

Friedrich-Schiller-Universität Jena  
Physikalisch-Astronomische Fakultät  
Theoretisch-Physikalisches Institut



## Masterarbeit

zum Erlangen des akademischen Grades eines  
Master of Science

# Theoretische Analyse der Vakuumdoppelbrechung im Feld eines Hochintensitätslasers

vorgelegt von Chantal Sundqvist,  
geboren am 01.06.1993 in München

Jena, 21. Dezember 2016

Erstgutachter:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Holger Gies  
Theoretisch-Physikalisches Institut  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

Zweitgutachter:

Dr. rer. nat. Felix Karbstein  
Theoretisch-Physikalisches Institut  
Friedrich-Schiller-Universität Jena

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>1 Grundlagen der Vakuumdoppelbrechung</b>	<b>5</b>
1.1 Quantentheoretische Grundlagen . . . . .	5
1.1.1 Die effektive Wirkung . . . . .	5
1.1.2 Die Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion . . . . .	8
1.2 Der Effekt der Doppelbrechung im Quantenvakuum . . . . .	15
1.2.1 Theoretische Beschreibung . . . . .	15
1.2.2 Experimentelle Beschreibung – Elliptizität . . . . .	17
<b>2 Vakuumdoppelbrechung als Vakuumemissionsprozess</b>	<b>20</b>
2.1 Der Vakuumemissionsprozess . . . . .	20
2.2 Feldkonfigurationen von Pump- und Probe-Laser . . . . .	25
2.3 Signalphotonenanzahl bei expliziten Feldkonfigurationen . . . . .	29
2.3.1 Matrixelement $\mathcal{M}$ . . . . .	29
2.3.2 Verteilung der Signalphotonen . . . . .	30
<b>3 Ergebnisse</b>	<b>34</b>
3.1 Laserparameter . . . . .	34
3.2 Exakt gegenläufige Anordnung . . . . .	36
3.2.1 Matrixelement $\mathcal{M}$ . . . . .	36
3.2.2 Differenzielle Anzahl der Signalphotonen . . . . .	37
3.2.3 Signalphotonenanzahl . . . . .	40
3.3 Gegenläufige Anordnung mit verschobenem Probe-Strahl . . . . .	44
3.4 Gegeneinander verkippte Anordnung . . . . .	50
3.5 Approximatives Ergebnis für die Signalphotonenanzahl . . . . .	52
<b>Zusammenfassung</b>	<b>56</b>



# Einführung

Die Quantenelektrodynamik (QED) ist „immer noch das paradigmatische Beispiel einer erfolgreichen Quantenfeldtheorie“. Dies schreibt der 1979 für seine Arbeit zur Vereinheitlichung der schwachen Wechselwirkung mit der Elektrodynamik mit dem Nobelpreis ausgezeichnete Physiker S. Weinberg in seinem zu den Klassikern gehörenden Lehrbuch „The Quantum Field Theory“ [1] im Hinblick auf die vielen exzellenten Übereinstimmungen dieser Theorie mit experimentellen Ergebnissen im Bereich der Atomphysik und in Beschleuniger-Experimenten. So stimmt zum Beispiel das QED-Ergebnis für das anomale magnetische Moment des Elektrons  $g$  bis auf die zwölfte Nachkommastelle mit dem experimentellen Ergebnis überein [2]. Mit der QED wurde Ende der 1940er Jahren u. a. von F. Feynman, F. Dyson, J. Schwinger und S. Tomonaga die erste Theorie entwickelt, die mit der Quantenmechanik und der speziellen Relativitätstheorie vereinbar ist. Der Gegenstand der QED ist die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie, in Form von Elektronen und Positronen. Auf Grund der omnipräsenten Quantenfluktuationen sind letztere auch im Vakuum als virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare vorhanden, was schon vor der eigentlichen Entwicklung der QED als Ursache einer Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum erkannt wurde. Einen entscheidenden Beitrag hierzu lieferten W. Heisenberg und H. Euler mit einer nach ihnen benannten Lagrange-Funktion, die die nicht-lineare Dynamik eines langsam veränderlichen elektromagnetischen Feldes beschreibt [3]. Weitere bedeutende Arbeiten auf diesem Gebiet stammen u.a. von B. Kockel [4] und V. Weisskopf [5]. Die Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion wurde 1951 von J. Schwinger im Rahmen der QED erneut hergeleitet [6].

