

CHIRALE SYMMETRIEBRECHUNG IN 2+1-DIMENSIONALER QED

Diplomarbeit



FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

Physikalisch-Astronomische Fakultät

Theoretisch-Physikalisches Institut

eingereicht von: Dietrich Roscher
geb. am: 24.08.1987 in Schlema

1. Gutachter: Professor Dr. rer nat. habil. Holger Gies
2. Gutachter: Professor Dr. rer nat. habil. Jens Braun

Tag der Verleihung des Diploms:

*HERR, wie sind deine Werke so groß
und viel! Du hast sie alle weise geord-
net, und die Erde ist voll deiner Güter.*

Psalm 104,24

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Grundlagen und Methodik	2
2.1	Pfadintegralformalismus und erzeugende Funktionale	2
2.2	Renormierungsgruppentheorie und Wetterich-Gleichung	4
2.2.1	Allgemeine Überlegungen zur Renormierungsgruppe	4
2.2.2	Die Herleitung der Wetterich-Gleichung	5
2.2.3	Anwendung der Wetterich-Gleichung	7
2.2.4	Interpretation der Betafunktionen	9
2.3	Eichtheorie	10
2.3.1	Konstruktion abelscher Eichtheorien: Die QED	10
2.3.2	Quantisierung und Eichfixierung	11
2.3.3	Ward-Takahashi-Identitäten und Einfluss des Regulators	12
3	Symmetrien und Symmetriebrechung: Die mittlere effektive Wirkung der QED₃	13
3.1	Konstruktion von $\Gamma_k^{\text{QED}_3}$	13
3.1.1	Darstellung und Symmetrien	13
3.1.2	Ableitungsentwicklung, Trunkierung und Wechselwirkungsterme	15
3.2	Spontane Symmetriebrechung und Renormierungsgruppe	18
3.2.1	Grundlegendes	18
3.2.2	Analyse von Flussgleichungen hinsichtlich spontaner Symmetriebrechung	19
4	Flussgleichungen zur QED₃	22
4.1	Propagator- und Fluktuationsmatrix	22
4.2	Anomale Dimension η_ψ des Fermionfeldes und der Fluss von \tilde{g} und g	24
4.2.1	Redefinition der Kopplungen und η_ψ	24
4.2.2	Renormierung der 4-Fermion-Vertizes und der Fluss von \tilde{g} und g	25
4.3	Anomale Dimension η_A des Photonfeldes und der Fluss von e^2	26
4.3.1	Ward-Takahashi-Identität und Struktur des Flusses	26
4.3.2	Vakuumpolarisation in der QED ₃ : η_A	27
4.4	Zusammenfassung zum Flussgleichungssystem	29
5	Analyse der Fixpunktstruktur - chirale Symmetriebrechung?	29
5.1	Fixpunktannihilation und kritische Flavorzahl $N_{f,\text{crit}}$	29
5.1.1	Allgemeines Vorgehen	29
5.1.2	Regulatorabhängigkeit und Ergebnisse mit perturbativen Propagatoren	33
5.1.3	Ergebnisse für die vollen Schwellwertfunktionen	35
5.2	Charakterisierung der Symmetriebrechung	35
5.2.1	Skalierungsverhalten	35
5.2.2	Chirale Symmetriebrechung und das NJL-Modell	37
5.2.3	Asymptotik des Flusses: $N_{f,\chi}$	37
5.3	Diskussion alternativer Methoden und ihrer Ergebnisse	39
5.3.1	Andere Renormierungsgruppenuntersuchungen	39
5.3.2	Dyson-Schwinger-Gleichungen	41
5.3.3	Monte-Carlo-Simulationen	44
6	Zusammenfassung	44
A	Konventionen und Notationen	46
A.1	Einheiten und Fourier-Transformation	46
A.2	Euklidische Theorie	46
B	Fierz-Transformationen	47
C	Schwellwertfunktionen	48
C.1	Definition und Allgemeines	48
C.2	Auswertung für spezielle Regulatoren	49

1 Einführung

Eines der größten Ziele der theoretischen Physik - neben der Gewinnung brauchbarer Vorhersagen über physikalische Systeme - ist es, ein möglichst fundamentales Verständnis all dessen zu erlangen, was durch ihre ständig weiterentwickelten Werkzeuge untersuchbar erscheint. Im Bewusstsein der wohl schon Jahrtausende alten Diskussion, was „Verstehen“ und „Erkenntnis“ eigentlich bedeuten, sei hier gemeint, dass experimentelle Beobachtungen durch einen möglichst minimalen Satz von Grundannahmen, den Axiomen, und darauf aufbauenden Ableitungen, erfolgreich beschrieben werden können. Gerade die Quantentheorie ist ein gutes Beispiel dafür, wie sich aber auch das, was unter einer „erfolgreichen Beschreibung“ verstanden werden muss, im Laufe der Zeit ändert. War man zu Ende des 19. Jahrhunderts überzeugt, nur noch einige kleinere Restprobleme angehen zu müssen, um letztlich alle beobachtbaren Phänomene der Physik erklären zu können, ließen eben diese Beschäftigung mit z.B. der Schwarzkörperstrahlung oder dem lichtelektrischen Effekt und die daraus durch Max Planck [1] bzw. Albert Einstein [2] entwickelten Theorien diese Überzeugung in sich zusammenfallen - die bis dahin höchstens aus philosophischen Überlegungen bekannte Idee der Quantisierung wurde zu einem der Grundprinzipien moderner Physik. Nun waren die bis dahin verwendeten Theorien deswegen keinesfalls alle falsch. Es wurden lediglich die Grenzen ihrer Gültigkeit, ihre Natur als *effektive Theorien* in beschränkten Parameterbereichen aufgezeigt. Aber auch die Quantenmechanik selbst ist nicht *die* Theorie, welche auf mikroskopischer Ebene alle Phänomene korrekt beschreibt. So kann mit der Quantenelektrodynamik eine Quantenfeldtheorie erklären, warum z.B. der Landésche g -Faktor nicht exakt dem quantenmechanischen Ergebnis $g = 2$ genügt, und auch die entsprechenden Abweichungen mit hoher Präzision vorhersagen [3]. Spätestens aber bei der Betrachtung von kernphysikalischen Prozessen und den immensen Schwierigkeiten, welche sich bei Rechnungen mit den derzeit fundamentalsten bekannten Theorien der starken und schwachen Wechselwirkungen aufbauen, gewinnen wiederum effektiven Theorien große Bedeutung. Diese nun oft gezielt konstruierten Modelltheorien erheben keinerlei Anspruch mehr darauf, fundamental gültig zu sein, sie sind von vornherein nur für bestimmte Parameterbereiche gedacht, um dort durch ihre gegenüber den grundlegenden Theorien vereinfachte Handhabung Licht ins Dunkel des Unverständnisses bestimmter Effekte zu bringen. Als eine solche Modelltheorie wird auch die Quantenelektrodynamik in zwei Raum- und einer Zeitdimension (QED₃) eingesetzt, da sie die Eigenschaft der *asymptotischen Freiheit* mit nichtabelschen Eichtheorien gemeinsam hat und so gewissermaßen Theoretikers „Labor“ bildet, um diese schwierigen und doch so zentralen Phänomene zu untersuchen [4].

Doch zurück zum oben erwähnten Verständnis auf minimaler Grundlage. Zu den fundamentalen Eigenschaften eines physikalischen Systems zählen neben seinen Konstituenten, im Rahmen der Quantenfeldtheorie also dem Feldinhalt, und der Dimensionalität vor allem seine *Symmetrien*. Mittels des Lagrange-Formalismus, basierend auf dem *Prinzip der kleinsten Wirkung*, lassen sich aus diesen wenigen Ingredienzen bereits enorm viele Vorhersagen extrahieren. Von besonderer Bedeutung ist dabei, dass der tatsächlich realisierte Zustand des Systems nicht mehr die volle Symmetrie aufweisen muss, durch die das System in seiner Wirkung charakterisiert ist. Dies wird als spontane Symmetriebrechung (SSB) bezeichnet und spielt eine zentrale Rolle bei der Erklärung des Auftretens einer ganzen Reihe von Phänomenen, angefangen von der spontanen Magnetisierung eines Ferromagneten [5] über das Auftreten leichter Mesonen im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik [6, 7] bis hin zur Formierung von Quasiteilchenkondensaten in Festkörpern. Entsprechend ist die SSB kein ausschließlich in der Quantenfeldtheorie vorkommender Effekt, sondern gerade auch in der statistischen Physik von großer Wichtigkeit. Bevor weiter auf die Bedeutung der SSB für diese Arbeit eingegangen wird, sei bemerkt, dass diese Gemeinsamkeit überhaupt nur ein erstes Anzeichen der engen Verwandtschaft von statistischer Physik und Feldtheorie ist, welche im (in Kapitel 2.1 vorgestellten) Funktionalformalismus besonders deutlich zutage tritt. So verwundert es auch nicht, dass Werkzeuge wie die Technik der *Renormierungsgruppe* (Kap. 2.2), welche ursprünglich vor allem auch im Festkörperkontext angewendet und entwickelt wurde [8], ihren Weg zurück in die Hochenergie-, Teilchen- und Kernphysik gefunden haben - gerade auch um die oben erwähnten effektiven Feldtheorien zu konstruieren und zu untersuchen. Doch auf der anderen Seite sind es eben auch aus der Hochenergiephysik stammende Theorien wie die QED₃, welche unerwarteterweise zur Beschreibung von Festkörpern eingesetzt werden können. Neu entdeckte Materialien wie Graphen [9], Hochtemperatursupraleiter [10] oder auch topologische Isolatoren [11] stellen althergebrachte Theorien elektronischen Transports vor unlösbare Probleme. Die starke Korrelation der Ladungsträger, die ungewöhnliche Bandstruktur, die effektive Zweidimensionalität dieser Materialien - all dies führt zu so außergewöhnlichen Eigenschaften wie zum Beispiel Supraleitung, dem Quanten-Hall-Effekt [12] oder Klein-Tunneln [13], welche mikroskopisch verstanden sein wollen. Die aus wenigen Grundprinzipien konstruierte Wirkung der QED₃ (siehe Kap. 2.3)

$$S_{\text{QED}_3} = \int d^3x \left[\bar{\psi}^a i \not{D} \psi^a + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \quad (1.1)$$

verspricht, solche fundamentalen Erklärungen zu liefern (z.B. [14, 15]) - sofern man in der Lage ist, ihr diese Geheimnisse zu entlocken.

Tatsächlich stellte sich in den bisherigen Untersuchungen heraus, dass dies mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden sein kann. Zentrale Frage der Untersuchung, gerade auch im Zusammenhang mit den die genannten Eigenschaften auslösenden Phasenübergängen in Festkörpern, ist, ob die QED_3 spontane Brechung ihrer *chiralen* Symmetrie aufweist und unter welchen Bedingungen dies der Fall sein kann. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Anzahl N_f der verschiedenen Fermionsorten, genannt *Flavors*. Zwar ist diese im Experiment in aller Regel eine fest vorgegebene Größe, doch ist es nötig in Erfahrung zu bringen, ob und wie das Auftreten spontaner Symmetriebrechung mit dieser Zahl zusammenhängt. Zahlreiche Berechnungen mit den unterschiedlichsten Methoden, vor allem mithilfe von *Dyson-Schwinger-Gleichungen*, aber auch numerischen *Monte-Carlo-Simulationen*, haben auch die unterschiedlichsten Ergebnisse erbracht. So wurden kritische Werte für die Flavorzahl, oberhalb derer keine chirale Symmetriebrechung mehr stattfindet, im Bereich von $N_{f,crit} = 1.5$ [16] bis hin zu $N_{f,crit} = \infty$ [17] gefunden. Jede der genannten Methoden hat mit ihren eigenen Problemen und Näherungsfehlern zu kämpfen. Warum also sollte, wie im Titel der Arbeit angekündigt, die Renormierungsgruppe, ebenfalls nicht ohne Näherungen anwendbar, hier bessere oder auch nur vergleichbare Resultate erbringen können? Fakt ist, dass diese Technik, gerade in der verwendeten Wilsonschen Formulierung, ursprünglich extra zur Beschreibung solcher Phasenübergänge und der zugehörigen *kritischen Phänomene* entwickelt wurde [18]. Ihre Ergebnisse könnten damit, sozusagen komplementär zu anderen Techniken, weitere Hinweise auf das tatsächliche Verhalten der QED_3 liefern, den Bereich der wahrscheinlichen $N_{f,crit}$ weiter einengen. Vor allem aber kann sie zu einem gewissen Grad direkte Einblicke in den Übergang von der symmetrischen, mikroskopischen Beschreibung wie (1.1) zum Symmetriebruch gewähren - und so zur weiteren Klärung der dahinterstehenden Mechanismen beitragen, eine Verbindung zwischen den fundamentalen Axiomen und der komplizierten Phänomenologie der symmetriebrechenden Phase herstellen.

Diese Arbeit ist nicht die erste, welche Renormierungsgruppentechniken auf das Problem der chiralen Symmetriebrechung in der QED_3 anwendet, dies wird im Detail in Abschnitt 5.3.1 diskutiert. Einige der in ihr verwendeten Methoden sind aber, nach bestem Wissen des Autors, so vorher noch nicht eingesetzt worden, woraus sich die Hoffnung auf verbesserte Resultate ableitet.

Grundlegende methodische Aspekte werden, wie bereits mehrfach angedeutet, vor allem in Kapitel 2 behandelt. Auf diesem Fundament kann in Kapitel 3 eine für die RG-Analyse maßgeschneiderte mittlere effektive Wirkung für die QED_3 konstruiert werden, worauf einige generelle Überlegungen zur Untersuchung von spontaner Symmetriebrechung mithilfe der Renormierungsgruppe folgen. In Anwendung dieser Grundlagen kann schließlich in Kapitel 4 ein System von Flussgleichungen gewonnen werden, deren Analyse und Interpretation in Kapitel 5 einen Wert für $N_{f,crit}$ liefern soll. Nach Vergleichen mit früheren Rechnungen folgt in Kapitel 6 eine abschließende Zusammenfassung.

2 Grundlagen und Methodik

Ziel dieser Arbeit ist es also, QED_3 mit Hilfe der funktionalen Renormierungsgruppe bezüglich spontaner Symmetriebrechung zu untersuchen. Um dies tun zu können, soll zunächst eine ganze Reihe dazu benötigter feldtheoretischer Konzepte eingeführt werden. Als Voraussetzung für die Anwendung funktionaler Methoden wird die Quantisierung mittels Pfadintegral im Allgemeinen und von (abelschen) Eichtheorien im Besonderen betrachtet. Mit diesen Werkzeugen und einer kurzen Einführung in die allgemeinere Renormierungsgruppentheorie ist die Ableitung und Diskussion der Wetterich-Gleichung möglich, auf welcher große Teile der im Folgenden vorgenommenen Rechnungen beruhen. Die in diesem Kapitel vorgestellten Techniken und Verfahren haben zunächst noch keinen direkten Zusammenhang zum Phänomen der spontanen Symmetriebrechung, dieser wird erst im folgenden Kapitel 3 hergestellt.

Ein großer Teil der in diesem Kapitel vorgestellten grundlegenden Erkenntnisse und Methoden erschlossen sich dem Autor mehr durch die Gesamtheit von Ausbildung und Literatur zu diesem Themen, als durch einzelne Werke. Wo nicht explizit gekennzeichnet beruhen daher die folgenden Ausführungen auf den Quellen [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26] und [27].

2.1 Pfadintegralformalismus und erzeugende Funktionale

Nach jahrzehntelanger fruchtbarer Forschung steht heutzutage eine ganze Anzahl verschiedener Verfahren bereit, Quantenfeldtheorien mathematisch zu formulieren. Ziel dieser Quantisierung und darauf basierender Untersuchungen ist es letztlich immer, Vorhersagen über physikalische Sachverhalte treffen zu können. Es zeigt sich, dass einzelne Quantisierungstechniken zur Behandlung bestimmter Fragestellungen besonders gut geeignet sind. Für die in dieser Arbeit angewandten funktionalen Methoden ist die

Pfadintegralformulierung der Quantenfeldtheorie grundlegend. Es soll hier jedoch nicht versucht werden, eine rigorose oder auch nur ausführliche Einführung in dieses Gebiet zu geben, dafür sei auf die o.g. einschlägigen Lehrbücher und Vorlesungen verwiesen, an welche sich auch die folgenden Definitionen und Herleitungen anlehnen.

Ein besonders augenfälliges Merkmal des Pfadintegralformalismus ist seine enge Verwandtschaft mit der klassischen statistischen Physik. So ist das *erzeugende Funktional*

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[- \int d^d x [\mathcal{L} - J(x)\varphi(x)] \right] \quad (2.1)$$

(hier in euklidischer Form, siehe Anhang A.2) das Analogon zur Zustandssumme.

Bevor diese Verwandtschaft weiter ausgeführt wird, lohnt es sich, die obige Darstellung des erzeugenden Funktionals einer näheren Betrachtung zu unterziehen. Der Kern des Pfadintegrals besteht im Wesentlichen aus dem Exponential der Wirkung und eines Quellterms

$$\int d^d x [\mathcal{L} - J(x)\varphi(x)] = S - \int d^d x J(x)\varphi(x). \quad (2.2)$$

Die Wirkung S bzw. Lagrange-Dichte \mathcal{L} der zu untersuchenden Theorie hänge vom Feld φ ab, welches hier stellvertretend für alle in Frage kommenden Feldtypen (Skalar-, Spinor-, Vektorfelder, ...) eingeführt wird. Das Integralmaß $\mathcal{D}\varphi$ schließlich beschreibt die Summation über alle möglichen Feldkonfigurationen φ an allen Raumzeitpunkten x .

Felderwartungswerte, bzw. *n-Punkt-Korrelationsfunktionen* als Komponenten physikalischer Messgrößen ergeben sich aus $Z[J]$ durch *funktionale Ableitung* - auch dies in Analogie zur Gewinnung von observablen Größen in der statistischen Physik durch entsprechendes partielles Ableiten der Zustandssumme.

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{-S[\varphi]} \equiv \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle \quad (2.3)$$

Allerdings enthält diese Konstruktion noch Anteile faktorisierter Erwartungswerte, wie zum Beispiel $\langle \varphi(x_1) \rangle \dots \langle \varphi(x_n) \rangle$, in der Sprache der Feynmangraphen auch als *nicht verbundene Diagramme* bekannt. Solche Diagramme tragen nicht zu physikalisch messbaren Größen bei, weshalb es wünschenswert wäre, über ein erzeugendes Funktional ausschließlich *verbundener* Korrelationsfunktionen zu verfügen. Ein solches ist durch das *Schwingerfunktional*

$$W[J] \equiv \ln Z[J] \quad (2.4)$$

gegeben, wie hier am Beispiel der verbundenen Zweipunktfunktion gezeigt wird:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} &= \left. \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \left\{ \frac{1}{Z[J]} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_2) \exp \left[- \int d^d x [\mathcal{L} - J(x)\varphi(x)] \right] \right\} \right|_{J=0} \\ &= \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \varphi(x_2) e^{-S[\varphi]} - \frac{1}{Z[0]^2} \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) e^{-S[\varphi]} \cdot \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_2) e^{-S[\varphi]} \\ &= \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle - \langle \varphi(x_1) \rangle \langle \varphi(x_2) \rangle =: \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle_{conn}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Genau wie in der statistischen Physik durch Legendre-Transformation neue thermodynamische Potentiale konstruiert werden können, welche sich für die Behandlung bestimmter Probleme besser eignen mögen als die Ausgangsgröße, kann in der funktionalen Sprache aus dem erzeugenden Funktional $W[J]$ der verbundenen, *vollen Propagatoren* eine andere nützliche Größe gewonnen werden: die *effektive Wirkung* $\Gamma[\phi]$ als erzeugendes Funktional der *vollen Vertizes*:

$$\Gamma[\phi] = \sup_J \left[\int d^d x J(x)\phi(x) - W[J] \right]. \quad (2.6)$$

Durch die Abhängigkeit des Schwingerfunktionals $W[J]$ von der äußeren Quelle $J(x)$ wird die effektive Wirkung zum Funktional des Felderwartungswertes $\phi = \langle \varphi \rangle_{J_{sup}}$, wobei

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \varphi \rangle_J \equiv \phi. \quad (2.7)$$

Nähere Untersuchungen zeigen, dass tatsächlich die vollen, *1-Teilchen-irreduziblen* Vertizes aus $\Gamma[\phi]$ gewonnen werden können:

$$\Gamma^{(n)}[\phi] = \frac{\delta^n \Gamma}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)} = \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle_{1PI}. \quad (2.8)$$

Damit, bei Vorliegen dieser Größen, kann die durch $\mathcal{L}[\varphi]$ angesetzte Theorie als gelöst betrachtet werden - mit Hilfe der LSZ-Reduktionsformel lässt sich zeigen, dass Wechselwirkungsquerschnitte für beliebig viele Teilchen aus den vollen 2-Punkt-Funktionen (dunkelgrau in Abb. 1) sowie den vollen Vertizes gewonnen werden können (hellgrau in Abb. 1).

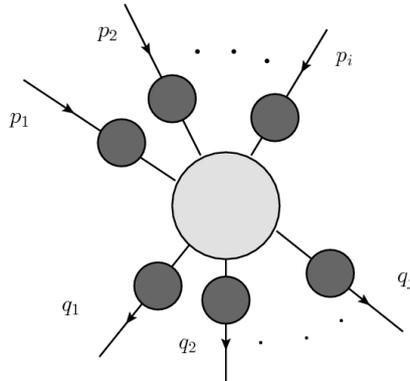


Abbildung 1: Diagrammatische Darstellung einer vollen $i + j$ -Punkt-Funktion

Die Betrachtungen dieser Arbeit werden im Weiteren keine störungstheoretischen Berechnungen von Streuquerschnitten erforderlich machen, doch bilden die vorgestellten Größen die Basis für den wesentlich über bisher angedeutete Verwendungen hinausgehenden Formalismus der funktionalen Renormierungsgruppe. Letzterer wird im folgenden Abschnitt vorgestellt und ist von essentieller Bedeutung für die vorzunehmenden Untersuchungen.

2.2 Renormierungsgruppentheorie und Wetterich-Gleichung

2.2.1 Allgemeine Überlegungen zur Renormierungsgruppe

Bereits im vorangegangenen Abschnitt wurde der enge Zusammenhang bzw. die starke Analogie zwischen statistischer Physik und der funktionalen Formulierung von Quantenfeldtheorien betont. Dass diese Beziehungen weit mehr sind als nur bloßer Zufall, tritt am Konzept der Renormierung noch deutlicher zutage. Tatsächlich stammen viele der in Hochenergiephysik verwendeten feldtheoretischen Methoden ursprünglich aus der Festkörperphysik. Umgekehrt kann die Betrachtung von Theorien der Teilchenphysik tiefe Einblicke in Festkörpersysteme ermöglichen - eine schon vielfach Realität gewordene Hoffnung, auf der letztlich auch diese Arbeit zumindest zum Teil gründet. Das Bindeglied zwischen diesen beiden auf den ersten Blick so unterschiedlichen Forschungsgebieten ist oft die Idee der *Renormierungsgruppe*, ein Konzept, welches über die Jahrzehnte seiner Erforschung und Anwendung hinweg so viele verschiedene nützliche und bewährte Formen angenommen hat, dass eine auch nur überblicksartige Darstellung des derzeitigen Standes der Wissenschaft weit über Rahmen und Ziele dieser Arbeit hinausreicht und daher nicht unternommen werden soll. Stattdessen wird im Folgenden eine spezielle Ausprägung, der *Wilsonsche Zugang* zur Renormierungsgruppe, in ihren Grundzügen vorgestellt und mithilfe der zuvor eingeführten funktionalen Werkzeuge bis hin zur Wetterich-Gleichung entwickelt, welche die physikalischen Ideen in eine anwendbare mathematische Form gießt.

Eine charakteristische Eigenschaft von (quanten)statistischen Systemen ist, dass ihre makroskopischen Eigenschaften stark durch mikroskopische *Fluktuationen* bestimmt sein können. In störungstheoretischen Analysen zu Fragen der Teilchenphysik bedeutet dies, dass Feynmandiagramme mit sog. „loops“, d.h. geschlossene Schleifen von Propagatoren, in die Rechnungen mit einbezogen werden müssen, für Festkörpersysteme könnte man z.B. an ungeordnete thermische Zitterbewegungen von Atomen im Kristallgitter denken. Diese Fluktuationen selbst sind in der Regel nicht von physikalischem Interesse im Sinne einer tatsächlichen Messung - in der Hochenergiephysik sind sie, da durch Wechselwirkung mit virtuellen Teilchen im energetischen Rahmen der Heisenbergschen Unschärferelation erzeugt, sogar prinzipiell unbeobachtbar. Doch damit nicht genug: die Fluktuationen der Teilchenphysik, wie sie von der mikroskopischen Wirkung S vorgegeben werden, können grundsätzlich auf beliebig kurzen Längenskalen und damit bei beliebig hohen Impulsen stattfinden. Solche großen Impulse können naive Störungsrechnungen vor unlösbar scheinende Probleme stellen. Während in Festkörpersystemen durch die endliche Gitterkonstante oder Teilchengröße ein natürlicher „cutoff“ gegeben ist, muss für Rechnungen der Hochenergiephysik ein solcher oft erst künstlich eingeführt, die Theorie also *regularisiert*, und mithilfe von Anfangs- oder Randbedingungen aus physikalischen Vorhersagen wieder entfernt werden, was *Renormierung* genannt wird.

Es ist in vielen Fällen wünschenswert, observable Größen ohne den Umweg über die oft aufwändige manuelle Behandlung der Fluktuationen gewinnen zu können - deren Auswirkungen jedoch dürfen dabei nicht einfach unterdrückt werden. Ein Werkzeug für diesen Zweck stellt die effektive Wirkung Γ (siehe Gl. (2.6)) dar, welche die Effekte sämtlicher Fluktuationen in die vollen Propagatoren und Vertizes integriert. Nun ist es allerdings bei Weitem keine triviale Aufgabe, die effektive Wirkung einer vorgegebenen Theorie S zu konstruieren. Auch muss es nicht immer von Vorteil sein, gleich alle Fluktuationen auf allen Größenskalen *ausintegriert* zu haben, wie es in Γ der Fall ist. Vonnöten wäre demnach ein Verfahren, Fluktuationen kontrolliert auszuintegrieren und sich dabei, von der mikroskopischen Wirkung S_Λ an der (natürlichen oder künstlich eingeführten) cutoff-Skala Λ ausgehend, schrittweise über eine Art *mittlere effektive Wirkung* Γ_k zu variabler Skala k der vollen effektiven Wirkung $\Gamma_{k=0} \equiv \Gamma$ anzunähern:

$$\lim_{k \rightarrow \Lambda} \Gamma_k = S, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k = \Gamma \quad (2.9)$$

Dies ist im Wesentlichen der Grundgedanke des Wilsonschen Zugangs zur Renormierungsgruppe: Fluktuationen werden schrittweise, sozusagen Schale für Schale der Impulsraumkugel vom Anfangsradius Λ , ausintegriert. Dies sei hier am Beispiel des erzeugenden Funktionals $Z[J]$ verdeutlicht [27]:

$$Z[J] = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi] + \int J\varphi} = \int_{\frac{\Lambda}{b}} \mathcal{D}\bar{\varphi} \int_{\frac{\Lambda}{b} < |p| \leq \Lambda} \mathcal{D}\tilde{\varphi} e^{-S[\bar{\varphi}, \tilde{\varphi}] + \int J(\bar{\varphi} + \tilde{\varphi})} =: \int_{\frac{\Lambda}{b}} \mathcal{D}\bar{\varphi} e^{-S_W[\bar{\varphi}] + \int J_W \bar{\varphi}}. \quad (2.10)$$

Hierbei sei $b > 1$ ein Parameter, welcher die „Breite“ der integrierten Impulsschale angibt. Das Funktional $Z[J]$ hat sich durch diese Manipulationen nicht verändert und wird es als Integral auch unter einer Reskalierung der Felder $\bar{\varphi}$ nicht tun. Diese Freiheit wird genutzt, um das Pfadintegral in seiner ursprünglichen Form zurückzugewinnen, d.h.

$$p \rightarrow bp; \quad \bar{\varphi} \rightarrow b^{d_\varphi} \varphi' \quad (2.11)$$

wobei d_φ eine zunächst beliebige reelle Zahl ist, die aber praktischerweise so angesetzt wird, dass sich eine frei wählbare Funktion der Feldvariablen, i.d.R. der kinetische Term $(\partial_\mu \varphi)^2$, unter der Gesamtheit der Transformationen nicht ändert. Das erzeugende Funktional wird dann

$$Z[J] \equiv Z_k[J_k] = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\varphi' e^{-\Gamma_k[\varphi'] + \int J_k \varphi} \quad (2.12)$$

genannt. Es hat seinen Wert nicht verändert, wird jedoch der Klarheit halber nun mit der Skala k indiziert, bis zu welcher die Impulsschalenintegration reichte. Damit ist der *Renormierungsgruppenschritt* abgeschlossen. Γ_k wird durch die Integration im Allgemeinen eine komplizierte, von S abweichende Form erhalten, sowohl was die beitragenden Funktionen der Felder betrifft als auch die zugehörigen Kopplungsparameter. Diese Impulsschalenintegration kontinuierlich auszuführen und die sich daraus ergebenden Veränderung zu beschreiben ist, was die Wetterich-Gleichung [28] als *exakte Renormierungsgruppengleichung* leistet. Ihre Ableitung ist Inhalt des nun folgenden Abschnitts.

2.2.2 Die Herleitung der Wetterich-Gleichung

Um eine für die Zwecke dieser Arbeit verwendbare Renormierungsgruppengleichung zu erhalten sind am bisherigen Formalismus zwei Veränderungen vorzunehmen. Zunächst müssen sowohl bosonische als auch fermionische Felder berücksichtigt werden, deren Behandlung aufgrund der Antikommutationseigenschaft der grassmannwertigen Fermionfelder voneinander abweicht. Dafür werden der Vektor Ξ aller Felder sowie die zugehörige, mehrkomponentige Quelle Q eingeführt [29],

$$\Xi(q) = \begin{pmatrix} \varphi(q) \\ \psi(q) \\ \bar{\psi}^T(-q) \end{pmatrix}, \quad \Xi^T(-q) = (\varphi(-q), \psi^T(-q), \bar{\psi}(q)), \quad Q = \begin{pmatrix} J \\ \bar{\eta}^T \\ \eta \end{pmatrix}, \quad Q^T = (J, \bar{\eta}, \eta^T) \quad (2.13)$$

wobei zusätzlich zum bereits vorher verwendeten bosonischen φ und der Quelle J nun die Dirac-Spinoren $\bar{\psi}$ und ψ sowie entsprechend grassmannwertige Quellterme $\bar{\eta}$ und η auftreten. Die zweite Veränderung besteht in der expliziten Implementierung der Skalenabhängigkeit in Form eines Extraterms $\Delta S_k[\Xi]$ in das erzeugende bzw. Schwingerfunktional

$$W_k[Q] = \ln Z_k[Q] \equiv \ln \left\{ \int_{\Lambda} \mathcal{D}\Xi \exp \left[-S[\Xi] - \Delta S_k[\Xi] + \int Q^T \Xi \right] \right\} \quad (2.14)$$

sowie die mittlere effektive Wirkung

$$\Gamma_k[\Phi] = \sup_Q \left(\int Q^T \Phi - W_k[Q] \right) - \Delta S_k[\Phi] \quad \text{wobei } \Phi = \langle \Xi \rangle_J = \frac{\delta W_k[Q]}{\delta Q^T}. \quad (2.15)$$

Der Zusatzterm ΔS_k weist dabei die folgende, an einen Massenterm erinnernde Struktur auf:

$$\Delta S_k[\Phi] = \frac{1}{2} \int_q \Phi^T(-q) R_k(q) \Phi(q) = \frac{1}{2} \int_q \phi(-q) R_B(q) \phi(q) + \int_q \bar{\psi}(q) R_F(q) \psi(q) \quad (2.16)$$

mit

$$R_k(q) = \begin{pmatrix} R_B(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_F^T(-q) \\ 0 & R_F(q) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Besondere Eigenschaften des *Regulators* R_k in seinen spezifischen Ausprägungen für Boson- und Fermionfelder sorgen für die Erfüllung der Zielbedingungen (2.9):

$$\lim_{k^2/q^2 \rightarrow 0} R_k(q) = 0, \quad (2.18a)$$

$$\lim_{k^2 \rightarrow \Lambda \rightarrow \infty} R_k(q) \rightarrow \infty, \quad (2.18b)$$

$$\lim_{q^2/k^2 \rightarrow 0} R_k(q) > 0. \quad (2.18c)$$

Während die erste Bedingung im extremen Infrarot den Regulatorterm schlicht verschwinden lässt und somit (2.15) in die volle effektive Wirkung (2.6) überführt, sorgt die zweite für ein Wiederentstehen der ursprünglichen mikroskopischen Wirkung S im UV, was sich über eine in diesem Limes anwendbare Sattelpunktapproximation des Pfadintegrals zeigen lässt [20]. Die letzte Bedingung ist nicht mehr zur Erfüllung von (2.9) nötig, sondern sorgt im Falle masseloser Theorien dafür, dass weitere Rechnungen nicht durch Infrarotdivergenzen frühzeitig verkompliziert werden. Dies, sowie die zusätzliche Ultraviolettregularisierungsfunktion der zweiten Bedingung, wird sich jedoch am Endergebnis dieser Herleitung wesentlich besser ablesen lassen.

