunkte mit einer relevanten Richtung entscheidend. Diese zeigt stets entlang der Verbindungsgeraden zwischen dem Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} und dem Fixpunkt. Startet man in der Nähe eines solchen Fixpunkts, so nähert man sich im Laufe des Flusses dieser Geraden immer mehr an. Alle Trajektorien, die von einer Umgebung des Fixpunkts ausgehen, zeigen in Richtung dieser Geraden. Divergieren eine oder mehrere Kopplungen entlang dieser Geraden, kann das ein Anzeichen für Symmetriebrechung sein, bei der möglicherweise ein Massenterm erzeugt wird.

3.7.1. Mögliche Massenterme

Prinzipiell gibt es vier mögliche Massenterme der Form $\bar{\psi}^a \tau_\alpha \psi^a$ mit $\tau_\alpha \in \{\mathbb{1}, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_{45}\}$. Dabei sind jedoch die Terme mit γ_4 und γ_5 äquivalent: Betrachtet man den Term $\bar{\psi}^a (m\gamma_4 + m'\gamma_5) \psi^a$ so lässt sich dieser mit Hilfe der kontinuierlichen chiralen Symmetrie $U^{45}(1)$ (3.19, 3.20), die einen Spezialfall

der $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie darstellt, in einen Massenterm $\propto \bar{\psi}^a \gamma_4 \psi^a$ transformieren, wenn man den Parameter α gemäß $\tan(2\alpha) = \frac{m'}{m}$ wählt. Damit kann man diese beiden Massenterme in der Form $\bar{\psi}^a (\gamma_4 \cos \varphi + \gamma_5 \sin \varphi) \psi^a$ mit beliebigem Parameter φ zusammenfassen und als einen einheitlichen Massenterm behandeln. Durch spontane Symmetriebrechung können folglich folgende Massenterme dynamisch erzeugt werden [15]:

1. $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$, Semenoff-Massenterm [52], der die chirale \mathbb{Z}_2 -Symmetrie bricht und entlang des Kanals S erzeugt wird.
2. $\langle \bar{\psi} \gamma_{45} \psi \rangle$, Haldane-Massenterm [53], der die Paritäts- und die Zeitumkehrsymmetrie bricht. Er wird entlang des Kanals P erzeugt.
3. $\langle \bar{\psi} (\gamma_4 \cos \varphi + \gamma_5 \sin \varphi) \psi \rangle$, Kekulé-Massenterm [54]. Dieser bricht die $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie.

3.7.2. Bestimmung der Winkel

Um herauszufinden, welche Achse der Verbindungsgerade zwischen dem Gauß'schen Fixpunkt \mathcal{O} und dem Fixpunkt am nächsten liegt, wurden die Winkel zwischen dieser Achse und der Geraden ermittelt. Die Achse mit dem kleinsten eingeschlossenen Winkel bestimmt mutmaßlich das langreichweitige Verhalten des Flusses von diesem Fixpunkt. Es wurden sowohl die Achsen in der Standardbasis \mathbf{B}^S , als auch die der viertransformierten Basis \mathbf{B}^D berücksichtigt²⁷.

Orthogonale Standardbasis

Zur Bestimmung der Winkel muss im Theorieraum zunächst ein Skalarprodukt definiert werden. Dazu soll zunächst angenommen werden, dass die Kanäle in der Standardbasis \mathbf{B}^S senkrecht aufeinander stehen und damit die zugehörigen Achsen durch die kanonischen Einheitsvektoren parametrisiert werden, wie in Gleichung (G.2). Dann soll für Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} mit Komponenten in der Standardbasis als Skalarprodukt das Standardskalarprodukt im \mathbb{R}^4 definiert werden:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \sum_{i=1}^4 a_i b_i. \quad (3.152)$$

Auf Grund der fehlenden Metrik im Theorieraum ist diese Definition nicht eindeutig. Die gewählte Definition ist ausschließlich für Vektoren in der Standardbasis \mathbf{B}^S gültig. Sie gilt insbesondere nicht für die viertransformierte Basis \mathbf{B}^D . Da die Fierztransformation (C.15) keine orthogonale Transformation ist, handelt es sich bei dem entstehenden Koordinatensystem nicht um ein orthogonales, sondern ein schiefwinkliges Koordinatensystem, so dass Definition (3.152) in diesem keine Gültigkeit hat.

Mit dieser Definition erhält man nun für den Winkel α zwischen einem Fixpunktvektor \mathbf{g}^* in der Standardbasis \mathbf{B}^S und einem normierten Achsenvektor $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{B}_i}$, $|\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{B}_i}| = 1$ folgenden Ausdruck:

$$\alpha = \arccos \frac{\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{B}_i} \cdot \mathbf{g}^*}{|\mathbf{g}^*|}. \quad (3.153)$$

²⁷Zur Parametrisierung der Achsen s. Anhang G.

Orthogonale Fierzbasis

Da die Annahme, dass die Achsen in der Standardbasis \mathbf{B}^S senkrecht aufeinander stehen, nicht zwingend ist, wurde alternativ der Fall untersucht, in dem die Achsen der fierztransformierten Basis \mathbf{B}^D senkrecht aufeinander stehen. Zur zugehörigen Parametrisierung der Achsen s. Anhang G.2. Demzufolge wird in diesem Fall das Skalarprodukt mit den Komponenten in der Basis \mathbf{B}^D definiert, die durch einen hochgestellten Index D gekennzeichnet werden:

$$\mathbf{a}^D \cdot \mathbf{b}^D := \sum_{i=1}^4 a_i^D b_i^D. \quad (3.154)$$

Diese Definition des Skalarprodukts ist nicht kompatibel mit der aus Gleichung (3.152). Beide basieren auf unterschiedlichen Annahmen über den Theorieraum und liefern somit unterschiedliche Ergebnisse. Da a priori nicht klar ist, welche Annahme der Wirklichkeit entspricht (wenn überhaupt), wurden beide Varianten untersucht und die Unterschiede dokumentiert. Somit erhält man zumindest eine Ahnung über die Verhältnisse im Theorieraum.

Zur Berechnung des Winkels α^D zwischen einem Fixpunktvektor \mathbf{g}^{D*} in der Basis \mathbf{B}^D und einem normierten Achsenvektor $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{B}_i}^D$, $|\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{B}_i}^D| = 1$ verwendet man nun folgende Gleichung:

$$\alpha^D = \arccos \frac{\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{B}_i}^D \cdot \mathbf{g}^{D*}}{|\mathbf{g}^{D*}|}. \quad (3.155)$$

3.7.3. Klassifikation der Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung

Im Folgenden sollen für alle Fixpunkte mit genau einer relevanten Richtung die am nächsten liegenden Achsen des Theorieraums angegeben werden, sowohl unter der Annahme einer orthogonalen Standard-, als auch einer orthogonalen Fierzbasis. Die Achsen wurden an dieser Stelle mit der zugehörigen Wechselwirkung benannt, da die Zuordnung zu den Wechselwirkungskanälen im Gegensatz zu den Kopplungskonstanten unter Basistransformationen invariant ist. Weiterhin wird jeweils die Größe des kleinsten und zweitkleinsten Winkels genannt, die zugehörigen Werte sind in Tabelle 3.6 zu finden.

Fixpunkt \mathcal{P}

Der Fixpunkt \mathcal{P} hat für alle $N_f \geq 1$ genau eine relevante Richtung. Er liegt stets auf der Achse P und schließt folglich mit ihr den kleinsten Winkel ein. Divergiert der Fluss ausgehend von einer Umgebung um den Fixpunkt \mathcal{P} , divergiert entlang der relevanten Richtung nur die Kopplung g_P . Folglich wird der Haldane-Massenterm $\langle \bar{\psi} \gamma_{45} \psi \rangle$ erzeugt, der die Paritätssymmetrie bricht.²⁸

Fixpunkt \mathcal{S}

Der Fixpunkt \mathcal{S} besitzt für $N_f \geq 2$ genau eine relevante Richtung. Er liegt stets auf der Achse S und schließt folglich mit ihr den kleinsten Winkel ein. Divergiert der Fluss ausgehend von einer Umgebung um den Fixpunkt \mathcal{S} , divergiert entlang der relevanten Richtung nur die Kopplung g_S . Startet man oberhalb der kritischen Kopplung, so wird der chirale Massenterm $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ erzeugt, der die chirale \mathbb{Z}_2 -Symmetrie bricht.²⁹

²⁸Für eine ausführliche Diskussion s. [43] für $N_f \geq 1$ und [44] für $N_f = 0.5$.

²⁹Für eine ausführliche Diskussion s. [31].

| Fixpunkt | N_f | orthogonale Standardbasis | | | | orthogonale Fierzbasis | | | |
|-----------------|----------|---------------------------|------------|------------|------------|------------------------|----------------|------------|----------------------|
| | | α | B_α | β | B_β | α^D | B_{α^D} | β^D | B_{β^D} |
| \mathcal{P} | ≥ 1 | 0° | P | 48° | V^D, A^D | 0° | P | 60° | S^D, P^D, V^D, A^D |
| \mathcal{S} | ≥ 2 | 0° | S | 48° | V^D, A^D | 0° | S | 60° | S^D, P^D, V^D, A^D |
| \mathcal{D} | 1 | 27° | S^D | 37° | V^D | 18° | S^D | 51° | S, P |
| | 2 | 13° | S^D | 50° | V^D | 7° | S^D | 51° | V, T |
| | 3 | 4° | S^D | 58° | S, P | 2° | S^D | 48° | V, T |
| \mathcal{F} | 1 | 29° | S | 33° | P^D | 19° | P^D | 42° | S |
| \mathcal{G} | 1 | 29° | S | 33° | A^D | 38° | A^D | 57° | V |
| \mathcal{H} | 4 | 22° | S^D | 41° | V | 23° | S^D | 26° | V |
| | 5 | 24° | V | 42° | S^D | 11° | V | 41° | S^D |
| | 6 | 20° | V | 50° | S^D, P^D | 8° | V | 46° | S^D, P^D |
| \mathcal{J} | 4 | 22° | S^D | 41° | T | 22° | S^D | 27° | T |
| | 5 | 24° | T | 42° | S^D | 13° | T | 37° | S^D |
| | 6 | 20° | T | 50° | S^D | 9° | T | 42° | S^D |
| \mathcal{C}_V | 6 | 20° | V | 50° | S^D, P^D | 8° | V | 46° | S^D, P^D |
| | > 6 | \searrow | V | \nearrow | S^D, P^D | \searrow | V | \nearrow | S^D, P^D |
| | ∞ | 0° | V | 60° | S^D, P^D | 0° | V | 48° | S^D, P^D |
| \mathcal{C}_T | 6 | 20° | T | 50° | S^D | 9° | T | 42° | S^D |
| | > 6 | \searrow | T | \nearrow | S^D | \searrow | T | \nearrow | S^D |
| | ∞ | 0° | T | 60° | S^D, P^D | 0° | T | 48° | S^D, P^D |

Tabelle 3.6.: Kleinster Winkel α und zweitkleinster Winkel β der Fixpunktvektoren mit den zugehörigen Achsen B_i in orthogonaler Standard- bzw. Fierzbasis (Index D).

Fixpunkt \mathcal{D}

Der Fixpunkt \mathcal{D} liegt im invarianten Unterraum $g_S^D - g_V^D$ und besitzt für $1 \leq N_f \leq 3$ genau eine relevante Richtung. Er schließt dabei stets mit der Achse S^D den kleinsten Winkel ein. Der eingeschlossene Winkel wird mit zunehmendem $N_f \leq 3$ kleiner.

Fixpunkte \mathcal{F} und \mathcal{G}

Die Fixpunkte \mathcal{F} und \mathcal{G} besitzen ausschließlich für $N_f = 1$ jeweils genau eine relevante Richtung. Hier gibt es einen Unterschied zwischen der orthogonalen Standard- und Fierzbasis. In der orthogonalen Standardbasis liegen beide am nächsten an der Achse S . In der orthogonalen Fierzbasis liegt der Fixpunkt \mathcal{F} am nächsten an der Achse P^D , der Fixpunkt \mathcal{G} schließt mit der Achse A^D den kleinsten Winkel ein.

Fixpunkte \mathcal{H} und \mathcal{J}

Die Fixpunkte \mathcal{H} und \mathcal{J} besitzen genau eine relevante Richtung für $4 \leq N_f \leq 6$. Für $N_f = 4$ schließen beide mit der Achse S^D den kleinsten Winkel ein. Für $N_f = 5, 6$ liegt der Fixpunkt \mathcal{H} am nächsten an der Achse V , der Fixpunkt \mathcal{J} nahe der Achse T . Der eingeschlossene Winkel nimmt jeweils mit zunehmendem N_f ab. Der Unterschied im Vergleich der beiden Fixpunkte ist unmittelbar klar, da \mathcal{H} und \mathcal{J} die Struktur (c, d, e, f) bzw. (c, d, f, e) besitzen, wobei $|e| > |f|$ gilt.

Fixpunkte \mathcal{C}_V und \mathcal{C}_T

Die Fixpunkte \mathcal{C}_V und \mathcal{C}_T liegen in den invarianten Unterräumen g_P-g_V bzw. g_P-g_T und besitzen für $N_f \geq 6$ genau eine relevante Richtung. Für alle diese Flavorzahlen liegt der Fixpunkt \mathcal{C}_V am nächsten an der Achse V . Der Fixpunkt \mathcal{C}_T schließt stets mit der Achse T den kleinsten Winkel ein. In beiden Fällen wird der Winkel umso kleiner, je größer N_f ist. Für $N_f \rightarrow \infty$ liegen beide Fixpunkte schließlich auf der entsprechenden Achse.