Die Effekte durch die Nichtlinearität des Quantenvakuums, die durch die Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion beschrieben werden, sind vielfältig, z.B. Photon-Photon-Streuung [7–13], Quantenreflektion [14, 15], Photon-Merging [16–20] und -Splitting [21–29]. Experimentelle Ergebnisse in diesem Bereich sind von besonderem Interesse, weil die QED durch die Untersuchung dieser Effekte in einem völlig anderen Parameterbereich als bisher getestet wird. Es besteht auch die Möglichkeit, dass bisher unbekannte Teilchen in einer ähnlichen Weise wie die Elektron-Positron-Paare eine nichtlineare Wechselwirkung in einem starken elektromagnetischen Feld im Vakuum hervorrufen. Diese würden sich als Abweichung von QED-Vorhersagen in einem Experiment äußern. Übersichtsartikel zu der Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion und den durch sie beschriebenen Effekten sind in [30–38] gegeben.

Einer dieser Effekte, für den der experimentelle Nachweis noch aussteht (bzw. möglicherweise kürzlich durch die Messung an einem Neutronenstern mit einem starken Magnetfeld erbracht wurde [39]) ist die Vakuumdoppelbrechung [21, 22, 40–42]. Hierbei gibt ein externes elektromagnetisches Feld dem Vakuum eine Vorzugsrichtung. Die geladenen Teilchen-Antiteilchen-Paare, welche den virtuellen Zustand von Photonen bilden, koppeln an das externe Feld. Hierdurch wird die Propagation der Photonen beeinflusst und zwar unterschiedlich für die Polarisationsrichtungen senkrecht und parallel zu der Vorzugsrichtung. Effektiv ergeben sich

zwei polarisationsabhängig Brechungsindizes für das Quantenvakuum. Wie für ein klassisches doppelbrechendes Medium resultiert dies für Licht mit einer anfänglich linearen Polarisation in einer Änderung dieser hin zu elliptisch polarisiertem Licht. In verschiedenen Experimenten wird aktuell versucht diese Elliptizität nach Durchquerung eines starken Magnetfeldes zu messen (PVLAS [43, 44], BMV [45, 46]). Ein neuerer Vorschlag hierzu ist in [47] zu finden. Eine alternative Betrachtungsweise ergibt sich aus dem Teilchencharakter der Photonen. Am Anfang befinden sich bei einem linear polarisierten Lichtstrahl alle Photonen im selben Polarisationszustand. Unter dem Einfluss des externen elektromagnetischen Feldes werden einige Photonen in den dazu senkrechten Polarisationszustand gestreut, was sich makroskopisch in der besagten Elliptizität äußert. Diese Signalphotonen bilden eine eindeutig der Vakuumdoppelbrechung zuzuordnende Signatur in einem möglichen Verifikationsexperiment.

Als experimenteller Aufbau bietet es sich wie in [48] vorgeschlagen an, das externe elektromagnetische Feld durch einen Hochintensitätslaser (Pump-Laser) im Frequenzbereich optischen Lichts zu generieren und dies mit einem Frei-Elektronen-Laser (Probe-Laser) mit möglichst kleiner Wellenlänge (Röntgenstrahlung) zu sondieren (siehe auch [49, 50]). Alternativ kann auch Dipol-, Synchrotron- oder Gammastrahlung verwendet werden [42, 51, 52]. Ein Experiment dieser Art könnte in naher Zukunft am HIBEF [53] beim „European XFEL“ [54] am DESY bei Hamburg durchgeführt werden.