Ziel der Herleitung ist es, eine mathematische Beschreibung der Skalenänderung der mittleren effektiven Wirkung zu erlangen, also eine Gleichung der Form $\partial_t \Gamma_k = \dots$, wobei $\partial_t \equiv k \frac{d}{dk}$ als *Skalenableitung* fungiert. Um diese Ableitung sinnvoll auf Gleichung (2.15) anwenden zu können, muss zunächst bestimmt werden, wie sie auf deren Komponenten wirkt. Eine erste Erkenntnis bildet dabei das Verhalten des Schwingerfunktional:

$$\begin{aligned} \partial_t W_k[Q] &= \frac{\partial_t Z_k[Q]}{Z_k[Q]} = -\frac{1}{Z_k[Q]} \int_{\Lambda} \mathcal{D}\Xi (\partial_t S_k[\Xi]) e^{-S - \Delta S_k + \int Q^T \Xi} + \int d^d y \frac{\partial Q^T(y)}{\partial t} \frac{\vec{\delta} W_k[Q]}{\delta Q^T(y)} \\ &= -\frac{1}{Z_k[Q]} \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \mathcal{D}\Xi \int_q \Xi^T(-q) (\partial_t R_k) \Xi(q) e^{-S - \Delta S_k + \int Q^T \Xi} + \int d^d y (\partial_t Q^T) \Phi \\ &= -\frac{1}{2} \int_q \partial_t R_B [\langle \varphi(-q) \varphi(q) \rangle - \langle \varphi(-q) \rangle \langle \varphi(q) \rangle] - \int_q \partial_t R_F [\langle \bar{\psi}(q) \psi(q) \rangle - \langle \bar{\psi}(q) \rangle \langle \psi(q) \rangle] \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \int_q \partial_t R_B \langle \varphi(-q) \rangle \langle \varphi(q) \rangle - \int_q \partial_t R_F \langle \bar{\psi}(q) \rangle \langle \psi(q) \rangle + \int d^d y (\partial_t Q^T) \Phi}_{= -\partial_t \Delta S_k[\Phi]} \\ &= -\frac{1}{2} \int_q \text{Tr} [\partial_t R_k(q) G_k(q)] - \partial_t \Delta S_k[\Phi] + \int d^d y (\partial_t Q^T) \Phi. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Hierbei ist G_k der volle, verbundene Propagator zur Skala k für alle Feldtypen. Letztere Eigenschaft bedingt, dass er matrixwertig ist, was ja ebenso für den Regulator R_k gilt. Bezüglich dieser Matrixstruktur im Feldraum ist die Spurbildung im letzten Schritt daher zunächst anzusehen. Hier nicht explizit dargestellt, aber aufgrund des skalaren Charakters von W_k ebenso vonnöten, ist die Spurbildung über Dirac- sowie weitere mögliche freie (z.B. Lorentz-, Flavor-, ...) Indizes.

Vor der Zusammensetzung des Endergebnisses sind nun lediglich noch einige Hilfsrelationen zusammenzutragen. So ist für $Q = Q_{sup}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_k^{(2)}[\Phi] &= \frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi^T(x)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(y)} \\
&= \left\{ \int d^d z \left[\frac{\delta Q^T(z)}{\delta\Phi^T(x)} \Phi(z) - \frac{\delta Q^T(z)}{\delta\Phi^T(x)} \underbrace{\frac{\vec{\delta} W_k[Q]}{\delta Q^T(z)}}_{=\Phi(z)} + (-1)_\Psi Q(z) \frac{\delta\Phi(z)}{\delta\Phi^T(x)} \right] - \frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi(x)} \Delta S_k[\Phi] \right\} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(y)} \\
&= (-1)_\Psi \frac{\delta Q(x)}{\delta\Phi(y)} - R_k(x, y).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Der Ausdruck $(-1)_\Psi$ bezeichnet hier einen Faktor von -1 , welcher sich aus der Vertauschung grassmannwertiger Größen ergibt und entsprechend nur an die Fermionischen Anteile der nachstehenden Größe multipliziert wird.

Der bereits oben eingeführte volle, zusammenhängend Propagator G_k lässt sich auch über das Schwingerfunktional beziehen,

$$G_k(y - x') = \left[\frac{\vec{\delta}}{\delta Q^T(y)} W_k[Q] \right] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta Q(x')} = \frac{\delta\Phi(y)}{\delta Q(x')}, \tag{2.21}$$

und daraus mithilfe von (2.20) wiederum die folgende, wichtige Relation ableiten

$$\begin{aligned}
(-1)_\Psi \delta(x - x') &= (-1)_\Psi \frac{\delta Q(x)}{\delta Q(x')} = (-1)_\Psi \int d^d y \frac{\delta Q(x)}{\delta\Phi(y)} \frac{\delta\Phi(y)}{\delta Q(x')} \\
&= \int d^d y \left[\frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi^T(x)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi(y)} + R_k(x, y) \right] G_k(y - x'),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

welche die Bezeichnung der (regularisierten) zweiten funktionalen Ableitung der mittleren effektiven Wirkung als inversen vollen Propagator rechtfertigt.

Damit sind alle benötigten Ingredienzen beisammen und die Wetterich-Gleichung kann ausgehend von (2.15) zusammengesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\partial_t \Gamma_k &= \int d^d y (\partial_t Q^T) \Phi - \partial_t W_k[Q] - \partial_t \Delta S_k[\Phi] \stackrel{(2.19)}{=} \frac{1}{2} \int_q \text{Tr} [\partial_t R_k(q) G_k(q)] \\
&\stackrel{(2.22)}{=} \frac{(-1)_\Psi}{2} \int_q \text{Tr} \left[\partial_t R_k \left(\frac{\vec{\delta}}{\delta\Phi^T} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi} + R_k \right)^{-1} \right] \\
&\equiv \frac{1}{2} \text{STr} \left[\frac{\partial_t R_k}{\Gamma_k^{(2)}[\Phi] + R_k} \right].
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Im letzten Schritt wurde die Summation bzw. Integration in die symbolische „Super-Spur“ STr zusammengefasst sowie die Kurzschreibweise $\Gamma_k^{(2)}$ aus (2.20) für die zweite Ableitung der mittleren effektiven Wirkung verwendet.

2.2.3 Anwendung der Wetterich-Gleichung

Wie oben angekündigt, lassen sich die Regularisierungseigenschaften von R_k an Gl. (2.23) besonders gut ablesen. Für verschwindende Impulse q könnte der Propagator $(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}$ für masselose Theorien divergieren, da $\Gamma^{(2)}$ verschwindet. Bedingung (2.18c) verhindert dies jedoch. Während also R_k selbst für die Infrarotregularisierung zuständig ist, sorgt $\partial_t R_k$ dafür, dass das Ausintegrieren der Fluktuationen in differentiellen Schritten sozusagen über ausgeschmierte Impulsschalen stattfindet. Veranschaulichen lässt sich dies am besten mit dem qualitativen Verhalten der abgeleiteten Regulatorfunktion, wie sie in Abb. 2 dargestellt ist.

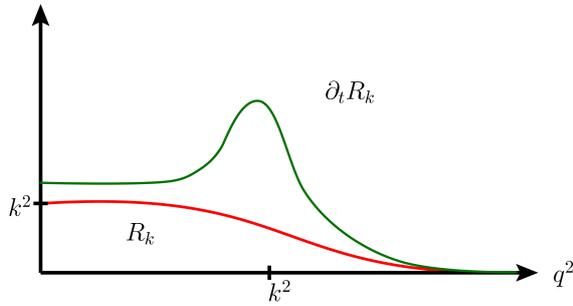


Abbildung 2: Qualitative Darstellung der Regulatorfunktion und ihrer Skalenableitung (nach [19])

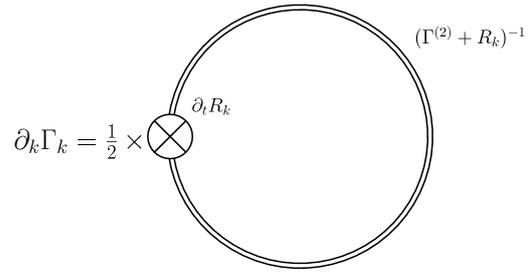


Abbildung 3: Diagrammatische Darstellung der Wetterich-Gleichung [28]

Die Skalenableitung der mittleren effektiven Wirkung $\partial_t \Gamma_k$ hängt praktisch nur noch von Fluktuationen mit Impulsen $q \leq k$ ab. Die größte Änderung, welche Γ_k durch den differentiell kleinen Schritt zu $\Gamma_{k+\delta k}$ erfährt, stammt von Fluktuationen des Impulses $k \approx q$ her, da $\partial_t R_k$ in diesem Bereich groß ist. Gleichzeitig sichert das Abfallen von R_k bzw. damit auch $\partial_t R_k$ für große q^2 die UV-Regularisierung.

Um ein schnelleres, intuitiveres Verständnis von expliziten Rechnungen mit der Wetterich-Gleichung zu fördern, wird in Abb. 3 eine diagrammatische Darstellung letzterer gezeigt. Diagramme mit Doppellinien, wie sie in den späteren Kapiteln dieser Arbeit erscheinen werden, sind demnach nicht als die üblichen störungstheoretischen Feynmandiagramme zu verstehen, sondern als grafische Anwendung von Gl. (2.23). Bemerkenswert ist an dieser Stelle, dass die innere Struktur eines solchen Diagramms grundsätzlich ein einzelner loop ist, was sich letztlich aus der speziellen, in den Feldvariablen quadratischen Form von ΔS_k ergibt [19].

Wie lassen sich nun mithilfe der Wetterich-Gleichung physikalisch relevante Informationen gewinnen? Ziel war es ursprünglich gewesen, eine effektive Wirkung bei beliebiger Skala k konstruieren zu können oder, mit anderen Worten, zu berechnen, welchen Änderungen das ursprüngliche S in seiner Wandlung zur effektiven Wirkung Γ unterliegt. Die Felder selbst sind nicht explizit skalenabhängig, da sie entsprechend der Vorschrift (2.11) reskaliert werden. Durch die Integration der hochenergetischen Moden können zunächst zusätzliche Kombinationen von Feldfunktionen generiert werden, und zwar prinzipiell alle, die mit den Symmetrien der Theorie vereinbar sind. Diese unendlich vielen verschiedenen Operatoren sind i.A. nicht handhabbar, weshalb für die Rechnungen dieser Arbeit als Ansatz für Γ_k jeweils eine bestimmte Auswahl getroffen werden muss. Diese ist eines der Hauptthemen von Kapitel 3 und erfordert einige Sorgfalt, denn die *Trunkierung*, d.h. das Weglassen der anderen Feldkombinationen bringt unweigerlich einen Fehler mit sich. Es ist dabei keineswegs offensichtlich, wie dieser minimiert oder auch nur unter Kontrolle gehalten werden kann.

Die zweite Änderung durch Skalenvariation betrifft die Kopplungsparameter. Sie wird durch die sogenannten *Betafunktionen* oder *Gell-Mann-Low-Gleichungen* beschrieben:

$$\partial_t \mathbf{g} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{g}) = \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{g}} \quad (2.24)$$

wobei \mathbf{g} hier für den Vektor aller in Γ_k vorkommenden Kopplungen steht. Diese Betafunktionen zu extrahieren und zu analysieren wird den Hauptteil dieser Arbeit ausmachen. Mit Analysemethoden beschäftigt sich der nächstfolgende Abschnitt, zuvor wird aber noch kurz ein Extraktionsverfahren umrissen.

Bei bekannter bzw. angesetzter Struktur von Γ_k entspricht die linke Seite der Wetterich-Gleichung praktisch der linken Seite von Gleichung (2.24), nur dass jeder abgeleiteten Kopplung noch die zugehörigen Feldfunktionen beigelegt sind. Entsprechend können die Betafunktionen selbst gewonnen werden, indem ein Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite bezüglich dieser Feldfunktionen stattfindet. Ein äußerst nützliches Werkzeug ist hierbei die Entwicklung

$$\Gamma_k^{(2)} + R_k \equiv \mathcal{P}_k + \mathcal{F}_k \Rightarrow \partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{STr} [\tilde{\partial}_t \ln \mathcal{P}_k] + \frac{1}{2} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^n \right] \quad (2.25)$$

der Wetterich-Gleichung, wobei \mathcal{P}_k für den feldunabhängigen und \mathcal{F}_k für den feldabhängigen Anteil des regularisierten inversen Propagators steht. Die modifizierte Skalenableitung lässt sich symbolisch schreiben als $\tilde{\partial}_t = \frac{dR_k}{dt} \frac{d}{dR_k}$. Durch die Abspaltung und Potenzreihenentwicklung im feldabhängigen Anteil \mathcal{F}_k lässt sich ein Koeffizientenvergleich in den Feldfunktionen oft über einfache Projektionsvorschriften durchführen, was in Kapitel 4 auch ausgedehnte Anwendung finden wird.

2.2.4 Interpretation der Betafunktionen

So wie es für die verschiedensten physikalischen Fragestellungen speziell zugeschnittene Renormierungsgruppentechniken gibt, sind auch die Möglichkeiten, aus unterschiedlichen Typen von Betafunktionen bzw. Flussgleichungen physikalisch relevante Daten zu gewinnen, recht vielfältig. Vorgestellt werden sollen hier vor allem Fixpunkte und Separatrizen als Elemente des Flusses, ihre Deutung hinsichtlich Phasenübergängen zweiter Ordnung sowie die zu den Fixpunkten gehörigen kritischen Exponenten Θ . Der Anschaulichkeit halber und damit Ergebnissen aus Kapitel 5 etwas vorgehend, wird dies am Beispiel von Flussdiagramm 4 getan, welches sich aus den Betafunktionen zur QED₃ gewinnen lässt.

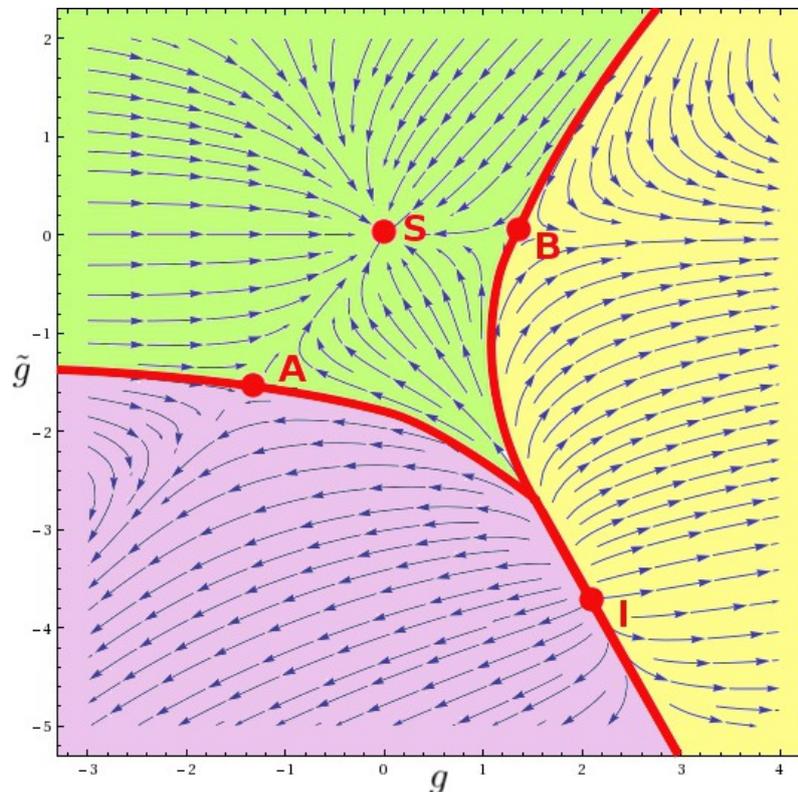


Abbildung 4: Beispiel eines Flussdiagramms (Pfeilrichtung: Fluss ins IR) mit Fixpunkten und Separatrizen

Für *Fixpunkte* \mathbf{g}_* des Flusses gilt, dass $\partial_t \mathbf{g}|_{\mathbf{g}_*} = 0$. Das bedeutet, dass ein System, für welches die Kopplungsparameter einen solchen Wert annehmen, unter Renormierungsgruppentransformationen invariant bleibt, mithin *skaleninvariant* ist. Charakterisiert und klassifiziert werden die Fixpunkte durch die zu ihnen gehörigen *kritischen Exponenten* $\Theta_{\mathbf{g}_*}^i = -\lambda_{\mathbf{g}_*}^i$, wobei $\lambda_{\mathbf{g}_*}^i$ die Eigenwerte der *Stabilitätsmatrix* $\left. \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{g}} \right|_{\mathbf{g}_*}$ sind. Die jeweils dazu gehörenden Eigenvektoren definieren die *Richtungen* des RG-Flusses im Einzugsbereich des Fixpunktes:

- **Stabile Fixpunkte (S):** Es sind alle $\Theta_{\mathbf{g}_*}^i < 0$, der Fixpunkt ist uneingeschränkt Infrarot-attraktiv. Die zu diesen Eigenwerten $\lambda_{\mathbf{g}_*}^i$ gehörenden Eigenvektoren weisen in *irrelevante* Richtungen. Das bedeutet, dass alle Systeme, deren mikroskopische Wirkung einem Punkt im Einzugsbereich dieses Fixpunktes entspricht (hellgrün) diesem im Infraroten immer näher kommen werden.
- **Instabile Fixpunkte (I):** Es gilt, dass alle $\Theta_{\mathbf{g}_*}^i > 0$, wodurch der Fixpunkt IR-repulsiv und die zugehörigen Richtungen *relevant* werden. Er stellt somit das genaue Gegenteil zum obigen Typ dar.
- **Generische Fixpunkte (A,B):** Es gibt sowohl Richtungen mit $\Theta_{\mathbf{g}_*}^i < 0$ als auch solche mit $\Theta_{\mathbf{g}_*}^i > 0$. Diese Fixpunkte sind für das Auffinden von Phasenübergängen besonders interessant, da sie eine Grenze zwischen zwei Domänen der Attraktivität erzeugen können.

Diese Grenze, allgemein eine Hyperfläche niedrigerer Dimension als der Vektor \mathbf{g} , verläuft entlang der IR-attraktiven Richtungen generischer Fixpunkte ins Unendliche bzw. zu anderen Fixpunkten und wird *Separatrix* genannt. Das zu beschreibende System zeigt beiderseits einer Separatrix ein sehr unterschiedliches Infrarotverhalten, da es zu unterschiedlichen Fixpunkten läuft - in diesem Sinne stellen Separatrizen

Phasengrenzen dar, ihr Überschreiten einen Phasenübergang zweiter Ordnung.

Bisher nicht behandelt wurde $\lambda_{\mathbf{g}_*}^i = 0$, in welchem Fall die entsprechende Richtung *marginal* genannt wird. Tritt dies ein, entscheiden höhere Ableitungen, ob die Richtung *marginal relevant* oder *marginal irrelevant* ist und somit letztlich repulsiv oder attraktiv.

Die Lage der Fixpunkte ist abhängig vom Renormierungsschema, d.h. z.B. dem gewählten Regulator im Formalismus der Wetterich-Gleichung, ihre Existenz und die kritischen Exponenten jedoch nicht [27]. Demnach können Fixpunktkoordinaten keinen physikalischen Observablen entsprechen, wohingegen kritische Exponenten, eingeschränkt natürlich im Einzelnen durch ihre experimentelle Zugänglichkeit, gemessen werden können. Seitens der Theorie werden dafür die Flussgleichungen in der Umgebung des Fixpunktes linearisiert (hier am Beispiel eines Systems mit nur einer Kopplung),

$$\partial_t g \approx \left. \frac{\partial \beta_g}{\partial g} \right|_{g_*} (g - g_*) = -\Theta(g - g_*) \quad (2.26)$$

wodurch sich die Differentialgleichung dort leicht lösen lässt:

$$g = C \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^{-\Theta} + g_* \Leftrightarrow k = \frac{C^{-\frac{1}{\Theta}}}{\Lambda} (g - g_*)^{-\frac{1}{\Theta}}, \quad C = \text{const.} \quad (2.27)$$

Eine experimentell zugängliche Observable \mathcal{O} , von der bekannt ist, dass sie sich bei der Skala $k_{\mathcal{O}}$ wie $k_{\mathcal{O}}^{d_{\mathcal{O}}}$ verhält, zeigt dann folglich ein (2.27) entsprechendes Skalierungsverhalten, wodurch der kritische Exponent bestimmt werden kann.

In diesem Sinne sind Renormierungsgruppentechniken, mit deren Hilfe sich Betafunktionen gewinnen lassen, nützliche Werkzeuge zur Auffindung und Charakterisierung von Quantenphasenübergängen. Wie sich dies für die Frage nach chiraler Symmetriebrechung einsetzen lässt, wird in Abschnitt 3.2.2 behandelt werden.

2.3 Eichtheorie

Eine enorm wichtige Klasse von Quantenfeldtheorien, zu welcher auch die Quantenelektrodynamik gehört, wird durch die sog. *Eichtheorien* gebildet. Da diese einige sehr spezifische Eigenschaften aufweisen, welche für die später angewendeten Verfahren von großer Bedeutung sind, lohnt es sich, einen Blick auf ihre Konstruktion, Quantisierung und Handhabung zu werfen. Besonderes Gewicht wird dabei auf den *abelschen* Spezialfall gelegt, da nur dieser für die Betrachtung der QED von Bedeutung ist.

2.3.1 Konstruktion abelscher Eichtheorien: Die QED

Es sei nun eine masselose, fermionische Feldtheorie durch die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^a i \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \psi^a = \sum_{a=1}^{N_f} \bar{\psi}^a i \not{\partial} \psi^a \equiv \bar{\psi} i \not{\partial} \psi \quad (2.28)$$

gegeben. Weder Masselosigkeit noch die Beschränkung auf fermionische Feldtheorien ist für die Konstruktion von Eichtheorien nötig, bietet sich hier jedoch mit Blick auf die zu erzielende Struktur der Wirkung (1.1) an. Dafür werden von Anfang an N_f verschiedene Fermionflavors, d.h. Teilchenarten identischer Symmetrie, zugelassen und durch a indiziert.

Im nächsten Schritt werden Symmetrietransformationen der einzelnen Fermionfelder

$$\psi^a(x) \rightarrow e^{-i\epsilon^c T^c} \psi^a(x), \quad \bar{\psi}^a(x) \rightarrow \bar{\psi}^a(x) e^{i\epsilon^c T^c} \quad (2.29a)$$

$$\psi^a(x) \rightarrow e^{-i\epsilon^c(x) T^c} \psi^a(x), \quad \bar{\psi}^a(x) \rightarrow \bar{\psi}^a(x) e^{i\epsilon^c(x) T^c} \quad (2.29b)$$

betrachtet, wobei T^c Generator einer Lie-Gruppe ist und ϵ^c ein jeweils dazu gehörender, verallgemeinerter Rotationsparameter. Die Wahl dieser Lie-Gruppe ist von größter Bedeutung für die letztendlich durch die Theorie beschriebene Physik. So sei erwähnt, dass die in der Beschreibung von Phänomenen der starken Wechselwirkung so erfolgreiche Quantenchromodynamik mit Hilfe der Gruppe $SU(3)$ erzeugt wird, was auf drei verschiedene *Farbladungen* für die Fermionen, d.h. Quarks, führt. Die Indizes c bezeichnen dann die acht ebenfalls „farbgeladenen“ Gluonen. Für die QED grundlegend und daher im Weiteren verwendet, ist die abelsche $U(1)$ mit ihrem Generator $\mathbb{1}$. Doch zurück zu den Transformationen selbst: Offenbar ist die Lagrange-Dichte (2.28) unter der *globalen* Transformation (2.29a) invariant, unter der *lokalen* (2.29b) aufgrund des Ableitungsoperators jedoch nicht. Invarianz unter einer solchen *Eichtransformation* lässt sich jedoch durch die Einführung der *kovarianten Ableitung*

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} - i\bar{e} A_{\mu} \quad (2.30)$$

erreichen, wenn das *Eichfeld* wie folgt transformiert:

$$A_\mu \rightarrow e^{-i\epsilon(x)} A_\mu e^{i\epsilon(x)} - \frac{1}{e} [\partial_\mu e^{-i\epsilon(x)}] e^{i\epsilon(x)} = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \epsilon(x). \quad (2.31)$$

Diesen Vorschriften entsprechend lassen sich nun zusätzliche eichinvariante Terme konstruieren, welche zur Wirkung hinzugefügt werden können. Besonders nötig ist dabei in erster Linie ein kinetischer Term für das Eichfeld A_μ . Es lässt sich zeigen, dass der einfachste hierfür infrage kommende die folgende Form hat:

$$\mathcal{L}_{A,\text{kin}} = \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \equiv \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Damit ergibt sich schließlich die eichinvariante mikroskopische Wirkung masseloser, d -dimensionaler Quantenelektrodynamik mit N_f Fermionflavors zu

$$S_{\text{QED}} = \int d^d x \left[\bar{\psi}^a i \not{D} \psi^a + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (2.33)$$

Es sei bemerkt, dass die euklidische Formulierung es erlaubt, die Unterscheidung zwischen oberen und unteren Lorentz-Indizes entfallen zu lassen - ihre Verwendung erfolgt hier und im Weiteren also ausschließlich aus Gründen der Lesbarkeit.

2.3.2 Quantisierung und Eichfixierung

Die Konstruktion der Eichtheorie über eine Symmetrietransformation fordert allerdings bei der Quantisierung ihren Preis. Kernstück der erzeugenden Funktionale aus Abschnitt 2.1 ist das Pfadintegral (hier für die QED)

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{-S_{\text{QED}}[\bar{\psi}, \psi, A]}. \quad (2.34)$$

Nun ist sowohl S_{QED} als auch das Integrationsmaß insgesamt unter den oben beschriebenen Transformationen invariant, was nach Gleichung (2.31) insbesondere bedeutet, dass bezüglich der Pfadintegration jedes $A_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \epsilon(x)$ äquivalent zu $A_\mu = 0$ ist. Damit muss das Pfadintegral über A divergieren, da über unendlich viele Feldkonfigurationen integriert wird, für welche $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0$ ist, sodass der Integrand nicht mehr unterdrückt wird.

Eine Lösung dieses Problems bietet ein zur Eichfixierung in der klassischen Elektrodynamik analoges Verfahren nach L. Faddeev und V. Popov, welches aus den möglichen Eichfeldkonfigurationen weitestgehend nur solche auswählt, die nicht durch Eichtransformation ineinander überführt werden können [30]. Eine Eichfixierungsbedingung $G(A) \stackrel{!}{=} 0$ wird mithilfe der funktionalen Identität

$$1 = \int \mathcal{D}\epsilon(x) \delta[G(A^\epsilon)] \det \left[\frac{\delta G(A^\epsilon)}{\delta \epsilon} \right], \quad (2.35)$$

ins Pfadintegral (2.34) eingeführt, wobei A^ϵ das eichtransformierte Feld (2.31) bezeichnet. $G(A)$ selbst ist nicht eichinvariant und soll so gewählt werden, dass $\frac{\delta G(A^\epsilon)}{\delta \epsilon}$ nicht mehr von A^ϵ abhängt. Dann wird aus (2.34)

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{-S_{\text{QED}}[\bar{\psi}, \psi, A]} &= \det \left[\frac{\delta G(A^\epsilon)}{\delta \epsilon} \right] \int \mathcal{D}\epsilon(x) \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{-S_{\text{QED}}[\bar{\psi}, \psi, A]} \delta[G(A^\epsilon)] \\ &= \det \left[\frac{\delta G(A^\epsilon)}{\delta \epsilon} \right] \int \mathcal{D}\epsilon(x) \int \mathcal{D}\bar{\psi}^\epsilon \mathcal{D}\psi^\epsilon \mathcal{D}A^\epsilon e^{-S_{\text{QED}}[\bar{\psi}^\epsilon, \psi^\epsilon, A^\epsilon]} \delta[G(A^\epsilon)] \end{aligned} \quad (2.36)$$

womit gesichert ist, dass die funktionale Deltadistribution tatsächlich von allen bezüglich Eichtransformation äquivalenten A^ϵ jeweils eines auswählt.

Um am Ende bei einer Struktur ähnlich der Lorentz-Eichung anzukommen, wird nun ein spezielles $G(A)$ gewählt, welches die zuvor gestellten Bedingungen erfüllt:

$$G_L(A) = \partial_\mu A_\mu(x) - \omega(x), \quad \det \left[\frac{\delta G_L(A^\epsilon)}{\delta \epsilon} \right] = \det \left[\frac{\partial^2}{e} \right]. \quad (2.37)$$

Gleichung (2.36) ist für $G_L(A)$ mit beliebigem $\omega(x)$ erfüllt, also auch für entsprechend normierte (\mathcal{N}_ξ) Linearkombinationen bzw. Integrale über selbige Größe. Es gilt demzufolge

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\xi \int \mathcal{D}\omega \exp \left[- \int d^d x \frac{\omega^2(x)}{2\xi} \right] \det \left[\frac{\partial^2}{e} \right] \int \mathcal{D}\epsilon \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A e^{-S_{\text{QED}}[\bar{\psi}, \psi, A]} \delta[\partial_\mu A_\mu - \omega(x)] \\ = \mathcal{N}_\xi \det \left[\frac{\partial^2}{e} \right] \left(\int \mathcal{D}\epsilon \right) \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A \exp \left[-S_{\text{QED}}[\bar{\psi}, \psi, A] - \int d^d x \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

was zeigt, dass die in (2.36) eingeführte Eichfixierungsmethode effektiv der Addition eines *Eichfixierungsterms* zur Wirkung entspricht.

$$S = S_{\text{QED}} + S_{\text{GF}} = \int d^d x \left[\bar{\psi}^a i \not{D} \psi^a + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right] \quad (2.39)$$

Die divergierenden, jedoch konstanten Vorfaktoren stellen kein Problem mehr dar, da sie, wie in Gl. (2.3) zu erkennen, bei der Bestimmung der physikalisch interessierenden Korrelationsfunktionen per definitio nem herausfallen. Der *Eichparameter* ξ ist frei wählbar und kann zur Vereinfachung konkreter Rechnungen verwendet werden.

2.3.3 Ward-Takahashi-Identitäten und Einfluss des Regulators

Physikalische Größen, welche an diesem Punkt mit der Wirkung (2.39) berechnet würden, hingen i.A. von ξ ab. Dies darf jedoch nicht sein, da die Eichfixierung keine physikalische Bedeutung trägt, sondern lediglich ein mathematisches Hilfsmittel ist. Der Schlüssel zur Auflösung dieser Problematik liegt in der Erkenntnis, dass der Eichfixierungsterm die Eichinvarianz der Wirkung und damit letztlich der Ergebnisse von Rechnungen bricht. Durch spezielle Bedingungen an die Lösungen der Feldtheorie, genannt *Ward-Takahashi-Identitäten* (WTI) lässt sich dies ausgleichen. Um diese Identitäten funktional gewinnen zu können, muss das Konzept der Generatoren \mathcal{G} von Eichtransformationen eingeführt werden. Von diesen wird verlangt, dass sie die Änderung δY eines Feldes Y unter infinitesimalen Eichtransformationen (*ET*) erzeugen:

$$\int d^d x \mathcal{G}_Y Y(x) = \delta Y \quad \text{für } Y \xrightarrow{ET} Y + \delta Y. \quad (2.40)$$

Eichinvariante Größen wie physikalische Wirkungen sind demnach durch $\mathcal{G}S = 0$ charakterisiert. Die infinitesimalen Transformationen, d.h. solche mit $\epsilon(x) \ll 1$, der hier verwendeten Feldtypen sind nach (2.29) und (2.31) durch

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} [1 + i\epsilon(x)]; \quad \psi \rightarrow [1 - i\epsilon(x)] \psi; \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \epsilon(x) \quad (2.41)$$

gegeben. Daraus lassen sich die Generatoren ablesen:

$$\mathcal{G}_{\bar{\psi}} = i \bar{\psi}(y) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(y)}, \quad (2.42a)$$

$$\mathcal{G}_\psi = -i \psi(y) \frac{\delta}{\delta \psi(y)}, \quad (2.42b)$$

$$\mathcal{G}_A = \frac{1}{e} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu}. \quad (2.42c)$$

Auch wenn es verschiedene Möglichkeiten gibt, die WTI darzustellen, bietet sich für die funktionale Herangehensweise eine Relation der effektiven zur mikroskopischen Wirkung an. Aus der effektiven Wirkung lassen sich dann, wie bereits oben besprochen, recht direkt physikalische Größen extrahieren, welche eichinvariant sein müssen. Aus dieser letzten Forderung ergibt sich die WTI [19]

$$(\mathcal{G}_{\bar{\psi}} + \mathcal{G}_\psi + \mathcal{G}_A) \Gamma - \langle (\mathcal{G}_{\bar{\psi}} + \mathcal{G}_\psi + \mathcal{G}_A) S \rangle = (\mathcal{G}_{\bar{\psi}} + \mathcal{G}_\psi + \mathcal{G}_A) \Gamma - \langle (\mathcal{G}_{\bar{\psi}} + \mathcal{G}_\psi + \mathcal{G}_A) S_{\text{GF}} \rangle \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.43)$$

da $\mathcal{G}S_{\text{QED}} = 0$ nach Konstruktion.

Diese Identität besagt also zunächst, dass eine nach (2.6) gewonnene effektive Wirkung Γ eichinvariant ist, insofern dies auch für die zugehörige mikroskopische Wirkung S gilt bzw. mit welchen Bedingungen die Eichinvarianz physikalischer Ergebnisse im Nachhinein erzwingen werden kann. Nun wird die effektive Wirkung im vorliegenden Fall aber durch die Wetterich-Gleichung konstruiert, auch Γ_k selbst ist von Interesse. Da dessen Definition (2.15) einen zusätzlichen, i.A. nicht eichinvarianten Term $\Delta S_k[\Phi]$ einbringt, sieht auch die Bedingung zur Erzwingung der Eichinvarianz für Γ_k anders aus [19]:

$$\mathcal{G} \Gamma_k + \mathcal{G} \Delta S_k - \langle \mathcal{G} (S_{\text{GF}} + \Delta S_k) \rangle \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.44)$$

nun entsprechend *modifizierte Ward-Takahashi-Identität* (mWTI) genannt. Wegen der Eigenschaft (2.18a) des Regulators verschwindet ΔS_k im Limes $k \rightarrow 0$, wodurch sich die modifizierte im tiefen Infrarot wieder auf die Standard-WTI reduziert. Nun ist das gleichzeitige Lösen von aus der Wetterich-Gleichung gewonnenen Flussgleichungen und der mWTI bei weitem keine triviale Aufgabe, auch unterliegen sie einem

Trunkierungsfehler analog dem weiter unten in Abschnitt 3.1.2 diskutierten. Aus diesen Gründen wurde und wird nach Wegen gesucht, die direkte Verwendung der mWTI zu umgehen. Eine solche Möglichkeit, die auch mit Erfolg auf Yang-Mills-Theorien bzw. QCD angewendet wurde (siehe z.B. [31], [32] sowie [33]) ist die *Hintergrundfeldmethode*. Ohne an dieser Stelle näher darauf einzugehen, sei erwähnt, dass diese für die QED₃ leider keine guten Ergebnisse liefert - eine Begründung dafür folgt in Abschnitt 4.3. Für die konkreten Rechnungen in Kapitel 4 wird stattdessen eine Näherung verwendet, deren Einfluss im Vergleich mit anderen Fehlerquellen unbedeutend sein sollte.