Zusammenfassung

Wie aus Tabelle 3.6 ersichtlich wird, erhält man unterschiedliche Werte für die Winkel, je nachdem, ob man von der Annahme einer orthogonalen Standard- oder Fierzbasis ausgeht. Das hängt damit zusammen, dass die Achsen der jeweils anderen Basis dann nicht mehr senkrecht aufeinander stehen. Somit wird bei einem Wechsel der Annahme, der zugehörige Winkel gestreckt oder gestaucht.

Bis auf die Fixpunkte \mathcal{F} und \mathcal{G} stimmen jedoch für beide Fälle die qualitativen Aussagen hinsichtlich der Achse mit dem kleinsten Winkel überein. Somit erhält man mit diesem Verfahren zumindest eine Vorstellung davon, wie der Theorieraum beschaffen ist. Wie oben erwähnt, handelt es sich bei der Definition der Skalarprodukte in Gleichungen (3.152, 3.155) um Hilfskonstruktionen. Vermutlich entspricht keine der beiden konträren Orthogonalitätsannahmen der Realität. Der Theorieraum an sich ist jedoch zunächst ohne Skalarprodukt definiert, so dass es schwer ist, eine allgemeine Aussage zu treffen. Die obigen Hilfsvorstellungen sollen dazu beitragen, eine Vermutung über die tatsächlichen Verhältnisse zu bekommen. Auf Grund der weitgehenden Übereinstimmung kann man annehmen, dass man damit zumindest qualitative Aussagen treffen kann.

Man stellt fest, dass die beiden Fixpunkte \mathcal{S} und \mathcal{P} ein unterschiedliches kritisches Verhalten zeigen (s. auch Abschnitt 3.5.3). Auf Basis einer Untersuchung ausschließlich im invarianten Unterraum g_S-g_P wurde in der Literatur [15, Kap. IV] postuliert, dass beide Fixpunkte identisches kritisches Verhalten zeigen. Diese Aussage scheint jedoch nur für den dort betrachteten Unterraum mit möglicherweise höherer Symmetrie zuzutreffen, für unseren Fall ist sie widerlegt.

Beide Fixpunkte gehören zur Universalitätsklasse des „Gross-Neveu-Modells“. Dieses ist jedoch in $d = 3$ Raumzeitdimensionen nicht eindeutig definiert. Zum einen gibt es die Darstellung mit vierkomponentigen reduziblen Dirac-Spinoren, wie in [31]. Diese beschreibt das Verhalten des Fixpunkts \mathcal{S} . Zum anderen existiert eine irreduzible Darstellung auf der Basis von zweikomponentigen Weyl-Spinoren [43, 44]. Diese entspricht dem Kanal \mathcal{P} [20, Abs. 4.1.] und beschreibt folglich das kritische Verhalten des Fixpunkts \mathcal{P} .

Die obigen Untersuchungen liefern Vermutungen über das Symmetriebrechungsmuster des Flusses, der von den Fixpunkten mit genau einer relevanten Richtung ausgeht. Möchte man eine exakte Betrachtung mit verlässlichen Ergebnissen erhalten, ist die Untersuchung einer bosonisierten Theorie des zugehörigen Kanals mit dynamischen Freiheitsgraden unerlässlich.

4. Allgemeine Formel für die Flussgleichung einer effektiven Wirkung mit Vier-Fermi-Termen

In diesem Kapitel soll ausgehend von einem allgemeinen Ansatz von der Form (3.68) mit beliebigen Vier-Fermi-Termen mit Singulettstruktur eine allgemeine Formel zur Berechnung der zugehörigen Flussgleichungen hergeleitet werden.

4.1. Ansatz für die mittlere effektive Wirkung

Für die mittlere effektive Wirkung soll folgender Ansatz gewählt werden:

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] = \int d^d x \left\{ Z_\psi \bar{\psi}^a i \not{\partial} \psi^a + \sum_i \frac{\bar{g}_i}{2N_f} (\bar{\psi}^a O_i \psi^a) (\bar{\psi}^b O_i \psi^b) \right\}. \quad (4.1)$$

D. h. es handelt sich bei dem gewählten Ansatz um eine effektive Wirkung mit rein fermionischen Feldern. Die Trunkierung ist so gewählt, dass in Form einer Ableitungsentwicklung nur Terme in der ersten Ableitung der fermionischen Felder zugelassen werden, so dass nur der übliche kinetische Term auftritt, als Wechselwirkungsterme sollen nur punktförmige Vier-Fermi-Terme zugelassen werden, Massenterme sollen keine auftreten.

Die Flavorstruktur der Vier-Fermi-Terme ist als Singulett gewählt. Dies stellt jedoch keine Einschränkung dar, da man sowohl die effektive Wirkung, als auch die Flussgleichungen der Kopplungskonstanten mit Hilfe der Fierztransformationen, wie in Anhang C beschrieben, auf Dublettstruktur umrechnen kann. Die fermionischen Felder $\bar{\psi}$ und ψ treten in N_f verschiedenen Flavours auf, die durch hochgestellte lateinische Indizes a, b, \dots gekennzeichnet sind und über die gemäß der Einsteinschen Summenkonvention von 1 bis N_f summiert wird¹.

Für die Operatoren O_i können beliebige Elemente der Basis der Dirac-Algebra² eingesetzt werden. Die Anzahl d der Raumzeitdimensionen und die Anzahl der Komponenten ist in diesem Ansatz beliebig, für $d = 3$ Raumzeitdimensionen erhält man in der reduzierbaren vierkomponentigen Darstellung der Dirac-Algebra z. B. die Basis (3.6).

Soll die zugehörige Theorie lorentzinvariant sein, so muss man stets über die zugehörigen griechischen Lorentzindizes μ, ν, \dots summieren. Dahingehend soll im Ansatz (4.1) das Produkt der Operatoren O_i so verstanden werden, dass ggf. gleichzeitig über evtl. vorkommende Lorentzindizes summiert wird. Wichtig dabei ist zu beachten, dass für die O_i stets Operatoren einzusetzen sind, die tatsächlich auch Elemente der Basis der Dirac-Algebra sind. Dies ist insbesondere wichtig für Operatoren mit mehreren Lorentzindizes, wie den Tensoroperator $\gamma_{\mu\nu}$. Summiert man hier über beide Lorentzindizes, so tritt auf Grund der Eigenschaft $\gamma_{\nu\mu} = -\gamma_{\mu\nu}$ jeder Term doppelt auf, dabei sind jedoch nur die Elemente mit $\mu < \nu$ auch Elemente der Basis. Dieser Tatsache wird häufig durch einen Faktor $\frac{1}{2}$ vor dem Produkt Rechnung getragen, um so die Doppelzählung zu kompensieren³.

¹Um Missverständnisse zu vermeiden gilt das für die Summe über die unterschiedlichen Wechselwirkungsterme mit dem unteren lateinischen Index i, j, \dots nicht, hier wird die Summe explizit aufgeführt.

²s. Anhang B.

³Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung von $\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{\mu\nu}$ als Operator, dadurch geht jedoch die einheitliche Orthogonalitätsbedingung (3.7) der Basiselemente verloren.

Für unsere Rechnung ist es zweckmäßiger, diese Operatoren ebenfalls als einen Vektor aus allen Basiselementen aufzufassen, also $O_T := (\gamma_{\mu\nu})_{\mu,\nu=1,\mu<\nu}^d$. D. h., für $d = 3$ z. B. ist $O_T = (\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23})$. Man summiert über den zugehörigen (gedachten) Vektorindex, was selbstverständlich äquivalent zu obigem Verfahren ist⁴.

Wie weiter unten ausgeführt, ergibt die folgende Berechnungsvorschrift nur dann exakte Resultate, wenn man mit einer fierz-vollständigen Theorie rechnet. D. h., im Rahmen einer vorgegebenen Symmetrie sollen alle Terme, die mit dieser verträglich sind, im Ansatz (4.1) enthalten sein. Soll eine Theorie betrachtet werden, die dieser Eigenschaft nicht genügt, bietet es sich an, zunächst trotzdem fierz-vollständig zu rechnen und im Anschluss die nicht benötigten Kopplungskonstanten Null zu setzen um den gewünschten Ansatz zu erhalten.

4.2. Projektor auf einen Vier-Fermi-Term

Um die allgemeine Flussgleichung zu berechnen, soll zunächst ein Projektor definiert werden, der in einer Gleichung die Koeffizienten vor einem bestimmten Vier-Fermi-Term liefert.

Damit man die unterschiedlichen Vier-Fermi-Terme voneinander unterscheiden kann, wird viermal funktional nach den fermionischen Feldern abgeleitet und anschließend zweimal mit einem Operator O_j multipliziert. Um die Operatoren und die Ableitungen vertauschen zu können, muss man dabei die Dirac-Komponenten einzeln betrachten, weshalb die Dirac-Indizes α, β, \dots mitgeschrieben und anschließend darüber kontrahiert wurde.

$$\hat{P}_j[X] := \left. \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_\alpha^a} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}_\beta^b} X \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\gamma^b} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi_\delta^a} O_{j,\gamma\beta} O_{j,\delta\alpha} \right|_{\psi, \bar{\psi}=0}. \quad (4.2)$$

Die Funktionalableitungen sollen jeweils bei räumlich konstanten Feldern wie in Gleichung (3.78) ausgeführt werden.

Wendet man diesen Projektor auf einen Vier-Fermi-Term mit zwei beliebigen Operatoren an, so erhält man:

$$X := (\bar{\psi}^a O \psi^a) (\bar{\psi}^b Q \psi^b) \quad (4.3)$$

$$\hat{P}_j X = 2N_f^2 \text{Tr}(O O_j) \text{Tr}(Q O_j) - 2N_f \text{Tr}(O O_j Q O_j). \quad (4.4)$$

Angewandt auf den Ansatz (4.1) der effektiven Wirkung ergibt sich:

$$\hat{P}_j \Gamma = \sum_i g_i [N_f \text{Tr}^2(O_i O_j) - \text{Tr}(O_i O_j O_i O_j)] =: \sum_i g_i M_{ij} \quad (4.5)$$

$$\text{mit } M_{ij} := N_f \text{Tr}^2(O_i O_j) - \text{Tr}(O_i O_j O_i O_j). \quad (4.6)$$

Dabei wurde die Koeffizientenmatrix M_{ij} definiert.

Um nun tatsächlich einen Projektor $\hat{P}^{(k)}$ zu erhalten, der auf den quadratischen Term mit dem Operator O_k projiziert, also gerade den Koeffizienten g_k herausfiltert, muss man eine Linearkombination obiger Projektoren bilden, so dass gilt:

$$\hat{P}^{(k)} := \sum_j \alpha_j^{(k)} \hat{P}_j \quad (4.7)$$

$$\text{mit } \hat{P}^{(k)} \Gamma = \sum_{i,j} g_i M_{ij} \alpha_j^{(k)} \stackrel{!}{=} g_k \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow \alpha_j^{(k)} = M_{jk}^{-1}. \quad (4.9)$$

⁴Diese Vorgehensweise bietet sich insbesondere für die automatisierte Auswertung der Formeln an.

Wählt man also als Koeffizienten $\alpha_j^{(k)}$ der Linearkombination gerade die Elemente der inversen Koeffizientenmatrix M^{-1} , so erhält man einen Projektor $\hat{P}^{(k)}$, der für einen gegebenen Ausdruck die Koeffizienten (multipliziert mit $2N_f$) vor dem quadratischen Vier-Fermi-Term mit dem Operator O_k extrahiert.

4.3. Anwendung auf die Flussgleichung

Mit der Definition

$$B_i^S := (\bar{\psi}^a O_i \psi^a) (\bar{\psi}^b O_i \psi^b) \quad (4.10)$$

schreibt sich der Ansatz der effektiven Wirkung (4.1) wie folgt:

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] = \int d^d x \left\{ Z_\psi \bar{\psi}^a i \not{\partial} \psi^a + \sum_i \frac{\bar{g}_i}{2N_f} B_i^S \right\} \quad (4.11)$$

Für die Ableitung nach der Renormierungsgruppenzeit t bei Auswertung für konstante Felder (s. Gleichungen (3.78, 3.79)) ergibt sich nach der Einführung dimensionsloser Kopplungen gemäß

$$g_i = Z_\psi^{-2} k^{d-2} \bar{g}_i \quad (4.12)$$

wie in Gleichung (3.97)

$$\partial_t \Gamma_k \Big|_{\psi=\text{konst.}} = \frac{Z_\psi^2 V}{2N_f k^{d-2}} \sum_i \left[(2-d-2\eta_\psi) g_i B_i^S + B_i^S \partial_t g_i \right] \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow \hat{P}^{(k)} \partial_t \Gamma_k \Big|_{\psi} \stackrel{(4.8)}{=} \frac{Z_\psi^2 V}{k^{d-2}} [(2-d-2\eta_\psi) g_k + \partial_t g_k]. \quad (4.14)$$

Andererseits erhält man, wie in Abschnitt 3.3 gezeigt wurde, auf der rechten Seite der Flussgleichung eine quadratische Form in den Kopplungskonstanten wie folgt (vgl. Gleichung (3.94)). Wie dort argumentiert wurde, gilt diese Gleichung in dieser Form nur für fierz-vollständige Theorien, d. h. Theorien, in denen alle mit der Symmetrie verträglichen Terme im Ansatz für die mittlere effektive Wirkung berücksichtigt sind. Damit treten im Laufe des Flusses keine zusätzlichen Terme auf, die andernfalls dazu führen würden, dass die untenstehende Summe über i mehr Elemente enthält als der Ansatz (4.1). Wir wollen deshalb im Folgenden annehmen, dass es sich um eine fierz-vollständige Theorie handelt.

$$\partial_t \Gamma_k = C \sum_i B_i^S \sum_{j,l} g_j A_{jl}^i g_l \quad \text{mit } C := \frac{2v_d V Z_\psi^2}{N_f^2 k^{d-2}} \ell_1^{(F)d}(0; \eta_\psi) \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow \hat{P}^{(k)} \partial_t \Gamma_k \stackrel{(4.8)}{=} 2N_f C \sum_{j,l} g_j A_{jl}^k g_l. \quad (4.16)$$

Setzt man (4.14) und (4.16) gleich, so erhält man die Flussgleichung für die Kopplung g_k wie in Gleichung (3.98)⁵

$$\partial_t g_k = (2\eta_\psi + d - 2) g_k + \frac{4v_d}{N_f} \ell_1^{(F)d}(0; \eta_\psi) \sum_{j,l} g_j A_{jl}^k g_l. \quad (4.17)$$

⁵Wie in Anhang E gezeigt, ist die Flussgleichung für die Wellenfunktionsrenormierung Z_ψ trivial, so dass es genügt, die der Kopplungskonstanten g_k zu bestimmen.