Eine theoretische Analyse dieses Szenarios ist beispielsweise in [55] und [56] zu finden und ist auch Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Der Fokus liegt hier auf einer möglichst realistischen Modellierung von Pump- und Probe-Laser, was in Form von Gaußschen Pulsen erfolgt, und einer freien Wahl der Anordnung der Laser zueinander, d.h. die Möglichkeit eines Offsets zwischen den beiden Strahlen wird berücksichtigt und der von ihnen eingeschlossene Winkel ist frei wählbar. Zudem wird ein im Allgemeinen elliptischer Querschnitt für den Probe-Strahl verwendet. Dadurch dass der Probe-Puls nicht-divergent und von endlicher transversalen Ausdehnung ist, besitzen auch die Signalphotonen, die im Interaktionsbereich mit dem Pump-Puls induziert werden, eine endliche Divergenz. Bei passender Wahl der Strahlparameter kann diese im Fernfeld sehr viel größer sein als die des ursprünglichen Probe-Strahls. Das von letzterem verursachte, bei der Messung störende Hintergrundsignal unterschreitet somit ab einem bestimmten Winkelabstand von der optischen Achse eine Schwelle, ab der die Messgenauigkeit der Polarisation moderner Instrumente zum Nachweis der Signalphotonen ausreicht. Durch die Berücksichtigung dieses Aspekts ergibt sich ein Vorteil gegenüber anderen Machbarkeitsstudien wie etwa [57], bei der nur Signalphotonen berücksichtigt werden können, die exakt in Vorwärtsrichtung gestreut werden.

Die vorliegende Arbeit ist in drei übergeordnete Teile eingeteilt. Im ersten Teil werden die theoretischen Grundlagen zur Vakuumdoppelbrechung in Form einer Herleitung der Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion gelegt. Es wird betrachtet, wie sich hieraus der von der Polarisation abhängige Brechungsindex des Vakuums ergibt und was in einem Experiment bezüglich der Elliptizität zu erwarten ist. Im zweiten Teil wird der Formalismus für die Beschreibung der Signalphotonen als Produkt eines Vakuumemissionsprozesses eingeführt und auf eine bestimmte Feldkonfiguration von Probe- und Pump-Laser angewandt, was auf eine differentielle Anzahl an Signalphotonen führt. Der dritte Teil ist den Ergebnissen der Anzahl an Signalphotonen für unterschiedliche Parametersätze gewidmet, wobei insbesondere darauf eingegangen wird, welchen Einfluss die einzelnen Parameter haben.

# Kapitel 1

## Grundlagen der Vakuumdoppelbrechung

Die im Kontext der Quantenelektrodynamik (QED) mit der Erzeugung virtueller Elektron-Positron-Paare im Vakuum assoziierten nicht-linearen Effekte bei Anwesenheit eines konstanten (sich langsam verändernden) elektromagnetischen Feldes, wie zum Beispiel die Vakuumdoppelbrechung, können mit Hilfe der 1936 von W. Heisenberg und H. Euler [3] erstmals hergeleiteten Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion beschrieben werden. Da diese die theoretische Grundlage aller weiteren, für diese Arbeit relevanten Betrachtungen bildet, wird in diesem Kapitel eine ausführliche Herleitung geliefert. Zudem wird erörtert, wie sich der Effekt der Doppelbrechung im Vakuum aus den Bewegungsgleichungen für Photonen in einem externen Feld ergibt und welche im Experiment üblicherweise beobachtete Signatur dieser hervorruft.

### 1.1 Quantentheoretische Grundlagen

Im Folgenden wird die Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion ausgehend von grundlegenden Begriffen der Quantenfeldtheorie (QFT) – dem erzeugenden Funktional  $\mathcal{Z}$  und der effektiven Wirkung  $\Gamma$  – hergeleitet.

#### 1.1.1 Die effektive Wirkung

Ein Schlüsselobjekt der QFT ist das erzeugende Funktional  $\mathcal{Z}[J]$ . Dieses beschreibt die Übergangsamplitude von Vakuum zu Vakuum für ein Feld bei Anwesenheit eines weiteren, äußeren Quelle  $J(x)$ . Dargestellt werden kann es daher als Funktionalintegral

$$\mathcal{Z}[J] = \langle 0|0 \rangle_J = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\chi e^{-\mathcal{S}[\chi] + \int_x J\chi} \quad (1.1.1)$$