3 Symmetrien und Symmetriebrechung: Die mittlere effektive Wirkung der QED₃

Um all die Werkzeuge aus dem vorangegangenen Kapitel zur Anwendung bringen zu können, ist zunächst vor allem eines nötig: ein Ansatz für die mittlere effektive Wirkung Γ_k , welcher die Eigenschaften des zu untersuchenden Systems widerspiegelt. Und die wichtigsten Eigenschaften von (Quanten-)Feldtheorien sind, neben der Auswahl der verwendeten Teilchensorten, die Symmetrien der Theorie. Es wird also im ersten Teil dieses Kapitels um die Konstruktion eines $\Gamma_k^{\text{QED}_3}$ gehen, welches alle geforderten Symmetrien, also neben allen anderen der mikroskopischen S_{QED_3} insbesondere die chirale, aufweist und gleichzeitig eine sinnvolle Trunkierung des unbekanntenen, vollen Γ_k der Theorie darstellt.

Dem Titel dieser Arbeit zufolge soll es jedoch nicht nur um Symmetrien an sich, sondern vor allem um ihre spontane Brechung gehen. Doch was genau ist spontane Symmetriebrechung? Kann die chirale Symmetrie der soeben konstruierten QED₃ diesem Phänomen unterliegen? Und welche Möglichkeiten bieten die funktionalen Methoden aus Kapitel 2 um das herauszufinden? Die konzeptionelle Beantwortung dieser Fragen soll Thema des zweiten Abschnitts in diesem Kapitel sein, bevor sie in weiteren Teilen der Arbeit konkret rechnerisch weiterverfolgt werden.

3.1 Konstruktion von $\Gamma_k^{\text{QED}_3}$

Ausgangspunkt aller weiteren Betrachtungen ist die Lagrange-Dichte bzw. mikroskopische Wirkung der 2+1-dimensionalen Quantenelektrodynamik für N_f Fermionflavors, wie sie (allgemein) in 2.3.1 und 2.3.2 konstruiert wurde:

$$S_{\text{QED}_3} = \int d^3x \left[\bar{\psi}^a i \not{\partial} \psi^a + \bar{e} \bar{\psi}^a A \psi^a + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right]. \quad (3.1)$$

Zunächst sei noch einmal bemerkt, dass diese Wirkung, wie auch sämtliche anderen Rechnungen dieser Arbeit, mit euklidischer Signatur aufgeschrieben ist. Während der Schritt von der gebräuchlicheren Minkowski-Signatur ins Euklidische für rein bosonische Theorien einfach durch Wick-Rotation zu vollziehen ist, müssen bei Anwesenheit von Spinorfeldern zusätzliche Bedingungen beachtet werden. Dazu zählt sowohl die Forderung, Hermitezität für minkowskische durch Osterwald-Schrader-Positivität für euklidische Signatur zu ersetzen, als auch die korrekte Definition von komplexer Konjugation und Symmetrietransformationen. Weiterhin erbt die euklidische Theorie auch ein Analogon der Lorentzinvarianz. Eine ausführliche Behandlung dieser Themen findet sich in [34].

3.1.1 Darstellung und Symmetrien

Als nächstes stellt sich die Frage nach der Lorentz-Darstellung der Spinoren $\bar{\psi}$ und ψ bzw. der Dimensionalität der zugehörigen γ -Matrizen. Allgemein gilt, dass für eine d -dimensionale Theorie mit d ungerade die $2^{(d-1)/2}$ -dimensionale Darstellung irreduzibel ist [35]. Für $d = 3$ wäre das folglich zweidimensional und die drei γ_μ -Matrizen ließen sich mit den Paulimatrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

identifizieren. Allerdings hat diese Darstellung den entscheidenden Nachteil, dass sich keine *chirale Symmetrie* definieren lässt [36, 37]. Unter chiraler Symmetrie werden dabei $U(1)$ -Transformationen verstanden, welche den kinetischen Term $\mathcal{L}_{\text{kin}} = \bar{\psi} \not{\partial} \psi$ invariant lassen, von einem Massenterm $\mathcal{L}_{\text{mass}} = m \bar{\psi} \psi$ aber zumindest teilweise gebrochen werden. Aus diesem Grund werden derartige Betrachtungen zur QED₃ jeweils in einer vierdimensionalen und somit reduziblen Darstellung vorgenommen. Da sich die weiteren Symmetriebetrachtungen und Teile der späteren Rechnungen stark an [38] anlehnen werden, wird auch

die dortige explizite Darstellung gewählt:

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_\mu \\ i\sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{45} = i\gamma_4\gamma_5 = i \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

wobei $\mu = 1, 2, 3$. Während die γ_μ -Matrizen eine Clifford-Algebra mit

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

bilden, wurden die letzteren drei Matrizen $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_{45}$ ihrer Eigenschaften

$$\{\gamma_\mu, \gamma_4\} = \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = \{\gamma_4, \gamma_5\} = \{\gamma_4, \gamma_{45}\} = \{\gamma_5, \gamma_{45}\} = 0, \quad [\gamma_\mu, \gamma_{45}] = 0 \quad (3.5)$$

wegen explizit aufgeschrieben.

Analog zur Implementierung der chiralen Symmetrie z.B. in der QCD [23] werden für jeden Fermionflavor a axiale ($U_{\gamma_4}(1), U_{\gamma_5}(1)$) und Vektortransformationen ($U_{\mathbb{1}}(1), U_{\gamma_{45}}(1)$) definiert,

$$U_{\gamma_4}(1): \quad \psi^a \mapsto e^{i\alpha\gamma_4}\psi^a, \quad \bar{\psi}^a \mapsto \bar{\psi}^a e^{i\alpha\gamma_4} \quad (3.6a)$$

$$U_{\gamma_5}(1): \quad \psi^a \mapsto e^{i\beta\gamma_5}\psi^a, \quad \bar{\psi}^a \mapsto \bar{\psi}^a e^{i\beta\gamma_5} \quad (3.6b)$$

$$U_{\mathbb{1}}(1): \quad \psi^a \mapsto e^{i\vartheta}\psi^a, \quad \bar{\psi}^a \mapsto \bar{\psi}^a e^{-i\vartheta} \quad (3.6c)$$

$$U_{\gamma_{45}}(1): \quad \psi^a \mapsto e^{i\varphi\gamma_{45}}\psi^a, \quad \bar{\psi}^a \mapsto \bar{\psi}^a e^{-i\varphi\gamma_{45}} \quad (3.6d)$$

welche gemeinsam eine $U(2)$ -Symmetrie darstellen. Deren $2^2 = 4$ Generatoren $\tau_j, j = 1\dots 4$ sind demnach $\mathbb{1}, \gamma_4, \gamma_5$ und γ_{45} . Eine weitere rein fermionische Symmetrie ist die verallgemeinerte Rotation im Flavor-Raum, welche durch $U(N_f)$ -Transformationen beschrieben wird. Die N_f^2 Generatoren dieser Gruppe sind $i = 1\dots N_f^2 - 1$ sog. verallgemeinerte Gell-Mann-Matrizen λ_i der Dimension N_f und die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{N_f}$. Auf den gesamten Spinorraum bezogen lässt sich die auf links- und rechtshändige Weyl-Spinoren $\bar{\psi}^a = (\bar{\psi}_L^a, \bar{\psi}_R^a)$ wirkende $U(2)$ mit der Flavor-Rotationsgruppe $U(N_f)$ zur Gruppe der chiralen Symmetrietransformationen $U(2N_f)$ mit den Generatoren

$$U(2N_f): \quad \lambda_i \otimes \tau_j, \quad i = 1\dots N_f, \quad j = 1\dots 4 \quad (3.7)$$

zusammenfassen. Offenbar ist die Wirkung (3.1) der QED₃ invariant unter Transformationen dieser Gruppe, was folglich auch von der zu konstruierenden mittleren effektiven Wirkung gefordert werden muss. Neben dieser globalen, kontinuierlichen Symmetrie weist die Wirkung (3.1) drei diskrete auf. Sie ist invariant unter: Ladungskonjugation (\mathcal{C}), Raumspiegelung (\mathcal{P}) und Zeitumkehr (\mathcal{T}). Die beiden letzteren Transformationen gehen mit Änderungen des Koordinatensystems einher. Daher wird festgelegt, dass

$$x = (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\mathcal{T}} \hat{x} = (x_1, x_2, -x_3) \quad \text{sowie} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{\mathcal{P}} \tilde{x} = (-x_1, x_2, x_3). \quad (3.8)$$

Das heißt, x_3 wird als Zeitrichtung ausgewählt (siehe Anhang A.2) und die Raumspiegelung wird an der x_1 -Achse vorgenommen. Anders als in $d = 4$ darf die Raumspiegelung nicht auf beide Achsen wirken, da sie sonst lediglich einer Drehung des Koordinatensystems um 180° entspräche [37]. In Anlehnung an [38] und [39] werden die diskreten Transformationen definiert als

$$\mathcal{C}: \psi^a \mapsto (\bar{\psi}^a C_\xi)^T, \quad \bar{\psi}^a \mapsto -(C_\xi^\dagger \psi)^T, \quad (A_1, A_2, A_3)(x) \mapsto -(A_1, A_2, A_3)(x) \quad (3.9a)$$

$$\mathcal{P}: \psi^a \mapsto P_\zeta \psi^a, \quad \bar{\psi}^a \mapsto \bar{\psi}^a P_\zeta^\dagger, \quad (A_1, A_2, A_3)(x) \mapsto (-A_1, A_2, A_3)(\tilde{x}) \quad (3.9b)$$

$$\mathcal{T}: \psi^a \mapsto T_\eta \psi^a, \quad \bar{\psi}^a \mapsto \bar{\psi}^a T_\eta^\dagger, \quad (A_1, A_2, A_3)(x) \mapsto (A_1, A_2, A_3)(\hat{x}). \quad (3.9c)$$

Für die Zeitumkehroperation steht zu beachten, dass sie antiunitär ist, d.h. in zusammengesetzten Ausdrücken konjugierend auf komplexe Zahlen wirkt. Bleibt noch, die unitären Operatoren C_ξ, P_ζ sowie T_η zu definieren:

$$C_\xi = \frac{1}{2} [(1 + \xi)\gamma_2\gamma_4 + i(1 - \xi)\gamma_2\gamma_5], \quad (3.10a)$$

$$P_\zeta = \frac{1}{2} [(1 + \zeta)\gamma_1\gamma_4 + i(1 - \zeta)\gamma_1\gamma_5], \quad (3.10b)$$

$$T_\eta = \frac{1}{2} [(1 + \eta)\gamma_1 + i(1 - \eta)\gamma_2\gamma_3], \quad (3.10c)$$

wobei die komplexen Zahlen ξ, ζ und η vom Betrag 1 sein müssen, sonst aber frei wählbar sind. Unabhängig von diesen Parametern ist aber die Wirkung (3.1) unter den Transformationen (3.9) invariant. Nicht vergessen werden sollte an dieser Stelle auch die Eichsymmetrie der QED allgemein sowie deren explizite, kontrollierte Brechung durch speziell konstruierte Eichfixierungsterme. Damit sind die Symmetrieforderungen an $\Gamma_k^{\text{QED}_3}$ komplett und die Konstruktion dieser Größe aus erlaubten Termen kann beginnen.

3.1.2 Ableitungsentwicklung, Trunkierung und Wechselwirkungsterme

Im Rahmen der Herleitung bzw. Diskussion der Wetterich-Gleichung wurde bereits kurz angesprochen, dass für explizite Rechnungen trunkierte, d.h. nicht alle erlaubten Feldkombinationen enthaltende Ansätze für Γ_k gewählt werden müssen. Inwiefern ist diese Näherung nun problematisch? Wie sich zum Beispiel bereits aus der Entwicklung der Wetterich-Gleichung (2.25) erahnen lässt, können und werden Terme im ursprünglichen $S = \Gamma_{k=\Lambda}$ auf der linken Seite, die mehr als zwei Feldfunktionen enthalten, auf der rechten Seite beliebig hohe Potenzen dieser Felder generieren. Dies ist zum einen expliziter Ausdruck der Auswirkungen der Impulsschalenintegration, wie sie unter Gl. (2.12) erwähnt wurden, zum anderen zeigt es, dass Rechnungen mit einem solchen Ansatz nicht selbstkonsistent sein können. So ist im Allgemeinen zu erwarten, dass die neu generierten Feldkombinationen ihrerseits den Fluss der ursprünglich angesetzten beeinflussen werden. Indem sie ignoriert, d.h. nicht in den Ansatz aufgenommen werden, geht auch dieser Einfluss verloren und eine Integration des Flusses bis $k = 0$ führt i.A. nicht mehr auf die korrekte effektive Wirkung $\Gamma_{k=0}$. Schlimmer noch, während ursprünglich durch die Herleitung der Wetterich-Gleichung bzw. die Eigenschaften (2.18) des Regulators garantiert ist, dass dessen Wahl auf $\Gamma_{k=0}$ keinen Einfluss hat, muss dies für einen trunkierten Ansatz für Γ_k nicht mehr gelten, was in Abb. 5 schematisch dargestellt ist.

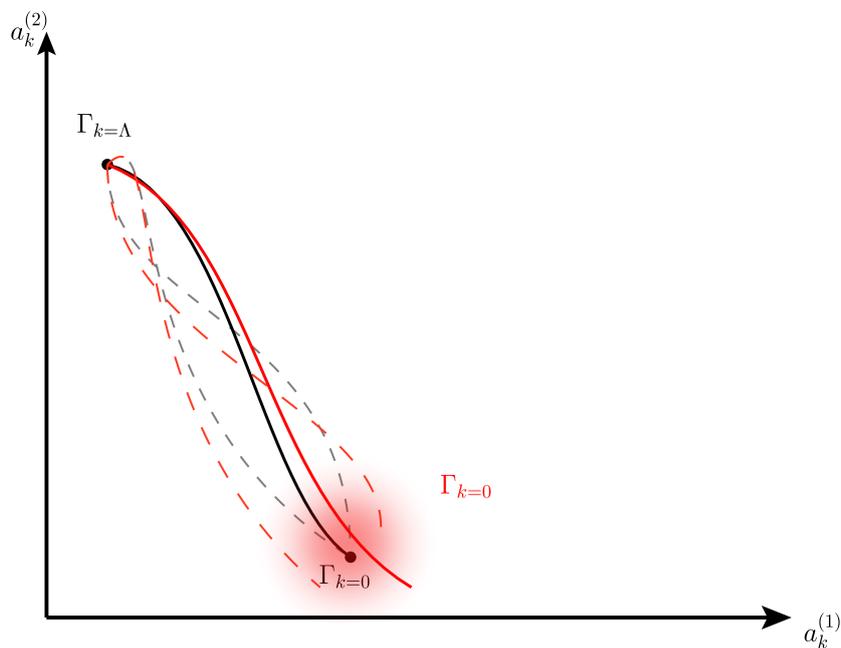


Abbildung 5: Schematische Darstellung des Flusses zweier Kopplungen $a_k^{(1)}$ und $a_k^{(2)}$ mit exaktem (schwarz) und trunkiertem (rot) $\Gamma_{k=0}$. Die gestrichelten Linien entsprechen Flüssen mit anderen Regulatoren.

Es ist also von großer Wichtigkeit, die Trunkierung so zu wählen, dass die enthaltenen Kopplungsparameter möglichst selbstkonsistent fließen können. Hilfreich dabei können Optimierungsstrategien [40] sein, wobei auch eine geeignete Wahl der Regulatorfunktion zur Stabilisierung des Flusses unter Trunkierungen beitragen kann [41]. Eine Möglichkeit zu kontrollieren, wie gut die Forderung nach Selbstkonsistenz erfüllt ist, wird von der zuletzt dargelegten Problematik eröffnet: eine starke Regulatorabhängigkeit weist i.A. auf eine unzureichende Trunkierung hin. Ebenso können schrittweise Terme höherer Ordnung zum Ansatz hinzugefügt werden um zu sehen, ob sich das Verhalten des Flusses dadurch stark ändert. Schwache oder sogar verschwindende Veränderungen, bei welchem der beiden Kontrollverfahren auch immer, sind allerdings keine Garantie dafür, dass es nicht doch noch andere Terme mit starkem Einfluss geben kann. Eine gewisse Restunsicherheit lässt sich also nie ganz vermeiden. Außerdem kann es durchaus auch von der betrachteten Observablen abhängen, wie stark die Regulatorabhängigkeit ist, sodass die Trunkierung unter Umständen der jeweiligen Fragestellung angepasst werden muss.

Doch zurück zum zweiten Kontrollverfahren, dem Hinzufügen neuer Terme. Der Begriff von „Termen höherer Ordnung“ macht natürlich nur Sinn, wenn eine Art Hierarchie definiert ist. Eine solche ergibt sich, wenn die Trunkierung systematisch angegangen wird. Auch hierfür gibt es mehrere Möglichkeiten, in dieser Arbeit wird jedoch vor allem die *Ableitungsentwicklung* eine Rolle spielen. Wie bereits der Name sagt, werden hierbei schrittweise Terme mit immer höheren Ableitungen der Felder hinzugezogen. Auch

mit inbegriffen sei die Einbeziehung von Termen immer höherer Impuls- bzw. Massendimension, was beim Fehlen zusätzlicher Ableitungsoperatoren durch mehr Feldfunktionen erreicht wird. Im Folgenden werden daher zunächst bilineare Terme mit und ohne Ableitung in Fermion- und Eichfeld betrachtet, woraufhin Wechselwirkungsterme höherer Ordnung folgen.

Fermionische Bilineartermine und Photonfelder Die Strategie wird im Folgenden sein, zunächst anhand der chiralen und dann diskreten Symmetrien rein fermionische Terme zu konstruieren und aus ihnen durch Forderung nach Eichsymmetrie bzw. -fixierung grundlegende Photonterme zu gewinnen. Gesucht werden also zuerst Terme der Form

$$\bar{\psi}^a \chi_i \psi^b, \quad \chi_i \text{ beliebige } 4 \times 4\text{-Dirac-Struktur}, \quad (3.11)$$

welche unter (3.6) invariant sind. Da diese Transformationen für jeden Fermionflavor unabhängig definiert sind, wird zunächst klar, dass für die angesetzte Form (3.11) $a = b$ sein muss.

Der Raum aller möglichen 4×4 -Matrizen χ_i wird aufgespannt durch die 16 Basiselemente

$$\{\gamma^A\}_{A=1}^{16} = \{\mathbb{1}, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_{45}, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma_4, i\gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}\} \quad (3.12)$$

mit $\text{Tr}(\gamma^A\gamma^B) = 4\delta^{AB}$. Hierbei ist $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, für (3.12) werden allerdings nur die drei inäquivalenten $\sigma_{\mu\nu}$ gezählt. Da χ_i nur eine Linearkombination dieser Matrizen sein kann, reduzieren sich die Symmetrieüberprüfungen entsprechend auf diese 16 Strukturen. Unter Verwendung der Kommutatorrelationen (3.5) ergibt sich, dass nur Terme $\sim \bar{\psi}\gamma_{45}\psi$ und $\sim \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ unter den vier $U(1)$ Transformationen (3.6) und damit dann auch unter $U(2N_f)$ invariant sind. Insbesondere die drei anderen Generatoren der oben eingeführten $U(1)$ -Transformationen können nicht beitragen: Terme der Form $\bar{\psi}(m_4\gamma_4 + m_5\gamma_5)\psi$ können durch eine geeignete $U(2N_f)$ Rotation stets in $\bar{\psi}(m + m_{45}\gamma_{45})\psi$ überführt werden. Am Generator $\mathbb{1}$ lässt sich nun auch ersehen, warum die oben konstruierte Symmetrie chiral genannt werden darf: Der kanonische Massenterm $m\bar{\psi}\psi$ bricht sowohl $U_{\gamma_4}(1)$ als auch $U_{\gamma_5}(1)$ und reduziert damit die Gesamtsymmetrie,

$$U(2N_f) \xrightarrow{m\bar{\psi}\psi} U_{\mathbb{1}}(1) \times U_{\gamma_{45}}(1) \times SU_{\mathbb{1}+\gamma_{45}}(N_f) \times SU_{\mathbb{1}-\gamma_{45}}(N_f), \quad (3.13)$$

die nun zwischen links- und rechtshändigen Weyl-Spinoren unterscheidet [36]. Entsprechend müssen nun auch die Flavor-Rotation für links- und rechtshändige Spinoren als unterschiedliche Freiheitsgrade betrachtet werden, was durch die Indizes der $SU(N_f)$, $\mathbb{1} \pm \gamma_{45}$, den chiralen Projektoren, zum Ausdruck gebracht wird.

Bezüglich der drei diskreten Symmetrien \mathcal{C} , \mathcal{P} und \mathcal{T} sind aber auch die beiden $U(2N_f)$ -invarianten Terme nicht mehr zulässig: γ_{45} antikommutiert mit P , weshalb $\bar{\psi}\gamma_{45}\psi$ paritätsbrechend ist und $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ verletzt sowohl \mathcal{C} als auch \mathcal{P} . Damit ist gezeigt, dass zu niedrigster Ordnung in einer Ableitungsentwicklung keine rein fermionischen Bilineartermine erlaubt sind. Nach Konstruktion der QED kann dies aber zumindest für $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ in der ersten Ordnung Ableitungsentwicklung kompensiert werden:

$$\bar{\psi}i\not{D}\psi = \bar{\psi}(i\not{D} + \bar{e}A)\psi \quad (3.14)$$

ist invariant. Für γ_{45} lässt sich das aufgrund der Lorentz-Struktur so nicht schreiben, weshalb (3.14) der einzige Beitrag zur ersten Ordnung Ableitungsentwicklung mit maximal zwei Fermionfeldern bleibt. Praktischerweise ist dieser erste Baustein der mittleren effektiven Wirkung auch gleich eichinvariant und entsprechend (3.1) sind auch der kinetische Term des Photonfeldes $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ sowie der Eichfixierungsterm $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\nu)^2$ zugelassen.

Quartische Terme Tatsächlich lassen sich die bisher gefundenen Terme nutzen, um ohne weitere Symmetrieuntersuchungen beliebig höhere Terme in der Ableitungsentwicklung aufzustellen: Beiträge der Form $[\bar{\psi}i\not{D}\psi]^m$ und $[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}]^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ sind grundsätzlich möglich. Sie stellen einen Weg dar, die Ableitungsentwicklung systematisch zu höheren Ordnungen fortzusetzen und so die gewählte Trunkierung auf ihre Stabilität hin zu überprüfen. Im Rahmen des Hintergrundfeldformalismus lassen sich solche Terme recht effizient mit einbeziehen (siehe z.B. [21], [33] bzw. [42]). Wie bereits oben erwähnt und in Abschnitt 4.3 näher ausgeführt, ist dies jedoch im Fall der QED₃ keine geeignete Herangehensweise, sodass im Rahmen dieser Arbeit auf solche Untersuchungen verzichtet wird.

Doch auch von anderen Feldkombinationen wird ein signifikanter Beitrag zum Fluss erwartet. Mechanismen wie der in Abbildung 6 dargestellte erzeugen im Verlauf des RG-Flusses effektive 4-Fermion-Wechselwirkungen. Welche Strukturen sind für diese erlaubt?

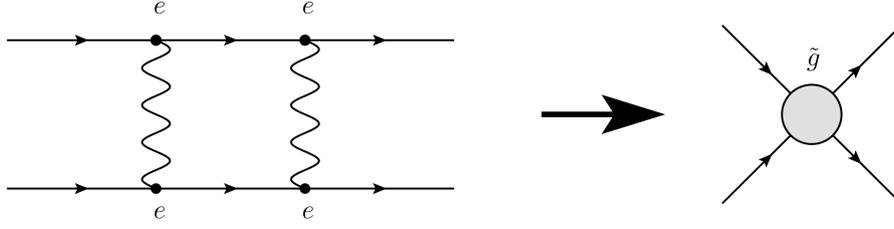


Abbildung 6: Erzeugung einer effektiven 4-Fermion-Wechselwirkung durch das Photonfeld

Das Argument, mit dem die Flavorstruktur des Ansatzes (3.11) reduziert wurde, lässt sich in abgewandelter Form auch hier anbringen: wegen der separat definierten chiralen Transformationen kann anstatt des allgemeinen $(\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^b)(\bar{\psi}^c \gamma_B \psi^d)$ nur $(\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^b)(\bar{\psi}^b \gamma_B \psi^a)$ oder $(\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^a)(\bar{\psi}^b \gamma_B \psi^b)$ auftreten, letzteres wird auch als *Flavor-Singulett* bezeichnet. Die möglichen 4-Fermionterme mit Singulettstruktur sind besonders einfach zu identifizieren. Während geschickte Linearkombinationen im Fall der Nicht-Singulett-Terme die chirale Symmetrie erhalten können, auch wenn die einzelnen Summanden sie brechen würden, ist dies für Flavor-Singulett auf 4-Fermion-Niveau nicht möglich. $U(2N_f)$ -invariant sind von den einzelnen Termen wiederum nur $(\bar{\psi} \gamma_{45} \psi)^2$, $(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2$ sowie $(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma_{45} \psi)$, doch der letzte Term wäre nur unter Hinzunahme zusätzlicher Felder bzw. Ableitungen ein Lorentz-Skalar und verletzt obendrein \mathcal{C} und \mathcal{P} . Somit sind die einzigen erlaubten Wechselwirkungsterme dieser Klasse

$$S^2 = (\bar{\psi} \gamma_{45} \psi)^2 \quad \text{und} \quad (3.15a)$$

$$S_\mu^2 = (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2. \quad (3.15b)$$

Bei den nicht-Singulett-Termen wäre der direkte Nachweise des Symmetrieverhaltens aufwändiger, doch lässt sich hier eine Eigenschaft der Diracstrukturen ausnutzen: Fierz-Äquivalenz. Es lässt sich zeigen, dass Singulett- und Nicht-Singulett-Terme nicht unabhängig voneinander sind,

$$(\bar{\psi}^a \gamma_A \psi^a)(\bar{\psi}^b \gamma_A \psi^b) = \sum_{B=1}^{16} C_{AB} (\bar{\psi}^a \gamma_B \psi^b)(\bar{\psi}^b \gamma_B \psi^a) \equiv \sum_{B=1}^{16} C_{AB} (\bar{\psi}^a \gamma_B \psi^b)^2, \quad (3.16)$$

wobei C eine nicht-ausgeartete Matrix ist - siehe Anhang B für Herleitung und Details. Gleichung (3.16) sagt aus, dass sich aus dem vollständigen Satz möglicher Flavor-Singulett alle erlaubten Nicht-Singulett-Terme gewinnen und linear in Beziehung setzen lassen. Explizit ergibt sich damit

$$V^2 = (\bar{\psi}^a \psi^b)^2 - (\bar{\psi}^a \gamma_4 \psi^b)^2 - (\bar{\psi}^a \gamma_5 \psi^b)^2 + (\bar{\psi}^a \gamma_{45} \psi^b)^2 \quad (3.17a)$$

$$V_\mu^2 = (\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^b)^2 - (\bar{\psi}^a i \gamma_\mu \gamma_4 \psi^b)^2 - (\bar{\psi}^a i \gamma_\mu \gamma_5 \psi^b)^2 + (\bar{\psi}^a \sigma_{\mu\nu} \psi^b)^2 \quad (3.17b)$$

sowie die Umrechnungsvorschrift

$$V^2 = -S_\mu^2 - S^2, \quad V_\mu^2 = S_\mu^2 - 3S^2. \quad (3.18)$$

Damit sind alle möglichen 4-Fermion-Wechselwirkungsterme erfasst, für konkrete Rechnungen genügt aber die Betrachtung jeweils zweier, was angesichts der doch recht komplizierten Struktur von V^2 und V_μ^2 von großem rechnerischen Vorteil ist.

Mittlere effektive Wirkung Unter Vernachlässigung von Termen noch höherer Ordnung in Feldern und/oder Ableitungen lautet der volle Ansatz für die mittlere effektive Wirkung der QED₃ im Orts- und Impulsraum damit:

$$\Gamma_k[\bar{\psi}, \psi, A^\mu] = \int d^3x \left\{ Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + e_k \bar{\psi} \not{A} \psi + \frac{Z_A}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{Z_A}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{\tilde{g}_k}{2N_f} (\bar{\psi} \gamma_{45} \psi)^2 + \frac{\bar{g}_k}{2N_f} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2 \right\} \quad (3.19a)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{p_1} Z_\psi \bar{\psi}_{p_1} \not{p}_1 \psi_{p_1} + \int_{p_1} \int_{p_2} e_k \bar{\psi}_{p_1} \gamma_\mu A_{p_1-p_2}^\mu \psi_{p_2} \\ &+ \frac{Z_A}{2} \int_{p_1} \left[p_1^2 A_{p_1}^\mu A_{-p_1}^\mu - (p_1^\mu A_{p_1}^\nu)(p_1^\nu A_{-p_1}^\mu) + \frac{1}{\xi} (p_1^\mu A_{p_1}^\mu)(p_1^\nu A_{-p_1}^\nu) \right] \\ &+ \int_{p_1} \int_{p_2} \int_{p_3} \left[\frac{\tilde{g}_k}{2N_f} (\bar{\psi}_{p_1} \gamma_{45} \psi_{p_2})(\bar{\psi}_{p_3} \gamma_{45} \psi_{p_1+p_3-p_2}) + \frac{\bar{g}_k}{2N_f} (\bar{\psi}_{p_1} \gamma_\mu \psi_{p_2})(\bar{\psi}_{p_3} \gamma_\mu \psi_{p_1+p_3-p_2}) \right]. \end{aligned} \quad (3.19b)$$

Die hier eingeführte Skalenabhängigkeit der Kopplungen e_k , \tilde{g}_k und \bar{g}_k sowie die der Wellenfunktionsrenormierungen Z_ψ und Z_A wird Hauptgegenstand der Untersuchungen späterer Abschnitte sein. Hinsichtlich möglicher Anwendungen der Theorie, wie sie auch bereits in der Einführung angedeutet wurden, sei erwähnt, dass die Konstruktion einer Lagrange-Dichte zur Beschreibung von Graphen, basierend auf den „naturgegebenen“ Symmetrien des Systems sowie wenigen zusätzlichen, auf genau dieselben fermionischen Wechselwirkungsterme führt [43].

3.2 Spontane Symmetriebrechung und Renormierungsgruppe

3.2.1 Grundlegendes

Es steht nun eine mittlere effektive Wirkung der QED₃ zur Verfügung, welche alle gewünschten Symmetrien aufweist. Terme hinzuzufügen, welche diese wieder brechen ist, wie an den obigen Überlegungen zu ersehen, einfach - um diese Art der Symmetrieverletzung soll es demzufolge nicht gehen. Von *spontaner Symmetriebrechung* (SSB) hingegen spricht man, wenn der Grund- bzw. Vakuumzustand der betrachteten Theorie geringere Symmetrie aufweist als die zugehörige Wirkung. Spontane Symmetriebrechung ist bei weitem kein Phänomen, welches nur in Quantenfeldtheorien auftreten kann. So werden in der statistischen Physik Phasenübergänge zweiter Ordnung erfolgreich mit dem phänomenologischen Landau-Modell [5], in Abb. 7 und 8 am Beispiel des Grundzustands eines Ferromagneten, beschrieben. In beiden Fällen besitzt die freie Enthalpie $G(M)$ eine Spiegelsymmetrie, doch unterhalb der kritischen Temperatur T_c gilt dies nicht mehr für den Grundzustand des Systems - eine spontane Magnetisierung bildet sich heraus.

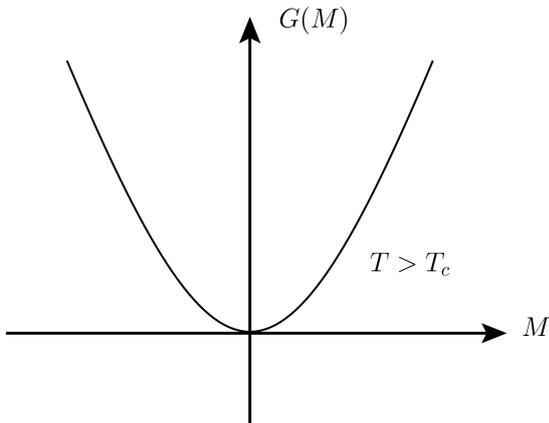


Abbildung 7: Symmetrische Phase: keine Magnetisierung

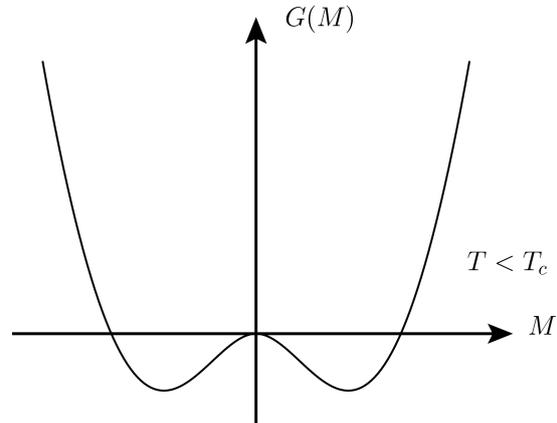


Abbildung 8: Gebrochene Phase: spontane Magnetisierung

Um in quantenfeldtheoretischen Betrachtungen von Nutzen zu sein, muss dieses Phänomen aber zunächst in den dort gebräuchlichen Formalismus übersetzt werden. Dies findet sich in allen einschlägigen Lehrbüchern, die folgende kurze Darstellung lehnt sich vor allem an [24] an.