Es bleiben die Koeffizientenmatrizen A_{jl}^k zu berechnen. Wendet man auf Gleichung (3.88) die Identität (3.89) an, so erhält man folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \text{STr}[(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k)^2] = & - \int_p \frac{2V}{Z_\psi^2(1+r_\psi)^2 p^2 d} \sum_{i,j} \left\{ \frac{\bar{g}_i \bar{g}_j}{N_f^2} \left[(\bar{\psi}^a O_j \gamma_\mu O_i \psi^a)^2 \right. \right. \\ & - (\bar{\psi}^a O_i \gamma_\mu O_j \psi^a)(\bar{\psi}^b O_j \gamma_\mu O_i \psi^b) - 2(\bar{\psi}^a O_i \psi^a)(\bar{\psi}^b O_j \gamma_\mu O_i \gamma_\mu O_j \psi^b) \\ & \left. \left. + N_f (\bar{\psi}^a O_i \psi^a)(\bar{\psi}^b O_j \psi^b) \text{Tr}(\gamma_\mu O_i \gamma_\mu O_j) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Mit der für die Kopplungskonstanten der Vier-Fermi-Terme ausreichenden Beziehung (wie in Abschnitt 3.3 argumentiert)

$$\partial_t \Gamma_k = -\frac{1}{4} \text{STr}[\tilde{\partial}_t(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k)^2] \stackrel{(3.93)}{=} -\frac{C}{d} \sum_{i,j} g_i g_j [\dots]_{ij} \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow \hat{P}^{(k)} \partial_t \Gamma_k = -\frac{C}{d} \sum_{i,j} g_i g_j \hat{P}^{(k)} [\dots]_{ij} \stackrel{(4.16)}{=} 2N_f C \sum_{i,j} g_i A_{ij}^k g_j \quad (4.20)$$

$$\Rightarrow A_{ij}^k = -\frac{1}{2N_f d} \hat{P}^{(k)} [\dots]_{ij} \quad (4.21)$$

erhält man schließlich durch Koeffizientenvergleich eine Formel für die Matrix A_{ij}^k , wobei unter dem Klammerausdruck $[\dots]_{ij}$ jeweils die eckige Klammer in Gleichung (4.18) gemeint ist.

4.4. Allgemeine Formel für die Koeffizientenmatrizen

Durch Anwenden des Projektors (4.7) auf diesen Ausdruck bestimmt man unter Verwendung der Beziehung (4.4) und anschließender Symmetrisierung in den Indizes i und j eine allgemeine Formel für die Koeffizientenmatrix A_{ij}^k für einen Ansatz wie in Gleichung (4.1) mit beliebigen Operatoren O_i aus der Basis der Dirac-Algebra:

$$\begin{aligned} A_{ij}^k = & \frac{1}{d} \left(\sum_l \alpha_l^{(k)} \left\{ \text{Tr}(O_j \gamma_\mu O_i O_l O_j \gamma_\mu O_i O_l) - \text{Tr}(O_j \gamma_\mu O_i O_l O_i \gamma_\mu O_j O_l) \right. \right. \\ & - \text{Tr}(O_i O_l O_j \gamma_\mu O_i \gamma_\mu O_j O_l) - \text{Tr}(O_j O_l O_i \gamma_\mu O_j \gamma_\mu O_i O_l) \\ & + N_f [-\text{Tr}^2(O_j \gamma_\mu O_i O_l) + \text{Tr}(O_j \gamma_\mu O_i O_l) \text{Tr}(O_i \gamma_\mu O_j O_l) + \text{Tr}(O_i O_l O_j O_l) \text{Tr}(\gamma_\mu O_i \gamma_\mu O_j) \\ & + \text{Tr}(O_i O_l) \text{Tr}(O_j \gamma_\mu O_i \gamma_\mu O_j O_l) + \text{Tr}(O_j O_l) \text{Tr}(O_i \gamma_\mu O_j \gamma_\mu O_i O_l) \\ & \left. \left. - N_f \text{Tr}(O_i O_l) \text{Tr}(O_j O_l) \text{Tr}(\gamma_\mu O_i \gamma_\mu O_j) \right\} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Die griechischen Indizes i, j, k, l bezeichnen die Operatoren im Ansatz (4.1) und ihre Summe läuft über die Anzahl der zugehörigen Wechselwirkungsterme, wobei ggf. gleichzeitig über auftretende Lorentzindizes summiert werden muss, wie in Abschnitt 4 dargestellt⁶.

⁶Behandelt man die Elemente der Dirac-Algebra voneinander unabhängig, d. h. ohne Summation über die Lorentzindizes und indiziert somit jedes Element einzeln mit i, j, \dots , so kann man Gleichung (4.22) mithilfe der Orthogonalitätsbeziehung $\text{Tr}(\gamma_A \gamma_B) = 4\delta_{AB}$ geringfügig vereinfachen. In der Anwendung spielen jedoch lorentzinvariante Theorien eine entscheidende Rolle, so dass obige allgemeine Gleichung angegeben wurde. Die Vereinfachung kann dennoch für explizite Berechnungen mit einem Computeralgebrasystem nützlich sein, in dem die einzelnen Matrizen unabhängig behandelt werden.

Mit Hilfe dieser Formel lassen sich nun die Flussgleichungen (4.17) einer beliebigen effektiven Wirkung mit Vier-Fermi-Termen wie in Gleichung (4.1) auf direktem Weg berechnen.

Die Anwendung dieser Formel ist nur dann konsistent, wenn man eine fierz-vollständige Theorie im Sinne einer bestimmten Symmetrie vorliegen hat. Nur in diesem Fall deckt der in Gleichung (4.7) definierte Projektor alle Terme ab, die durch den Fluss erzeugt werden können. Dabei können prinzipiell alle Terme auftreten, die durch die Symmetrie erlaubt sind.

Die Fierztransformationen erlauben es, jede Theorie in der Form (4.1) mit ausschließlich Singulett-Termen darzustellen. Genügt die Theorie einer gewissen Symmetrie, existiert eine vollständige Basis im Theorieraum, der zu dieser Symmetrie gehört. Der Fluss ist durch die Symmetrie geschützt, d. h., entlang der Trajektorie im Theorieraum werden nur Terme erzeugt, die die gleiche Symmetrie erfüllen. Hat man diese bereits alle im Ansatz erfasst, spricht man von einer fierz-vollständigen Theorie. Jeder Term, der die Symmetrie erfüllt, lässt sich dann, ggf. nach einer Fierztransformation, als Linearkombination der Basiselemente darstellen.

Für eine fierz-vollständige Theorie erhält man mit obiger Berechnungsvorschrift ein vollständiges System der Flussgleichungen. Ist der Ansatz jedoch nicht fierz-vollständig, so treten im Fluss typischerweise zusätzliche Terme auf. Die entstehenden Flussgleichungen sind dann unter Umständen nicht eindeutig, sondern lassen sich durch Fierz-Mehrdeutigkeiten umformulieren. Zur Verwendung dieser Formel bietet es sich daher an, zunächst eine fierz-vollständige Theorie anzusetzen und im Ergebnis der Flussgleichungen ggf. nicht benötigte Kopplungskonstanten Null zu setzen.

In Anhang H findet man eine funktionsfähige Umsetzung dieser Formel für Mathematica bzw. eine elektronische Version unter

<https://www.tpi.uni-jena.de/files/gehring/alg-4-fermi.nb>.

5. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das verallgemeinerte Gross-Neveu-Modell, namentlich ein Modell mit $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie, auf rein fermionischem Niveau betrachtet. Mit Hilfe der Methoden der funktionalen Renormierungsgruppe wurde die Fixpunkt-Struktur dieses Modells untersucht. Dabei wurde eine Ableitungsentwicklung in führender Ordnung verwendet und Wechselwirkungsterme mit vier fermionischen Feldern einbezogen.

Es stellt sich heraus, dass es vier unabhängige Vier-Fermi-Terme gibt, die mit der $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie, sowie mit der diskreten chiralen \mathbb{Z}_2^5 - und der Paritätssymmetrie verträglich sind. Die Flussgleichungen für die vier zugehörigen Kopplungskonstanten wurden mit Renormierungsgruppen-Techniken ermittelt. Ausgehend davon wurde der Theorieraum und insbesondere dessen Fixpunktstruktur untersucht.

Dazu wurden zum einen die invarianten Unterräume ermittelt. In den gewählten Formulierungen des Modells konnten vier nichttriviale invariante Unterräume identifiziert werden.

Zum anderen wurde die Anzahl der Fixpunkte in Abhängigkeit der Flavorzahl N_f bestimmt und die Fixpunkte, sowie deren kritische Exponenten und RG-Richtungen in den invarianten Unterräumen analysiert. Es zeigt sich, dass das kritische Verhalten abhängig von N_f ist und dass sich bei bestimmten Flavorzahlen die Anzahl der relevanten Richtungen der Fixpunkte verändert. Des Weiteren wurde ein wichtiges Augenmerk auf die physikalisch bedeutsamen Fixpunkte mit einer relevanten Richtung gelegt, und deren Auftreten ebenfalls in Abhängigkeit von N_f betrachtet.

Um das Verhalten einer Theorie vorhersagen zu können, die nur aus einem der berücksichtigten Wechselwirkungskanäle besteht, wurde das Verhalten des Flusses beim Start mit nur einer Kopplung in verschiedenen Formulierungen des Modells untersucht. Von besonderem Interesse bezüglich der physikalischen Bedeutung und der Verbindung zu anderen Arbeiten ist der Fixpunkt \mathcal{C}_V . Deshalb wurde für diesen ebenfalls der von ihm ausgehende Fluss mit einer kleinen Störung in Abhängigkeit von N_f untersucht. Es ergibt sich eine kritische Flavorzahl $N_f^{cr} = 6$, die die Bereiche mit zwei und einer relevanten Richtung trennt, in denen sich ein qualitativ unterschiedliches kritisches Verhalten zeigt.

Um die Symmetriebrechungsmuster der im Theorieraum enthaltenen Theorien aufzuklären, wurden das asymptotische Verhalten der Theorien, die von einem Fixpunkt mit genau einer relevanten Richtung ausgehen, betrachtet. Das liefert Hinweise auf die vermutliche Art der spontanen Symmetriebrechung und die dabei ggf. auftretenden Massenterme. Für eine exakte Betrachtung ist es erforderlich eine bosonisierte Theorie zu untersuchen.

Außerdem konnte ausgehend von den durchgeführten Berechnungen eine allgemeine Formel für die Flussgleichung der Kopplungen beliebiger Vier-Fermi-Terme gefunden werden. Dieses Resultat bietet die Möglichkeit weitgehenderer Untersuchungen für Theorien mit anderen Symmetrien.

6. Verbindung zu anderen Arbeiten und Ausblick

In dieser Arbeit ging es darum, die Fixpunktstruktur des verallgemeinerten Gross-Neveu-Modells zu untersuchen, das Systeme in $d = 2 + 1$ Raumzeitdimensionen beschreibt, wie z. B. das Material Graphen. Den Ausgangspunkt dieser Untersuchungen stellt die Quelle [15] dar. In ihr wird die Verbindung des Hubbard-Modells von Graphen zu seiner Formulierung mit Dirac-Spinoren und deren Fixpunktstruktur hergestellt. Weiterhin wurde die darauf aufbauende Arbeit [20] zu Grunde gelegt, die diese Analyse auf das Thirring-Modell mit veränderlicher Flavorzahl N_f verallgemeinert. Dieses Modell besitzt eine $U(2N_f)$ -Symmetrie. In [55, 56] wird angemerkt, dass man auf dem Gitter statt dieser lediglich eine $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie vorliegen hat. Deshalb scheint es angebracht, das Modell mit dieser Symmetrie zu untersuchen und evtl. auftretende Veränderungen zum Fall der $U(2N_f)$ -Symmetrie aufzuzeigen. Dazu fordert der Artikel [56] auch auf, dem mit der vorliegenden Arbeit Folge geleistet werden soll.

In [20] wird für N_f kleiner als eine kritische Flavorzahl N_f^{cr} eine Diskrepanz zwischen den dort gefundenen kritischen Exponenten des Thirring-Fixpunkts im Vergleich mit Gittersimulationen festgestellt. Als mögliche Ursache wird vermutet, dass sich das Thirring-Modell auf dem Gitter vom Kontinuumsmodell unterscheidet, so dass das kritische Verhalten der Gittersimulationen nicht durch den Thirring-Fixpunkt, sondern einen anderen Fixpunkt bestimmt wird.