mit der klassischen Wirkung  $\mathcal{S}[\chi]$  und dem UV(ultraviolett)-Cutoff  $\Lambda$ . Dabei repräsentiert  $\chi(x)$  alle für die betrachtete Theorie relevanten Felder, d.h. im Fall der QED  $\chi = (\psi, \bar{\psi}, \mathcal{A})$  mit dem konjugierten fermionischen Feld  $\bar{\psi}$ , dem fermionischen Feld  $\psi$  (Elektron) und dem Photonen-Feld  $\mathcal{A}$ . Zudem definiert sich das sogenannte Schwinger-Funktional  $W[J]$  über das erzeugende Funktional:

$$\mathcal{Z}[J] = e^{W[J]}. \quad (1.1.2)$$

Aus der funktionalen Ableitung des Schwinger-Funktional

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(x)} W[J] &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \ln \mathcal{Z}[J] \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\chi \exp \left\{ -S[\chi] + \int d^d x \chi(x) J(x) \right\} \chi(x)}{\int \mathcal{D}\chi \exp \left\{ -S[\chi] + \int d^d x \chi(x) J(x) \right\}} = \langle \chi(x) \rangle_J \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

ergibt sich der Erwartungswert der Felder  $\chi$ , welche sich unter dem Einfluss einer äußeren Quelle  $J(x)$  befinden, und als Definition des klassischen Feldes

$$\phi(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \langle \chi(x) \rangle_J \quad (1.1.4)$$

dient.

Die Legendre-Transformation des Schwinger-Funktional resultiert in der effektiven Wirkung

$$\Gamma[\phi] = \sup_J \left( -W[J] + \int J\phi \right), \quad (1.1.5)$$

welche wiederum die Beschreibung der Dynamik des Erwartungswert  $\phi(x)$  der Felder  $\chi$  unter Einbeziehung aller Quantenfluktuationen ermöglicht. Dies zeigt sich an der ersten Ableitung der effektiven Wirkung

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = \int_y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(x)} \phi(y) + J(x) - \int_y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi(x)} \stackrel{(1.1.4)}{=} J(x), \quad (1.1.6)$$

die die äußere Quelle  $J(x)$  zurückgibt.

Aus den vorangegangenen Gleichungen ergibt sich ein Zusammenhang, aus dem sich  $\Gamma[\phi]$  bestimmen lässt. Hierfür verwendet man die Beziehung

$$e^{W[J]} = \int_{\Lambda} \mathcal{D}\chi e^{-S[\chi] + \int_x J\chi} \quad (1.1.7)$$

für das Schwinger-Funktional, welcher sich aus den Gleichungen (1.1.1) und (1.1.2) ergibt, und ersetzt  $W[J]$  mit Hilfe der Gleichung (1.1.5) und  $J(x)$  durch die in Gleichung (1.1.6) gegebene Relation. Durch eine Koordinatenverschiebung  $\chi \rightarrow \chi + \phi$  erhält man die Bestimmungsgleichung

$$e^{-\Gamma[\phi]} = \int \mathcal{D}\chi e^{-S[\phi+\chi] + \int \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} \chi} \quad (1.1.8)$$

für die effektive Wirkung  $\Gamma[\phi]$ . Im Fall wechselwirkender Theorien ist die Bestimmung von  $\Gamma[\phi]$  aus Gleichung (1.1.8) jedoch nur im Ausnahmefall möglich, weshalb an dieser Stelle ein übliches Vorgehen der Übergang zur Störungsrechnung ist.

Die Störungsrechnung erfordert eine Entwicklung im Parameter  $\hbar$ , für den bisher  $\hbar = 1$  (natürliche Einheiten) gilt. Das Wiedereinsetzen von  $\hbar$  resultiert in einem Faktor  $\hbar^{-1}$  vor der klassischen Wirkung  $\mathcal{S}$  und der effektiven Wirkung  $\Gamma$ , sowie der Ersetzung  $\chi \rightarrow \sqrt{\hbar}\chi$ . Bei der Entwicklung in  $\hbar$  des entsprechend veränderten Exponenten der rechten Seite der Gleichung (1.1.8)