Jede kontinuierliche Transformation von Feldern, welche die Lagrange-Dichte der betrachteten Theorie höchstens um eine totale Ableitung ändert,

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \epsilon \delta \varphi(x) \Rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \epsilon \partial_\mu \mathcal{J}^\mu \quad (3.20)$$

wobei (3.20) die infinitesimale Anwendung dieser Transformation zeigt, bedingt nach dem *Noether-Theorem* [44] einen erhaltenen Strom

$$\partial_\mu j^\mu \equiv \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi - \mathcal{J}^\mu \right] = 0 \quad (3.21)$$

bzw. eine erhaltene Ladung

$$Q \equiv \int d^2 x j^3(x). \quad (3.22)$$

In Anpassung an die schon oben verwendete Notation ist in Gl. (3.22) gemeint, dass der zeitliche Anteil des Noetherstroms über den gesamten Raum integriert wird. So ergeben sich für jeden Flavor a die

Noetherladungen, welche zu den $U(1)$ -Transformationen (3.6) gehören, zu

$$\begin{aligned} U_{\gamma_4} : Q_4^a &= \int d^2x \bar{\psi}^a \gamma_3 \gamma_4 \psi^a, & U_{\gamma_5} : Q_5^a &= \int d^2x \bar{\psi}^a \gamma_3 \gamma_5 \psi^a, \\ U_{\mathbb{1}} : Q_{\mathbb{1}}^a &= \int d^2x \bar{\psi}^a \gamma_3 \psi^a, & U_{\gamma_{45}} : Q_{45}^a &= \int d^2x \bar{\psi}^a \gamma_3 \gamma_{45} \psi^a, \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei hier nicht über a zu summieren ist. Eine wichtige Eigenschaft der Noetherladung ist, dass sie die zu ihr gehörende Symmetrietransformation erzeugt, d.h.

$$[i\epsilon Q, \varphi] = \epsilon \delta \varphi. \quad (3.24)$$

Im Folgenden sei nun angenommen, dass die Lagrange-Dichte der zu betrachtenden Theorie unter einer Transformation mit Ladung Q invariant ist. Es lässt sich dann zeigen, dass Q verwendet werden kann, um den Vakuumzustand $|0\rangle$ der Theorie auf ein Vorliegen spontaner Symmetriebrechung zu untersuchen:

$$\langle 0|[iQ, \Phi(x)]|0\rangle = \langle 0|\delta\Phi(x)|0\rangle \neq 0 \Leftrightarrow \text{spontane Symmetriebrechung liegt vor.} \quad (3.25)$$

Hierbei ist $\Phi(x)$ ein Feld oder eine Feldkombination, die nur in einem endlichen Gebiet um x von Null verschieden ist. Der Vakuumerwartungswert spezieller Feldkombinationen gibt also die Antwort auf die Frage nach spontaner Symmetriebrechung - für die chiralen Generatoren γ_4 und γ_5 , welche für die Ziele dieser Arbeit von besonderem Interesse sind, wäre demnach der Erwartungswert

$$\langle 0|[iQ_4^a, \bar{\psi}\gamma_4\psi]|0\rangle \sim \langle 0|[iQ_5^a, \bar{\psi}\gamma_5\psi]|0\rangle \sim \langle 0|\bar{\psi}^a\psi^a|0\rangle \quad (3.26)$$

zu untersuchen.

Doch was ist nun die feldtheoretische Auswirkung der Symmetriebrechung? Die Antwort auf diese Frage gibt das *Nambu-Goldstone-Theorem* [6, 7, 45]: in einer Poincaré-invarianten Theorie mit spontaner Symmetriebrechung treten genau so viele zusätzliche masselose Teilchen, sogenannte *Goldstone-Bosonen* auf, wie es Generatoren der gebrochenen Symmetrien gibt. Diese Feststellung hat enorme Konsequenzen, sorgt sie doch z.B. für das Verständnis des Auftretens leichter Mesonen in der Quantenchromodynamik [6, 7]. Noch ein weiterer Aspekt ist von Interesse: Offenbar sind diese zusätzlichen Teilchen nicht mehr notwendigerweise in der ursprünglichen Beschreibung der Theorie enthalten. Die einzige Möglichkeit sie dann zu erzeugen, sind demnach Bindungszustände der Ausgangsteilchen. Angesichts z.B. der Bedeutung der Cooper-Paare für die Beschreibung der Supraleitung im Rahmen der BCS-Theorie wird deutlich, dass spontane Symmetriebrechung ein auch jenseits der Hochenergie- und Teilchenphysik hochinteressantes und -aktuelles Thema ist.

3.2.2 Analyse von Flussgleichungen hinsichtlich spontaner Symmetriebrechung

Das Problem ist nun allerdings, dass der volle Grundzustand wechselwirkender Theorien nicht so einfach zu gewinnen, der Erwartungswert (3.26) also kaum direkt analytisch auszurechnen ist. Erfreulicherweise gibt es noch andere Wege, spontane Symmetriebrechung nachzuweisen und damit die volle Aussagekraft des Nambu-Goldstone-Theorems zur Verfügung zu haben. Einen solchen Weg bietet die funktionale Renormierungsgruppe, was im folgenden näher beleuchtet werden soll. Bevor allerdings Theorien mit Eichfreiheitsgraden untersucht werden können, ist es sinnvoll, zunächst rein fermionische Systeme zu betrachten. Diese haben, z.B. als Niederenergiemodelle von stark gekoppelten Eichtheorien mit asymptotisch freiem Verhalten, durchaus ihre eigene praktische Relevanz, doch werden sie an dieser Stelle vor allem der Anschaulichkeit halber vorangestellt, bevor die zusätzlichen Komplikationen durch den Eichsektor behandelt werden.

Fermionische Systeme

Ohne auf Subtilitäten wie Fierz-Vollständigkeit und dergleichen einzugehen, wird im Folgenden beispielhaft die Wirkung einer Theorie mit nur einer fermionischen Kopplung, das *Gross-Neveu-Modell* in $(2+1)$ Dimensionen mit einem einzigen Fermionflavor betrachtet:

$$S_{\text{GN}} = \int d^3x \left[Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} \bar{\lambda} (\bar{\psi} \psi)^2 \right]. \quad (3.27)$$

Diese Wirkung ist invariant unter der diskreten Symmetrie [46]

$$\bar{\psi} \mapsto -\bar{\psi} \gamma_5, \quad \psi \mapsto \gamma_5 \psi. \quad (3.28)$$

Das Noether- und somit auch das Goldstone-Theorem kommt damit nicht zur Anwendung. Doch kann diese Symmetrie trotzdem explizit durch

$$m\bar{\psi}\psi \mapsto m(-\bar{\psi}\gamma_5)(\gamma_5\psi) = -m\bar{\psi}\psi \quad (3.29)$$

gebrochen werden. Demnach sollte es also möglich sein, am symmetrischen Modell (3.27) die Mechanismen spontaner Symmetriebrechung nachzuvollziehen.

Um die Existenz symmetriebrechender Phasen mit den in Abschnitt 2.2 vorgestellten Fixpunktstrukturen in Verbindung bringen zu können, ist zunächst ein Umweg erforderlich, die *Bosonisierung* der Theorie. Bei diesem Verfahren handelt es sich um die Anwendung einer *Hubbard-Stratonovich-Transformation* [47, 48] des Pfadintegrals. Grundgedanke ist, dass das Einfügen von

$$1 = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int d^3x \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 \right] \quad (3.30)$$

das erzeugende Funktional $Z[\bar{\psi}, \psi]$ nicht ändert, wenn die Normierungskonstante \mathcal{N} geeignet gewählt wird. Auch eine Verschiebung der Variablen

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{i\bar{h}}{\sqrt{2}m_\phi^2} (\bar{\psi}\psi), \quad \frac{\bar{h}^2}{2m_\phi^2} \stackrel{!}{=} \bar{\lambda} \quad (3.31)$$

und passende Fixierung der freien Parameter \bar{h} und m_ϕ lässt den Wert von $Z[\bar{\psi}, \psi] = Z[\bar{\psi}, \psi, \phi]$ unverändert. Es ist also konkret

$$Z_{\text{GN}}[\bar{\psi}, \psi] = \mathcal{N}_Z \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_{\text{GN}}[\bar{\psi}, \psi]} = \mathcal{N}'_Z \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi e^{-S_{\text{GN}}[\bar{\psi}, \psi, \phi]} \quad (3.32)$$

mit

$$S_{\text{GN}}[\bar{\psi}, \psi, \phi] = \int d^3x \left[Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + i \frac{\bar{h}}{\sqrt{2}} \bar{\psi} \phi \psi \right]. \quad (3.33)$$

Die rein fermionische Wirkung ist zu einer äquivalenten, um ein bosonisches Feld erweiterten mit Yukawa-Wechselwirkung geworden. Damit ändert sich aber auch die Erscheinungsform der spontanen Symmetriebrechung: anstatt den Erwartungswert $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ zu untersuchen, ist nun die Frage nach dem Nichtverschwinden von $\langle \phi \rangle$ interessant. Es lässt sich relativ einfach zeigen (siehe z.B. [23]), dass dies wiederum äquivalent zu einem Vorzeichenwechsel von m_ϕ^2 ist. Betrachtet man das effektive Potential, welches sich aus dem bosonischen Teil der Wirkung ergibt, lässt sich der Wert von m_ϕ^2 mit der Krümmung dieses Potentials im Ursprung in Verbindung bringen. Damit entscheidet das Vorzeichen von m_ϕ^2 sozusagen, welcher der beiden Fälle aus Abb. 7 ($m_\phi^2 > 0$) oder Abb. 8 ($m_\phi^2 < 0$) zum Tragen kommt.

Nun stellt Gl. (3.27) bzw. (3.33) wieder eine mikroskopische Wirkung dar, welche als effektive Wirkung die Physik bei sehr hohen Energien Λ beschreibt. Spontane Symmetriebrechung ist aber eine Eigenschaft, welche dem Grundzustand zugeordnet wird, also dem Zustand niedrigster Energie, den das System einnehmen kann. Es stellt sich also die Frage nach dem Infrarotverhalten der Theorie, was die Renormierungsgruppenidee ins Spiel bringt: kann eine Symmetrie der mikroskopischen Wirkung im Verlauf des Renormierungsgruppenflusses gebrochen werden? Kann sich also das Vorzeichen von m_ϕ^2 beim Fluss des Systems ins Infrarote umkehren? Und vor allem: ist es notwendig, tatsächlich zu bosonisieren, um dies herauszufinden? Die Antwort auf die letzte Frage wird vom zweiten Teil der Gleichung (3.31) gegeben. Wenn m_ϕ^2 einen Vorzeichenwechsel vollzieht, so muss es auch einen Nulldurchgang aufweisen. Demzufolge wird die fermionische Kopplung λ divergieren.

Es lässt sich also bereits aus der rein fermionischen Theorie ersehen, ob spontane Symmetriebrechung des Grundzustandes auftritt - mehr noch, anhand des Flussdiagramms kann man auch sagen, für welche „Startwerte“, d.h. Kopplungen der mikroskopischen Theorie, dies passieren wird. Zur Erläuterung ist in Abb. 9 schematisch der Verlauf der Betafunktion dargestellt, wie ihn die Kopplung $\bar{\lambda}$ bzw. ihre dimensionslose Version λ (siehe dazu Abschnitt 4.2.1) aufweist [46].

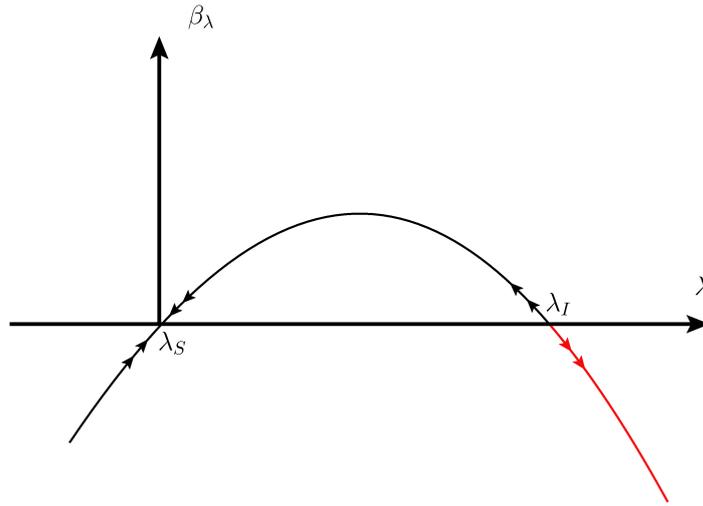


Abbildung 9: Betafunktion einer einzelnen fermionischen Kopplung, Pfeile deuten in Richtung IR.

Zentrale Elemente dieses Flusses sind der IR-attraktive Fixpunkt λ_S sowie der repulsive Fixpunkt λ_I . Startwerte für λ welche in den schwarz markierten Regionen des Flusses liegen, werden im Infraroten in Richtung von λ_S laufen und für $k \rightarrow 0$ dessen endlichem Wert beliebig nahekommen. Für Startwerte $\lambda_{UV} > \lambda_I$ jedoch, also im rot markierten Bereich, wird der Fluss durch keinen Fixpunkt mehr begrenzt - für $k \rightarrow 0$ muss $|\lambda|$ also immer weiter wachsen und schließlich bei der Skala k_{SB} divergieren. Demnach stellt der Fixpunkt λ_I eine Phasengrenze zwischen Gebieten mit (rot) und solchen ohne (schwarz) spontane Symmetriebrechung dar und wird deshalb als *kritische Kopplung* bezeichnet.

Für höherdimensionale Probleme, d.h. solche mit mehreren Kopplungen, übernehmen Separatrizen die Rollen der Phasengrenzen. So würde das grüne Gebiet um den Fixpunkt S in Abb. 4 dem symmetrischen Regime entsprechen, wohingegen die beiden anderen Gebiete, in gelb und violett gehalten, Symmetriebrechung signalisieren. Allerdings lässt sich zumindest für den violetten Bereich auf dem rein fermionischen Niveau nicht mehr zweifelsfrei sagen, welche der ursprünglichen Symmetrien gebrochen ist, da beide fermionischen Kopplungen zu divergieren scheinen. Um hier Genaueres zu ermitteln, wäre tatsächlich eine Betrachtung der bosonisierten Theorie angebracht. Überhaupt kann mit dieser noch wesentlich mehr erreicht werden als nur der Nachweis eines Zusammenhangs zwischen SSB und Kopplungsdivergenz. Wenn also zum Beispiel durch Symmetriebrechung der Erwartungswert $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ wird, entspricht dies einem dynamisch generierten Massenterm - diese *Bindungszustände* sorgen somit für das spontane Auftreten einer endlichen Fermionmasse m_ψ , deren Wert in der bosonisierten Theorie bestimmt werden kann. Den neu eingeführten Bosonen kann auch eine eigene Dynamik verliehen werden, worauf auch sie Fluktuationen entwickeln, welche wiederum zum Fluss der fermionischen Freiheitsgrade beitragen - auf diese Weise lässt sich auch die Impulsabhängigkeit der fermionischen Kopplungen auflösen, was in der fermionischen Formulierung der Theorie schwer möglich ist, siehe z.B. [22]. Ganz allgemein macht Bosonisierung eine Untersuchung des Regimes spontaner Symmetriebrechung erst möglich. Diese Dinge gehen jedoch weit über die Ziele dieser Arbeit hinaus - es soll hier genügen, Existenz oder Nichtexistenz spontaner Symmetriebrechung in der QED₃ für verschiedene N_f nachzuweisen, wofür die fermionische Formulierung ausreicht. Für weitere Details zur Bosonisierung und vor allem auch quantitativere Behandlungen sei daher auf [22] und weitere Referenzen darin verwiesen.

Besonderheiten der Eichtheorien

In der QED₃ haben die quartischen Fermion-Wechselwirkungsterme einen etwas anderen Status als in den zuvor beschriebenen, rein fermionischen Modellen. In der mikroskopischen Wirkung (2.33) nicht vorhanden, werden sie ausschließlich durch Fluktuationen erzeugt, wie auch in Abb. 6 dargestellt. Ihre Anfangswerte sind damit auf Null festgelegt und wenn diese Startwerte im Attraktionsgebiet eines IR-stabilen Fixpunktes liegen oder gar selbst einen darstellen, scheint die Frage nach dem Auftreten spontaner Symmetriebrechung den obigen Überlegungen zufolge schnell mit „Nein“ beantwortbar zu sein. Natürlich besteht aber in der Eichkopplung und ihrem Fluss ein gewichtiger Grund, diese Argumente noch einmal genauer unter die Lupe zu nehmen. Allgemein ist zu erwarten, dass die Betafunktionen die folgenden Abhängigkeiten zeigen:

$$\partial_t \mathbf{g} = \beta_{\mathbf{g}}(\mathbf{g}, e^2), \quad \partial_t e^2 = \beta_{e^2}(\mathbf{g}, e^2) \approx \beta_{e^2}(e^2). \quad (3.34)$$

Während der Fluss der fermionischen Kopplungen aufgrund seiner Herkunft notwendigerweise stark vom Fluss der Eichkopplung abhängt, ist es für letztere oft und speziell im Fall der QED_3 eine gute Näherung, die Abhängigkeit von fermionischen Kopplungen ihrerseits zu vernachlässigen. Dies wird in Abschnitt 4.3 noch genauer untersucht werden. Jedenfalls steht zu erwarten, dass die Fixpunktstruktur des fermionischen Sektors dadurch stark sowohl vom Anfangswert als auch vom Laufen der Eichkopplung abhängt.

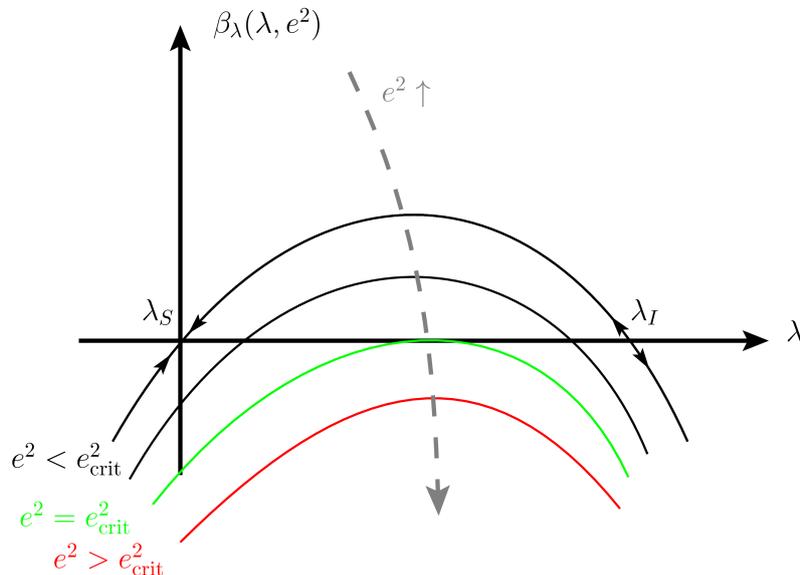


Abbildung 10: Annihilation von Fixpunkten, getrieben durch e^2

So könnte es zum Beispiel passieren, dass sich eine Betafunktion (hier wieder im einfachsten Fall mit nur einer fermionischen Kopplung λ), die für sehr kleine e^2 aussieht wie in Abb. 9, durch wachsendes e^2 verschoben wird, wie in Abb. 10 dargestellt. Bei einem bestimmten Wert e^2_{crit} würden die beiden ursprünglichen Fixpunkte verschmelzen und für $e^2 > e^2_{\text{crit}}$ annihilieren. In diesem Fall würde auch ein Fluss mit Anfangswert im ursprünglichen Attraktionsgebiet des stabilen Fixpunktes nicht mehr begrenzt sein, einfach weil dieser beschränkende Wert aufhört zu existieren. Dies wiederum ist, den obigen Überlegungen zufolge, ein klares Anzeichen für das Auftreten spontaner Symmetriebrechung.

Anders als in rein fermionischen Theorien kann spontane Symmetriebrechung nun also auch durch den Fluss selbst induziert werden, wenn der Wert der Eichkopplung die Möglichkeit hat, e^2_{crit} zu überschreiten. Im Allgemeinen wird also zu untersuchen sein, wie sich der Fixpunkt, welcher das Verhalten des fermionischen Anfangsvektors $\mathbf{g}_\Lambda = 0$ bestimmt, unter Veränderung der Eichkopplung verhält, insbesondere ob er möglicherweise sein Attraktionsgebiet durch Annihilation sozusagen „freigibt“. Von besonderem Interesse wird dabei auch sein, ob und, wenn ja, wie dies von der Anzahl N_f der Fermionflavors abhängt.

Die Besonderheiten von Renormierungsflüssen in Eichtheorien sind mit diesen Absätzen bei weitem noch nicht erschöpfend diskutiert. Doch werden sich weitere interessante Fragen, wie z.B. die nach dem Annäherungsverhalten an den Fixpunkt, am besten im Angesicht konkreterer Ergebnisse, d.h. in Kapitel 5 stellen und beantworten lassen.

4 Flussgleichungen zur QED_3

In den Kapiteln 2 und 3 wurden die Werkzeuge bereitgestellt, um chirale Symmetriebrechung im Fall der QED_3 untersuchen zu können. In den nun folgenden Abschnitten wird die Wetterich-Gleichung auf die konstruierte mittlere effektive Wirkung angewendet, um das zentrale Objekt der Untersuchungen im folgenden Kapitel 5 berechnen zu können: einen Satz von Betafunktionen für die drei Vertexkopplungen in Γ_{QED_3} . Fermionischer und Eichsektor werden dabei nach einigen grundlegenden Betrachtungen weitestgehend getrennt behandelt, da sich die Methodik bzw. zu überwindende Probleme doch stark unterscheiden.

4.1 Propagator- und Fluktuationsmatrix

Die in Gl. (2.25) vorgestellte Zerlegung der Flussgleichung mittels Einführung feldabhängiger *Fluktuations-* und feldunabhängiger *Propagatormatrizen* \mathcal{F}_k und \mathcal{P}_k bzw. \mathcal{P}_k^{-1} steht ganz am Anfang der expliziten

Rechnungen. Es ist dafür zunächst notwendig, die zweite funktionale Ableitung $\Gamma_k^{(2)}$ der mittleren effektiven Wirkung zu bestimmen. Genau wie auch der Regulator, ist diese Größe matrixwertig und besitzt konkret die folgende Form:

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)}(p, q) &= \begin{pmatrix} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta A_\mu(-p)} \\ \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi^{aT}(-p)} \\ \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi^a(p)} \end{pmatrix} \Gamma_k \begin{pmatrix} \overleftarrow{\delta} \\ \overleftarrow{\delta} \\ \overleftarrow{\delta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta A_\mu(-p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_\nu(q)} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta A_\mu(-p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi^b(q)} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta A_\mu(-p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi^{bT}(-q)} \\ \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi^{aT}(-p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_\nu(q)} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi^{aT}(-p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi^b(q)} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi^{aT}(-p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi^{bT}(-q)} \\ \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi^a(p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_\nu(q)} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi^a(p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi^b(q)} & \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi^a(p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi^{bT}(-q)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Damit ergibt sich die Fluktuationsmatrix zu

$$\mathcal{F}_k = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\Psi}_\mu^b(q-p) & -\Psi_\mu^{bT}(p-q) \\ -\bar{\Psi}_\nu^{aT}(q-p) & -C_{\bar{\psi}^T \bar{\psi}}^{ab}(q-p) & C_{\bar{\psi}^T \psi^T}^{ab}(p-q) - D_{ab}^T(p-q) \\ \Psi_\nu^a(p-q) & C_{\psi \bar{\psi}}^{ab}(q-p) + D_{ab}(p-q) & -C_{\psi \psi^T}^{ab}(p-q) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

wobei (repräsentativ)

$$\Psi_\mu^a(p) = e_k \gamma_\mu \psi_p^a, \quad \bar{\Psi}_\mu^a(p) = e_k \bar{\psi}_p^a \gamma_\mu \quad (4.3a)$$

$$C_{\bar{\psi}^T \psi^T}^{ab}(p-q) = \int_{p_1} \left[\frac{\bar{g}_k}{N_f} (\bar{\psi}_{p_1}^a \gamma_{45})^T (\gamma_{45} \psi_{p-q+p_1}^b)^T + \frac{\bar{g}_k}{N_f} (\bar{\psi}_{p_1}^a \gamma_\mu)^T (\gamma_\mu \psi_{p-q+p_1}^b)^T \right] \quad (4.3b)$$

$$D_{ab}(p-q) = \delta^{ab} e_k A_{p-q} + \delta^{ab} \int_{p_1} \left[\frac{\bar{g}_k}{N_f} (\bar{\psi}_{p_1}^a \gamma_{45} \psi_{p-q+p_1}^b) \gamma_{45} + \frac{\bar{g}_k}{N_f} (\bar{\psi}_{p_1}^a \gamma_\mu \psi_{p-q+p_1}^b) \gamma_\mu \right]. \quad (4.3c)$$

Unter Hinzunahme des Regulators (2.17) kann nun auch die Propagatormatrix gewonnen werden. Dafür bietet es sich an, eine erste nähere Spezifizierung von R_k vorzunehmen: die Aufspaltung in einen dimensionsbehafteten und einen dimensionslosen Anteil, letzterer genannt *Shapefunktion* r_k [19]:

$$R_k(q) = r_k \left(\frac{q^2}{k^2} \right) \cdot \Gamma_k^{(2)}[\bar{\psi} = 0, \psi = 0, A_\mu = 0]. \quad (4.4)$$

Damit ergibt sich die gesuchte Propagatormatrix schließlich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k^{-1} &= \left(R_k + \Gamma_k^{(2)}[\bar{\psi} = 0, \psi = 0, A_\mu = 0] \right)^{-1} = \delta^{(3)}(p-q) \begin{pmatrix} P_A^{\mu\nu}(q) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_\psi^{ab}(q) \\ 0 & -P_\psi^{abT}(q) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\delta^{(3)}(p-q)}{q^2} \begin{pmatrix} \frac{\delta^{\mu\nu} q^2 + (\xi-1) q^\mu q^\nu}{Z_a q^2 (1+r_A)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta^{ab} \frac{\not{q}}{Z_\psi (1+r_\psi)} \\ 0 & -\delta^{ab} \frac{\not{q}^T}{Z_\psi (1+r_\psi)} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Für die in den nachfolgenden Abschnitten vorgenommenen Projektionen zur Extraktion der Flussgleichungen ist es wichtig, die jeweils beitragenden Glieder der $\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k$ -Entwicklung (2.25) zu identifizieren. Aus diesem Grund wird der lineare Term dieser Reihe hier noch kurz angegeben:

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k]_{\mu\nu}^{ab}(p, q) &= \\ & \begin{pmatrix} 0 & P_A^{\mu\nu}(q) \bar{\Psi}_\nu^b(p-q) & -P_A^{\mu\nu}(q) \Psi_\nu^{bT}(q-p) \\ -P_\psi^{ac}(q) \Psi_\nu^c(q-p) & -P_\psi^{ac}(q) \left(C_{\psi \bar{\psi}}^{cb}(p-q) + D_{cb}(q-p) \right) & P_\psi^{ac}(q) C_{\psi \psi^T}^{ac}(q-p) \\ P_\psi^{acT}(q) \bar{\Psi}_\nu^{cT}(p-q) & P_\psi^{acT}(q) C_{\bar{\psi}^T \bar{\psi}}^{cb}(p-q) & -P_\psi^{acT}(q) \left(C_{\bar{\psi}^T \psi^T}^{cb}(q-p) - D_{cb}^T(q-p) \right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

betrachtet werden muss.

Nun lässt sich aus der Skalenableitung der mittleren effektiven Wirkung $\partial_t \Gamma_k$ leicht ablesen, wie auf die anomale Dimension η_ψ projiziert werden kann:

$$\eta_\psi = -\frac{\partial_t Z_\psi}{Z_\psi} = \frac{1}{24Z_\psi} \text{Tr} \left\{ \gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial p'_\alpha} \int_{q'} \frac{\vec{\delta}}{\delta \psi_{q'}^1} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \frac{(-1)}{2} (\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^2 \right] \frac{\vec{\delta}}{\delta \psi_{q'}^1} \Big|_{\psi=\bar{\psi}=A_\mu=0} \right\}_{p'=0}. \quad (4.11)$$

Die explizite Rechnung kann hier aus Platzgründen nicht gezeigt werden, auch besteht sie ab diesem Punkt nur noch aus strikter Abarbeitung der verschiedenen Projektionsschritte. Zusammengefasst mithilfe der sog. *Schwellwertfunktionen* aus Anhang C, welche sämtliche Regulatorabhängigkeiten enthalten, und unter Verwendung der renormierten Kopplungen (4.8) lautet das Ergebnis dann

$$\eta_\psi = \frac{e^2}{3\pi^2} \left[(2 - \xi) m_{A,\psi}^{2,1} - (2 - 2\xi) \tilde{m}_{A,\psi}^{1,1} \right]. \quad (4.12)$$

Genau wie nach Gl. (4.10) wegen des Auftretens zweier Eichvertizes zu erwarten war, ist $\eta_\psi \sim e^2$. Auch scheint dieses Ergebnis bezüglich der zu wählenden Eichung in voller Allgemeinheit gehalten zu sein, doch das ist tatsächlich nicht der Fall: auch der Eichparameter $\xi = \xi_k$ muss eigentlich renormiert werden und könnte einen nichttrivialen Fluss besitzen. Für den Fall der *Landau-Eichung* $\xi = 0$ ergibt sich jedoch [49], dass dieser spezielle Wert des Eichparameters einen Fixpunkt des Renormierungsflusses darstellt. Wird also von Beginn an $\xi_{k=\Lambda} = 0$ gewählt, so bleibt dieser Wert auch während des Flusses unverändert. Aus diesem Grund werden alle folgenden Rechnungen grundsätzlich in Landau-Eichung durchgeführt, ein freier Parameter ξ taucht nicht mehr auf.

Es gibt weitere allgemeine Argumente [49], [50], aus denen auch für Eichtheorien folgt, dass $Z_\psi = 1$ und damit $\eta_\psi = 0$ sein muss. Diese wurden allerdings für Theorien mit $d = 4$ entwickelt, weshalb es kein Widerspruch ist, im hier behandelten Fall eine nichttriviale Renormierung der Fermionfelder zu erhalten.

4.2.2 Renormierung der 4-Fermion-Vertizes und der Fluss von \tilde{g} und g

Nachdem der Fluss der anomalen Dimension η_ψ nun bekannt ist, bleibt noch die eigentlich Vertexrenormierung vorzunehmen, um die Flussgleichungen der 4-Fermion-Kopplungen aufschreiben zu können. Wieder bietet es sich an, zunächst diagrammatisch zusammenzutragen, welche Beiträge unter Berücksichtigung der 1-loop-Struktur der Wetterich-Gleichung zu erwarten sind.

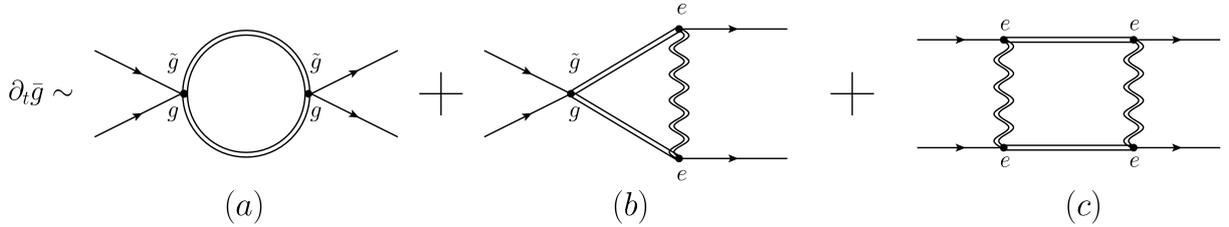


Abbildung 11: Diagrammatische Darstellung der Vertexrenormierung am Beispiel von \tilde{g} . Doppelt bezeichnete Vertizes stehen für zwei Diagramme mit dem jeweiligen 4-Fermion-Vertex.

Analogen Argumenten wie oben folgend lässt sich ablesen, dass Diagramm (a) von $(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^2$ her stammt, (b) durch $(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^3$ beigesteuert wird und (c) ein Erzeugnis des Terms $(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^4$ ist. Auch hier wäre es wieder möglich, explizite Projektionsvorschriften analog zu (4.11) zu konstruieren, doch ist die tatsächliche Ausführung selbiger technisch ziemlich anspruchsvoll. So wäre beispielsweise eine vollständige Berechnung der höheren Ordnungen der $\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k$ -Entwicklung sehr aufwändig und zu großen Teilen nutzlos. Es ist daher bedeutend einfacher, für jedes der Diagramme schon auf dem Niveau von $(\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)$ selbst auszusortieren, welche Einträge dieser Matrix überhaupt zu den gewünschten Strukturen beitragen können, nur mit diesen weiterzurechnen und schließlich Koeffizientenvergleiche bezüglich $(\bar{\psi} \gamma_{45} \psi)^2$ und $(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)^2$ anzustellen, um zu $\partial_t \tilde{g}$ bzw. $\partial_t g$ gehörende Beiträge zu identifizieren. Hierbei ist es von Vorteil, im letzten Schritt alle Felder als konstant anzusetzen, $\bar{\psi} \neq \bar{\psi}(x)$, wobei in \mathcal{F}_k von vornherein mit $A_\mu = 0$ gearbeitet werden kann, da das Photonfeld hier in äußeren Linien nicht auftritt.