Die vorliegende Arbeit unterstützt diese Vermutung: Wie oben bemerkt, besitzt das Gittermodell statt der $U(2N_f)$ -Symmetrie des Thirring-Modells lediglich eine $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -Symmetrie [55, 56]. In Abschnitt 3.6.4 wurde gezeigt, dass man im Modell mit dieser Symmetrie, wenn man für $N_f < 6$ mit einer Störung um den Fixpunkt \mathcal{C}_V startet, nicht notwendigerweise im invarianten Unterraum g_P - g_V , dem thirring-artigem Unterraum bleibt. Folglich wird nicht zwangsläufig eine effektive Wirkung mit dessen $U(2N_f)$ -Symmetrie erreicht. Stattdessen kann der Fluss von einem anderen Fixpunkt bestimmt sein, der in einer anderen Universalitätsklasse als der Thirring-Fixpunkt liegt, so dass man dessen kritisches Verhalten, statt das des Fixpunkts \mathcal{C}_V , beobachtet.

Dieses Argument wird auch durch [57] gestützt. Dort wird darauf verwiesen, dass für $N_f = 2$ vermutlich das Gross-Neveu- und das Thirring-Modell auf dem Gitter übereinstimmen. Das korrespondiert mit der hier getroffenen Beobachtung, dass für bestimmte Startwerte der Fluss vom Fixpunkt \mathcal{C}_V für $2 \leq N_f \leq 5$ durch den Fixpunkt \mathcal{S} bestimmt wird. Dieser gehört zur Universalitätsklasse des Gross-Neveu-Modells in der Formulierung [31].

Möglicherweise lassen sich mit diesen Argumenten auch die Beobachtungen der numerischen Simulationen aus [51] erklären. In diesem Artikel stellte man für N_f unterhalb der kritischen Flavorzahl N_f^{cr} die spontane Brechung der chiralen Symmetrie fest. Der kritische Wert wurde dort zu $N_f^{\text{cr}} = 6.6$ bestimmt, was eine gute Übereinstimmung zum Wert $N_f^{\text{cr}} = 6$ darstellt, den die hier durchgeführte Untersuchung liefert. In der Arbeit [20] wurde hingegen ein kritischer Wert von $N_f^{\text{cr}} = 5.1$ bestimmt. Das dort betrachtete Modell weist jedoch im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit und den Gittersimulationen eine $U(2N_f)$ -Symmetrie auf.

Der Artikel [24] kommt mit numerischen Simulationen in einem etwas anderen Modell unter Einbeziehung der Coulomb-Wechselwirkung auf eine kritische Flavorzahl N_f^{cr} zwischen 4 und 6. Für kleinere Flavorzahlen tritt ein spontaner Bruch der chiralen Symmetrie auf. Das ist gleichbedeutend damit, dass das mit diesem Modell beschriebene Graphen einen Phasenübergang vom Halbleiter zum Isolator durchläuft.

Es muss betont werden, dass in der vorliegenden Arbeit eine rein fermionische Rechnung durchgeführt wurde. Mit dieser sind nur qualitative Aussagen zum kritischen Verhalten möglich. Um eine exakte quantitative Beschreibung und die thermodynamischen Exponenten zu erhalten, wäre es lohnenswert eine bosonisierte Version dieses Modells bzw. eines speziellen Kanals oder Unterraums zu untersuchen. Für den Kanal P^D wurde das parallel zu meiner Arbeit von meiner Kollegin Julia Borchardt durchgeführt und wird in Kürze in ihrer Masterarbeit mit dem Titel „RG flows of 3d chiral fermion systems with collective degrees of freedom“ zur Verfügung stehen. Darin findet man eine detaillierte Analyse der Fixpunktstruktur, den kritischen Exponenten und dem universellen Verhalten an Phasenübergängen.

Die vorliegende Arbeit dient dem näheren Verständnis des Theorieraums des $U_L(N_f) \otimes U_R(N_f)$ -symmetrischen verallgemeinerten Gross-Neveu-Modells. Der Autor hofft etwas Licht auf diesen Untersuchungsgegenstand geworfen und Anstöße für weitere lohnenswerte Forschungen gegeben zu haben.

Anhang

A. Konventionen

A.1. Einheiten und Massendimension

In der vorliegenden Arbeit werden, sofern erforderlich, ausschließlich natürliche Einheiten verwendet. Für diese gilt

$$c \equiv 1 \quad \text{und} \quad \hbar \equiv 1. \quad (\text{A.1})$$

Den Zusammenhang mit dem SI-Einheitensystem erhält man über die Identität

$$1 = \hbar c \approx 0.197 \text{ GeV} \cdot \text{fm}. \quad (\text{A.2})$$

Damit lassen sich nun alle Größen in Potenzen der Einheit der Masse GeV angeben. Die zugehörige Potenz bezeichnet man als Massendimension und kennzeichnet sie durch eckige Klammern. Es gilt:

$$[E] = [p_\mu] = [m] = 1 \quad (\text{A.3})$$

$$[t] = [x_\mu] = [m^{-1}] = -1. \quad (\text{A.4})$$

Damit die Wirkung ein Skalar mit Massendimension 0 ist, gilt für fermionische Felder in d Raumzeitdimensionen

$$[\psi] = [\bar{\psi}] = \frac{d-1}{2}. \quad (\text{A.5})$$

A.2. Euklidische Raumzeit

Es wird eine 2+1-dimensionale euklidische Raumzeit verwendet, deren Koordinaten x_μ wie folgt mit den Koordinaten der üblichen Minkowski-Raumzeit $x_{M,\mu}$ zusammenhängen. Dabei bezeichnen 1 und 2 für die räumlichen, 3 die zeitliche Komponente.

$$x_3 = ix_{M,3}, \quad x_i = x_{M,i}, \quad \text{für } i = 1, 2 \quad (\text{A.6})$$

Die Metrik in der Minkowski-Raumzeit ist durch $g_M^{\mu\nu} = \text{diag}(-, -, +)$ gegeben. Unter der Forderung, dass das Linienelement gleich bleibt, erhält man als Metrik der euklidischen Raumzeit das Kroneckerdelta $g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$:

$$x_M^2 = g_M^{\mu\nu} x_{M,\mu} x_{M,\nu} = -\mathbf{x}_M^2 + x_{M,3}^2 = -x^2 = -g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu \quad (\text{A.7})$$

A.3. Fouriertransformation, Deltafunktion und funktionale Ableitung

Die Fouriertransformation fermionischer Felder sei wie folgt definiert:

$$\psi(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \psi(p) e^{ipx}, \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \bar{\psi}(p) e^{-ipx}. \quad (\text{A.9})$$

Dabei ist $px := p_\mu x_\mu$. Für allgemeine Felder gilt:

$$\theta(x) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \theta(p) e^{ipx}. \quad (\text{A.10})$$

Eine Zusammenstellung wie in Gleichung (2.6) garantiert, dass obige Definitionen für fermionische Felder gewahrt bleiben. Es folgt:

$$\int d^d x e^{-ipx} = (2\pi)^d \delta^{(d)}(p). \quad (\text{A.11})$$

Für die funktionale Ableitung zweier fermionischer Felder gilt:

$$\frac{\partial \psi_i(p)}{\partial \psi_j(q)} = \delta_{ij} (2\pi)^d \delta^{(d)}(p - q) = \frac{\partial \bar{\psi}_i(p)}{\partial \bar{\psi}_j(q)}, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial \psi_i(p)}{\partial \bar{\psi}_j(q)} = 0 = \frac{\partial \bar{\psi}_i(p)}{\partial \psi_j(q)}. \quad (\text{A.13})$$

B. Dirac-Algebra

Eine Dirac-Algebra in $d = 3$ Euklidischen Raumzeitdimensionen ist durch folgende Eigenschaften definiert:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{1}, \quad \mu, \nu = 1, \dots, d, \quad (\text{B.1})$$

$$(\gamma_\mu)^\dagger = \gamma_\mu, \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = \delta_{\mu\nu}\mathbb{1} - i\gamma_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad \gamma_{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4. \quad (\text{B.4})$$

Für die Dirac-Matrizen $\gamma_i, i = 1, \dots, 4$ und $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ gelten mit der Dimension der Dirac-Algebra $d_\gamma = 4$ folgende Spuridentitäten¹:

$$\text{Tr}(\mathbb{1}_4) = 4, \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Tr}(\gamma_i) = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Tr}(\gamma_i\gamma_j) = 4\delta_{ij}, \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5) = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\text{Tr}(\text{ungerade Anzahl } \gamma_i) = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\text{Tr}(\gamma_5 \cdot \text{ungerade Anzahl } \gamma_i) = 0, \quad (\text{B.10})$$

$$\text{Tr}(\gamma_i\gamma_j\gamma_5) = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$\text{Tr}(\gamma_i\gamma_j\gamma_k\gamma_l) = 4(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (\text{B.12})$$

¹s. auch [26][Kap. 5.1, Anh. A.3].

C. Fierztransformation

C.1. Vollständige Basis der Dirac-Algebra¹

Wie in Abschnitt 3.1.1 angegeben, bilden die 16 Matrizen

$$(\gamma_A)_{A=1,\dots,16} = (\mathbb{1}_4, \gamma_\mu, \gamma_4, \gamma_{\mu\nu}, i\gamma_\mu\gamma_4, i\gamma_\mu\gamma_5, \gamma_{45}, \gamma_5) \quad (\text{C.1})$$

eine vollständige Orthonormalbasis der 4×4 -Dirac-Algebra bezüglich des Skalarprodukts $\langle \gamma_A | \gamma_B \rangle = \text{Tr}(\gamma_A \gamma_B)$ mit den Eigenschaften:

$$\langle \gamma_A | \gamma_B \rangle = 4\delta_{AB}, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} (\gamma_A)_{ml} (\gamma_A)_{ik} = \delta_{mk} \delta_{il}. \quad (\text{C.3})$$

Weiterhin gilt laut [58]

$$\gamma_A \gamma_B = \text{konst.} \cdot \gamma_C, \quad (\text{C.4})$$

d. h. jedes Produkt der Basiselemente ist bis auf eine Konstante stets selbst wieder ein Basiselement und keine Linearkombination dieser. Auf Grund dieser Tatsache, die auf der speziellen Wahl der Basis beruht, lassen sich Beziehungen zwischen Vier-Fermi-Termen der Form $(\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma_A \psi^d)$ herstellen, die als Fierz-Identitäten bezeichnet werden.

Dazu multipliziert man die Vollständigkeitsrelation (C.3) mit jedem der Vier-Fermi-Terme $\bar{\psi}_m^a (\gamma_A \psi^b)_k \bar{\psi}_i^c (\gamma_A \psi^d)_l$ und schreibt die erhaltenen Produkte als Summe von Termen, die nur die Basiselemente enthalten:

$$\bar{\psi}_m^a (\gamma_A \psi^b)_k \bar{\psi}_i^c (\gamma_A \psi^d)_l \delta_{mk} \delta_{il} = \frac{1}{4} \sum_{C=1}^{16} (\gamma_C)_{ml} (\gamma_C)_{ik} \bar{\psi}_m^a (\gamma_C \psi^b)_k \bar{\psi}_i^c (\gamma_C \psi^d)_l \quad (\text{C.5})$$

$$(\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma_A \psi^d) = -\frac{1}{4} \sum_{C=1}^{16} (\bar{\psi}^a \gamma_C \gamma_A \psi^d)(\bar{\psi}^c \gamma_C \gamma_A \psi^b) \quad (\text{C.6})$$

$$(\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma_A \psi^d) = \sum_{B=1}^{16} C_{AB} (\bar{\psi}^a \gamma_B \psi^d)(\bar{\psi}^c \gamma_B \psi^b). \quad (\text{C.7})$$

Die Matrix C_{AB} ergibt sich aus den Konstanten aus Gleichung (C.4). Zur expliziten Bestimmung ihrer Einträge betrachtet man Gleichung (C.7) ohne die Spinoren $\bar{\psi}, \psi$:

$$(\gamma_A)_{mk} (\gamma_A)_{il} = \sum_{B=1}^{16} C_{AB} (\gamma_B)_{ml} (\gamma_B)_{ik} \quad | \cdot (\gamma_D)_{lm} (\gamma_D)_{ki} \quad (\text{C.8})$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(\gamma_D \gamma_A \gamma_D \gamma_A) = \sum_{B=1}^{16} C_{AB} [\text{Tr}(\gamma_D \gamma_B)]^2 \quad (\text{C.9})$$

$$\Rightarrow C_{AD} = \frac{1}{16} \text{Tr}(\gamma_D \gamma_A \gamma_D \gamma_A). \quad (\text{C.10})$$

¹Quellen: [20, 32].

Im letzten Schritt wurde von der Orthogonalitätsrelation (C.2) Gebrauch gemacht. Gruppirt man Elemente der Dirac-Basis, wie z. B. die drei γ_ν , so müssen die entsprechenden Matrixeinträge mit der Anzahl N_B der Gruppenelemente normiert werden, so dass man schließlich erhält:

$$C_{AB} = \frac{1}{16N_B} \text{Tr}(\gamma_A \gamma_B \gamma_A \gamma_B). \quad (\text{C.11})$$

Für die gewählte Basis (C.1) hat die Matrix C_{AB} die folgende Form [20]:

$$(C_{AB}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 1 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

C.2. Transformation zwischen Termen, die die geforderte Symmetrie erfüllen

Die Terme mit Singulett-Flavorstruktur (Gl. 3.51 ... 3.54) und die mit Dublett-Flavorstruktur (Gl. 3.60 ... 3.63) bilden jeweils eine Basis im Unterraum der 4-Fermi-Terme, die die in Abschnitt 3.1 geforderten Symmetrien erfüllen. Die Basen seien wie folgt angegeben:

$$(B_i^S) := (S, P, V, T), \quad (\text{C.13})$$

$$(B_i^D) := (S^D, P^D, V^D, A^D). \quad (\text{C.14})$$

Die Fierztransformation zwischen beiden erhält man, indem man die allgemeine Fierztransformation (C.7) auf die Terme (C.13) mit Singulett-Flavorstruktur anwendet und mit Hilfe der Identitäten aus Tabelle 3.2 als Summe der Terme mit Dublett-Flavorstruktur schreibt. Die Transformation zwischen den beiden Basen ergibt sich dann wie folgt:

$$B_i^S = C_{ij} B_j^D, \quad (\text{C.15})$$

$$B_i^D = C_{ij}^{-1} B_j^S, \quad (\text{C.16})$$

mit der Transformationsmatrix C :

$$(C_{ij}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

$$(C_{ij}^{-1}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.18})$$

Daraus bestimmt man die Fierztransformation zwischen den zugehörigen Kopplungskonstanten:

$$(\bar{g}_i) = (\bar{g}_S, \bar{g}_P, \bar{g}_V, \bar{g}_T), \quad (\text{C.19})$$

$$(\bar{g}_i^D) = (\bar{g}_S^D, \bar{g}_P^D, \bar{g}_V^D, \bar{g}_A^D). \quad (\text{C.20})$$

Indem man die effektiven Wirkungen (3.66) und (3.67) gleichsetzt, erhält man unter Verwendung obiger Fierztransformationen für die Basiselemente:

$$\bar{g}_i^D = C_{ij}^{DS} \bar{g}_j, \quad (\text{C.21})$$

$$\bar{g}_i = C_{ij}^{SD} \bar{g}_j^D = C_{ij}^{DS^{-1}} \bar{g}_j^D. \quad (\text{C.22})$$

Mit den Transformationsmatrizen $C^{DS} = C^T$ und $C^{SD} = C^{DS^{-1}} = (C^{-1})^T$:

$$(C_{ij}^{DS}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.23})$$

$$(C_{ij}^{SD}) = (C_{ij}^{DS^{-1}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

D. Schwellwertfunktionen¹

Häufig schreibt man die fermionische Regulatorfunktion $R_{\psi,k}$ in Gleichung (2.17) mit Hilfe einer dimensionslosen fermionischen Formfunktion $r_{\psi,k}$ wie folgt:

$$R_{\psi,k}(q) = -Z_{\psi,k} \not{q} r_{\psi,k}(q^2). \quad (\text{D.1})$$

Für die Wahl der Formfunktion gibt es mehrere Möglichkeiten. Der lineare Regulator ist durch

$$r_{\psi,k}^{\text{opt}}(q^2) = \left(\sqrt{\frac{k^2}{q^2} - 1} \right) \Theta(k^2 - q^2) \quad (\text{D.2})$$

gegeben. Er erfüllt ein Optimierungskriterium [41]. Für einen scharfen Cutoff verwendet man den Grenzwert $a \rightarrow \infty$ der folgenden Funktion

$$r_{\psi,k}^{\text{sc}}(q^2) = \left(\sqrt{a \left(\frac{k^2}{q^2} - \frac{a-1}{a} \right)} - 1 \right) \Theta(k^2 - q^2), \quad (\text{D.3})$$

wobei der Grenzwert nach der Integration über die inneren Impulse durchgeführt werden soll. Weiter definiert man für $x = q^2$ den (inversen) regularisierten Propagator

$$P_{\psi}(x) := x[1 + r_{\psi}(x)]^2 \quad (\text{D.4})$$

wobei hier und im Folgenden der Index k für die Skalenabhängigkeit unterdrückt werden soll.

Auf Grund der Ein-Loop-Struktur der Wetterichgleichung (2.31) ist es stets möglich die Flussgleichungen in Form von Integralen mit nur einer Impulsintegration, den Schwellwertfunktionen, zu schreiben. Sie enthalten die Informationen über das Regularisierungsschema. Für fermionische Theorien sind sie wie folgt definiert²:

$$\ell_n^{(\text{F})d}(\omega; \eta_{\psi}) = -\frac{1}{2} k^{2n-d} \bar{\partial}_t \int_0^{\infty} dx x^{\frac{d}{2}-1} [P_{\psi}(x) + \omega k^2]^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{D.5})$$

ω bezeichnet einen dimensionslosen Massenparameter, ist also gleich Null, für masselose Theorien.

Die Substitution $x = q^2$ hat die Integration wie folgt verändert:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} = 4v_d \int dq q^{d-1} = 2v_d \int dx x^{d/2-1}. \quad (\text{D.6})$$

Dabei ist

$$v_d := \frac{1}{4} \frac{\text{Vol}(S^{d-1})}{(2\pi)^d} = \frac{1}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)}, \quad (\text{D.7})$$

¹Quelle: [20].

²Hier sollen nur die für diese Arbeit benötigten Funktionen angegeben werden. Für allgemeine Definitionen s. [30].

wobei $\text{Vol}(S^{d-1})$ das Volumen der $(d-1)$ -dimensionalen Einheitsphäre bezeichnet. Die Ableitung $\tilde{\partial}_t$ soll nur auf die k -Abhängigkeit des Regulators wirken und lässt sich daher auch wie folgt schreiben:

$$\tilde{\partial}_t := \int dx' \frac{\partial_t [Z_\psi r_\psi(x')]}{Z_\psi} \frac{\delta}{\delta r_\psi(x')} \quad (\text{D.8})$$

$$= \int dx' 2x' [1 + r_\psi(x')] \frac{\partial_t [Z_\psi r_\psi(x')]}{Z_\psi} \frac{\delta}{\delta P_\psi(x')}. \quad (\text{D.9})$$

Für den optimierten linearen Regulator und den Regulator mit scharfen Cutoff lassen sich die Schwellwertfunktionwen explizit berechnen, die Ergebnisse lauten [20]:

$$\ell_n^{(\text{F})d}(\omega; \eta_\psi) = \begin{cases} \frac{2}{d} \left(1 - \frac{\eta_\psi}{d+1}\right) \frac{n}{(1+\omega)^{n+1}}, & \text{für den linearen Regulator,} \\ \frac{1}{(1+\omega)^n}, & \text{für den scharfen Cutoff.} \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

E. Flussgleichung für die Wellenfunktionsrenormierung

Hier soll die Flussgleichung der Wellenfunktionsrenormierung $Z_{\psi,k}$ für eine beliebige fermionische Theorie auf dem Niveau der Tunkierung mit Vier-Fermi-Termen bestimmt werden. Dabei geht man ähnlich vor, wie bei der Bestimmung der Flussgleichungen der Kopplungskonstanten in Abschnitt 3.3. Ausgehend vom Ansatz

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi] = -Z_{\psi} \int_p \bar{\psi}^a(p) \not{p} \psi^a(p) + \sum_i \frac{\bar{g}_i}{2N_f} \Gamma_i \quad (\text{E.1})$$

für eine allgemeine Theorie mit quadratischen Vier-Fermi-Wechselwirkungstermen (vgl. Gleichung (3.73)), bestimmt man zuerst die zweite funktionale Ableitung $\Gamma_k^{(1,1)}$ gemäß Gleichung (3.74).

Um die Flussgleichung der Wellenfunktionsrenormierung zu bestimmen, kann man diese jedoch nicht für konstante Hintergrundfelder auswerten. Denn dann verschwindet auf der linken Seite der Flussgleichung der kinetische Term mit $Z_{\psi,k}$, da er einen Ableitungsoperator enthält. Stattdessen wertet man die Flussgleichung für räumlich veränderliche Hintergrundfelder in folgender Form aus [28]:

$$\psi^j(p) = \Psi^j(2\pi)^d \delta^{(d)}(p + Q), \quad (\text{E.2})$$

$$\bar{\psi}^j(p) = \bar{\Psi}^j(2\pi)^d \delta^{(d)}(p - Q). \quad (\text{E.3})$$

Im Ortsraum entsprechen diese Felder ebenen Wellen mit dem äußeren Impuls Q . Wie auch in Abschnitt 3.3 kann man die zweite funktionale Ableitung $\Gamma_k^{(1,1)}$ in einen feldabhängigen und einen feldunabhängigen Anteil zerlegen. Zusammen mit dem fermionischen Regulator R_k aus Gleichung (3.80) erhält man die Matrizen \mathcal{P}_k und \mathcal{F}_k (s. Gleichung (2.36)). Die Matrix \mathcal{P}_k ist unabhängig von der Wahl der Felder und verbleibt somit wie in Gleichung (3.81). Die Fluktuationsmatrix \mathcal{F}_k enthält die feldabhängigen Anteile. Für die Felder wie in Gleichungen (E.2, E.3) ist sie im Impulsraum nicht mehr diagonal, sondern schreibt sich in der folgenden Form:

$$\mathcal{F}_k = \begin{pmatrix} F_{11}^{mn} & F_{12}^{mn} \\ F_{21}^{mn} & F_{22}^{mn} \end{pmatrix} (2\pi)^d \delta^{(d)}(p - q + 2Q). \quad (\text{E.4})$$

Die Matrixeinträge $F_{11}^{mn}, \dots, F_{22}^{mn}$ stimmen mit denen in Gleichungen (3.83 ... 3.86) überein, insbesondere bleibt auch die Eigenschaft

$$F_{12}^{mn} = -(F_{21}^{mn})^T \quad (\text{E.5})$$

erhalten. Die inverse Matrix \mathcal{P}_k^{-1} ist wie in Gleichung (3.87) gegeben und man erhält

$$(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^{mn} = -\frac{(2\pi)^d \delta^{(d)}(p - q + 2Q)}{Z_{\psi}(1 + r_{\psi})p^2} \begin{pmatrix} \not{p} F_{21}^{mn} & \not{p} F_{22}^{mn} \\ \not{p}^T F_{11}^{mn} & \not{p}^T F_{12}^{mn} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.6})$$

Aus der Form der Fluktuationsmatrix \mathcal{F}_k ist ersichtlich, dass nur dieser Beitrag auf der rechten Seite der Flussgleichung (2.37) Zwei-Fermi-Terme erzeugt. Denn die Fluktuationsmatrix ist quadratisch

in den Feldern, so dass nur der Summand, der linear in \mathcal{F}_k ist, Zwei-Fermi-Terme enthält. Allein diese tragen zum Fluss der Wellenfunktionsrenormierung bei. Bildet man von dem Summand die Superspur, ergibt sich:

$$\text{STr}(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k) = \int_p \frac{(2\pi)^d \delta^{(d)}(2Q)}{z_\psi(1+r_\psi)p^2} \text{Tr}(\not{p}F_{21}^{nn} + p^T F_{12}^{nn}), \quad (\text{E.7})$$

$$\text{wobei } \text{Tr}(\not{p}F_{21}^{nn} + p^T F_{12}^{nn}) \stackrel{(\text{E.5})}{=} \text{Tr}(\not{p}F_{21}^{nn}) - \text{Tr}(\not{p}^T(F_{21}^{nn})^T) = 0. \quad (\text{E.8})$$

Aus dem Ansatz (E.1) erhält man auf der linken Seite der Flussgleichung bei Auswertung für Felder wie in Gleichungen (E.2, E.3) folgenden Ausdruck bis zur quadratischen Ordnung in den Feldern:

$$\partial_t \Gamma_k = -\partial_t Z_\psi (2\pi)^d \delta^{(d)}(2Q) \bar{\Psi}^a \not{Q} \Psi^a + O\left(\left(\bar{\Psi}^a \Psi^a\right)^2\right) \stackrel{(2.37)}{=} \text{STr}(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k) + O\left(\left(\bar{\Psi}^a \Psi^a\right)^2\right). \quad (\text{E.9})$$

Der Koeffizientenvergleich der Zwei-Fermi-Terme unter Verwendung der Gleichungen (E.7, E.8) ergibt:

$$\partial_t Z_\psi = 0. \quad (\text{E.10})$$

D. h. die Wellenfunktionsrenormierung Z_ψ ist konstant. Damit im Grenzfall $k \rightarrow \Lambda$ die klassische Wirkung S entsteht, muss sie gemäß Gleichung (3.65) gleich 1 gewählt werden: $Z_\psi \equiv 1$. Damit folgt für die anomale Dimension $\eta_\psi = -\partial_t \ln Z_\psi \equiv 0$.

F. Berechnung des Phasendiagramms für eine Ebene, die aus zwei beliebigen Richtungen aufgespannt wird

Der vorliegende Theorieraum ist vierdimensional mit der Standardbasis \mathbf{B}^S (3.55) und den zugehörigen Kopplungskonstanten $\mathbf{g} = (g_S, g_P, g_V, g_T)$. Demzufolge besitzt die Beta-Funktion ebenfalls vier Komponenten, welche die Entwicklung jeder dieser Kopplungen beschreiben:

$$\beta(\mathbf{g}) := (\beta_S, \beta_P, \beta_V, \beta_T) = \partial_t \mathbf{g}. \quad (\text{F.1})$$

Um diesen Fluss in einer zweidimensionalen Ebene darstellen zu können muss er auf diese projiziert werden. Wählt man eine Ebene, für die in der Standardbasis zwei Kopplungen Null sind, so ergibt sich der projizierte Fluss einfach aus den beiden Betafunktionen der nichtverschwindenden Kopplungen.