(a): Fermionische Fluktuationen Die zu diesem Diagramm gehörenden Rechnungen sind bereits in [38] diskutiert worden. Dort wird eine rein fermionische Theorie betrachtet, was für dieses Diagramm

auch in der QED₃ effektiv der Fall ist. Folglich reicht es aus, die fermionische Submatrix von (4.6) zu verwenden,

$$(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k)_{\rightarrow g^2}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P_\psi(C_{\psi\bar{\psi}} + D) & P_\psi C_{\psi\psi^T} \\ 0 & P_\psi^T C_{\bar{\psi}^T\bar{\psi}} & -P_\psi^T(C_{\bar{\psi}^T\psi^T} - D^T) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Quadrieren und Spurbildung liefert schließlich

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2N_f}{\Omega}\right) \cdot \frac{1}{2} \text{STr} \left[\frac{(-1)}{2} (\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k)_{\rightarrow g^2}^2 \right] = \\ & \frac{l_\psi^1}{N_f \pi^2} \left\{ [(1 - 2N_f)\tilde{g}^2 + 3\tilde{g}g + 2g^2] (\bar{\psi}\gamma_{45}\psi)^2 + \left[\tilde{g}g + \frac{2N_f + 1}{3}g^2\right] (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Hier, wie auch bei den weiteren Diagrammen, kommt wieder eine Schwellwertfunktion l_ψ^1 zum Einsatz, deren Definition in Anhang C gegeben ist. Der Faktor $\frac{2N_f}{\Omega}$ auf der linken Seite der Gleichung ist der Ausgleich für $\Gamma_k \sim \int d^3x \frac{\dots}{2N_f} (\bar{\psi}\dots\psi)^2$, wobei das Raumintegral für konstante $\bar{\psi}, \psi$ zum Raumzeitvolumen Ω wird: $\int d^3x = \Omega$.

Es sei bemerkt, dass sich die Ergebnisse in [38] von den hierigen um einen Faktor 2 unterscheiden. Auf die Schlussfolgerungen in [38] hat das keinen Einfluss, da dieser Faktor in der rein fermionischen Theorie gekürzt werden kann. Bei Hinzunahme des Eichfeldes jedoch ist dies nicht mehr möglich, weshalb in jedem Fall auf die korrekten Vorfaktoren der einzelnen Diagramme zu achten ist.

(b): Dreiecksdiagramme Das Auswerten des Dreiecksdiagramms ist der wohl aufwändigste Teil der Vertexrenormierung. Sowohl bosonischer als auch fermionischer Sektor der Matrix (4.6) werden benötigt. Schematisch:

$$(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k)_{\rightarrow e^2g}^3 = \begin{pmatrix} 0 & P_A\bar{\Psi} & -P_A\Psi^T \\ -P_\psi\Psi & 0 & 0 \\ P_\psi^T\bar{\Psi}^T & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P_\psi(C_{\psi\bar{\psi}} + D) & P_\psi C_{\psi\psi^T} \\ 0 & P_\psi^T C_{\bar{\psi}^T\bar{\psi}} & -P_\psi^T(C_{\bar{\psi}^T\psi^T} - D^T) \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Einschließlich der zusätzlichen Vorfaktoren ergeben sich dann folgende Beiträge:

$$\left(\frac{2N_f}{\Omega}\right) \cdot \frac{1}{2} \text{STr} \left[\frac{1}{3} (\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k)_{\rightarrow e^2g}^3 \right] = -\frac{l_{A,\psi}^{1,1}}{\pi^2} \left\{ [2\tilde{g}e^2 + 4ge^2] (\bar{\psi}\gamma_{45}\psi)^2 + \frac{1}{3} [4\tilde{g}e^2 - 2ge^2] (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 \right\} \quad (4.16)$$

(c): Box-Diagramme Im Rückblick auf Abbildung 6 und die dazugehörigen Diskussionen um die Inklusion quartischer Fermionterme kann das Diagramm (c) als Beispiel dafür dienen, warum Trunkierungen sorgfältig gewählt sein wollen. Hätte man im Ansatz für Γ_k auf die quartischen Fermionterme verzichtet, so würden sie durch Diagramm (c) während des Flusses trotzdem generiert werden - ein Trunkierungsfehler läge vor. Natürlich bedeutet seine Eliminierung nicht, dass das Flussgleichungssystem für \tilde{g} und g nun exakt wäre, doch trägt der Term (c) noch eine weitere, zentrale Bedeutung. Dadurch, dass er ausschließlich von der Eichkopplung bestimmt wird, spielt er eine wichtige Rolle im in Abb. 10 dargestellten Prozess der Fixpunktannihilation. Sein Vorzeichen kann also von außerordentlicher Bedeutung sein, wenn es um die Beantwortung der Frage nach Existenz von spontaner Symmetriebrechung im System geht.

Zur Berechnung wird nun nur noch der Eichsektor von (4.6) benötigt:

$$(\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k)_{\rightarrow e^4}^4 = \begin{pmatrix} 0 & P_A\bar{\Psi} & -P_A\Psi^T \\ -P_\psi\Psi & 0 & 0 \\ P_\psi^T\bar{\Psi}^T & 0 & 0 \end{pmatrix}^4. \quad (4.17)$$

Dieser dritte und letzte Beitrag zur Vertexrenormierung wird damit zu

$$\left(\frac{2N_f}{\Omega}\right) \cdot \frac{1}{2} \text{STr} \left[\frac{(-1)}{4} (\mathcal{P}_k^{-1}\mathcal{F}_k)_{\rightarrow e^4}^4 \right] = \frac{l_{A,\psi}^{2,1}}{\pi^2} 2N_f e^4 (\bar{\psi}\gamma_{45}\psi)^2. \quad (4.18)$$

4.3 Anomale Dimension η_A des Photonfeldes und der Fluss von e^2

4.3.1 Ward-Takahashi-Identität und Struktur des Flusses

Wie bereits mehrfach erwähnt, ist für die Vertexrenormierung der Eichkopplung zusätzlich eine, eventuell durch die Existenz des Regulators modifizierte, Ward-Takahashi-Identität zu beachten. Dafür ist es

zunächst praktisch, wie auch in störungstheoretischen Rechnungen üblich, eine eigene Größe Z_e für die Vertexnormierung einzuführen:

$$e_k \equiv Z_e e_\Lambda \quad \Longrightarrow \quad e^2 = \frac{e_k^2}{Z_\psi^2 Z_A k} = \frac{e_\Lambda^2 Z_e^2}{Z_\psi^2 Z_A k}. \quad (4.19)$$

Störungstheoretische Bestimmungen der WTI, wie sie in praktisch jedem Lehrbuch zur Quantenfeldtheorie gefunden werden können (siehe z.B. [23]) liefern $Z_e = Z_\psi$. Auch wenn dort üblicherweise QED_4 behandelt wird, gilt dieses Ergebnis ebenso für die QED_3 , wie sich durch Einsetzen von S_{QED_3} bzw. der entsprechenden Näherung für Γ_{QED_3} in Gl. (2.43) schnell zeigen lässt. Die Einbeziehung des Regulators hingegen und Auswertung der mWTI (2.44) mithilfe der $\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k$ -Entwicklung ist nicht so einfach und wurde in [50] durchgeführt, wobei sich folgender Zusammenhang ergab:

$$Z_e = Z_\psi \left(1 - F \sum_i C_i g_i \right) \quad \text{wobei } g_i \in \{\tilde{g}, g\}. \quad (4.20)$$

F und C_i sind dabei Regulator- bzw. N_f -abhängige Konstanten. Einsetzen dieser Gleichung in (4.19) und Ausführen der Skalenableitung liefert die gesuchte Struktur der Flussgleichung

$$\partial_t e^2 = (\eta_A - 1) e^2 - 2F \frac{\sum_i C_i \partial_t g_i}{1 - F \sum_i C_i g_i} e^2. \quad (4.21)$$

Der Fluss der Eichkopplung hängt damit also nichttrivial von dem der 4-Fermion-Kopplungen ab: deren Betafunktionen müssen in (4.21) eingesetzt werden.

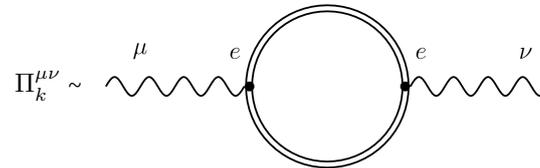
Es bleibt allerdings zu bezweifeln, ob dieser Aufwand, wozu auch noch die genaue Bestimmung der Konstanten F und C_i gehören würde sowie eine nicht unerheblich verkomplizierte Auswertung, angesichts der gestellten Fragen letztlich gerechtfertigt ist. Tatsächlich werden für die Untersuchung der Symmetriebrechung nur die Fixpunkte der 4-Fermion-Kopplungen sowie deren Verschwinden untersucht. Nach einem möglichen Verschmelzen der Fixpunkte ist, wie oben erklärt, die rein fermionische Theorie ohnehin nicht mehr aussagekräftig. Für diese Fixpunkte gilt jedoch per definitionem $\partial_t g_i|_{\mathbf{g}^*} = 0$, was den Fluss der Eichkopplung deutlich vereinfacht und auf die störungstheoretische Struktur

$$\partial_t e^2|_{\mathbf{g}^*} = (\eta_A - 1) e^2 \quad (4.22)$$

zurückführt. Dieser Ansatz für die Struktur des Eichflusses sollte also für die Ziele dieser Arbeit in guter Näherung ausreichen. Allerdings wird es dadurch nötig werden, in den konkreten Rechnungen Justierungen vorzunehmen, die bei vollständiger Berücksichtigung der mWTI quasi „automatisch“ erledigt würden. Weitere Diskussionen zu diesem Aspekt werden im nächsten Abschnitt folgen, wo der entsprechende Fall auch eintritt.

4.3.2 Vakuumpolarisation in der QED_3 : η_A

Zunächst wieder diagrammatisch betrachtet kann die Selbstenergie des Photonfeldes durch den aus der Störungstheorie auch als *Polarisationstensor* bekannten Ausdruck dargestellt werden:



$$\Pi_k^{\mu\nu} \sim \text{diagram} \quad (4.23)$$

Dieser Term bedarf einer eingehenden Untersuchung, bevor er aus der Wetterich-Gleichung gewonnen und mit η_A in Verbindung gebracht werden kann. Zunächst einmal impliziert die WTI, dass $q_\mu \Pi_k^{\mu\nu}(q) = 0$, woraus sich folgern lässt, dass [23]

$$\Pi_k^{\mu\nu}(q) = (q^2 \delta^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi_k(q) \equiv q^2 P_T^{\mu\nu}(q) \Pi_k(q) \quad (4.24)$$

wobei $P_T^{\mu\nu}(q)$ als *transversaler Projektor* bezeichnet wird. Damit lässt sich Z_A wie folgt identifizieren:

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta A_\mu(-p)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_\nu(q)} = Z_A \left[p^2 \delta^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) p^\mu p^\nu \right] \delta^{(3)}(p-q) = \underbrace{[1 + \Pi_k(p)]}_{\equiv Z_A(p)} p^2 \left[P_T^{\mu\nu}(p) + \frac{1}{\xi} P_L^{\mu\nu}(p) \right] \delta^{(3)}(p-q). \quad (4.25)$$

Das so definierte $Z_A(p)$ ist also zunächst einmal impulsabhängig - eine Eigenschaft, die sich den Überlegungen in Abschnitt 3.2.2 zufolge nur in der bosonisierten Theorie adäquat, d.h. mit einigermaßen beherrschbarem Aufwand, behandeln lässt. Die volle Impulsabhängigkeit in die Flussgleichungen mitzunehmen ist hier also nicht sinnvoll möglich, es stellt sich die Frage nach einer geeigneten Näherung. Eine solche stellt z.B. die oben bereits mehrfach erwähnte Hintergrundfeldmethode dar. Ihre Effizienz im Einbau höherer Potenzen des kinetischen Terms $\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ wird ihr allerdings im Fall der QED₃ zum Verhängnis, da sie wesentlich weniger gut geeignet ist, weitere Terme mit zusätzlichen Ableitungsoperatoren in die Analyse zu integrieren, welche die Impulsabhängigkeit von $Z_A(p)$ besser abbilden helfen würden. Eine Analyse zur Ordnung 1-loop zeigt aber bereits (siehe z.B. [36]), dass

$$\Pi(p) \sim \frac{1}{p} \quad (4.26)$$

ist. Die Anwendung der Hintergrundfeldmethode zeigt nun, dass die mit ihr in dieser Trunkierung erreichbare Implementierung der Impulsabhängigkeit nicht in der Lage ist, dieses Verhalten zu reproduzieren, weshalb sie sich für diese spezielle Theorie nicht eignet. Schuld daran ist somit insbesondere die Dimensionalität, welche für die spezifische Form von (4.26) sorgt.

Um eine besser Näherung zu finden, muss zunächst geklärt werden, auf welche Art und Weise die Impulsabhängigkeit überhaupt Einfluss auf die Flussgleichungen gewinnen kann. Der Propagator des Photonfeldes, wie er aus Gl. (4.25) konstruiert werden kann, erscheint im Laufe des Flusses als innere Linie in mehreren der fermionischen Diagramme in Abb. 11 sowie in der anomalen Dimension η_ψ . Der Verlauf des Flusses selbst entspricht, wie in den Grundlagen erläutert, einem Ausintegrieren der durch die inneren Linien gegebenen Fluktuationen in kleinen Impulsschritten δk . Folglich ist in jedem Schritt des Flusses von k nach $k + \delta k$ vor allem der Impulsbereich unmittelbar um k derjenige, welcher die größten Beiträge liefert. Es sollte demnach eine gute Näherung sein, $Z_A(p) = Z_A(k)$ zu identifizieren, die allgemeine Impulsabhängigkeit also auf den für die Impulsschalenintegration jeweils entscheidenden Bereich zu reduzieren. Streng genommen ist nach Konstruktion der $\Pi_k(q)$ mit dieser Definition des Z_A allerdings nur der transversale Anteil des Photonpropagators korrekt renormiert. Da der Anteil proportional zum *longitudinalen Projektor* $P_L^{\mu\nu}(q)$ gerade vom Eichfixierungsterm her stammt, ist dies ein expliziter Ruf nach separater Renormierung des Eichparameters ξ . Wie jedoch bereits unter 4.2.1 erläutert, löst sich diese Aufgabe für den Spezialfall der Landau-Eichung $\xi = 0$ von selbst.

Gegen Ende des letzten Abschnittes wurde angedeutet, dass die Nichtverwendung der vollen mWTI gewisse Probleme mit sich bringen kann. Störungstheoretische Berechnungen des Polarisationsensors wie z.B. in [51] zeigen, dass das entsprechende Diagramm linear divergiert, wenn eine einfache Cutoff-Regularisierung angewandt wird. Ein solcher Divergenzterm ist nicht eichinvariant, ebensowenig wie eine entsprechende künstliche Photonmasse, welche sich durch Pauli-Villars-Regularisierung ergäbe [51]. Nun lässt sich die Regulatorimplementierung der Wetterich-Gleichung nur schwierig direkt mit einem der genannten Verfahren vergleichen, insbesondere wenn R_k zunächst noch allgemein gehalten werden soll. Fakt ist jedoch, dass der Regulatorterm ΔS_k von der Struktur her genau als Massenterm konzipiert war - ein Photonmassenterm also, der die Eichinvarianz bricht und kein physikalisches Ergebnis beeinflussen darf, was eben durch die mWTI sichergestellt werden sollte. Es muss demnach dafür gesorgt werden, dass der Fehler, welcher durch das Nichtbeachten der Regulatormodifikation der WTI gemacht worden ist, zumindest insoweit behoben wird, dass im Grenzfall $k \rightarrow 0$ wie gefordert die einfache WTI erfüllt wird, mithin keine Kontaminationen des Regulators zurückbleiben. Zu diesem Zweck muss der die Eichinvarianz brechende Divergenz- bzw. Photonmassenterm „per Hand“ entfernt werden, was durch Abziehen des Zwischenergebnisses der η_A -Berechnung vor der transversalen Projektion, ausgewertet bei $p = 0$ von selbigem mit $p = k$ erreicht wird. Genau genommen wird eine vollständige Korrektur damit tatsächlich auch nur bei $k = 0$ erreicht, doch sollte dieses Verfahren insgesamt trotzdem eine tragbare Annäherung der vollen mWTI darstellen.

Schließlich ergibt sich damit die folgende Berechnungs- bzw. Projektionsvorschrift für die anomale Dimension des Photonfeldes:

$$\eta_A = - \frac{1}{2Z_A} \frac{P_T^{\mu\nu}}{k^2} \left(\left\{ \int_q \frac{\vec{\delta}}{\delta A_\mu(-p')} \frac{1}{2} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \frac{(-1)}{2} (\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^2 \right] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_\nu(q')} \Big|_{\vec{\psi}=\psi=0} \right\}_{A_\mu=0, p'=k} - \left\{ \int_q \frac{\vec{\delta}}{\delta A_\mu(-p')} \frac{1}{2} \text{STr} \left[\tilde{\partial}_t \frac{(-1)}{2} (\mathcal{P}_k^{-1} \mathcal{F}_k)^2 \right] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_\nu(q')} \Big|_{\vec{\psi}=\psi=0} \right\}_{A_\mu=0, p'=0} \right). \quad (4.27)$$

Im Gegensatz zu den vorherigen Rechnungen für den fermionischen Sektor der Theorie gibt es hier aufgrund der komplizierteren Impulsabhängigkeiten keinen einfachen Weg, das Ergebnis für η_A in eine

Form zu bringen, welche die Nutzung der Schwellwertfunktionen erlaubt. Eine Neudefinition eigens für diese Rechnung scheint ebenfalls ineffizient, sodass das Ergebnis schließlich die etwas längliche Form

$$\eta_A = N_f \frac{e^2}{\pi^2} \int_{y=0}^{\infty} dy \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial_t r_\psi(y) - \eta_\psi r_\psi(y)}{\sqrt{y}[1+r_\psi(y)]^3} + \frac{1}{2} \int_{x=-1}^1 dx \frac{\sqrt{y}x^2 - x}{y - 2x\sqrt{y} + 1} \left[\frac{[\partial_t r_\psi](y) - \eta_\psi r_\psi(y)}{[1+r_\psi(y)]^2[1+r_\psi(y-2x\sqrt{y}+1)]} + \frac{[\partial_t r_\psi](y-2x\sqrt{y}+1) - \eta_\psi r_\psi(y-2x\sqrt{y}+1)}{[1+r_\psi(y)][1+r_\psi(y-2x\sqrt{y}+1)]^2} \right] \right\} \quad (4.28)$$

annimmt, wobei $y = \frac{q^2}{k^2}$ eingeführt wurde.

Von besonderer Bedeutung ist an dieser Stelle die Bemerkung, dass die anomale Dimension η_A nicht von den fermionischen Kopplungen abhängen kann. Aufgrund seiner allgemeinen Struktur (4.22) gilt dies damit auch für den Fluss der Eichkopplung selbst. Dies stellt eine der wesentlichen Vereinfachungen dar, welche das Annähern der mWTI durch die übliche WTI und Zusatzbedingungen bietet. Bei der Analyse der fermionischen Flussgleichungen kann so e wie ein externer Parameter betrachtet werden, sein Laufen ist von dem ihren entkoppelt.

4.4 Zusammenfassung zum Flussgleichungssystem

Abschließend zu diesem Kapitel bleibt nur noch, sämtliche bisher berechneten Einzelstücke zusammenzutragen und zu einem System von Flussgleichungen zu vereinen. Dabei erweist sich eine kleine Reskalierung der Kopplungen als praktisch,

$$e^2 \rightarrow e^2 \pi^2, \quad \tilde{g} \rightarrow \tilde{g} \pi^2, \quad g \rightarrow g \pi^2. \quad (4.29)$$

Damit ergeben sich schließlich die Flussgleichungen zu

$$\partial_t e^2 = (\eta_A - 1)e^2 \quad (4.30a)$$

$$\partial_t \tilde{g} = \tilde{g}(1 + 2\eta_\psi) - l_\psi^1 \left(\frac{2N_f - 1}{N_f} \tilde{g}^2 - \frac{3}{N_f} \tilde{g}g - \frac{2}{N_f} g^2 \right) - l_{A,\psi}^{1,1} (2\tilde{g}e^2 + 4ge^2) + l_{A,\psi}^{2,1} 2N_f e^4 \quad (4.30b)$$

$$\partial_t g = g(1 + 2\eta_\psi) + l_\psi^1 \left(\frac{1}{N_f} \tilde{g}g + \frac{2N_f + 1}{3N_f} g^2 \right) - \frac{l_{a,\psi}^{1,1}}{3} (4\tilde{g}e^2 - 2ge^2) \quad (4.30c)$$

wobei

$$\eta_\psi = \frac{e^2}{3} \left[2m_{A,\psi}^{2,1} - 2\tilde{m}_{A,\psi}^{1,1} \right] \quad (4.31a)$$

$$\eta_A = N_f e^2 \int_{y=0}^{\infty} dy \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial_t r_\psi(y) - \eta_\psi r_\psi(y)}{\sqrt{y}[1+r_\psi(y)]^3} + \frac{1}{2} \int_{x=-1}^1 dx \frac{\sqrt{y}x^2 - x}{y - 2x\sqrt{y} + 1} \left[\frac{[\partial_t r_\psi](y) - \eta_\psi r_\psi(y)}{[1+r_\psi(y)]^2[1+r_\psi(y-2x\sqrt{y}+1)]} + \frac{[\partial_t r_\psi](y-2x\sqrt{y}+1) - \eta_\psi r_\psi(y-2x\sqrt{y}+1)}{[1+r_\psi(y)][1+r_\psi(y-2x\sqrt{y}+1)]^2} \right] \right\}. \quad (4.31b)$$

5 Analyse der Fixpunktstruktur - chirale Symmetriebrechung?

Inhalt des nun folgenden Kapitels ist eine ausführliche Analyse und Diskussion des Flussgleichungssystems (4.30) der QED₃. In erster Linie geht es dabei um die Untersuchung der Fixpunktstruktur, damit entlang der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Zusammenhänge Aussagen über symmetriebrechendes Verhalten getroffen werden können. Dieses Verhalten ist dann, soweit sich dies mit den Mitteln fermionischer Flussgleichungen ermöglichen lässt, genauer zu charakterisieren.

Einen weiteren Schwerpunkt wird der Vergleich mit früheren Ergebnissen und verwandten Modellen bilden, wobei insbesondere auch methodische Unterschiede beleuchtet werden sollen, die zu den bereits in der Einleitung erwähnten Diskrepanzen beitragen könnten.

5.1 Fixpunktannihilation und kritische Flavorzahl $N_{f,\text{crit}}$

5.1.1 Allgemeines Vorgehen

Die 1-loop-Struktur der Wetterich-Gleichung darf nicht darüber hinwegtäuschen, dass im störungstheoretischen Sinne wesentlich mehr Diagramme zu den Flussgleichungen wie (4.30) beitragen. Grund hierfür

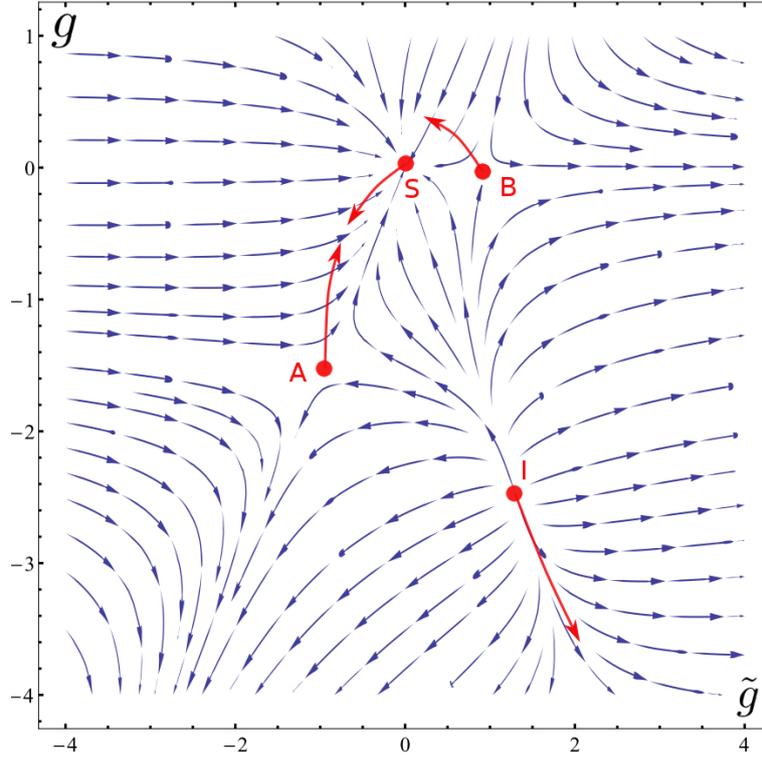


Abbildung 13: Schematische Wanderung der Fixpunkte für wachsendes e^2 ($N_f = 3$, optimierter Regulator)

Wichtig ist, dass ein endlicher Anfangswert $e_\Lambda^2 > 0$ bedeutet, dass der Fluss der fermionischen Kopplungen nicht mehr direkt im gaußschen Fixpunkt startet - beziehungsweise dem, was für $e^2 = 0$ der gaußsche Fixpunkt gewesen war. Offenbar ist für endliche e_Λ^2 der Punkt $(\tilde{g}_\Lambda, g_\Lambda) = (0, 0)$ kein Fixpunkt des Renormierungsgruppenflusses mehr. Da er aber zunächst noch im Attraktionsgebiet des nun verschobenen, ehemals gaußschen Fixpunktes S liegt, ist es trotzdem dessen Verhalten, was untersucht werden muss. Da e^2 für $k \rightarrow 0$ gegen $e_*^2 > e_\Lambda^2$ strebt, setzt sich die Verschiebung der Fixpunkte auch im Lauf des Flusses fort. Das Aufeinanderzubewegen der Fixpunkte S und A entspricht dabei der in Abb. 10 dargestellten Annäherung im simpleren Modell mit nur einer fermionischen Kopplung.

Die zentrale Frage ist nun: kommt es zur Annihilation der beiden Fixpunkte, mithin zur „Freigabe“ des Attraktionsbereichs von S und dadurch zur spontanen Symmetriebrechung? Die Antwort darauf liefert die numerische Analyse des algebraischen Gleichungssystems $\beta_{\tilde{g}} = 0, \beta_g = 0$. In Abbildung 14 sind die Verschiebungen der Fixpunkte für den gesamten zunächst in Frage kommenden Bereich der Werte $0 \leq e^2 \leq e_*^2(N_f)$ dargestellt.

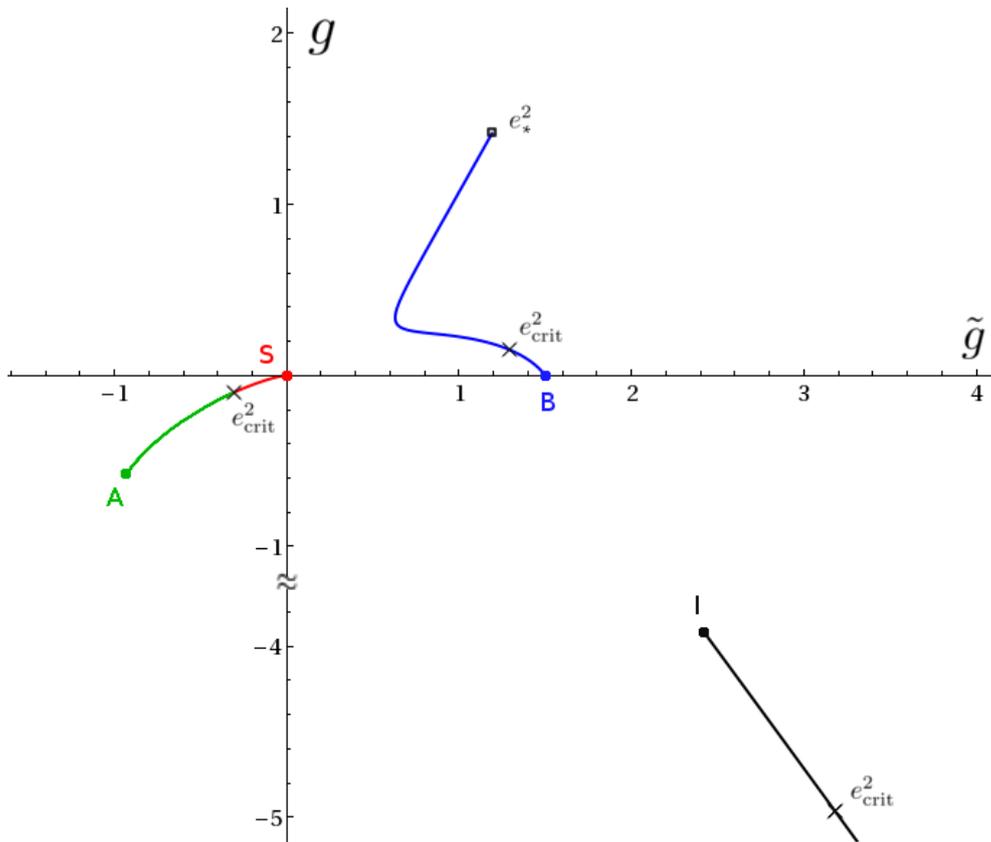


Abbildung 14: Verschiebung der Fixpunkte in Abhängigkeit von e^2 , $N_f = 1$

Für die Rechnungen, welche zu den Abbildungen 14 und 15 führen, wurde der sog. optimierte Regulator [41] verwendet und $N_f = 1$ gesetzt. Regulatorabhängigkeiten werden weiter unten noch ausführlich diskutiert, weshalb hier nicht näher darauf eingegangen werden soll.

Zunächst wird deutlich, dass der Ausgangspunkt $(\tilde{g}_\Lambda, g_\Lambda) = (0, 0)$ tatsächlich immer im Attraktionsgebiet von S verbleibt, da der Fixpunkt B , welcher destabilisierend wirken könnte, nie über die Achse $\tilde{g} = 0$ hinweg bewegt wird. Die Konzentration der Analysen auf die Verschiebung von S und A ist damit gerechtfertigt.

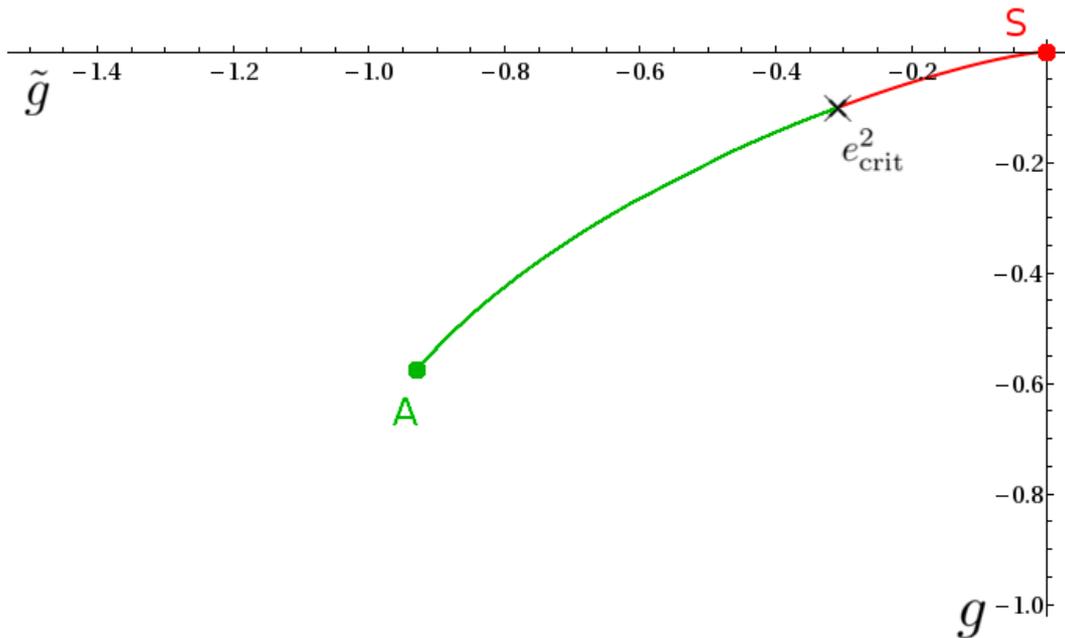


Abbildung 15: Annihilation der Fixpunkte S und A , $N_f = 1$

Besonders in Abbildung 15 wird nun sichtbar, dass die Fixpunkte für diese Wahl von N_f tatsächlich annihilieren. Rechnerisch drückt sich dies durch das Auftreten eines Imaginärteils in den Fixpunktkoordinaten aus, was sich auch gut zur numerischen Identifikation des Annihilationspunktes ausnutzen lässt. *Damit sind nach den Ausführungen von Kapitel 3 alle Voraussetzungen für ein Auftreten spontaner Symmetriebrechung gegeben!*

5.1.2 Regulatorabhängigkeit und Ergebnisse mit perturbativen Propagatoren

Im Folgenden wird nun untersucht, für welche Zahlen N_f das symmetriebrechende Verhalten vorliegt. Auch wenn N_f kein beliebig im Experiment einstellbarer Parameter ist, so will doch ermittelt sein, ob die Theorie für ein bestimmtes System mit festem N_f spontane Symmetriebrechung vorhersagt oder nicht. Eine kritische Anzahl Fermionflavors $N_{f,\text{crit}}$, oberhalb derer keine SSB mehr auftreten darf, kann als eine Art *Quantenphasenübergang* charakterisierend angesehen werden [53]. In diesem Sinne ist die Kenntnis von $N_{f,\text{crit}}$ Voraussetzung für ein grundlegendes Verständnis der QED₃. Und schließlich ist dieser Wert auch hinsichtlich eines Vergleichs mit anderen Ansätzen und Arbeiten von großer Bedeutung.