Es soll nun beschrieben werden, wie man eine solche Projektion für eine Ebene E erhält, die ausgehend von einem festen Punkt mit den Koordinaten \mathbf{g}^* von zwei beliebigen Richtungen \mathbf{s} und \mathbf{t} aufgespannt wird, die nicht notwendigerweise orthogonal aufeinander stehen müssen.

Um eine Verbindung zum vollständigen Theorieraum herzustellen, benötigt man zwei weitere Richtungen \mathbf{u} und \mathbf{v} , so dass das System $(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ eine Basis im vierdimensionalen Theorieraum darstellt. Weiterhin soll gefordert werden, dass die Richtungen \mathbf{u} und \mathbf{v} senkrecht auf der betrachteten Ebene stehen:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{F.2})$$

Unter der Annahme, dass die Basisvektoren in der Standardbasis $\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), i = 1 \dots 4$ senkrecht aufeinander stehen¹, soll als Skalarprodukt das Standardskalarprodukt verwendet werden: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^4 x_i y_i$. Da man für die Wahl von \mathbf{u} und \mathbf{v} einige Freiheiten hat, lassen sich die Orthogonalitätsforderungen (F.2) erfüllen. Damit lautet die vollständige Parametrisierung der Kopplungskonstanten in der Basis $(\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$\mathbf{g} = a \mathbf{s} + b \mathbf{t} + c \mathbf{u} + d \mathbf{v}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (\text{F.3})$$

Anders ausgedrückt hat eine Transformation der Kopplungskonstanten von (g_S, g_P, g_V, g_T) zu (a, b, c, d) stattgefunden.

Innerhalb des TheorieRaums ist die Ebene E durch folgende Gleichung gegeben:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^* + a \mathbf{s} + b \mathbf{t} \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (\text{F.4})$$

Man erhält die Ebene E aus der Gleichung (F.3), indem man die Parameter c und d auf einen festen Wert setzt und nur noch a und b variiert. Setzt man die Parametrisierung (F.4) als Argument in

¹Diese Annahme ist im Allgemeinen nicht gerechtfertigt. Mangels präziser Aussagen über das korrekte Erscheinungsbild des TheorieRaums und dessen Metrik soll sie dennoch als einfachste Möglichkeit angenommen werden. Das hat zur Folge, dass die erhaltenen Phasendiagramme nur qualitative aber keine quantitativ exakten Darstellungen liefern.

die Betafunktion (F.1) ein, so kann durchaus noch ein Fluss in den Kopplungen c und d erzeugt werden:

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{g}^* + a\mathbf{s} + b\mathbf{t}) = \partial_t a \mathbf{s} + \partial_t b \mathbf{t} + \partial_t c \mathbf{u} + \partial_t d \mathbf{v} =: \beta_a \mathbf{s} + \beta_b \mathbf{t} + \beta_c \mathbf{u} + \beta_d \mathbf{v}. \quad (\text{F.5})$$

Um die gesuchten projizierten Betafunktionen β_a und β_b zu erhalten, multipliziert man skalar mit \mathbf{s} und \mathbf{t} . Auf Grund der Orthogonalitätseigenschaften (F.2) verschwinden alle Terme mit \mathbf{u} und \mathbf{v} .² Man erhält:

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{s}^2 \beta_a + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) \beta_b \quad (\text{F.6})$$

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) \beta_a + \mathbf{t}^2 \beta_b \quad (\text{F.7})$$

$$\Rightarrow \beta_a = \frac{\mathbf{t}^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t})}{\mathbf{s}^2 \mathbf{t}^2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t})^2} \quad (\text{F.8})$$

$$\beta_b = \frac{\mathbf{s}^2 (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t}) - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t}) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{s})}{\mathbf{s}^2 \mathbf{t}^2 - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{t})^2}. \quad (\text{F.9})$$

Als Argument ist in die Betafunktionen jeweils die Parametrisierung (F.4) der Ebene E einzusetzen, so dass diese letztlich von a und b abhängen. Mit Hilfe der so ermittelten Betafunktionen β_a und β_b lässt sich nun der Fluss in a - und b -Richtung für die Ebene E darstellen.

Wählt man zusätzlich \mathbf{u} und \mathbf{v} orthogonal, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, so erhält man den Fluss β_c und β_d senkrecht zur Ebene E in Richtung \mathbf{u} bzw. \mathbf{v} aus:

$$\beta_c = \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}, \quad \beta_d = \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v}^2} \quad (\text{F.10})$$

Das kann hilfreich sein um invariante Unterräume zu finden. Verschwinden die Betafunktionen β_c und β_d , wenn man die Parametrisierung (F.4) als Argument einsetzt, so handelt es sich bei der Ebene E um einen invarianten Unterraum.

²Die exakte Form der Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} ist für obiges Verfahren nicht wichtig. Entscheidend ist lediglich, dass diese existieren und orthogonal zu \mathbf{s} und \mathbf{t} gewählt werden können.

G. Parametrisierung der Achsen im Theorieraum

Die Achse zum Kanal B_i^S ist dadurch gekennzeichnet, dass auf ihr alle Kopplungen außer g_i gleich Null sind $g_{j \neq i} = 0, j = 1 \dots 4$. Analog gilt in der Basis \mathbf{B}^D für die Achse B_i^D : $g_{j \neq i}^D = 0, j = 1 \dots 4$.

G.1. Parametrisierung in der Standardbasis

Jede Achse lässt sich in Form einer Geradengleichung in der Standardbasis \mathbf{B}^S wie folgt parametrisieren:

$$\mathbf{g}_{\mathbf{B}_i} = \lambda \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{B}_i}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{B}_i}| = 1. \quad (\text{G.1})$$

Dabei ist $\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{B}_i}$ der zur Achse gehörende Einheitsvektor. Für die Standardbasis \mathbf{B}^S sind die Achsenvektoren gerade die kanonischen Einheitsvektoren:

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.2})$$

Die Achsen der Basis \mathbf{B}^D werden in der Standardbasis \mathbf{B}^S wie folgt parametrisiert: Setzt man in der Fierztransformation (C.22) zwischen den Kopplungen \mathbf{g}^D und \mathbf{g} auf der rechten Seite für die Kopplungen \mathbf{g}^D jeweils den i-ten kanonischen Einheitsvektor in der Basis \mathbf{B}^D ein, so erkennt man, dass der zugehörige Vektor in der Basis \mathbf{B}^S gerade durch die i-te Spalte der Matrix C^{SD} (C.24) gegeben ist. Normiert man diese noch erhält man die Parametrisierung der Achsen in der Basis \mathbf{B}^D wie folgt:

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{S}^D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{P}^D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{V}^D} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{A}^D} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.3})$$

G.2. Parametrisierung in der Fierzbasis

Vollkommen analog lassen sich auch alle Achsen durch Einheitsvektoren in der Basis \mathbf{B}^D parametrisieren. Die Parametrisierung der Achsen der Basis \mathbf{B}^S erhält man dabei aus den Spalten der Matrix C^{DS} . Nach anschließender Normierung lauten die Vektoren:

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{S}^D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{P}^D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{V}^D} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{T}^D} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.4})$$

Die Einheitsvektoren, die zu den Achsen der Basis \mathbf{B}^D gehören, sind gerade die kanonischen Einheitsvektoren:

$$\hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{S}^D}^D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{P}^D}^D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{V}^D}^D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{g}}_{\mathbf{A}^D}^D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.5})$$

H. Umsetzung der Vier-Fermi-Formel mit Mathematica

Der folgende Quellcode für Mathematica (umgesetzt unter Version 8.0.1.0) bietet eine Implementierung des Algorithmus zur Berechnung der Flussgleichungen einer effektiven Wirkung mit Vier-Fermi-Termen (Abschnitt 4) unter Verwendung der Formel (4.22). Eine funktionsfähige elektronische Version der Mathematica-Befehle findet man unter <https://www.tpi.uni-jena.de/files/gehring/alg-4-fermi.nb>.

H.1. Initialisierung

Die verwendeten Beziehungen gelten unabhängig von der Darstellung der Dirac-Algebra (s. Anhang B), für die konkrete Berechnung muss jedoch eine explizite Darstellung gewählt werden. Hier wurde o. B. d. A. die chirale Darstellung, wie in Gleichungen (3.3, 3.4) angegeben, verwendet. Der Algorithmus wurde auch mit anderen Darstellungen getestet, ohne dass sich dadurch das Ergebnis verändert hat. Man kann hier also die Darstellung seines Beliebens einsetzen, entscheidend ist nur, dass die Eigenschaften der Dirac-Algebra erfüllt werden.

```
Clear[e, \[Gamma]1, \[Gamma]2, \[Gamma]3, \[Gamma]4, \[Gamma]12, \
\[Gamma]13, \[Gamma]23, \[Gamma]14, \[Gamma]24, \[Gamma]34, \
\[Gamma]15, \[Gamma]25, \[Gamma]35, \[Gamma]45, \[Gamma]5, \
\[Gamma]A, \[Gamma], Oi, Nf, i, k, j,
  d, \[Sigma]0, \[Sigma]1, \[Sigma]2, \[Sigma]3, komm, M, \[Alpha], A,
  B, WW, rs, basis, anzb, anzi, s, t];
(*Pauli Spinmatrizen*) \[Sigma]1 = ({
  {0, 1},
  {1, 0}
}); \[Sigma]2 = ({
  {0, -I},
  {I, 0}
}); \[Sigma]3 = ({
  {1, 0},
  {0, -1}
}); \[Sigma]0 = ({
  {1, 0},
  {0, 1}
});
\[Gamma]1 = KroneckerProduct[\[Sigma]2, \[Sigma]1]; \[Gamma]2 =
  KroneckerProduct[\[Sigma]2, \[Sigma]2]; \[Gamma]3 =
  KroneckerProduct[\[Sigma]2, \[Sigma]3];
\[Gamma]4 = KroneckerProduct[\[Sigma]1, \[Sigma]0];
\[Gamma]5 = \[Gamma]1.\[Gamma]2.\[Gamma]3.\[Gamma]4;
```

```

e = IdentityMatrix[4];
komm[x_, y_] = x.y - y.x ;(*Kommutator fuer Matrizen*)
\[Gamma]12 =
  I/2* komm[\[Gamma]1, \[Gamma]2] ; \[Gamma]13 =
  I/2* komm[\[Gamma]1, \[Gamma]3]; \[Gamma]23 =
  I/2* komm[\[Gamma]2, \[Gamma]3];
\[Gamma]45 = I \[Gamma]4.\[Gamma]5;
\[Gamma]14 = I *\[Gamma]1.\[Gamma]4; \[Gamma]24 =
  I *\[Gamma]2.\[Gamma]4; \[Gamma]34 = I *\[Gamma]3.\[Gamma]4;
\[Gamma]15 = I *\[Gamma]1.\[Gamma]5; \[Gamma]25 =
  I *\[Gamma]2.\[Gamma]5; \[Gamma]35 = I *\[Gamma]3.\[Gamma]5;
\[Gamma]A = {e, \[Gamma]1, \[Gamma]2, \[Gamma]3, \[Gamma]4, \
\[Gamma]12, \[Gamma]13, \[Gamma]23, \[Gamma]14, \[Gamma]24, \
\[Gamma]34, \[Gamma]15, \[Gamma]25, \[Gamma]35, \[Gamma]45, \
\[Gamma]5};

```

H.2. Festlegung des Ansatzes und Berechnung der Projektionsmatrix

Jetzt kommt die einzige Stelle des Algorithmus, an der eine Benutzereingabe zwingend notwendig ist, denn hier wird der gewählte Ansatz spezifiziert. Dazu müssen die im Ansatz (4.1) vorkommenden Operatoren in die Variable „Oi“ eingeben werden. Es ist erforderlich alle verwendeten Basiselemente anzugeben, auch wenn über diese mit einem Lorentzindex summiert wird. Um dem Rechnung zu tragen, muss zusätzlich in der Variable „basis“ die Gruppierung der Basiselemente festgelegt werden. Das geschieht, indem man jeweils die Position des ersten Elements einer Gruppe in der Variable „Oi“ angibt. Im vorliegenden Quelltext ist als Beispiel die Eingabe des in dieser Arbeit betrachteten verallgemeinerten Gross-Neveu-Modells in $d = 3$ Raumzeitdimensionen dargestellt. Ausgehend von diesen Informationen wird die Projektionsmatrix M_{ij} gemäß Gleichung (4.6) berechnet, wobei die Gruppierung der Basiselemente berücksichtigt wird.

```

(*Ansatz*) Oi = {
  e, \[Gamma]45, \[Gamma]1, \[Gamma]2, \[Gamma]3, \[Gamma]12, \
\[Gamma]13, \[Gamma]23};
basis = {1, 2, 3, 6};
anzi = Length[Oi];
anzb = Length[basis];
M = Table[
  Table[Sum[
    Sum[Nf (Tr[Oi[[s]].Oi[[t]])^2 -
      Tr[Oi[[s]].Oi[[t]].Oi[[s]].Oi[[t]]], {s, basis[[i]],
      If[i == anzb, anzi, basis[[i + 1]] - 1]}], {t, basis[[j]],
      If[j == anzb, anzi, basis[[j + 1]] - 1]}], {j, anzb}], {i,
    anzb}];
\[Alpha] = FullSimplify[Transpose[Inverse[M]]];

```

H.3. Berechnung der Koeffizientenmatrizen

In diesem Programmteil werden die Koeffizientenmatrizen A_{ij}^k berechnet und ausgegeben. Hier wird die Formel (4.22) in angepasster Form verwendet. Möchte man wie in dieser Arbeit in $d = 3$

Raumzeitdimensionen rechnen, muss man nichts verändern, ansonsten ist die Anzahl d der Raumzeitdimensionen einzugeben.

```
(*Dimension*) d = 3;
\Gamma = Table[\Gamma A[[i]], {i, 2, d + 1}];
A = Table[
  Table[Table[
    FullSimplify[
      1/d*Sum[Sum[
        Sum[Sum[\Alpha][[m]][[
          k]] Sum[(Tr[
            Oi[[t]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[s]].Oi[[l]].Oi[[
              t]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[s]].Oi[[l]]] -
            Tr[Oi[[t]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[s]].Oi[[l]].Oi[[
              s]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[t]].Oi[[l]]] -
            Tr[Oi[[s]].Oi[[l]].Oi[[t]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[
              s]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[t]].Oi[[l]]] -
            Tr[Oi[[t]].Oi[[l]].Oi[[s]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[
              t]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[s]].Oi[[l]]] +
            Nf -(Tr[
              Oi[[t]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[s]].Oi[[l]])^2 +
              Tr[Oi[[t]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[s]].Oi[[l]]]*
              Tr[Oi[[s]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[t]].Oi[[l]]] +
              Tr[Oi[[s]].Oi[[l]].Oi[[t]].Oi[[l]]]*
              Tr[\Gamma[[\Mu]].Oi[[
                s]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[t]]))], {1, basis[[m]],
            If[m == anzb, anzi, basis[[m + 1]] - 1]], {m,
          anzb}] +
        4 Nf \Alpha[[j]][[k]] Tr[
          Oi[[s]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[t]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[
            s]].Oi[[t]]] +
        4 Nf \Alpha[[i]][[
          k]] (Tr[
            Oi[[t]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[
              s]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[t]].Oi[[s]]] -
            4 Nf KroneckerDelta[s, t]*
            Tr[\Gamma[[\Mu]].Oi[[s]].\Gamma[[\Mu]].Oi[[
              t]]]), {\Mu, d}, {s, basis[[i]],
            If[i == anzb, anzi, basis[[i + 1]] - 1]], {t, basis[[j]],
            If[j == anzb, anzi, basis[[j + 1]] - 1]]], {j, anzb}, {i,
          anzb}], {k, anzb}];
Do[Print["(", Subsuperscript["A", "ij", k], ")", ":", " ",
  MatrixForm[A[[k]]] ;, {k, anzb}];
```

H.4. Ausgabe der Flussgleichungen

Der letzte Programmteil dient der formatierten Ausgabe des Ergebnisses, so dass man die Flussgleichungen direkt ablesen kann. Dazu wird zunächst der gewählte Ansatz der effektiven Wirkung

ausgegeben und damit die Zuordnung der Kopplungskonstanten dargestellt. Hat man bei dessen Eingabe in die Variable „Oi“ nicht korrekt über die Lorentzindizes summiert, wird ein Fehler ausgegeben. Die durchgeführte Rechnung ist dennoch korrekt aber vermutlich physikalisch nicht sinnvoll.

Ausgehend davon werden die Flussgleichungen zum einen für dimensionslose, renormierte Kopplungen wie in Gleichung (3.90) angegeben. Zum anderen werden sie noch einmal nach der Umskalierung (3.99) dargestellt. Dabei werden noch explizit die Anzahl d der Raumzeitdimensionen und $\eta_\psi \equiv 0$ eingesetzt.

ansatz::fehler =

```
"Falsche Kontraktion über die Lorentzindizes. Bitte Ansatz in den \
Variablen \"Oi\" und \"basis\" überprüfen! Die Matrix '1' ist nicht \
der Beginn einer Gruppe.>";
B = Table[
  Switch[Oi[[i]], e,
    "(\\(\\(*SuperscriptBox[OverscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\(_\\)], \\(a\\)]\\)\\
\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\(a\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\)\\), \\
\\(2\\)]\\)", \\[Gamma]45,
    "(\\(\\(*SuperscriptBox[OverscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\(_\\)], \\(a\\)]\\)\\
\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(\\[Gamma]\\), \\(45\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\
\\[Psi]\\), \\(a\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\)\\), \\(2\\)]\\)", \\[Gamma]5,
    "(\\(\\(*SuperscriptBox[OverscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\(_\\)], \\(a\\)]\\)\\
\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(\\[Gamma]\\), \\
\\(5\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\
\\(a\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\)\\), \\(2\\)]\\)", \\[Gamma]4,
    "(\\(\\(*SuperscriptBox[OverscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\(_\\)], \\(a\\)]\\)\\
\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(\\[Gamma]\\), \\
\\(4\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\
\\(a\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\)\\), \\(2\\)]\\)", \\[Gamma]1,
    "(\\(\\(*SuperscriptBox[OverscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\(_\\)], \\(a\\)]\\)\\
\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(\\[Gamma]\\), \\(\\[Mu]\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\
\\[Psi]\\), \\(a\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\)\\), \\(2\\)]\\)", \\[Gamma]12,
    "\\!\\(\\(*FractionBox[\\(1\\), \\
\\(2\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[OverscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\(_\\)], \\
\\(a\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(\\[Gamma]\\), \\
\\(\\[Mu]\\[Nu]\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\
\\(a\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\)\\), \\(2\\)]\\)", \\[Gamma]15,
    "(\\(\\(*SuperscriptBox[OverscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\(_\\)], \\(a\\)]\\)\\
\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(i\\[Gamma]\\), \\(\\[Mu]\\)]\\)\\)\\)\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(\\
\\[Gamma]\\), \\(5\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\
\\(a\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\)\\), \\(2\\)]\\)", \\[Gamma]14,
    "(\\(\\(*SuperscriptBox[OverscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\(_\\)], \\(a\\)]\\)\\
\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(i\\[Gamma]\\), \\(\\[Mu]\\)]\\)\\)\\)\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(\\
\\[Gamma]\\), \\(4\\)]\\)\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\[Psi]\\), \\
\\(a\\)]\\)\\)\\!\\(\\(*SuperscriptBox[\\(\\)\\), \\(2\\)]\\)", _,
    Message[ansatz::fehler, Oi[[i]]], {i, basis}];
WW = Row[Table[
  Row[{Subscript["\\!\\(\\(*OverscriptBox[\\(g\\), \\(_\\)]\\)", i]/2/
    "\\!\\(\\(*SubscriptBox[\\(N\\), \\(f\\)]\\)", B[[i]]}], {i, anzb}],
```

```

"+"];
Print["Ansatz: \!\(\*SubscriptBox[\(\[CapitalGamma]\), \(\kappa\)]\) = \
\[\Integral]\!\(\*SuperscriptBox[\(\[DifferentialD]\), \(\mathrm{d}\)]\)x \{ \
\!\(\*SubscriptBox[\(\Zeta\), \(\[Psi]\)]\) \
\!\(\*SuperscriptBox[\(\[Psi]\), \(\_)\], \
\(\mathrm{a}\)]\)i\!\(\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \
\(\[Mu]\)]\) \!\(\*SubscriptBox[\(\[Gamma]\), \
\(\[Mu]\)]\) \!\(\*SuperscriptBox[\(\[Psi]\), \(\mathrm{a}\)]\) + ", WW, "}"]; \
Print["dimensionslose, renormierte Kopplungen: \!\(\*SubscriptBox[\(\mathrm{g}\
\), \(\mathrm{i}\)]\) \(\mathrm{d}\) \) = \!\(\*FractionBox[\(\kappa\), \(\mathrm{d}\ \
- 2\)], \(\mathrm{Zeta}\), \(\[Psi]\), \(\mathrm{d}\)]\) \
\!\(\*SubscriptBox[\(\mathrm{g}\), \(\_)\], \(\mathrm{i}\)]\)"]; \
Print["Flussgleichungen:"];
For[k = 1, k <= anz, k++,
  rs = Sum[Sum[
    If[i != j, A[[k]][[i]][[j]] + A[[k]][[j]][[i]],
      A[[k]][[i]][[j]] Subscript["g", i] Subscript["g", j], {j,
        i}], {i, anz}];
  Print["\!\(\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\mathrm{t}\)]\) ",
    Subscript["g", k],
    "= (2 \!\(\*SubscriptBox[\(\[Eta]\), \(\[Psi]\)]\) + d - 2) ",
    Subscript["g", k], " + ",
    4 "\!\(\*SubscriptBox[\(\mathrm{v}\), \(\mathrm{d}\)]\) "/
    "\!\(\*SubscriptBox[\(\mathrm{N}\), \(\mathrm{f}\)]\) \) ",
    "\!\(\*SubsuperscriptBox[\(\mathrm{1}\), \(\mathrm{1}\), \(\mathrm{F}\)]\) \
\mathrm{d}\)]\) (0; \!\(\*SubscriptBox[\(\[Eta]\), \(\[Psi]\)]\) ) " , "[", rs,
    "]""];]
Print["umskalierte Kopplungen: \!\(\*SubscriptBox[\(\mathrm{g}\), \(\mathrm{i}\)]\) \
\[\RightTeeArrow] \!\(\*FractionBox[\(\mathrm{g}\), \(\mathrm{i}\)], \(\mathrm{4}\ \
\*SubscriptBox[\(\mathrm{v}\), \(\mathrm{d}\)]\) \*SubsuperscriptBox[\(\mathrm{1}\), \
\(\mathrm{1}\), \(\mathrm{F}\)]\) \mathrm{d}\)]\) \((0; 0)\)]\) \!\(\*SubscriptBox[\(\[Eta]\), \
\(\[Psi]\)]\) \] \[Congruent] 0, d=", d];
For[k = 1, k <= anz, k++,
  rs = Sum[Sum[
    If[i != j, A[[k]][[i]][[j]] + A[[k]][[j]][[i]],
      A[[k]][[i]][[j]] Subscript["g", i] Subscript["g", j], {j,
        i}], {i, anz}];
  Print["\!\(\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(\mathrm{t}\)]\) ",
    Subscript["g", k], "=", (d - 2) Subscript["g", k], " + ",
    1/\!\(\*SubscriptBox[\(\mathrm{N}\), \(\mathrm{f}\)]\) \) ", "[", rs, "]""];]

```


Literaturverzeichnis

- [1] THIRRING, Walter: *Kosmische Impressionen. Gottes Spuren in den Naturgesetzen*. 1. Auflage. Seifert Verlag, 2008
- [2] WALLACE, P. R.: The Band Theory of Graphite. In: *Phys. Rev.* 71 (1947), Mai, 622–634. DOI 10.1103/PhysRev.71.622
- [3] NOVOSELOV, K. S. ; GEIM, A. K. ; MOROZOV, S. V. ; JIANG, D. ; ZHANG, Y. ; DUBONOS, S. V. ; GRIGORIEVA, I. V. ; FIRSOV, A. A.: Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films. In: *Science* 306 (2004), Nr. 5696, 666-669. DOI 10.1126/science.1102896
- [4] RECHER, Patrik ; TRAUZETTEL, Björn: Mit Tesafilm nach Stockholm. In: *Physik Journal* 9 (2010), Dez., S. 22
- [5] CASTRO NETO, A. H. ; GUINEA, F. ; PERES, N. M. R. ; NOVOSELOV, K. S. ; GEIM, A. K.: The electronic properties of graphene. In: *Rev. Mod. Phys.* 81 (2009), Jan., 109–162. DOI 10.1103/RevModPhys.81.109
- [6] CHANDLER, David L.: New material could lead to faster chips. Forschungsbericht. In: *MIT Tech Talk* 53 (2010), Nr. 20, S. 4 <http://web.mit.edu/newsoffice/2009/techtalk53-20.pdf>.
- [7] BOLOTIN, K.I. ; SIKES, K.J. ; JIANG, Z. ; KLIMA, M. ; FUDENBERG, G. ; HONE, J. ; KIM, P. ; STORMER, H.L.: Ultrahigh electron mobility in suspended graphene. In: *Solid State Communications* 146 (2008), Nr. 9–10, 351 - 355. DOI 10.1016/j.ssc.2008.02.024
- [8] LIN, Y.-M. ; DIMITRAKOPOULOS, C. ; JENKINS, K. A. ; FARMER, D. B. ; CHIU, H.-Y. ; GRILL, A. ; AVOURIS, Ph.: 100-GHz Transistors from Wafer-Scale Epitaxial Graphene. In: *Science* 327 (2010), Nr. 5966, 662. DOI 10.1126/science.1184289
- [9] LEE, Changgu ; WEI, Xiaoding ; KYSAR, Jeffrey W. ; HONE, James: Measurement of the Elastic Properties and Intrinsic Strength of Monolayer Graphene. In: *Science* 321 (2008), Nr. 5887, 385-388. DOI 10.1126/science.1157996
- [10] GEIM, Andre K. ; KIM, Philip: Wunderstoff aus dem Bleistift. In: *Spektrum der Wissenschaft* 8 (2008), Aug., S. 86
- [11] EL-KADY, Maher F. ; STRONG, Veronica ; DUBIN, Sergey ; KANER, Richard B.: Laser Scribing of High-Performance and Flexible Graphene-Based Electrochemical Capacitors. In: *Science* 335 (2012), Nr. 6074, 1326-1330. DOI 10.1126/science.1216744
- [12] TRAUZETTEL, Björn: Von Graphit zu Graphen. In: *Physik Journal* 6 (2008), Juli, S. 39
- [13] ZHANG, Yuanbo ; TANG, Tsung-Ta ; GIRIT, Caglar ; HAO, Zhao ; C. MARTIN, Michael ; ZETTL, Alex ; F. CROMMIE, Michael ; SHEN, Y. R. ; WANG, Feng: Direct observation of a widely tunable bandgap in bilayer graphene. In: *Nature* 459 (2009), Juni, S. 820–823. DOI 10.1038/nature08105