Bevor allerdings konkrete Werte für $N_{f,\text{crit}}$ ausgerechnet werden können, muss ein Regulator gewählt werden, um die Schwellwertfunktionen bestimmen zu können. Nun ist bereits in Abschnitt 3.1.2 diskutiert worden, dass eine starke Abhängigkeit von der Wahl dieser Regulatorfunktion Anzeichen z.B. für eine ungeeignete Trunkierung der möglichen Feldkombinationen sein kann. Doch die Notwendigkeit, zur Verbesserung der Rechnung neue Feldfunktionen einbeziehen zu müssen lässt sich zumindest teilweise umgehen. Identifikation spontaner Symmetriebrechung über annihilierende Fixpunkte bzw., grundlegender, divergierende fermionische Kopplungen, leitet sich wie unter 3.2.2 behandelt eigentlich von der bosonisierten Version der betrachteten Theorie her, welche wiederum auch eine explizite Auflösung der Impulsabhängigkeit dieser fermionischen Kopplungen ermöglichen würde. Wie auch bereits unter 4.3 im Zusammenhang mit $Z_A(p)$ und der Hintergrundfeldmethode diskutiert, entspricht eine solche explizite Impulsabhängigkeit einer Verwendung höherer Ordnungen der Ableitungsentwicklung in $\Gamma_k^{\text{QED}_3}$. Unglücklicherweise lässt sich eben diese Abhängigkeit in der fermionischen Formulierung nur sehr schwer behandeln - mithilfe von Regulatoränderungen aber zumindest qualitativ untersuchen. Jeder Regulator besitzt eine eigene spezifische Form, insbesondere was die Ausprägung des in Abb. 2 angedeuteten Maximums betrifft, welches für die Implementierung der „Impulsschalenintegration“ zuständig ist. Solange dieses Maximum nicht geradezu einer Deltafunktion entspricht, sind die Impulsschalen sozusagen ausgeschmiert - und unterschiedliche Formen dieser Ausschmierung werden dazu führen, dass unterschiedliche Anteile größerer und kleinerer Impulse als das jeweilige k einbezogen werden. Ist die renormierte Kopplung nun impulsabhängig, muss dieses Einbeziehen abseits liegender Gebiete Auswirkungen auf den Fluss haben. Da diese Auswirkungen aber je nach Wahl des Regulators unterschiedlich ausfallen werden, kann eine Regulatorabhängigkeit von Infrarot-Größen wie $N_{f,\text{crit}}$ somit auch als Hinweis auf eine nicht beachtete Impulsabhängigkeit der jeweiligen Kopplungen verstanden werden.

Insgesamt ist es demnach lohnend, und da die Rechnungen ohnehin größtenteils numerisch ausgeführt werden müssen auch nur von begrenztem Zusatzaufwand, verschiedene Regulatoren für die konkreten Rechnungen heranzuziehen. Ausgewählt wurden ein *Sharp-Cutoff*, der bereits oben kurz erwähnte *optimierte Regulator* [41], ein *exponentieller* [28] sowie der *Callan-Symanzik-Regulator*. Die Definitionen der jeweils zugehörigen bosonischen und fermionischen Shapefunktionen sind in Anhang C gegeben. Vom unendlich „steilen“ Sharp-Cutoff bis hin zum sehr „flachen“ Callan-Symanzik-Regulator sind dabei mehrere Abstufungen der Impulsschalenausschmierung vertreten. Es sei bemerkt, dass R_{CS} so flach ist, dass die Regulatorbedingung (2.18a) für endliche k nicht mehr erfüllt ist. Der Entfernung des Regulatorterms ΔS_k für $k \rightarrow 0$ tut dies natürlich keinen Abbruch, aber die zweite Funktion dieser Bedingung, das Sichern der UV-Regularisierung, gerät in Gefahr. Allerdings ist die QED₃ eine *superrenormierbare* Theorie [4], weshalb R_{CS} trotzdem guten Gewissens verwendet werden kann.

Es gibt zwei Gründe anzunehmen, dass die Zahl der N_f , für welche SSB auftreten kann, nicht unbegrenzt ist. Einerseits gilt $e_*^2 \sim N_f^{-1}$, was den Wertebereich der im Fluss erreichbaren Eichkopplungen zunehmend einschränkt. Andererseits ist davon auszugehen, dass der kritische Wert e_{crit}^2 für das Verschmelzen der Fixpunkte S und A ebenfalls von N_f abhängt. Dies ist tatsächlich der Fall, wie sich aus Abbildung 16 ersehen lässt.

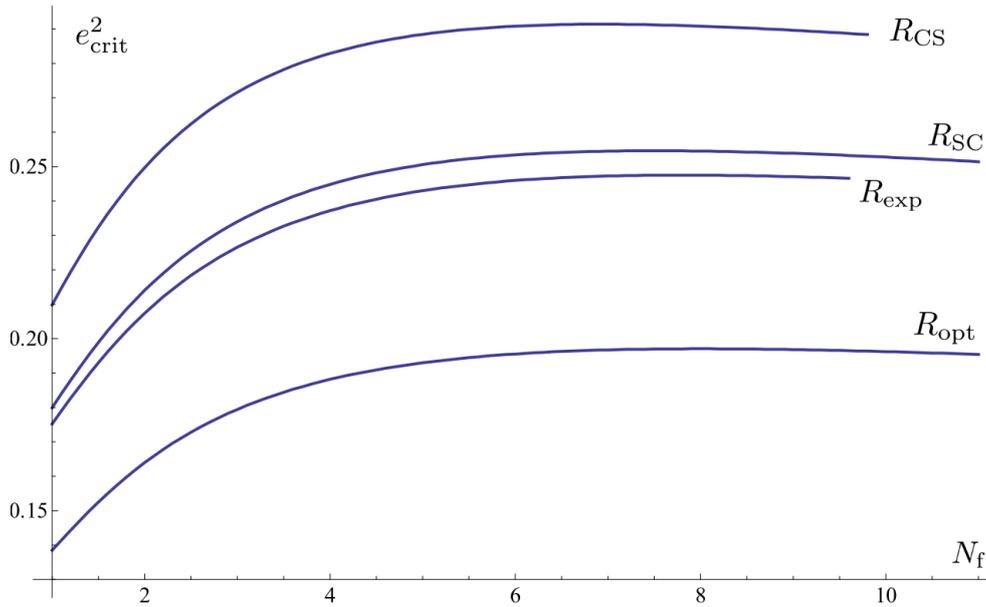


Abbildung 16: Kritischer Wert der Eichkopplung in Abhängigkeit von N_f für verschiedene Regulatoren

Offenbar wächst e_{crit}^2 für kleine N_f , während es für größere nahezu konstant bleibt. Weil $e_*^2 \sim \mathcal{O}(N_f^{-1})$ schnell kleiner wird, kann ab einem bestimmten $N_{f,\text{crit}}$ das e_{crit}^2 vom Fluss nicht mehr erreicht werden, da es jenseits von e_*^2 liegen würde. Dieses $N_{f,\text{crit}}$ markiert damit den Quantenphasenübergang, das Ende des symmetriebrechenden Bereichs. Nun sind die Definitionsbereiche der Graphen in Abb. 16 nicht zufällig gewählt - die kritischen Flavorzahlen ergeben sich für die einzelnen Regulatoren numerisch zu:

	R_{SC}	R_{opt}	R_{exp}	R_{CS}
$\eta_{A,n}$	0.361616	0.466185	0.423780	0.355762
$N_{f,\text{crit}}$	11.00	10.92	9.57	9.75

Tabelle 1: Kritische Flavorzahlen und zugehörige numerische Werte für η_A bei Verwendung der perturbativen Propagatoren

Insgesamt lässt sich demnach sagen, dass in dieser Näherung ein $N_{f,\text{crit}} = 10 \pm 1$ am wahrscheinlichsten ist. Die regulatorbedingte Unsicherheit scheint nicht so katastrophal groß zu sein, dass die gewählte Trunkierung verworfen werden müsste, trotzdem ist sie nicht vernachlässigbar. Ein Einbeziehen der Impulsabhängigkeit fermionischer Kopplungen könnte hier also tatsächlich Verbesserungen bringen.

Neben den Folgen der Variation des Regulators selbst lässt sich eine weitere Beobachtung machen, welche die Annahme der nichttrivialen Impulsabhängigkeit stützt. Bei der Konstruktion der Projektionsvorschrift für η_A in Abschnitt 4.3 wurde argumentiert, dass $Z_A(p) = Z_A(k)$ eine gute Näherung sei, da der Bereich um k , letztlich wegen der Form des Regulators, den größten Beitrag liefert. Eine Variation $Z_A(p) \equiv Z_A(\zeta k)$ mit $\zeta \in (0, \infty)$ verschiebt also über den Zwischenschritt der Eichkopplung auch die Impulsabhängigkeit der fermionischen Kopplungen, da deren Werte durch Fluktuationen des Eichfeldes erzeugt werden. Es ergibt sich das folgende (schematische) Bild:

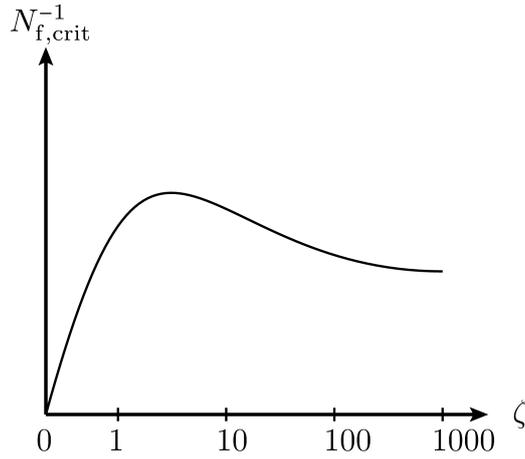


Abbildung 17: Schematischer Verlauf der Abhängigkeit von N_f^{-1} vom Parameter ζ

Offenbar wird N_f durch diese Verschiebung der Impulsabhängigkeit beeinflusst. Es überrascht nicht, dass die Form der Abhängigkeit an das Aussehen von $\partial_t R_k$ selbst erinnert.

5.1.3 Ergebnisse für die vollen Schwellwertfunktionen

Mit diesen ersten Ergebnissen in der Hinterhand ist es nun an der Zeit, auch die vollen Schwellwertfunktionen zur Anwendung zu bringen. Die Suche nach der kritischen Flavorzahl verläuft im Prinzip wieder wie oben beschrieben, doch sind die Abhängigkeiten der fermionischen Betafunktionen von der Eichkopplung nun noch wesentlich komplizierter. Zunächst nehmen die anomalen Dimensionen durch von den Schwellwertfunktionen herrührende implizite und wechselseitige Abhängigkeit die Form

$$\eta_{A/\psi} = e^2 \frac{Ae^2 + B}{1 - Ce^2 - De^4} \quad (5.2)$$

an, wobei die einzelnen Koeffizienten z.T. von N_f abhängen. Damit werden auch die fermionischen Betafunktionen gebrochenrational in e^2 , da auch die dort auftretenden Schwellwertfunktionen nun von den $\eta_{A/\psi}$ abhängen. An eine analytische Lösung des Fixpunktproblems ist erst recht nicht mehr zu denken. Aus diesem Grund seien ohne weitere Zwischenergebnisse nur noch die kritischen Flavorzahlen angegeben:

	R_{opt}	R_{exp}	R_{CS}
$N_{f,\text{crit}}$	10.00	8.11	7.47

Tabelle 2: Kritische Flavorzahlen für volle innere Propagatoren

Zunächst sei bemerkt, dass es für den Sharp-Cutoff-Regulator keine weiteren Korrekturen einzubeziehen gibt, da seine Schwellwertfunktionen nicht von den anomalen Dimensionen abhängen. Ansonsten fällt auf, dass die $N_{f,\text{crit}}$ gegenüber den Werten zu 1-loop sämtlich abgesenkt sind. Am geringsten fällt dieser Unterschied für den optimierten Regulator aus, was angesichts seines speziellen Konstruktionsziels, möglichst unempfindlich gegenüber Näherungen zu sein [41] durchaus Sinn macht. Warum genau die beiden anderen Regulatoren stärker beeinflusst werden und die Streuung der Ergebnisse so gegenüber der vorherigen Näherung sogar erhöhen, lässt sich an dieser Stelle nicht sagen - möglicherweise ist auch dies ein Effekt der vernachlässigten Impulsabhängigkeit von \tilde{g} und g . Festgestellt werden kann jedoch, dass die zusätzlich einbezogenen Fluktuationen im Allgemeinen dazu neigen, spontane Symmetriebrechung zu unterdrücken.

5.2 Charakterisierung der Symmetriebrechung

5.2.1 Skalierungsverhalten

Im Grundlagenabschnitt 2.2.4 wurde erklärt, inwiefern kritische Exponenten einen Fixpunkt charakterisieren und das Skalierungsverhalten von Observablen in seiner Nähe bestimmen. Für die nähere Beschreibung der Symmetriebrechung sind aber die kritischen Exponenten der fermionischen Fixpunkte gar nicht von vorrangigem Interesse - es interessiert vielmehr der Annihilationsprozess bzw. dessen Ende bei Erreichen der Phasengrenze $N_{f,\text{crit}}$. Bekanntermaßen wird dieses Verhalten durch die in dieser Näherung

von den fermionischen Kopplungen unabhängige Betafunktion der Eichkopplung gesteuert. Wenn in einer ersten Näherung davon ausgegangen wird, dass $e^2 \neq e^2(k)$ also konstant ist, was für Werte in der Umgebung des Fixpunktes e_*^2 als einigermaßen gut erfüllt angesehen werden kann, so ergibt sich kein Skalieren gemäß eines Potenzgesetzes wie in (2.27) mehr. Stattdessen konnte gezeigt werden [54], dass exponentielles, genannt *Miransky-Skalieren* vorliegt:

$$k_{\text{SB}} \sim \Lambda \theta (e^2 - e_{\text{crit}}^2) \exp\left(-\frac{C}{\sqrt{e^2 - e_{\text{crit}}^2}}\right), \quad C = \text{const.}, \quad (5.3)$$

wobei k_{SB} die Skala ist, bei der die betrachtete Symmetrie spontan bricht.

Geht man jedoch über diese Näherung hinaus, bezieht also das Fließen der Eichkopplungen mit ein, sind durchaus Abweichungen vom Miransky-Skalieren zu erwarten. Dieser Fragestellung wurde in [55] nachgegangen, eine ausführliche Darstellung findet sich auch in [22]. Zunächst ergibt sich, analog zu den Überlegungen in Abschnitt 2.2.4 wieder ein Potenzgesetz für das Skalieren der Eichkopplung nahe e_*^2 . Der kritische Exponent Θ_{e^2} ist nun jedoch von N_f abhängig, der Größe, welche in diesem System den Quantenphasenübergang erzeugt:

$$\Theta_{e^2}(N_f) = \Theta_0 + \Theta_1(N_f - N_{f,\text{crit}}) + \mathcal{O}((N_f - N_{f,\text{crit}})^2). \quad (5.4)$$

Es lässt sich zeigen [55], dass das Skalierungsverhalten zu niedrigster Ordnung in $(N_f - N_{f,\text{crit}})$ die folgende Form annimmt:

$$k_{\text{SB}} \sim \Lambda \theta (N_{f,\text{crit}} - N_f) |N_{f,\text{crit}} - N_f|^{-\frac{1}{\Theta_0}} \exp\left(-\frac{C}{\sqrt{|N_{f,\text{crit}} - N_f|}}\right), \quad C = \text{const.} \quad (5.5)$$

Es hängt also vom Wert des kritischen Exponenten Θ ab, wie groß die Korrekturen zum Miransky-Skalieren sind: für $|\Theta_0| = |\Theta(N_{f,\text{crit}})| \gg 1$ wird der Term $|N_{f,\text{crit}} - N_f|^{-\frac{1}{\Theta_0}}$ stark unterdrückt, (5.5) reduziert sich im Grenzfall wieder auf exponentielles Skalieren. Hingegen lässt ein $|\Theta_0| \ll 1$ den besagten Term deutlich an Gewicht gewinnen.

Im Fall der QED₃ ergibt sich bei Annäherung der vollen Propagatoren durch die perturbativen zunächst ein N_f -unabhängiger kritischer Exponent von $\Theta_{e^2} = \Theta_0 = -1$:

$$\left. \frac{\partial \beta_e^2}{\partial e^2} \right|_{e^2=e_*^2} = [2e^2 \eta_{A,n} N_f - 1]_{e^2=e_*^2} = 1 = -\Theta_{e^2}. \quad (5.6)$$

Werden die vollen Schwellwertfunktionen verwendet, ergibt sich dagegen durchaus eine nichttriviale N_f -Abhängigkeit des Exponenten, wie in Abbildung 18 zu sehen ist.

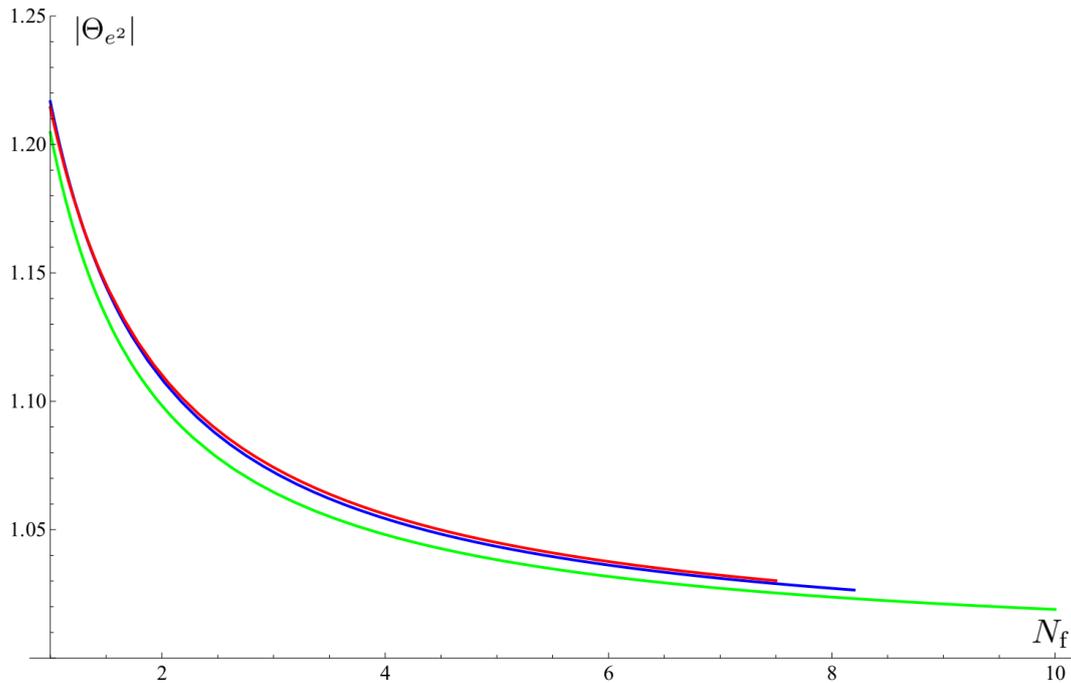


Abbildung 18: $|\Theta_{e^2}|(N_f)$ für den optimierten (grün), exponentiellen (blau) und Callan-Symanzik-Regulator (rot)

Die Werte von $\Theta_{e^2}(N_{f,\text{crit}})$ selbst sind:

	R_{opt}	R_{exp}	R_{CS}
Θ_0	-1.01895	-1.02680	-1.03027

Tabelle 3: Kritische Exponenten der Eichkopplung bei $N_{f,\text{crit}}$

Das Einbeziehen der zusätzlichen Fluktuationen erhöht $|\Theta_0|$ also kaum, auch die N_f -Abhängigkeit des vollen Θ_{e^2} ist offenbar nicht sehr stark ausgeprägt. Das Skalierungsverhalten wird dem exponentiellen daher nur marginal ähnlicher. Allerdings sind die Korrekturen zu selbigem insgesamt nicht vernachlässigbar, da $|\Theta_0|$ in jedem Fall $\mathcal{O}(1)$ ist.

5.2.2 Chirale Symmetriebrechung und das NJL-Modell

Obwohl der Titel dieser Arbeit die Untersuchung der QED₃ hinsichtlich *chiraler* Symmetriebrechung verheißt, war in den bisherigen Analysen nur allgemein vom Auftreten oder Ausbleiben spontaner Symmetriebrechung die Rede. Tatsächlich ist es keine triviale Aufgabe herauszufinden, welche der in Abschnitt 3.1.1 vorgestellten Symmetrien der $\Gamma_k^{\text{QED}_3}$ tatsächlich bricht. Im Folgenden soll daher der Versuch unternommen werden, genau diese Lücke zu schließen und zu klären, inwieweit tatsächlich chirale Symmetriebrechung im Spiel ist.

In Abschnitt 3.2.2 wurde der Zusammenhang spontaner Brechung einer bestimmten Symmetrie mit dem Endlichwerden eines zugehörigen Vakuumerwartungswertes und dieses wiederum mit der Divergenz der entsprechenden fermionischen Kopplung in Verbindung gebracht. Betrachtet man das Fierz-vollständige System der quartischen Fermionwechselwirkungsterme

$$\Gamma_k^\Psi = \int d^3x \left[\frac{\tilde{g}}{2N_f} (\bar{\psi}\gamma_{45}\psi)^2 + \frac{g}{2N_f} (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 \right], \quad (5.7)$$

so wird deutlich, dass ein Divergieren von \tilde{g} mit Paritätsbrechung, ein solches von g mit Brechung der Lorentz-Symmetrie in Zusammenhang gebracht werden muss. Doch was geschieht, wenn beide Kopplungen divergieren?

Mithilfe der Fierz-Äquivalenz verschiedener quartischer Fermionwechselwirkungsterme lassen sich auch andere Fierz-vollständige Systeme konstruieren, als das eben besprochene. Der RG-Fluss in einem solchen System ist natürlich ebenfalls äquivalent zum in Kapitel 4 berechneten, doch die Divergenz der zugehörigen Kopplungen, letztlich spezifische Linearkombinationen von \tilde{g} und g , deuten nun auf andere endlich werdende Felderwartungswert hin - was mit dem Bruch dieser anderen Symmetrien zusammenhänge. Es ist also prinzipiell möglich, dass das gleichzeitige Divergieren von \tilde{g} und g chirale anstatt von Paritäts- oder Lorentz-Symmetriebrechung zur Folge haben kann.

Konkret bietet sich für eine solche Linearkombination der in Abschnitt 3.1.2 mit V^2 bezeichnete Wechselwirkungskanal an:

$$V^2 = -S^2 - S_\mu^2 = (\bar{\psi}^a\psi^b)^2 - (\bar{\psi}^a\gamma_4\psi^b)^2 - (\bar{\psi}^a\gamma_5\psi^b)^2 + (\bar{\psi}^a\gamma_{45}\psi^b)^2. \quad (5.8)$$

Nach [53] entspricht dieser einer Nambu-Jona-Lasinio-Wechselwirkung [6] (NJL) in $d = 3$ Dimensionen. Diese Wechselwirkung, deren Untersuchung zur Formulierung des Goldstone-Theorems beitrug, war eine der ersten, für welche ein spontanes Auftreten chiraler Symmetriebrechung nachgewiesen werden konnte [6]. Die Fierz-Äquivalente Umformulierung

$$\Gamma_k^\Psi = \int d^3x \left[\frac{-\tilde{g}}{2N_f} V^2 + \frac{g-\tilde{g}}{2N_f} S_\mu^2 \right], \quad (5.9)$$

legt daher nahe, dass ein Divergieren des Flusses entlang der Geraden $\tilde{g} = g$ mit chiraler Symmetriebrechung in Verbindung zu bringen ist. Der Vektorkanal S_μ^2 wird dann nicht angeregt, sodass ausschließlich der NJL-Kanal „kondensieren“ kann, was offenbar mit einem endlichen Vakuumerwartungswert $\sim \langle \bar{\psi}^a\psi^b \rangle + \dots$ einhergeht. Dieser enthält aber genau jenen massenartigen Erwartungswert (3.26), welcher chirale Symmetriebrechung anzeigt.

5.2.3 Asymptotik des Flusses: $N_{f,\chi}$

Bereits ein qualitativer Vergleich der beiden RG-Flussdiagramme in Abbildung 19 zeigt, dass die Richtung des divergierenden Flusses direkt nach der Fixpunktannihilation stark von N_f abhängt.

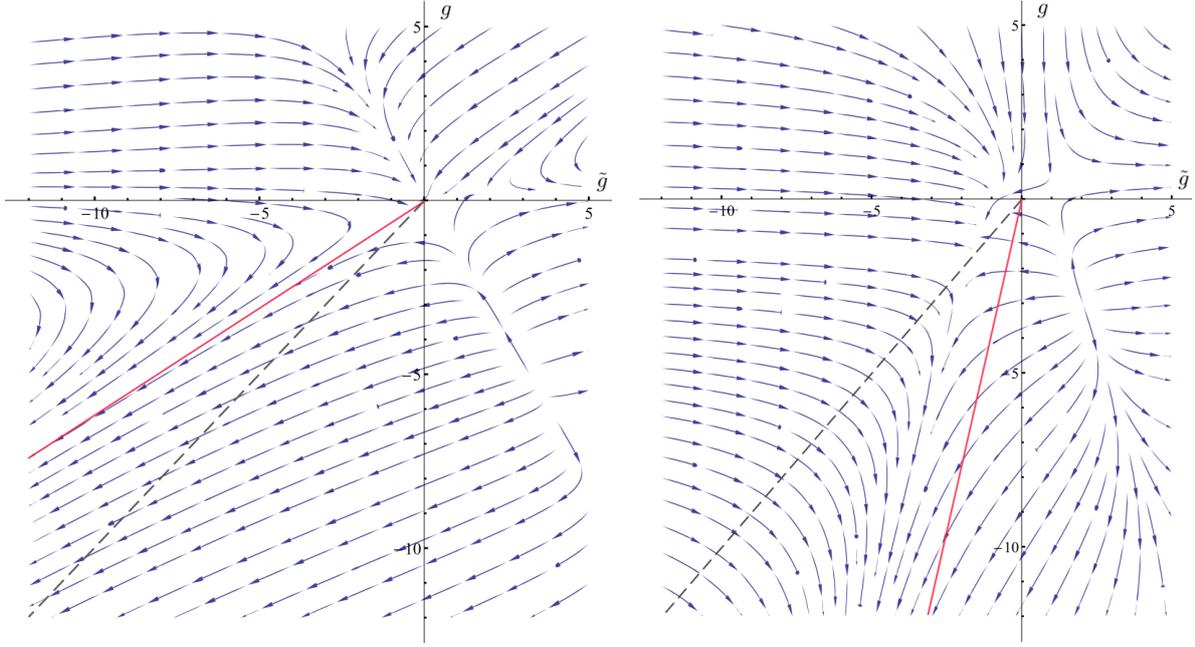


Abbildung 19: Flussdiagramme für $e^2 = e_{\text{crit}}^2$ bei $N_f = 1$ (links) und $N_f = 9$ (rechts). Verwendet wurde der optimierte Regulator. Die gestrichelte Linie entspricht einer ausschließlichen Anregung des V^2 -Kanals, die roten Linien geben jeweils die asymptotische Richtung des Flusses an.

Die Frage ist nun zunächst, wie sich die Richtung des divergierenden Flusses rechnerisch bestimmen lässt. In [53], wo das rein fermionische Pendant der QED_3 betrachtet wird, konnte gezeigt werden, dass die Verbindungslinie zwischen dem gaußschen und einem wechselwirkenden Fixpunkt gleichzeitig auch die Richtung eines eventuell divergierenden Flusses vorgibt. Das Hauptargument ist dabei, dass in einem Fierz-System, dessen eine Kopplung genau auf dieser Verbindungslinie liegt, die jeweils andere nicht durch Fluktuationen erzeugt werden kann, der Fluss also der Verbindungslinie folgen muss. Diese Überlegung ist im Falle der QED_3 jedoch nicht gültig, da grundsätzliche beide fermionischen Kopplungen durch Fluktuationen des Eichfeldes erzeugt werden. Anschaulich bedeutet dies, dass sich die Fixpunkte, wie auch in Abb. 14 zu sehen, von ihren Positionen bei $e^2 = 0$ fortbewegen und damit auch ihre jeweiligen Verbindungslinien nicht mehr festliegen, sondern sich im Laufe des Flusses verändern. Nach der Annihilation der Fixpunkte kann es eine solche Verbindungslinie überhaupt nicht mehr geben, sodass ein anderer Weg gefunden werden muss, die Flussrichtung zu ermitteln.

Zu diesem Zweck wird die Divergenz der Kopplungen selbst herangezogen und der Anstieg des Flusses im Unendlichen betrachtet:

$$g = t \cdot \tilde{g}, \quad F(t) \equiv \lim_{\tilde{g} \rightarrow -\infty} \frac{\beta_g}{\beta_{\tilde{g}}} = \frac{t^2(2N_f + 1) + 3t}{6t^2 + 9t - 6N_f + 3}. \quad (5.10)$$

Der Grad der Divergenz von \tilde{g} und g ist also im Wesentlichen durch ihre Exponenten in $\beta_{\tilde{g}}$ bzw. β_g vorgegeben. Der Einfluss von e^2 wird weiter unten noch ausführlicher diskutiert, es sei hier aber angenommen, dass der Wert der Eichkopplung durch den Infrarotfixpunkt e_*^2 bestimmt und damit zunächst endlich ist. Da somit die Terme $\sim e^2$ und $\sim e^4$ für das Verhältnis $F(t)$ keine Rolle spielen, ergibt sich das gleiche Ergebnis, welches auch im rein fermionischen System zustande käme - inklusive der dort bereits für die Betafunktionen selbst vorhandenen Regulatorunabhängigkeit.

Die Steigung t der linearen Asymptote ergibt sich nun aus der folgenden Bestimmungsgleichung:

$$t \cdot \tilde{g} = F(t) \cdot \tilde{g} + a \xrightarrow{\tilde{g} \rightarrow -\infty} t \stackrel{!}{=} F(t) \text{ für } a < \infty. \quad (5.11)$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{6} \left(N_f - 4 - \sqrt{16 + 28N_f + N_f^2} \right), \quad t_3 = \frac{1}{6} \left(N_f - 4 + \sqrt{16 + 28N_f + N_f^2} \right). \quad (5.12)$$

Dies entspricht genau den Anstiegen der Verbindungslinien zwischen dem gaußschen Fixpunkt S und den drei wechselwirkenden Fixpunkten A , B und I für $e^2 = 0$ - ein Ergebnis, das nach den Überlegungen zu Gl. (5.10) nicht anders zu erwarten war. Das unterstrichene Resultat gehört zum Fixpunkt A und ist

damit das für die weiteren Untersuchungen Interessierende.

Ist $N_f = 1.75$, so stimmt die asymptotische Richtung genau mit der NJL-Linie überein, es dürfte also mit einiger Sicherheit chirale Symmetriebrechung vorliegen. Doch was ist mit den anderen N_f ? Eine in [53] vorgeschlagene Abschätzung sieht vor, den „Einzugsbereich“ der NJL-Achse, d.h. das Gebiet zwischen den beiden durch die Koordinatenachsen und die NJL-Linie definierten Winkelhalbierenden mit Anstieg $t = \frac{1}{2}$ bzw. $t = 2$, als zu chiraler Symmetriebrechung führend anzusehen. Das entspricht einer möglichen Fermionflavorzahl zwischen $N_f = 1$ und $N_{f,\chi} = 4$. Letzteres würde damit zum „eigentlichen“ $N_{f,\text{crit}}$ für chirale Symmetriebrechung.

Eine quantitativ genaue Aussage über diese Grenzen lässt sich schließlich aber nur treffen, wenn die betrachtete Theorie dynamisch bosonisiert wird [56]. Dann können die Flussgleichungen der Bosonmassen darüber Auskunft geben, welche der Symmetrien tatsächlich gebrochen wird. In [53] wurde dies für das rein fermionische Modell unternommen. Das sich hieraus ergebende, wiederum regulatorabhängige $N_{f,\chi} = 5.1(7)$ liegt tatsächlich einigermaßen in der Nähe des zuvor abgeschätzten Wertes.

Es liegt nun angesichts der identischen Asymptotik nahe, diesen Wert auch als kritische Flavorzahl der QED₃ zu übernehmen. Eine gewisse Vorsicht scheint jedoch geboten. Das Verschmelzen der Fixpunkte, welches im Kontext der Eichtheorien überhaupt erst zur Symmetriebrechung führt, findet im Allgemeinen neben der durch die anschließende Divergenz definierten Asymptote statt. Anders als im rein fermionischen Modell können Kanäle anderer Symmetrien also durchaus mit angeregt werden und es ist nicht von vornherein klar, ob diese Anregungen bei der Festlegung der gebrochenen Symmetrie eine Rolle spielen oder ob diese ausschließlich durch die Asymptotik bestimmt ist. Weitere Klarheit darüber könnte letztlich nur eine dynamische Bosonisierung auch der QED₃ bringen - und einfache diagrammatische Überlegungen analog zu denen in Kapitel 4 zeigen sofort, dass die Abhängigkeiten auch der bosonischen Flüsse vom Laufen der Eichkopplung keinesfalls trivial sein müssen.

Ein viel größeres Problem ergibt sich jedoch aus dem Annullieren der Fixpunkte selbst: dadurch, dass der Fluss nun nicht mehr in der Nähe eines solchen gebunden ist, entfällt die Grundlage der Argumentation aus Abschnitt 4.3 dafür, dass die einfache WTI anstatt der vollen mWTI verwendet werden kann. Ein kurzer Blick auf Gl. (4.21) genügt, um zu sehen, dass der divergierende Fluss der fermionischen Kopplungen nichttrivial den der Eichkopplung beeinflusst. Potentiell kann dadurch der Infrarotfixpunkt e_*^2 destabilisiert werden [22]. Die Art und Weise dieser Destabilisierung, welche sich quantitativ nur durch eine detaillierte Analyse der mWTI bestimmen ließe, entscheidet dabei, ob e^2 nun bereits für $k \geq k_{\text{SB}}$ divergiert, oder zumindest bis $k < k_{\text{SB}}$ endlich bleibt. In ersterem Fall muss die obige Analyse zur Asymptotik nicht mehr zutreffen, da das Divergieren von e^2 signifikanten Einfluss auf jenes von \tilde{g} und g haben kann. In letzterem bleibt die Asymptotik erhalten.

Letztlich muss die Frage nach $N_{f,\chi}$ also nach wie vor als offen angesehen werden. Größer als die Werte in Tabelle 2 sollte die kritische Flavorzahl nicht sein. Ein kleineres $N_{f,\chi}$ ist aber durchaus möglich und wäre genauer nur durch die Verwendung der vollen mWTI bzw. dann auch dynamischer Bosonisierung zu bestimmen.

5.3 Diskussion alternativer Methoden und ihrer Ergebnisse

In der Einleitung dieser Arbeit wurde bereits angedeutet, dass bisherige Rechnungen zur chiralen Symmetriebrechung in der QED₃ breit gestreute Ergebnisse geliefert haben. An welcher Stelle lassen sich nun die hier mit der funktionalen Renormierungsgruppe gewonnenen einordnen? Gibt es erkennbare Gründe, warum die bisherigen Ergebnisse so voneinander abweichen? Und kann die RG-Rechnung dazu beitragen, diese Abweichungen zu verstehen und zu eliminieren? Mit solchen Fragen soll sich nun dieser letzte Abschnitt des Analyseteils auseinandersetzen.

5.3.1 Andere Renormierungsgruppenuntersuchungen

Wie ebenfalls bereits eingangs erwähnt, ist die Frage der chiralen Symmetriebrechung schon zuvor mit Renormierungsgruppenmethoden untersucht worden. Beispielhaft werden nun drei Arbeiten vorgestellt und ihre Methoden mit den hier angewandten verglichen, um so eventuelle Abweichungen der Ergebnisse für $N_{f,\text{crit}}$ nachvollziehen zu können.

Quantenelektrodynamik für Graphen: *J. Drut und D. Son (2008)* [57]

Die Motivation für die Arbeit von Drut und Son leitet sich direkt aus der Frage nach der Entstehung einer Bandlücke in Graphen her. Ein solches Phänomen ist zu erwarten, wenn die chirale Symmetrie des dieses Material beschreibenden Modells spontan gebrochen wird. Aufgrund der räumlichen Zweidimensionalität dieses bemerkenswerten Materials und dem quasi-relativistischen Verhalten seiner Elektronen qualifiziert sich die QED₃ als ein solches Modell. Allerdings ist diese Beschreibung nicht perfekt. Die

Geschwindigkeit der Elektronen beträgt tatsächlich nur $v \simeq \frac{c}{300}$, was zwar der relativistischen Struktur der Dispersionsrelation keinen Abbruch tut, zusammen mit der nach wie vor lichtschnellen Coulombwechselwirkung aber zu einer expliziten Brechung der Lorentzinvarianz führt. Außerdem gilt die räumliche Zweidimensionalität nur für den fermionischen Teil der Theorie: Photonen können durchaus nach wie vor auch in der dritten Raumdimension propagieren und dort sogar mit Substratmaterialien wechselwirken, deren Dielektrizitätseigenschaften dann wiederum die effektive Eichkopplung beeinflussen. All diesen Besonderheiten Rechnung tragend, weicht die Wirkung, welche von Drut und Son konstruiert wurde,

$$S_E = - \int dt d^2x (\bar{\psi}_a \gamma^0 \partial_0 \psi_a + v \bar{\psi}_a \gamma^i \partial_i \psi_a + i A_0 \bar{\psi}_a \gamma^0 \psi_a) + \frac{1}{2g^2} \int dt d^3x (\partial_i A_0)^2 + S^\Psi, \quad (5.13)$$

doch deutlich von der hier behandelten ab (S^Ψ steht für die fermionischen Wechselwirkungsterme). Weiterhin betrachten die Autoren ihr System im Limes großer N_f , was eine sog. „Random-Phase“-Näherung bei der Behandlung des vollen Photonpropagators ermöglicht. Diese verwendet z.T. andere Klassen von Diagrammen, als dies die Wetterich-Gleichung in der hier verwendeten Näherung implizit tut.

Als Kriterium für einen möglichen Symmetriebruch wird ebenfalls angesetzt, dass ein nichttrivialer, infrarotattraktiver Fixpunkt der fermionischen Kopplungen mit dem gaußschen annihiliert. Der kritische Wert für N_f , bis zu dem dieses Verhalten zu beobachten ist, liegt bei

$$N_{f,\text{crit}} = \frac{40}{\pi^2} \approx 4.05 \quad (5.14)$$

und damit deutlich unterhalb der Vorhersagen in der vorliegenden Arbeit. Wie auch hier können die Autoren anhand der durchgeführten Rechnungen nicht eindeutig feststellen, welche Symmetrie es letztlich ist, deren Brechung angezeigt erscheint, sodass nicht das hypothetische $N_{f,\chi}$ aus 5.2.3 zum Vergleich herangezogen werden muss, sondern die Werte aus den Tabellen 1 bzw. 2.

Die Frage ist nun, worin die Abweichung der Resultate hauptsächlich begründet liegt: sind es die Modifikationen, welche der direkte Bezug zu Graphen erforderte, oder liegt es doch eher an der Näherung großer Flavorzahlen N_f ? Ein wenig Licht in diese Angelegenheit soll der nun folgende Vergleich bringen.

QED₃ für große N_f : *K. Kaveh und I. Herbut (2005) [52]*

Neben einigen Betrachtungen zu explizit die chirale Symmetrie brechenden fermionischen Termen beschäftigen sich Kaveh und Herbut mit einer symmetrischen, verglichen mit der in dieser Arbeit verwendeten, identischen Wirkung. Neben der Beschränkung auf perturbative Feynmandiagramme zur Ordnung 1-loop für die Berechnung der Betafunktionen wird auch hier der Grenzfall großer N_f vorausgesetzt. Die Flussgleichungen lauten, übertragen in die Notation der vorliegenden Arbeit:

$$\partial_t e^2 = e^2 - N_f e^4, \quad (5.15a)$$

$$\partial_t \tilde{g} = \tilde{g} - \tilde{g}^2 - 4e^2 \tilde{g} - 18e^2 g + 9N_f e^4, \quad (5.15b)$$

$$\partial_t g = g + g^2 - \frac{2}{3} e^2 \tilde{g}, \quad (5.15c)$$

und zeigen ein Annihilieren der (S) und (A) entsprechenden Fixpunkte für $N_f \leq N_{f,\text{crit}} = 4.83$. Interessant ist einerseits, dass dieser Wert nicht weit vom Ergebnis von Drut und Son entfernt liegt, andererseits jedoch die Tatsache, dass Kaveh und Herbut dieses Annihilieren nicht mit chiraler Symmetriebrechung in Zusammenhang gebracht sehen wollen. Der Grund dafür ist, dass sie selbiges für ein Artefakt der Näherung großer N_f halten.

Im Vergleich mit den Flussgleichungen (4.30) zeigen sich jedoch große Übereinstimmungen. Werden darin alle Terme $\sim \frac{1}{N_f}$ weggelassen, was durch die Annahme großer N_f zu rechtfertigen ist, sowie der Sharp-Cutoff als Regulator gewählt, so stimmen die fermionischen Flussgleichungen mit denen von Herbut und Kaveh überein - einzige weitere Voraussetzung ist die Annahme, dass $m_{A,\psi}^{2,1} = \frac{1}{2}$ anstatt von $\frac{2}{3}$ ist, wie es sich aus der Definition des Sharp-Cutoffs in Anhang C ergibt. Wie auch an dieser Stelle vermerkt, ist ein abweichender Wert für diese Schwellwertfunktion durchaus möglich, da Uneindeutigkeiten in der Definition gerade dort sehr leicht zu Unterschieden führen können. Die Betafunktion der Eichkopplung stimmt ebenfalls nicht exakt überein, ein $\eta_{A,n} = \frac{2}{3}$ bei Herbut und Kaveh steht einem $\eta_{A,n} \approx 0.36$ in dieser Arbeit gegenüber. Grund hierfür mögen erneut Definitionsprobleme beim Sharp-Cutoff, aber auch eine abweichende Behandlung der WTI sein.

Auch wenn die numerische Übereinstimmung zwischen Flussgleichungen nicht perfekt ist, so gilt das doch für die strukturelle in jedem Fall. Das zeigt zum Einen, dass der Grenzfall großer N_f tatsächlich signifikante Abweichungen gegenüber der allgemeineren Rechnung erzeugt, welche sich auch auf die errechnete

kritische Flavorzahl niederschlagen. Eine Vergleichsrechnung mit dem Flussgleichungssystem (5.15), aber den Werten dieser Arbeit für $m_{A,\psi}^{2,1}$ und $\eta_{A,n}$, ergibt ein $N_{f,\text{crit}} \approx 7.86$ gegenüber $N_{f,\text{crit}} = 11.00$ hier. Andererseits wird die Überlegung, dass es sich bei der Fixpunktannihilation um ein Artefakt der GroÙe- N_f -Näherung handeln könnte widerlegt - die allgemeinere Rechnung dieser Arbeit führt letztlich auf qualitativ dasselbe Verhalten.

Einfluss des Eichsektors: *K.-I. Kubota und H. Terao (2001) [58]*

Auch wenn also ein Absinken der kritischen Flavorzahl aufgrund der Konstruktionsannahme großer N_f beobachtet werden kann, sind damit noch nicht alle Abweichungen erklärt. Die unterschiedlichen Werte der Schwellwertfunktionen bzw. für $\eta_{A,n}$ besitzen offenbar durchaus signifikanten Einfluss. Um diesen zu illustrieren, wird als letztes Beispiel für Renormierungsgruppenanalysen die Arbeit von Kubota und Terao herangezogen. Es handelt sich bei den darin vorgestellten Flussgleichungen ebenfalls um Resultate einer Anwendung der Wetterich-Gleichung auf die Wirkung der QED₃ bei Verwendung des Sharp-Cutoff-Regulators - zumindest was den fermionischen Sektor betrifft. Dort stimmen auch die Flussgleichungen strukturell mit (4.30) überein, einziger Unterschied ist erneut das abweichende $m_{A,\psi}^{2,1} = \frac{1}{2}$. Dass sich trotzdem ein drastisch kleineres $N_{f,\text{crit}} \approx 3.1$ ergibt, liegt vor allem am deutlich abweichenden $\eta_{A,n} = \frac{1}{8}$, welches sowohl den Wert bei Kaveh und Herbut, als auch den in dieser Arbeit ermittelten unterschreitet. Da dieser Wert genau mit dem übereinstimmt, welcher sich aus Überlegungen zum Polarisationsensor des Photons z.B. in [36] ergibt, liegt der Gedanke nahe, dass er auf die gleiche Art und Weise errechnet wurde. Dies würde jedoch eine Inkonsistenz im Renormierungsschema darstellen, da dort die dimensionelle Regularisierung Anwendung fand.

Was auch immer letztlich die rechnerische Ursache für die so unterschiedlichen Werte der anomalen Dimension des Eichfeldes sein mag, es ist offensichtlich, dass sie großen Einfluss auf den extrahierbaren Wert für $N_{f,\text{crit}}$ haben. Es ist daher wichtig, den Eichsektor der Theorie mit besonderer Sorgfalt zu untersuchen. In dieser Arbeit wurde versucht, dem über die Betrachtung der WTI und weitestgehenden Annäherung der mWTI möglichst Rechnung zu tragen, doch sind die verwendeten Verfahren keineswegs exakt zu nennen. Ein sinnvoller quantitativer Vergleich wäre aber nur möglich, falls Ergebnisse mit anderen Regulatoren als gerade dem Sharp-Cutoff vorlägen, da dieser offensichtlich noch zusätzliche Probleme mit sich bringt, welche von den durch die Eichproblematik erzeugten kaum zu trennen sind.

5.3.2 Dyson-Schwinger-Gleichungen

Einen anderen, ebenfalls nichtstörungstheoretischen sowie funktionalen Zugang zur Untersuchung spontaner Symmetriebrechung bietet die Betrachtung von *Dyson-Schwinger-Gleichungen* [59, 60]. Ohne auf Details der Herleitung eingehen zu wollen (diese finden sich z.B. in [61]) sei hier nur die Grundgleichung für die Ein-Teilchen-irreduziblen Vertizes $\Gamma^{(n)}[\phi]$ angegeben, aus der sich durch funktionale Ableitung nach den Feldern (hier symbolisiert durch ϕ) die eigentlichen Dyson-Schwinger-Gleichungen (DSEs) gewinnen lassen:

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} - \frac{\delta S}{\delta\phi} \left[\phi + \frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} \frac{\delta}{\delta\phi} \right] = 0. \quad (5.16)$$

Es ergibt sich ein System von unendlich vielen, gekoppelten Funktionaldifferentialgleichungen, d.h. jede Bestimmungsgleichung eines $\Gamma^{(n)}[\phi]$ hängt auch von mindestens einem $\Gamma^{(m)}[\phi]$ mit $m > n$ ab.

Da sich dieses Gleichungssystem für physikalisch interessante Theorien nicht analytisch lösen lässt, werden Näherungsverfahren benötigt. Das Naheliegendste ist dabei, nur eine endliche Anzahl der DSEs zu verwenden, also eine Trunkierung des Systems zur Ordnung n_0 vorzunehmen. Um soweit wie möglich den Fehler zu minimieren, welche aus dem Weglassen der Vertizes höherer Ordnung resultiert, kommen nun spezielle Ansätze für die $\Gamma^{[n \leq n_0]}$ zu Anwendung, welche eine selbstkonsistente Lösung des verbleibenden Systems ermöglichen. Im Fall von Eichtheorien ergeben sich zusätzliche Probleme dadurch, dass die Eichinvarianz der Theorie berücksichtigt bzw. erhalten bleiben muss, was eine alles andere als triviale Forderung darstellt [62].

Konkret sieht die DSE für den vollen Fermionpropagator $S(p)$ der QED₃, d.h. in obiger Notation $\Gamma^{(\bar{\psi},\psi)}$, wie folgt aus [62]:

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + Z_e e^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \gamma_\mu S(q) \Gamma_\nu^{(A,\bar{\psi},\psi)}(q,p) D_{\mu\nu}(q-p), \quad (5.17)$$

wobei $D_{\mu\nu}(p)$ für den vollen Photonpropagator steht, der durch eine analoge Gleichung bestimmt wird. Diagrammatisch:

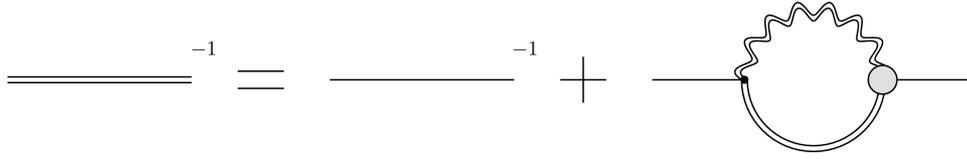


Abbildung 20: Diagrammatische Darstellung von (5.17). Der graue Vertex steht für $\Gamma_{\nu}^{(A, \bar{\psi}, \psi)}$.

Ein großer Vorteil der Dyson-Schwinger-Methode besteht darin, dass spontane Symmetriebrechung nicht an sekundären Merkmalen, wie im Fall der fermionischen Renormierungsgruppe, festgemacht werden muss. Stattdessen kann z.B. für chirale Symmetriebrechung die dynamisch generierte Fermionmasse direkt bestimmt werden, wie es auch bei RG-Flüssen bosonisierter Theorien der Fall ist. Wenn also der Ansatz für den Fermionpropagator

$$S(p, \xi) = \frac{i\psi A(p^2, \xi) + B(p^2, \xi)}{p^2 A^2(p^2, \xi) + B^2(p^2, \xi)} \quad (5.18)$$

lautet, wobei ξ der Eichparameter ist, so hängt die Funktion $B(p^2, \xi)$ direkt mit dem symmetriebrechenden Kondensat zusammen [62]:

$$B(p^2 \rightarrow \infty) = \frac{2 + \xi \langle \bar{\psi} \psi \rangle}{4} \frac{1}{p^2} \quad \text{bzw.} \quad \langle \bar{\psi} \psi \rangle = -\text{Tr}[S(0)] = -4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{B(q^2)}{q^2 A^2(q^2) + B^2(q^2)}. \quad (5.19)$$

Werden die DSEs nun gelöst, kann über das Verhalten von $B(p^2, \xi)$ direkt bestimmt werden, für welche Kombinationen N_f und e^2 spontane Symmetriebrechung vorliegt - eine direkte Bestimmung von $N_{f, \chi}$ ist also möglich.

Jahrzehntelang ist die QED₃ nun schon in verschiedensten Näherungen mithilfe der DSE-Methode untersucht worden. Entsprechend umfangreich ist auch die Literatur zu diesem Thema, sodass es hier nicht unternommen werden kann, einen auch nur ansatzweise vollständigen Überblick zu geben. Es können lediglich einige bemerkenswerte Resultate aufgegriffen werden, eine größere Anzahl weiterer Referenzen findet sich in [62].

Das erste Ergebnis, gewonnen aus der rein fermionischen DSE und unter Verwendung der Annahme großer N_f , wurde in [63] vorgestellt: $N_{f, \chi} = \frac{32}{\pi^2} \approx 3.2$. Auch wurde der Eichvertex in seiner einfachsten Form angesetzt, $\Gamma_{\nu}^{(A, \bar{\psi}, \psi)} \rightarrow \gamma_{\nu}$. Doch bereits die Hinzunahme von Korrekturen der nächsten Ordnung in $\frac{1}{N_f}$ in [64] ergab ein höheres $N_{f, \chi} = \frac{4}{3} \cdot \frac{32}{\pi^2} \approx 4.3$. Ein Versuch in [17], sich vom Grenzfall großer N_f zu lösen und auch die Renormierung des Eichvertex mit einzubeziehen, führte sogar zu $N_{f, \chi} = \infty$, also dem Auftreten chiraler Symmetriebrechung für beliebige Flavorzahlen. Fairerweise sollte allerdings dazu gesagt werden, dass die Autoren diesbezüglich stark extrapolieren, tatsächliche Rechnungen wurden nur bis $N_f = 7.2$ durchgeführt.

Eine weitere Verbesserung der Näherung stellt das Lösen der gekoppelten DSEs von Fermion- und Photonpropagator anstatt der alleinigen Betrachtung der fermionischen DSE dar. In [65] wurde dies unter Verwendung unterschiedlicher Ansätze für den Eichvertex und Parameterbereiche für N_f unternommen, das Ergebnis reduziert sich wieder auf $N_{f, \chi} \approx 3.3$. Die Autoren von [62] wiederum kritisieren eine mangelnde Beachtung der Fragen zur Eichinvarianz seitens ihrer Vorgänger und erhalten mit in dieser Hinsicht optimierten Ansätzen ein $N_{f, \chi} \approx 4$.

Paritätsbrechung und Fierz-Unvollständigkeit

In Weiterverwendung der Ansätze aus [62] wird schließlich in [66] eine Randbemerkung aus [37] aufgegriffen und näher untersucht: die Möglichkeit eines spontanen Brechens der Paritätssymmetrie. Neben dem Massenterm $\sim m\bar{\psi}\psi$ könnte ein weiterer, $\sim \tilde{m}\bar{\psi}\gamma_{45}\psi$, erzeugt werden. Dieser wäre, wie auch schon in Abschnitt 3.1.2 diskutiert, invariant unter $U(2N_f)$ und damit der chiralen Symmetrie, jedoch nicht unter \mathcal{P} , der Parität. In der Sprache der funktionalen Renormierungsgruppe würde dieses Endlichwerden des Erwartungswertes $\langle \bar{\psi}\gamma_{45}\psi \rangle$ durch eine Divergenz der Kopplung \tilde{g} angezeigt werden - ein Fall, der den Untersuchungen dieser Arbeit zufolge für kleine N_f mit zumindest ebenso großer Wahrscheinlichkeit eintreten kann, wie eine Divergenz im NJL-Kanal. Interessanterweise finden die Autoren von [66] tatsächlich simultane Brechung von Paritäts- und chiraler Symmetrie, wobei ihr $N_{f, \chi}$ nicht eindeutig bestimmbar ist. Sein Wert wird mit hoher Wahrscheinlichkeit etwas oberhalb der $N_{f, \chi} = 3.2$ von [63] vermutet, aber auch $N_{f, \chi} = \infty$ ließe sich realisieren. Die Paritätsbrechung wird dadurch ermöglicht, dass ein sog. „topologischer Photonmassenterm“ im Ansatz für den Photonpropagator zugelassen ist.

Aus Sicht der funktionalen Renormierungsgruppe ergibt sich jedoch noch eine weitere Möglichkeit, Paritätsbrechung zu erhalten. Wenn sich der Term $\tilde{m}\bar{\psi}\gamma_{45}\psi$ wie ein weiterer, spezieller Fermionmassenterm

verhält, warum sollte es nicht möglich sein, ihn dem Ansatz für den Fermionpropagator selbst hinzuzufügen?

$$S^{-1}(p^2, \xi) = -i\not{p}A(p^2, \xi) + B(p) \longrightarrow S_{\mathcal{P}}^{-1}(p^2, \xi) \equiv -i\not{p}A(p^2, \xi) + B(p^2, \xi) + C(p^2, \xi) \cdot \not{p}\gamma_{45} + iD(p^2, \xi) \not{p}\gamma_{45} \quad (5.20)$$

Der letzte Term $\sim \not{p}\gamma_{45}$ wird dabei benötigt, um die strukturelle Selbstkonsistenz beim Invertieren des Propagators aufrecht zu erhalten.

Die zusätzlichen Terme sind aber nicht nur für die Untersuchung der Paritätsbrechung relevant. Aufgrund der komplizierten Struktur der DSE ist zu erwarten, dass auch $C(p^2, \xi)$ und $D(p^2, \xi)$ Einfluss auf das Verhalten von $A(p^2, \xi)$ und $B(p^2, \xi)$ haben werden - mithin unter anderem auf die Eigenschaften der chiralen Symmetriebrechung. Es ist also nicht auszuschließen, dass dieser erweiterte Ansatz für den Fermionpropagator substanziellen Einfluss auf den Wert von $N_{f, \chi}$ hat.

Um mögliche Konsequenzen eines solchen Unterschieds im Ansatz zu illustrieren, wird kurz das (freilich nicht ganz vergleichbare) Problem eines Fierz-unvollständigen Ansatzes im RG-Formalismus angerissen. Würde zum Beispiel in der mittleren effektiven Wirkung (3.19) nur einer der beiden quartischen Fermionterme angesetzt, wären die nachfolgenden Rechnungen nicht mehr selbstkonsistent durchführbar - der vernachlässigte Term würde unweigerlich generiert. Ignoriert man dies aber, so ergibt sich ein völlig anderes Verhalten der Theorie. Dies lässt sich sogar kontinuierlich beschreiben, indem man eine Redefinition der Kopplungen und damit auch Betafunktionen vornimmt,

$$s_\varphi = \tilde{g} \cos \varphi + g \sin \varphi, \quad g_\varphi = -\tilde{g} \sin \varphi + g \cos \varphi, \quad (5.21a)$$

$$\partial_t s_\varphi = \beta_{\tilde{g}} \cos \varphi + \beta_g \sin \varphi, \quad \partial_t g_\varphi = -\beta_{\tilde{g}} \sin \varphi + \beta_g \cos \varphi. \quad (5.21b)$$

Durch Erzwingen von $\partial_t g_\varphi = g_\varphi = 0$ wird Fierz-Unvollständigkeit implementiert. Die verbleibende Betafunktion kann nun mit den bekannten Methoden hinsichtlich spontaner Symmetriebrechung in Abhängigkeit von N_f und jetzt auch vom Winkel φ untersucht werden. Es ergibt sich folgendes Verhalten:

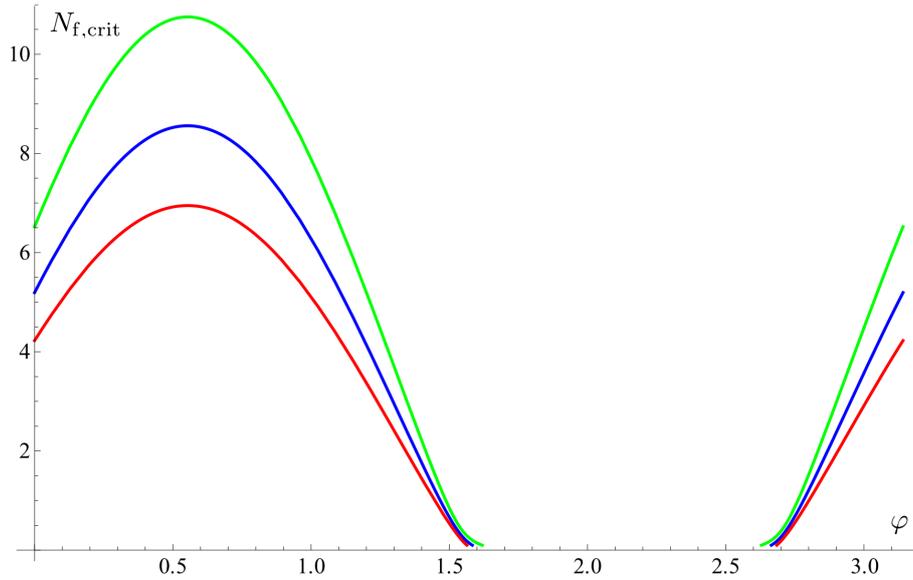


Abbildung 21: $N_{f, \text{crit}}(\varphi)$ für verschiedene Regulatoren (grün - optimierter Reg., blau - exponentieller Reg., rot - Callan-Symanzik-Reg.)

Wie aus Abb. 21 ersichtlich wird, sind die Folgen der Fierz-Unvollständigkeit dramatisch. Vom vollständigen Verschwinden der gebrochenen Phase bis hin zu Werten leicht über denen aus Tabelle 2 lassen sich alle möglichen $N_{f, \text{crit}}$ erzeugen.

Auch wenn dieses Beispiel nur der Illustration dient, so wird doch deutlich, dass eine sorgfältige Wahl des Ansatzes auch hinsichtlich möglicher Wechselwirkungen, bzw. Symmetriebrechungskanäle von entscheidender Bedeutung sein kann. Es wäre daher sehr interessant, Ergebnisse einer DSE-Rechnung mit dem alternativen Ansatz aus Gl. (5.20) vorliegen zu haben. Bereits angesichts der invertierten Form

$$S_{\mathcal{P}}(p^2, \xi) = \frac{(B(A^2 p^2 + B^2 + D^2 p^2 - C^2) + 2ACDp^2) \cdot \mathbb{1} - i(2ABC + D(-A^2 p^2 B^2 + C^2 + D^2 p^2)) \not{p}\gamma_{45}}{[(B+C)^2 + (A-D)^2 p^2] \cdot [(B-C)^2 + (A+D)^2 p^2]} + \frac{(C(A^2 p^2 - B^2 + C^2 + D^2 p^2) + 2ABDp^2) \cdot \gamma_{45} + i(2BCD + A(A^2 p^2 + B^2 + C^2 - D^2 p^2)) \cdot \not{p}}{[(B+C)^2 + (A-D)^2 p^2] \cdot [(B-C)^2 + (A+D)^2 p^2]} \quad (5.22)$$

ist allerdings zu erwarten, dass sich sowohl Verwendung als auch Auswertungen nach erfolgter Rechnung nicht gerade einfach gestalten würden.

5.3.3 Monte-Carlo-Simulationen

Der Vollständigkeit halber sind an dieser Stelle noch einige Bemerkungen zu numerischen Simulationen der QED₃ angebracht. Parallel zu den DSE-Rechnungen hat es schon lange Zeit Versuche gegeben [67], diese Theorie mit Monte-Carlo-Methoden auf dem Gitter zu untersuchen. Die Bestimmung eines kritischen Wertes $N_{f,\chi}$ ist dabei allerdings nicht unproblematisch, da gleich in mehrerer Hinsicht extrapoliert werden muss. Zunächst ist bei einer diskretisierten Theorie prinzipiell die Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie wie der interessierenden $U(2N_f)$ nicht möglich [68]. Stattdessen wird QED₃ mit verschiedenen endlichen Fermionmassen m_0 untersucht, der Erwartungswert $m \sim \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ bestimmt und dann nach $m_0 \rightarrow 0$ extrapoliert. Bleibt der Erwartungswert endlich, liegt für das betrachtete N_f chirale Symmetriebrechung vor. Bevor dies jedoch als sicheres Ergebnis angesehen werden kann, müssen auch die Gitterkonstante a sowie das Gittervolumen L^3 variiert werden, um einen Kontinuumslimites durchführen sowie Auswirkungen des endlichen Volumens, die effektiv einem Infrarot-Cutoff entsprechen, ausschließen zu können.

Unglücklicherweise sind es nicht nur die Extrapolationen selbst, welche die Bestimmung von $N_{f,\chi}$ verkomplizieren. Schon die Abschätzungen der dynamisch generierten Fermionmasse mittels Dyson-Schwinger-Gleichungen (siehe z.B. [62]) zeigen, dass bereits für kleine N_f der Wert von m nur noch von der Ordnung 10^{-3} ist, in relativer Nähe zu $N_{f,\chi}$ aber exponentiell abfällt. Es ist mit den genannten numerischen Verfahren schon an sich keine leichte Aufgabe, solche kleinen Größen noch zuverlässig zu berechnen, doch kommt noch erschwerend hinzu, dass mit sinkender dynamischer Masse die Auswirkungen des endlichen Volumens zunehmen [69]. Insofern können bisher praktisch nur untere Grenzen für $N_{f,\chi}$ gewonnen werden. In diesem Sinne kann mit einiger Sicherheit davon ausgegangen werden, dass $N_f = 1$ zu chiraler Symmetriebrechung führt [68], eine echte Vorhersage für $N_{f,\chi}$ liegt aber derzeit außerhalb der Möglichkeiten von Gittersimulationen.

6 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, die spontane Brechung der chiralen Symmetrien in (2+1)-dimensionaler Quantenelektrodynamik mit Methoden der funktionalen Renormierungsgruppe zu untersuchen. Um diese, insbesondere in Form der Wetterich-Gleichung, zur Anwendung bringen zu können, musste zunächst eine mittlere effektive Wirkung $\Gamma_k^{\text{QED}_3}$ konstruiert werden, welche die geforderten Symmetrien, d.h. \mathcal{C} , \mathcal{P} und \mathcal{T} sowie $U(2N_f)$ als Kombination der chiralen Transformationen und Flavorrotationen, und schließlich eine $U(1)$ -Eichsymmetrie, aufwies. Besonderes Augenmerk wurde dabei auf die Fierz-Vollständigkeit der fluktuationsinduzierten quartischen Fermionwechselwirkungen gelegt, da dies für eine adäquate Renormierungsgruppenuntersuchung unerlässlich war.

Den Zusammenhang zwischen der Divergenz fermionischer Kopplungen und spontaner Symmetriebrechung ausnutzend, wurden die Flussgleichungen der fermionischen Kopplungen aufgestellt und hinsichtlich ihrer Fixpunktstruktur untersucht. Weiterhin konnte der RG-Fluss der Eichkopplung, unter Umgehung der modifizierten Ward-Takahashi-Identität, näherungsweise bestimmt und in die Fixpunktanalyse miteinbezogen werden.

Das Ergebnis der letzteren ist tatsächlich, dass der für die QED₃ maßgebliche gaußsche Fixpunkt durch Annihilation mit einem der wechselwirkenden in Abhängigkeit vom Wert der Eichkopplung zum Verschwinden gebracht werden kann, woraufhin es zum Divergieren fermionischer Kopplungen kommt. Auch ließ sich zeigen, dass dies nur bis zu einer gewissen kritischen Flavorzahl $N_{f,\text{crit}} = 7 \dots 11$ geschieht, welche von der Wahl des Regulators abhängt. Aller Wahrscheinlichkeit nach resultiert dabei diese Regulatorabhängigkeit aus einer nicht hinreichend einbezogenen Impulsabhängigkeit der fermionischen Kopplungen, was in künftigen Arbeiten z.B. durch Erweiterung der Trunkierung um Terme höherer Ordnung in der Ableitungsentwicklung oder eine expliziten Behandlung in der bosonisierten Theorie behoben werden könnte.

Problematisch ist die nähere Charakterisierung der vermuteten Symmetriebrechung für $N_f < N_{f,\text{crit}}$. Es ist notwendig, näher zu bestimmen, welche Art von Symmetriebruch tatsächlich durch das Divergieren der fermionischen Kopplungen angezeigt wird, sodass möglicherweise $N_{f,\text{crit}} \not\cong N_{f,\chi}$ ist, wobei letzterer Wert für die kritische Flavorzahl *chiraler* Symmetriebrechung steht. Ein Vergleich mit der analogen fermionischen Theorie in [53] ergibt zwar zunächst ein identisches Divergenzverhalten und damit eine kritische Flavorzahl für chirale Symmetriebrechung von $N_{f,\chi} \approx 5.1$, doch gilt dies nur, wenn e^2 endlich bleibt, bzw. hinreichend langsam divergiert. Dies ist aber zweifelhaft, da die angenommene Näherung der mWTI nur in der Nähe von Fixpunkten Gültigkeit besitzt - bei Annihilation derselben bricht sie zusammen, wo-

durch der bis dahin den Fluss der Eichkopplung begrenzende Fixpunkt e_*^2 destabilisiert werden könnte. Um diese Frage aufzuklären, wäre in weiterführenden Arbeiten also sowohl eine geeignetere Behandlung der mWTI auch im symmetriebrechenden Regime nützlich, als auch eine dynamische Bosonisierung der QED₃ selbst.

Der Vergleich mit früheren RG-Untersuchungen derselben oder ähnlicher Theorien zeigt einerseits ebenfalls eine gewisse Unsicherheit bezüglich der Art der Symmetriebrechung, andererseits ein oft deutlich niedrigeres $N_{f,\text{crit}} \approx 4$. Gründe hierfür können sowohl die näherungsweise Annahme großer N_f in der entsprechenden Literatur als auch Abweichungen im Eichsektor der Theorie sein. Besonders letztere scheinen einen großen Einfluss zu besitzen, sodass es um so wichtiger erscheint, diesen Bereich der Theorie möglichst genau und konsistent zu behandeln.

Wenn auch methodisch anders als die Renormierungsgruppenverfahren, haben doch Untersuchungen mit Dyson-Schwinger-Gleichungen bisher ebenfalls kein einheitliches Bild der chiralen Symmetriebrechung in der QED₃ erbringen können. Je nach verwendetem Ansatz bzw. Näherungsverfahren ergaben sich Werte $N_{f,\chi} = 3 \dots \infty$, doch verdichten sich in letzter Zeit die Hinweise, dass zumindest $N_{f,\chi} \approx 3 \dots 5$ gelten sollte. Interessant ist dabei, dass bisher noch kaum die Möglichkeit gleichzeitiger Paritätsbrechung untersucht wurde, was in [66] erstmals geschah. Da dies durchaus mit den Renormierungsgruppenergebnissen vereinbar ist, wäre eine DSE-Analyse mit einem Ansatz, welcher Paritätsbrechung explizit zulässt, unter Umständen erhellend, was die bestehenden Diskrepanzen zwischen den vorhergesagten $N_{f,\chi}$ angeht. Es ist zumindest nicht auszuschließen, dass diese weitere Symmetriebrechung indirekt Einfluss auf den kritischen Wert für chirale Symmetriebrechung hätte.