- [14] KLEIN, O.: Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac. In: *Zeitschrift für Physik* 53 (1929), Nr. 3-4, 157-165. DOI 10.1007/BF01339716
- [15] HERBUT, Igor F. ; JURIČIĆ, Vladimir ; ROY, Bitan: Theory of interacting electrons on the honeycomb lattice. In: *Phys. Rev. B* 79 (2009), Feb., 085116. DOI 10.1103/PhysRevB.79.085116. arXiv:0811.0610 [cond-mat.str-el]
- [16] ZHANG, Liyuan ; ZHANG, Yan ; KHODAS, M. ; VALLA, T. ; ZALIZNYAK, I. A.: Metal to Insulator Transition on the $N = 0$ Landau Level in Graphene. In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), Juli, 046804. DOI 10.1103/PhysRevLett.105.046804
- [17] CASTRO NETO, Antonio H.: Pauling's dreams for graphene. In: *Physics* 2 (2009), April, 30. DOI 10.1103/Physics.2.30
- [18] SON, D. T.: Quantum critical point in graphene approached in the limit of infinitely strong Coulomb interaction. In: *Phys. Rev. B* 75 (2007), Juni, 235423. DOI 10.1103/PhysRevB.75.235423
- [19] ARMOUR, Wes ; HANDS, Simon ; STROUTHOS, Costas: Monte Carlo simulation of the semimetal-insulator phase transition in monolayer graphene. In: *Phys. Rev. B* 81 (2010), März, 125105. DOI 10.1103/PhysRevB.81.125105. arXiv:0910.5646 [cond-mat.str-el]
- [20] JANSSEN, Lukas: *Critical phenomena in (2+1)-dimensional relativistic fermion systems*, Theoretisch-Physikalisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Diss., 2012. http://inspirehep.net/record/1128310/files/dissertation_janssen.pdf
- [21] GIES, Holger ; JANSSEN, Lukas: UV fixed-point structure of the three-dimensional Thirring model. In: *Phys. Rev. D* 82 (2010), Okt., 085018. DOI 10.1103/PhysRevD.82.085018. arXiv:1006.3747 [hep-th]
- [22] SCHERER, Daniel D. ; GIES, Holger: Renormalization group study of magnetic catalysis in the 3d Gross-Neveu model. In: *Phys. Rev. B* 85 (2012), Mai, 195417. DOI 10.1103/PhysRevB.85.195417
- [23] THIRRING, Walter E.: A soluble relativistic field theory. In: *Annals of Physics* 3 (1958), Nr. 1, 91 - 112. DOI 10.1016/0003-4916(58)90015-0
- [24] DRUT, Joaquín E. ; LÄHDE, Timo A.: Is Graphene in Vacuum an Insulator? In: *Phys. Rev. Lett.* 102 (2009), Jan., 026802. DOI 10.1103/PhysRevLett.102.026802
- [25] GROSS, David J. ; NEVEU, André: Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories. In: *Phys. Rev. D* 10 (1974), Nov., 3235-3253. DOI 10.1103/PhysRevD.10.3235
- [26] PESKIN, Michael E. ; SCHROEDER, Daniel V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995
- [27] GIES, Holger: Introduction to the Functional RG and Applications to Gauge Theories. Version: 2012. In: SCHWENK, Achim (Hrsg.) ; POLONYI, Janos (Hrsg.): *Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems* Bd. 852. Springer Berlin Heidelberg, 2012, 287-348. DOI 10.1007/978-3-642-27320-9_6. arXiv:hep-ph/0611146 [hep-ph]
- [28] BRAUN, Jens: Fermion interactions and universal behavior in strongly interacting theories. In: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 39 (2012), Nr. 3, 033001. DOI 10.1088/0954-3899/39/3/033001. arXiv:1108.4449 [hep-ph]

- [29] ZINN-JUSTIN, Jean: *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. 4. Auflage. New York : Oxford University Press, 2002
- [30] BERGES, Jürgen ; TETRADIS, Nikolaos ; WETTERICH, Christof: Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. In: *Physics Reports* 363 (2002), Nr. 4–6, 223–386. DOI 10.1016/S0370–1573(01)00098–9. arXiv:hep-ph/0005122 [hep-ph]
- [31] BRAUN, Jens ; GIES, Holger ; SCHERER, Daniel D.: Asymptotic safety: A simple example. In: *Phys. Rev. D* 83 (2011), April, 085012. DOI 10.1103/PhysRevD.83.085012. arXiv:1011.1456 [hep-th]
- [32] ROSCHER, Dietrich: *Chirale Symmetriebrechung in 2+1-dimensionaler QED*, Theoretisch-Physikalisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Diplomarbeit, 2012. http://www.tpi.uni-jena.de/tiki-download_file.php?fileId=155
- [33] JANOT, Alexander: *The Impact of Confining Dynamics on Chiral Symmetry Breaking in QCD*, Theoretisch-Physikalisches Institut, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Diplomarbeit, 2011. http://www.tpi.uni-jena.de/tiki-download_file.php?fileId=110
- [34] WILSON, Kenneth G.: Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture. In: *Phys. Rev. B* 4 (1971), Nov., 3174–3183. DOI 10.1103/PhysRevB.4.3174
- [35] WILSON, Kenneth G.: Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior. In: *Phys. Rev. B* 4 (1971), Nov., 3184–3205. DOI 10.1103/PhysRevB.4.3184
- [36] WILSON, Kenneth G. ; KOGUT, J.: The renormalization group and the ϵ expansion. In: *Physics Reports* 12 (1974), Nr. 2, 75 - 199. DOI 10.1016/0370–1573(74)90023–4
- [37] WETTERICH, Christof: Exact evolution equation for the effective potential. In: *Physics Letters B* 301 (1993), Nr. 1, 90 - 94. DOI 10.1016/0370–2693(93)90726–X
- [38] EFETOV, K.B.: Supersymmetry and theory of disordered metals. In: *Advances in Physics* 32 (1983), Nr. 1, 53-127. DOI 10.1080/00018738300101531
- [39] SCHÜTZ, Florian ; BARTOSCH, Lorenz ; KOPIETZ, Peter: Collective fields in the functional renormalization group for fermions, Ward identities, and the exact solution of the Tomonaga-Luttinger model. In: *Phys. Rev. B* 72 (2005), Juli, 035107. DOI 10.1103/PhysRevB.72.035107. arXiv:cond-mat/0409404 [cond-mat]
- [40] KEITEL, Jan ; BARTOSCH, Lorenz: The zero-dimensional $O(N)$ vector model as a benchmark for perturbation theory, the large- N expansion and the functional renormalization group. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 45 (2012), Nr. 10, 105401. DOI 10.1088/1751–8113/45/10/105401. arXiv:1109.3013 [cond-mat.stat-mech]
- [41] LITIM, Daniel F.: Optimized renormalization group flows. In: *Phys. Rev. D* 64 (2001), Okt., 105007. DOI 10.1103/PhysRevD.64.105007. arXiv:hep-th/0103195 [hep-th]
- [42] PAWLOWSKI, Jan M.: Aspects of the functional renormalisation group. In: *Annals of Physics* 322 (2007), Nr. 12, 2831 - 2915. DOI 10.1016/j.aop.2007.01.007. arXiv:hep-th/0512261 [hep-th]

- [43] ROSA, L. ; VITALE, P. ; WETTERICH, C.: Critical Exponents of the Gross-Neveu Model from the Effective Average Action. In: *Phys. Rev. Lett.* 86 (2001), Feb., 958–961. DOI 10.1103/PhysRevLett.86.958. arXiv:hep-th/0007093 [hep-th]
- [44] HÖFLING, F. ; NOWAK, C. ; WETTERICH, C.: Phase transition and critical behavior of the $d = 3$ Gross-Neveu model. In: *Phys. Rev. B* 66 (2002), Nov., 205111. DOI 10.1103/PhysRevB.66.205111. arXiv:cond-mat/0203588 [cond-mat]
- [45] OSTERWALDER, Konrad ; SCHRADER, Robert: Axioms for Euclidean Green's functions. In: *Communications in Mathematical Physics* 31 (1973), 83-112. DOI 10.1007/BF01645738
- [46] WETTERICH, Christof: Spinors in euclidean field theory, complex structures and discrete symmetries. In: *Nuclear Physics B* 852 (2011), Nr. 1, 174 - 234. DOI 10.1016/j.nuclphysb.2011.06.013. arXiv:1002.3556 [hep-th]
- [47] JACKIW, R. ; TEMPLETON, S.: How super-renormalizable interactions cure their infrared divergences. In: *Phys. Rev. D* 23 (1981), Mai, 2291–2304. DOI 10.1103/PhysRevD.23.2291
- [48] GIES, Holger ; JANSSEN, Lukas ; RECHENBERGER, Stefan ; SCHERER, Michael M.: Phase transition and critical behavior of $d = 3$ chiral fermion models with left-right asymmetry. In: *Phys. Rev. D* 81 (2010), Jan., 025009. DOI 10.1103/PhysRevD.81.025009
- [49] GNEITING, Clemens: *Higgs Mass Bounds from Renormalization Flow*, Institut für Theoretische Physik, Universität Heidelberg, Diplomarbeit, 2005
- [50] GIES, Holger ; JAECKEL, Joerg ; WETTERICH, Christof: Towards a renormalizable standard model without a fundamental Higgs scalar. In: *Phys. Rev. D* 69 (2004), Mai, 105008. DOI 10.1103/PhysRevD.69.105008. arXiv:hep-ph/0312034 [hep-ph]
- [51] CHRISTOFI, Stavros ; HANDS, Simon ; STROUTHOS, Costas: Critical flavor number in the three dimensional Thirring model. In: *Phys. Rev. D* 75 (2007), Mai, 101701. DOI 10.1103/PhysRevD.75.101701
- [52] SEMENOFF, Gordon W.: Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly. In: *Phys. Rev. Lett.* 53 (1984), Dez., 2449–2452. DOI 10.1103/PhysRevLett.53.2449
- [53] HALDANE, F. D. M.: Model for a Quantum Hall Effect without Landau Levels: Condensed-Matter Realization of the "Parity Anomaly". In: *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988), Okt., 2015–2018. DOI 10.1103/PhysRevLett.61.2015
- [54] HOU, Chang-Yu ; CHAMON, Claudio ; MUDRY, Christopher: Electron Fractionalization in Two-Dimensional Graphenelike Structures. In: *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), Mai, 186809. DOI 10.1103/PhysRevLett.98.186809. arXiv:cond-mat/0609740 [cond-mat.mes-hall]
- [55] DEBBIO, L. D. ; HANDS, S.J.: The three-dimensional Thirring model for $N_f = 4$ and $N_f = 6$. In: *Nuclear Physics B* 552 (1999), Nr. 1–2, 339 - 362. DOI 10.1016/S0550–3213(99)00258–8
- [56] CHANDRASEKHARAN, Shailesh ; LI, Anyi: Fermion Bags, Duality, and the Three Dimensional Massless Lattice Thirring Model. In: *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012), April, 140404. DOI 10.1103/PhysRevLett.108.140404. arXiv:1111.7204 [hep-lat]

- [57] BARBOUR, I. M. ; PSYCHARIS, N. ; FOCHT, E. ; FRANZKI, W. ; JERSÁK, J.: Strongly coupled lattice gauge theory with dynamical fermion mass generation in three dimensions. In: *Phys. Rev. D* 58 (1998), Sept., 074507. DOI 10.1103/PhysRevD.58.074507. arXiv:hep-lat/9804032 [hep-lat]
- [58] NIEVES, Jose F. ; PAL, Palash B.: Generalized Fierz identities. In: *Am. J. Phys.* 72 (2004), S. 1100–1108. DOI 10.1119/1.1757445. arXiv:hep-ph/0306087 [hep-ph]

Danksagung

Diese Arbeit wäre ohne die Unterstützung anderer Menschen nicht in dieser Form möglich gewesen, wofür ich mich auf diesem Weg bedanken möchte.

Zunächst danke ich Prof. Dr. Holger Gies für das Angebot dieses Thema in seiner Arbeitsgruppe zu bearbeiten. Außerdem danke ich ihm für die Betreuung der Arbeit, besonders während der Elternzeit von Dr. Lukas Janssen.

Ein besonderer Dank geht an Dr. Lukas Janssen für die Betreuung der Arbeit. Danke für die umfangreiche Hilfe bei der Einarbeitung, Zeit für Fragen und Besprechungen wann immer es nötig war, hilfreiche Hinweise und Motivation für die Arbeit.

Ich bedanke mich bei meiner Kollegin Julia Borchardt für die angenehme Zusammenarbeit im Büro, Hilfestellung bei Fragen aller Art und für das Korrekturlesen der Arbeit. Dankbar bin ich auch meinen Kollegen Tobias Hellwig und Stefan Lippold für die Unterstützung bei Fragen zur Einarbeitung in das Thema.

Ein herzliches Dankeschön geht an meine Eltern Christine und Reiner Gehring für die Liebe und Unterstützung während des gesamten Studiums und für das Korrekturlesen der Arbeit.

Ein großer Dank auch an alle, die bei der Korrektur der Arbeit geholfen haben. Danke Karina Schubert, Salomé Martin, Antonia Dainat und Susanne Kohler.

Zuletzt möchte ich mich bei Gott unserem Schöpfer bedanken, der die Welt so großartig geschaffen hat, dass wir sie sogar verstehen können und der mich während der gesamten Entstehungszeit der Arbeit begleitet hat.

„Groß sind die Werke des Herrn; wer sie erforscht, der hat Freude daran.“

Psalm 111,2

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die Arbeit für die öffentliche Nutzung der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, den 24. Juli 2013

Friedrich Gehring