Abschließend lässt sich feststellen, dass die Untersuchungen dieser Arbeit frühere Ergebnisse qualitativ bestätigen konnten, insbesondere was die Existenz eines endlichen $N_{f,\chi}$ angeht. Um quantitative Diskrepanzen näher aufzuklären bzw. zu beseitigen wären weitere Arbeiten am Eichsektor erforderlich, sowie wahrscheinlich eine Bosonisierung der Theorie. Komplementär dazu könnten DSE-Ansätze mit erweiterten Eigenschaften ebenfalls verbesserte Werte liefern. Und nicht zuletzt ist zu erwarten, dass auch numerische Analysen mit der zunehmenden Verfügbarkeit von Rechenleistung immer genauere Ergebnisse generieren werden. Bei aller bestehenden Diskrepanz ist also das Verständnis dieser im Detail so komplexen Theorie im Wachsen begriffen. Der Autor hofft, dass diese Arbeit einen Teil dazu beitragen kann.

A Konventionen und Notationen

A.1 Einheiten und Fourier-Transformation

Einheiten Übereinstimmend mit den meisten Veröffentlichungen zur modernen Teilchenphysik wurden Lichtgeschwindigkeit und Plancksches Wirkungsquantum auf

$$\hbar = 1 \quad \text{und} \quad c = 1 \quad (\text{A.1})$$

festgelegt. Damit lassen sich alle weiteren benötigten Größen in Potenzen der Energieeinheit (z.B. GeV) messen. Da sowohl Impuls bzw. wegen $E = mc^2$ auch Masse in GeV ausgedrückt werden, lassen sich insbesondere Felder und Kopplungsparameter anhand ihrer *Impulsdimension* klassifizieren. Zum Beispiel hätte ein Feld X mit $[X] = \text{GeV}^{-1}$ die Impulsdimension -1 .

Fourier-Transformation, Deltafunktion und funktionale Ableitung Für die Fourier-Transformation einer Funktion $f(x)$ gelte:

$$f(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tilde{f}(q) e^{iqx} \equiv \int_q \tilde{f}(q) e^{iqx}, \quad \tilde{f}(q) = \int d^3x f(x) e^{-iqx}. \quad (\text{A.2})$$

Für die Definition und Anwendung der Deltafunktion ergibt sich damit

$$\int d^3x e^{iqx} = \delta^{(3)}(q), \quad \int_q \delta^{(3)}(q-p) \tilde{f}(q) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \delta^{(3)}(q-p) \tilde{f}(q) = \tilde{f}(p). \quad (\text{A.3})$$

Entsprechend gilt für die funktionale Ableitung eines Feldes im Impulsraum

$$\frac{\delta X(p)}{\delta X(q)} = \delta^{(3)}(p-q). \quad (\text{A.4})$$

In vielen Fällen ist es nicht nötig, extra zu kennzeichnen, dass im Impulsraum gerechnet wird, weshalb, wie auch bereits in Gleichung (A.4), auf die Tilde verzichtet werden kann.

A.2 Euklidische Theorie

Relativistische Feldtheorien werden üblicherweise zunächst im Minkowski-Raum formuliert, d.h. in $d = 2 + 1$ Dimensionen findet die Metrik

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

oder eine zu ihr äquivalente, Anwendung. Diese Signatur führt dazu, dass das Skalarprodukt eines kovarianten Vektors mit seinem kontravarianten Partner $k_\mu k^\mu$ sehr klein sein oder sogar verschwinden kann, auch wenn die einzelnen Einträge groß sind. Konkret bedeutet dies, dass das Quadrat $p_\mu p^\mu$ der Viererimpulse eines Systems kein Maß mehr für dessen Energiegehalt ist. Genau ein solches wird aber für die Betrachtungen zur Renormierungsgruppe in Kapitel 2.2 zur Definition eine „Impulsskala“ k benötigt. Aus diesem Grund muss ein Übergang zur euklidischen Feldtheorie mit Metrik

$$\delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

vollzogen werden, in welcher das Skalarprodukt $k_\mu k^\mu \geq 0$ positiv definit ist. Geschehen kann dies durch *Wick-Rotation*, siehe z.B. [23], wobei euklidische Koordinaten (x_E) eingeführt werden:

$$x^0 \equiv ix_E^0, \quad x^1 = x_E^1, \quad x^2 = x_E^2. \quad (\text{A.7})$$

Ein Nebeneffekt ist, dass die Unterscheidung zwischen ko- und kontravarianten Vektoren für Anwendungszwecke bedeutungslos wird, $k_\mu = k^\mu$. Wenn im Text trotzdem sowohl untere als auch obere Indizes auftauchen, so geschieht dies ausschließlich aus Gründen der Lesbarkeit.

Während die Signatur der Metrik im Minkowski-Raum festlegt, welche Richtung Zeitcharakter besitzt, ist dies im euklidischen Fall zunächst nicht so offensichtlich. Insbesondere für Symmetrietransformationen wie Parität oder Zeitumkehr ist es aber trotzdem wichtig, festzulegen, welche Variable die Zeit repräsentieren soll. Im vorliegenden Fall wurde dafür in Übereinstimmung mit [38] $x_3 \equiv x_E^2$ ausgewählt.

Für eine ausführliche Diskussion weiterer Folgen der Wick-Rotation, insbesondere für den fermionischen Teil betrachteter Theorien, sei auf [34] verwiesen.

B Fierz-Transformationen

Betrachtet wird der für diese Arbeit relevante Fall einer vierdimensionalen Darstellung der Lorentzgruppe. Die zugehörigen 4×4 - γ -Matrizen und daraus abgeleitete weitere bilden eine Basis im Raum aller möglichen 4×4 -Matrizen:

$$\{\gamma^A\}_{A=1}^{16} = \{\mathbb{1}, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_{45}, \gamma_\mu, i\gamma_\mu\gamma_4, i\gamma_\mu\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}\}. \quad (\text{B.1})$$

Als Basis ist diese Menge von Matrizen vollständig

$$\frac{1}{4} \sum_{A=1}^{16} \gamma_{ml}^A \gamma_{ik}^A = \delta_{mk} \delta_{il} \quad (\text{B.2})$$

und ihre Elemente sind zueinander orthogonal (Tr_D sei eine Spur über Dirac-Indizes)

$$\text{Tr}_D [\gamma^A \gamma^B] = 4\delta^{AB}. \quad (\text{B.3})$$

Eine dritte Eigenschaft der γ^A , die Tatsache dass [70]

$$\gamma^A \gamma^B = \gamma^C \cdot \text{const}, \quad (\text{B.4})$$

also das Matrixprodukt zweier Basiselemente nicht auf eine komplizierte Linearkombination anderer Basiselemente, sondern direkt auf ein weiteres Basiselement mal eine Konstante führt, lässt sich dazu verwenden, einfache Beziehungen zwischen allgemeinen Termen mit vier Fermionfeldern der Form

$$(\bar{\psi}^a \gamma^A \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma^A \psi^d) \quad (\text{B.5})$$

herzustellen. Weitere Verallgemeinerungen sind möglich [70], werden aber für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Rechnung nicht benötigt.

In einem ersten Schritt wird Gleichung (B.2) mit dem Term (untere Indizes beziehen sich auf die Dirac-Struktur) $\bar{\psi}_m^a (\gamma^A \psi^b)_k \bar{\psi}_i^c (\gamma_A \psi^d)_l$ multipliziert:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_m^a (\gamma^A \psi^b)_k \bar{\psi}_i^c (\gamma_A \psi^d)_l \delta_{mk} \delta_{il} &= \frac{1}{4} \sum_{C=1}^{16} \gamma_{ml}^C \gamma_{ik}^C \bar{\psi}_m^a (\gamma^A \psi^b)_k \bar{\psi}_i^c (\gamma_A \psi^d)_l \\ (\bar{\psi}^a \gamma^A \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma^A \psi^d) &= -\frac{1}{4} \sum_{C=1}^{16} (\bar{\psi}^a \gamma^C \gamma^A \psi^d) (\bar{\psi}^c \gamma^C \gamma^A \psi^b) \\ (\bar{\psi}^a \gamma^A \psi^b) (\bar{\psi}^c \gamma^A \psi^d) &= \sum_{B=1}^{16} C_{AB} (\bar{\psi}^a \gamma^B \psi^d) (\bar{\psi}^c \gamma^B \psi^b), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

wobei die Matrix C_{AB} die Konstanten aus Gl. (B.4) enthält.

Damit ist eine Beziehung zwischen den interessierenden 4-Fermi-Termen gefunden, doch um auch nutzbar zu sein, müssen noch die Elemente von C_{AB} bestimmt werden. Um dies zu erreichen, wird die eben gefundene Beziehung ohne die Spinoren $\bar{\psi}$, ψ betrachtet:

$$\begin{aligned} \gamma_{mk}^A \gamma_{il}^A &= \sum_{B=1}^{16} C_{AB} \gamma_{ml}^B \gamma_{ik}^B \quad \Big| \cdot \gamma_{lm}^D \gamma_{ki}^D \\ \Rightarrow \text{Tr}_D [\gamma^D \gamma^A \gamma^D \gamma^A] &= \sum_{B=1}^{16} C_{AB} \text{Tr}_D [\gamma^D \gamma^B]^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{16} \text{Tr}_D [\gamma^D \gamma^A \gamma^D \gamma^A] &= C_{AD}, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

wobei auf der rechten Seite von der Orthogonalitätsrelation (B.3) Gebrauch gemacht wurde. Werden Elemente der Dirac-Basis zu Gruppen zusammengefasst, wie es sich zum Beispiel für die drei γ^μ anbietet, so muss ihr Erscheinen auf der linken Seite von (B.7) entsprechend normiert werden. Wenn N_B die Größe der jeweiligen Gruppe angibt, so muss das Endergebnis für die Berechnung der Koeffizientenmatrix

$$C_{AB} = \frac{1}{16N_B} \text{Tr}_D [\gamma^A \gamma^B \gamma^A \gamma^B] \quad (\text{B.8})$$

lauten. Für die Basis in der Darstellung (B.1) ergibt sie sich explizit zu [38]

$$C_{AB} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 & 1 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

C Schwellwertfunktionen

C.1 Definition und Allgemeines

Als praktisches Werkzeug zur kompakten Darstellung von Flussgleichungen sind die Schwellwertfunktionen erstmals in Kapitel 4 eingeführt worden, im Folgenden sollen sie nun definiert und für einige spezielle, in der Arbeit verwendete Regulatoren auch ausgewertet werden. Dabei wird auf volle Allgemeinheit verzichtet, da zum Beispiel die Masselosigkeit der QED₃ die Darstellung der Schwellwertfunktionen erheblich vereinfacht. Auch genügt es, den Spezialfall $d = 3$ -dimensionaler Integrale zu betrachten. Als Quelle für die im Folgenden angegebenen Definitionen sowie für allgemeinere Versionen derselben sei auf Überblicksartikel wie [20] verwiesen.

Gerade im Hinblick auf die diagrammatische Darstellung der Flussgleichung lassen sich die Schwellwertfunktionen als Integrale über die loop-Struktur auffassen. Gleich mit inbegriffen sind sowohl die Regularisierung als auch Abhängigkeiten von den anomalen Dimensionen der beteiligten Felder, da es sich innerhalb der Schleifen um volle Propagatoren handeln soll. Die regularisierten, inversen Propagatoren für Eich- bzw. Fermionfeld sind gegeben durch

$$P_{r_A}(q^2) = q^2 [1 + r_A(q^2/k^2)], \quad P_{r_\psi}(q^2) = q^2 [1 + r_\psi(q^2/k^2)]^2. \quad (\text{C.1})$$

Damit lässt sich nun auch ein expliziter Ausdruck für die modifizierte Skalenableitung angeben,

$$\tilde{\partial}_t = \frac{q^2}{Z_A} \frac{\partial(Z_A \cdot r_A)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P_{r_A}} + \frac{2}{Z_\psi} \frac{P_{r_\psi}}{1 + r_\psi} \frac{\partial(Z_\psi \cdot r_\psi)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial P_{r_\psi}} \quad (\text{C.2})$$

wobei auch dieser mit einer gewissen Vorsicht zu genießen ist. Explizit sichtbar macht er nämlich nicht, dass die $\tilde{\partial}_t$ -Ableitung grundsätzlich vor anderen Ableitungsoperatoren innerhalb der Schwellwertfunktionen, wie z.B. ∂_{q^2} ausgeführt werden muss. Aus diesem Grund wird für die nun folgenden Definitionen nicht nur die kompakte Schreibweise unter Verwendung der P_{r_A} und P_{r_ψ} angegeben, sondern auch eine ausführlichere, dafür aber eindeutigere.

$$\begin{aligned} l_\psi^{n>0} &= -k^{2n-3} \tilde{\partial}_t \int dq \frac{q^2}{P_{r_\psi}^n} = 2n \int_0^\Lambda dq k^{2n-3} q^4 \left(\frac{1}{Z_\psi} \frac{\partial(Z_\psi \cdot r_\psi)}{\partial t} \right) \frac{1 + r_\psi}{P_{r_\psi}^{n+1}} \\ &= 2nk^{2n-3} \int_0^\Lambda dq q^4 (\partial_t r_\psi - \eta_\psi r_\psi) \frac{1 + r_\psi}{P_{r_\psi}^{n+1}} \end{aligned} \quad (\text{C.3a})$$

$$\begin{aligned} l_{A,\psi}^{n_A, n_\psi} &= -k^{2n_A+2n_\psi-3} \tilde{\partial}_t \int dq \frac{q^2}{P_{r_A}^{n_A} P_{r_\psi}^{n_\psi}} \\ &= k^{2n_A+2n_\psi-3} \int dq q^2 \left[\frac{n_A}{Z_A} \frac{\partial(Z_A \cdot r_A)}{\partial t} \frac{1}{P_{r_A}} + \frac{2n_\psi}{Z_\psi} \frac{\partial(Z_\psi \cdot r_\psi)}{\partial t} \frac{1 + r_\psi}{P_{r_\psi}} \right] P_{r_A}^{-n_A} P_{r_\psi}^{-n_\psi} \\ &= k^{2n_A+2n_\psi-3} \int dq q^4 \left[n_A \frac{\partial_t r_A - \eta_A r_A}{P_{r_A}} + 2n_\psi \frac{1 + r_\psi}{P_{r_\psi}} (\partial_t r_\psi - \eta_\psi r_\psi) \right] P_{r_A}^{-n_A} P_{r_\psi}^{-n_\psi} \end{aligned} \quad (\text{C.3b})$$

$$\begin{aligned}
m_{A,\psi}^{n_A, n_\psi} &= -k^{2n_A+2n_\psi-5} \int dq q^4 \tilde{\partial}_t \left[\frac{1+r_\psi(q)}{P_{r_\psi}^{n_\psi}(q)} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial q^2} P_{r_A}(q)}{P_{r_A}^{n_A}(q)} \right] \\
&= k^{2n_A+2n_\psi-5} \int dq \frac{q^4}{q^{2n_\psi+2n_A-2} [1+r_\psi]^{2n_\psi-1} [1+r_A]^{n_A}} \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{\partial_t r_\psi - \eta_\psi r_\psi}{[1+r_\psi]} \frac{1+r_A+q^2 \partial_{q^2} r_A}{q^2} - \partial_{q^2} [\partial_t r_A] + \eta_A \partial_{q^2} r_A \right. \\
&\quad \left. + n_A \frac{\partial_t r_A - \eta_A r_A}{1+r_A} \partial_{q^2} r_A + (n_A-1) \frac{\partial_t r_A - \eta_A r_A}{q^2} \right\} \tag{C.3c}
\end{aligned}$$

$$\tilde{m}_{A,\psi}^{1,1} = -k \int dq q^2 \tilde{\partial}_t \left[\frac{1+r_\psi}{P_{r_\psi}} \frac{1}{P_{r_A}} \right] = k \int \frac{dq}{q^2} \left[\frac{\partial_t r_\psi - \eta_\psi r_\psi}{1+r_\psi} + \frac{\partial_t r_A - \eta_A r_A}{1+r_A} \right] \frac{1}{[1+r_\psi][1+r_A]} \tag{C.3d}$$

C.2 Auswertung für spezielle Regulatoren

Zunächst sind die Definitionen aller in der Arbeit verwendeten Regulatoren bzw. deren Shapefunktionen anzugeben. Dabei ist $y \equiv \frac{q^2}{k^2}$.

Callan-Symanzik-Regulator R_{CS} :

$$r_\psi = \sqrt{\frac{y+1}{y}} - 1 \quad r_A = \frac{1}{y} \tag{C.4}$$

Exponentieller Regulator R_{exp} :

$$r_\psi = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-y}}} - 1 \quad r_A = \frac{1}{e^y - 1} \tag{C.5}$$

Optimierter Regulator R_{opt} :

$$r_\psi = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) \Theta(1-y) \quad r_A = \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \Theta(1-y) \tag{C.6}$$

Sharp-Cutoff-Regulator R_{SC} :

$$r_\psi = \lim_{b \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{y^b}} - 1 \quad r_A = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{y^b} \tag{C.7}$$

Für den Sharp-Cutoff gibt es auch andere Definitionen, so zum Beispiel als Grenzfall des optimierten [53] anstatt des Callan-Symanzik-Regulators wie hier angesetzt. Letztlich sollten diese aber äquivalent sein. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Funktionen l_ψ^1 , $l_{A,\psi}^{1,1}$, $l_{A,\psi}^{2,1}$, $m_{A,\psi}^{2,1}$ sowie $\tilde{m}_{A,\psi}^{1,1}$ sind in der folgenden Tabelle für die vier obigen Regulatoren aufgelistet. Dabei kann jede Schwellwertfunktion aus bis zu drei Anteilen bestehen: einem rein numerischen Beitrag (\mathcal{N}), einem $\sim \eta_\psi$ und einem $\sim \eta_A$.

		R_{CS}	R_{exp}	R_{opt}	R_{SC}
l_ψ^1	\mathcal{N}	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
	$\sim \eta_\psi$	-0.858407	-0.306377	$-\frac{1}{6}$	-
$l_{A,\psi}^{1,1}$	\mathcal{N}	$\frac{\pi}{4}$	1.03828	$\frac{4}{3}$	1
	$\sim \eta_\psi$	-0.237463	-0.208436	$-\frac{1}{6}$	-
	$\sim \eta_A$	$-\frac{\pi}{16}$	-0.170823	$-\frac{2}{15}$	-
$l_{A,\psi}^{2,1}$	\mathcal{N}	$\frac{3\pi}{16}$	1.02494	2	1
	$\sim \eta_\psi$	-0.126032	-0.153062	$-\frac{1}{6}$	-
	$\sim \eta_A$	$-\frac{\pi}{16}$	-0.243833	$-\frac{4}{15}$	-
$m_{A,\psi}^{2,1}$	\mathcal{N}	$\frac{2}{3}$	0.821746	1	$\frac{2}{3}$
	$\sim \eta_\psi$	-0.077618	-0.043037	0	-
	$\sim \eta_A$	$-\frac{4}{15}$	-0.26131	$-\frac{1}{4}$	-
$\tilde{m}_{A,\psi}^{1,1}$	\mathcal{N}	1	1.23262	$\frac{3}{2}$	1
	$\sim \eta_\psi$	-0.214602	-0.19434	$-\frac{1}{6}$	-
	$\sim \eta_A$	$-\frac{1}{3}$	-0.298558	$-\frac{1}{4}$	-

Tabelle 4: Auswertung der Schwellwertfunktionen

Es sei bemerkt, dass der Sharp-Cutoff-Regulator nicht ganz unproblematisch ist, da bei Vertauschung des $\lim_{b \rightarrow \infty}$ mit Ableitungsoperationen insbesondere für $m_{A,\psi}^{2,1}$ abweichende Ergebnisse generiert werden können. Die mit den hier angegebenen Werten durchgeführten Rechnungen sind also streng genommen auch nur für die hier angewandte Reihenfolge gültig.

Literatur

- [1] M. Planck, *Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum*, Ann. Phys. (Leipzig) **309**, 553 (1901).
- [2] A. Einstein, *Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt*, Ann. Phys. (Leipzig) **322**, 132 (1905).
- [3] J. Schwinger, *On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron*, Phys. Rev. **73**, 416 (1948).
- [4] T. Appelquist und R. D. Pisarski, *High-temperature Yang-Mills theories and three-dimensional quantum chromodynamics*, Phys. Rev. D **23**, 2305 (1981).
- [5] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik V - Statistische Physik Teil 1* (Akademie-Verlag, 1987).
- [6] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I*, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [7] J. Goldstone, *Field theories with „Superconductor“ Solutions.*, Nuovo Cimento **19**, 154 (1961).
- [8] L. P. Kadanoff, *Scaling laws for Ising models near T_c* , Physics (N.Y.) **2**, 263 (1966).
- [9] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. Dubonos, I. Grigorieva, und A. Firsov, *Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films*, Science **306**, 666 (2004).
- [10] J. G. Bednorz und K. A. Müller, *Possible high T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system*, Z. Phys. B **64**, 189 (1986).
- [11] J. E. Moore, *The birth of topological insulators*, Nature **464**, 194 (2010).
- [12] K. von Klitzing, *The quantized Hall effect*, Rev. Mod. Phys. **58**, 519 (1986).
- [13] O. Klein, *Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac*, Z. Phys. A **53**, 157 (1929).
- [14] G. W. Semenoff, *Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly*, Phys. Rev. Lett. **53**, 2449 (1984).
- [15] I. F. Herbut, *QED₃ theory of underdoped high-temperature superconductors*, Phys. Rev. B **66**, 094504 (2002), arXiv:cond-mat/0202491.
- [16] C. Strouthos und J. B. Kogut, *Chiral Symmetry Breaking in Three Dimensional QED*, J. Phys.: Conf. Ser. **150**, 052247 (2009), arXiv:0808.2714 [cond-mat.supr-con].
- [17] D. Curtis, M. Pennington, und D. Walsh, *Dynamical mass generation in QED₃ and the 1/N expansion*, Phys. Lett. B **295**, 313 (1992).
- [18] K. G. Wilson, *The Renormalization Group and Critical Phenomena*, Nobel Lecture (1982), <http://www.nobelprize.org>.
- [19] H. Gies, *Introduction to the Functional RG and Applications to Gauge Theories*, arXiv:hep-th/0611146.
- [20] J. Berges, N. Tetradis, und C. Wetterich, *Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics*, Phys. Rep. **363**, 223 (2002), arXiv:hep-ph/0005122.
- [21] J. Braun, *Functional Renormalization Group Methods in Quantum Chromodynamics*, Doktorarbeit, Universität Heidelberg (2006), <http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/7040>.
- [22] J. Braun, *Fermion interactions and universal behavior in strongly interacting theories*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **39**, 1 (2012), arXiv:1108.4449 [hep-ph].
- [23] M. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995).
- [24] T. Kugo, *Eichtheorie* (Springer, 1997).

- [25] A. Altland und B. Simons, *Condensed Matter Field Theory* (Cambridge University Press, 2010).
- [26] H. Gies, *Vorlesung Quantenfeldtheorie* (SS09), Universität Jena.
- [27] H. Gies, *Vorlesung Physik der Skalen* (WS11/12), Universität Jena.
- [28] C. Wetterich, *Exact evolution equation for the effective potential*, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
- [29] A. Janot, *The Impact of Confining Dynamics on chiral Symmetry Breaking in QCD*, Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [30] L. Faddeev und V. Popov, *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967).
- [31] M. Reuter und C. Wetterich, *Effective average action for gauge theories and exact evolution equations*, Nucl. Phys. B **417**, 181 (1994).
- [32] M. Reuter und C. Wetterich, *Gluon condensation in nonperturbative flow equations*, Phys. Rev. D **56**, 7893 (1997), arXiv:hep-th/9708051.
- [33] H. Gies, *Running coupling in Yang-Mills theory: A flow equation study*, Phys. Rev. D **66**, 025006 (2002), arXiv:hep-th/0202207.
- [34] C. Wetterich, *Spinors in euclidean field theory, complex structures and discrete symmetries*, Nucl. Phys. B **852**, 174 (2011), arXiv:1002.3556 [hep-th].
- [35] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I - Foundations* (Cambridge University Press, 2005).
- [36] R. D. Pisarski, *Chiral-symmetry breaking in three-dimensional electrodynamics*, Phys. Rev. D **89**, 2423 (1984).
- [37] T. W. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali, und L. Wijewardhana, *Spontaneous chiral-symmetry breaking in three-dimensional QED*, Phys. Rev. D **33**, 3704 (1986).
- [38] H. Gies und L. Janssen, *UV fixed-point structure of the three-dimensional Thirring model*, Phys. Rev. D **82**, 085018 (2010), arXiv:1006.3747 [hep-th].
- [39] M. Gomes, R. Mendes, R. Ribeiro, und A. da Silva, *Gauge structure, anomalies, and mass generation in a three-dimensional Thirring model*, Phys. Rev. D **43**, 3516 (1991).
- [40] J. M. Pawłowski, *Aspects of the functional renormalisation group*, Ann. Phys. (NY) **322**, 2831 (2007), arXiv:hep-th/0512261.
- [41] D. F. Litim, *Optimized renormalization group flows*, Phys. Rev. D **64**, 105007 (2001), arXiv:hep-th/0103195.
- [42] H. Gies und J. Jaeckel, *Renormalization Flow of QED*, Phys. Rev. Lett. **93**, 110405 (2004), arXiv:hep-ph/0405183.
- [43] I. F. Herbut, V. Juricic, und B. Roy, *Theory of interacting electrons in the honeycomb lattice*, Phys. Rev. B **79**, 085116 (2009), arXiv:0811.0610 [cond-mat.str-el].
- [44] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachr. D. Königl. Gesellsch. D. Wiss. Zu Göttingen pp. 235–257 (1918), arXiv:physics/0503066.
- [45] J. Goldstone, A. Salam, und S. Weinberg, *Broken Symmetries*, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [46] D. D. Scherer und H. Gies, *Renormalization group study of magnetic catalysis in the 3d Gross-Neveu model*, Phys. Rev. B **85**, 195417 (2012), arXiv:1201.3746 [cond-mat.str-el].
- [47] R. L. Stratonovich, *On a Method of Calculating Quantum Distribution Functions*, Soviet Phys. Doklady **2**, 416 (1957).
- [48] J. Hubbard, *Calculation of Partition Functions*, Phys. Rev. Lett. **3**, 77 (1959).
- [49] U. Ellwanger, M. Hirsch, und A. Weber, *Flow equations for the relevant part of the pure Yang-Mills action*, Z. Phys. C **69**, 687 (1996).
- [50] H. Gies, J. Jaeckel, und C. Wetterich, *Towards a renormalizable standard model without a fundamental Higgs scalar*, Phys. Rev. D **69**, 105008 (2004), arXiv:hep-ph/0312034.

- [51] S. Deser, R. Jackiw, und S. Templeton, *Topologically massive gauge theories*, Ann. Phys. (NY) **140**, 372 (1982).
- [52] K. Kaveh und I. F. Herbut, *Chiral symmetry breaking in three-dimensional quantum electrodynamics in the presence of irrelevant interactions: A renormalization group study*, Phys. Rev. B **71**, 184519 (2005), arXiv:cond-mat/0411594.
- [53] L. Janssen, *Critical phenomena in (2+1)-dimensional relativistic fermion systems*, Doktorarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- [54] V. A. Miransky und K. Yamawaki, *Conformal phase transition in gauge theories*, Phys. Rev. D **55**, 5051 (1997), arXiv:hep-th/9611142.
- [55] J. Braun, C. S. Fischer, und H. Gies, *Beyond Miransky scaling*, Phys. Rev. D **84**, 034045 (2011), arXiv:1012.4279 [hep-ph].
- [56] H. Gies und C. Wetterich, *Renormalization flow of bound states*, Phys. Rev. D **65**, 065001 (2002), arXiv:hep-th/0107221.
- [57] J. E. Drut und D. T. Son, *Renormalization group flow of quartic perturbations in graphene: Strong coupling and large- N limits*, Phys. Rev. B **77**, 075115 (2008), arXiv:0710.1315 [cond-mat.str-el].
- [58] K.-I. Kubota und H. Terao, *Dynamical Symmetry Breaking in QED_3 from the Wilson RG Point of View*, Prog. Theor. Phys. **105**, 809 (2001), arXiv:hep-ph/0101073.
- [59] F. J. Dyson, *The S Matrix in Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
- [60] J. Schwinger, *On the Green's functions of quantized fields. I+II*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37**, 452 (1951).
- [61] R. Alkofer und L. von Smekal, *The infrared behaviour of QCD Green's functions: Confinement, dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states*, Phys. Rep. **353**, 281 (2001), arXiv:hep-ph/0007355.
- [62] C. S. Fischer, R. Alkofer, T. Dahm, und P. Maris, *Dynamical chiral symmetry breaking in unquenched QED_3* , Phys. Rev. D **70**, 073007 (2004), arXiv:hep-ph/0407104.
- [63] T. W. Appelquist, D. Nash, und L. Wijewardhana, *Critical Behaviour in (2+1)-Dimensional QED*, Phys. Rev. Lett. **60**, 2575 (1988).
- [64] D. Nash, *Higher-order corrections in (2+1)-dimensional QED*, Phys. Rev. Lett. **62**, 3024 (1989).
- [65] P. Maris, *Influence of the full vertex and vacuum polarization on the fermion propagator in (2+1)-dimensional QED*, Phys. Rev. D **54**, 4049 (1996), arXiv:hep-ph/9606214.
- [66] P. M. Lo und E. S. Swanson, *Parity symmetry in QED_3* , Phys. Rev. D **83**, 065006 (2011), arXiv:1010.1244 [hep-ph].
- [67] E. Dagotto, J. B. Kogut, und A. Kocic, *Computer Simulation of Chiral-Symmetry Breaking in (2+1)-Dimensional QED with N Flavors*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1083 (1989).
- [68] S. J. Hands, J. B. Kogut, L. Scorzato, und C. Strouthos, *Noncompact three-dimensional quantum electrodynamics with $N_f = 1$ and $N_f = 4$* , Phys. Rev. B **70**, 104501 (2004), arXiv:hep-lat/0404013.
- [69] V. Gusynin und M. Reenders, *Infrared cutoff dependence of the critical flavor number in three-dimensional QED*, Phys. Rev. D **68**, 025017 (2003), arXiv:hep-ph/0304302.
- [70] J. F. Nieves und P. B. Pal, *Generalized Fierz Identities*, Amer. J. Phys. **72**, 1100 (2004), arXiv:hep-ph/0306087.

Danksagung

So unmöglich wie eine Anfertigung dieser Arbeit ohne die vielfältige Unterstützung, welche mir zuteil wurde, gewesen wäre, so gerne möchte ich mich bei den hinter dieser Unterstützung stehenden Personen bedanken.

Professor Holger Gies war es, dessen unvergleichlich gute Vorlesungen zur Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie das Interesse an diesem Fachgebiet in mir nachhaltig weckten. Bedanken möchte ich mich bei ihm für die Möglichkeit, erst die Studien- und schließlich diese Diplomarbeit in seiner Arbeitsgruppe anfertigen zu dürfen, aber auch für die Teilnahme an Konferenzen und schließlich sogar die Gelegenheit, erlernte Kenntnisse an jüngere Semester weitergeben zu dürfen. Es ist nicht in Worte zu fassen, wie viel ich durch all dies, aber auch durch seine Antworten auf meine Fragen, von ihm lernen durfte. Für diese intensive Betreuung, sowohl während der Diplomarbeit als auch schon vorher, kann ich ihm nicht genug danken, ist dies doch wahrlich keine Selbstverständlichkeit!

Gleiches gilt für Professor Jens Braun. In den ungezählten Stunden der Fragen und Diskussionen, der gemeinsamen Fehlersuche und Ergebnisinterpretation formte sich ein Großteil meines in dieser Arbeit dargelegten Verständnisses der QED₃. Der dabei oft weit über dieses Thema hinausgehende Wissenszuwachs ist ein direktes Resultat seiner Geduld, der vielen Zeit, die er sich für meine Fragen nahm und seiner Erklärungsgabe. Auch möchte ich ihm für sein Vertrauen danken, sowohl was die Lehre als auch zukünftige Projekte betrifft. Ich werde mein Bestes geben, um dieses zu rechtfertigen!

Lukas Janssen danke ich besonders für seine Einführung in fermionische Feldtheorien. Von großer Wichtigkeit für mich war aber auch seine Bereitschaft, Fragen zu beantworten, wann immer ich mit ihnen zu ihm kam, und dass er sich dabei nie von meiner enormen Schusselfehlerdichte abschrecken ließ.

René Sondenheimer und meinem großen Schwesterchen Almut danke ich für ihre Korrekturlesungen, welche der Lesbarkeit dieser Arbeit sehr zuträglich waren.

Meinen Kommilitonen vom „vergessenen“ Sommersemester 2007 möchte ich für das gemeinsame Überstehen all der zahlreichen Widersprüche zwischen Realität und Studienordnung danken. Jetzt sind wir tatsächlich doch noch Physiker geworden...

Während fast meines gesamten Studiums wurde ich von der Studienstiftung des Deutschen Volkes gefördert. Ihr, bzw. meinen Referenten möchte ich sowohl für die finanzielle Unterstützung, als auch die Eröffnung der vielen Möglichkeiten danken, an welche ich zuvor nicht im Traum gedacht hatte.

Der zuunerst stehende, weil an Menschen gerichtet fundamentalste Dank, gebührt meinen Eltern. Ich weiß nicht, wo ich da anfangen und aufhören soll, deswegen an dieser Stelle nur was mir spontan und direkt zum Thema einfällt: es war ja nicht alles nur Sonnenschein, während diese Arbeit Gestalt annahm. Das letzterer so vergleichsweise schnell zurückkehrte, ist vor allem auch euch zu verdanken. Und dass ihr, denen ein Unrechtsstaat die Möglichkeit eines eigenen Studiums verwehrt hat, so ausdauernd und begeistert dabei seid, wenn ich von diesen Quantenkonstrukten hier erzähle, war und ist mir eine riesige Motivation!

Der Weisheit Anfang ist die Furcht der HERRN, und den Heiligen erkennen, das ist Verstand.

Sprüche 9,10

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Jena, 25.07.2012

.....
Unterschrift

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Diplomarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

Jena, 25.07.2012

.....
Unterschrift