$$\begin{aligned} & -S[\phi + \sqrt{\hbar}\chi] + \int \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} \sqrt{\hbar}\chi \\ &= -S[\phi] - \int \left( \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} - \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} \right) \sqrt{\hbar}\chi - \frac{\hbar}{2} \int \int \chi \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi^2} \chi + \mathcal{O}(\hbar^{3/2}) \quad (1.1.9) \\ &= -S[\phi] - \frac{\hbar}{2} \int \int \chi \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi^2} \chi + \mathcal{O}(\hbar^{3/2}) \end{aligned}$$

ist zu beachten, dass der Unterschied zwischen klassischer und effektiver Wirkung mindestens von der Ordnung  $\mathcal{O}(\hbar)$  ist. Kehrt man wieder zu  $\hbar = 1$  zurück, ergibt sich damit

$$e^{-\Gamma[\phi]} = e^{-S[\phi]} \int \mathcal{D}\chi e^{-\frac{\hbar}{2} \int \chi \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi^2} \chi} \quad (1.1.10)$$

$$= e^{-S[\phi]} \det \left( \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi^2} \right)^c \quad \text{mit } c = \begin{cases} -1, & \phi \text{ fermionisch} \\ \frac{1}{2}, & \phi \text{ skalar} \end{cases}. \quad (1.1.11)$$

Dabei wurde die Beziehung

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\phi M \phi} \sim (\det M)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.1.12)$$

für skalare Felder  $\phi$  bzw.

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \int \mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi} M \psi} \sim \det M \quad (1.1.13)$$

für fermionische Felder  $\bar{\psi}, \psi$  benutzt. Die effektive Wirkung lässt sich somit zur ersten Ordnung allein aus der klassischen Wirkung  $\mathcal{S}$  bestimmen:

$$\Gamma[\phi] = S[\phi] + \Gamma^{(1)}[\phi] = S[\phi] + c \ln \det \left( \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta \phi^2} \right) \quad \text{mit } c = \begin{cases} -1, & \phi \text{ fermionisch} \\ \frac{1}{2}, & \phi \text{ skalar} \end{cases}. \quad (1.1.14)$$

Die Korrektur erster Ordnung  $\Gamma^{(1)}[\phi]$  der effektiven zur klassischen Wirkung wird auch als 1-Loop effektive Wirkung bezeichnet, da die obige Entwicklung der effektiven Wirkung in Potenzen von  $\hbar$  gleichbedeutend ist mit einer grafischen Entwicklung des zugehörigen Feynman-Diagramms in der Anzahl der Loops (loop-expansion). Die Anzahl der Loops entspricht dabei der Ordnung von  $\hbar$  [58]. Bei den Feynman-Diagrammen handelt es sich um bildliche Darstellungen der Beiträge aus Störungsentwicklungen, die zu Übergangsamplituden oder Korrelationsfunktionen z.B. der n-Punkt-Korrelationsfunktion  $G_n(x_1, \dots, x_n) = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n Z[J]}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \Big|_{J=0}$  beitragen. Jede innere Linie  $I$  entspricht einem Propagator und trägt somit ein Integral  $\int (d^n k)$  bei, wohingegen Knotenpunkte  $V$  (engl.: vertex) einen Faktor  $\frac{i\lambda}{\hbar} \delta^{(n)}(k_1 + \dots + k_l)$  mit der Kopplungskonstante  $\lambda$  ergeben und damit für die Berücksichtigung der Impulserhaltung sorgen. Dabei gibt  $n$  die Raumzeitdimension an und  $l$  die Wechselwirkungsordnung der betrachteten Theorie. Ausgedrückt in  $\hbar$  bedeutet somit jede innere Linie  $I$  einen zusätzlichen Faktor  $\hbar$  und jeder Knotenpunkt  $V$  einen Faktor  $1/\hbar$ . Die Anzahl an unabhängigen Integrationen, welche in Feynman-Diagrammen als Loops gegeben sind, berechnet sich zu

$$L = I - (V - 1) \quad (1.1.15)$$

und die Ordnung in  $\hbar$  eines Graphens ist durch

$$P = I - V = L - 1 \quad (1.1.16)$$

gegeben. Da auch die Wirkungen  $\mathcal{S}$  und  $\Gamma$  einen Vorfaktor  $1/\hbar$  besitzen, ist die Anzahl an Loops in einer Loop-Entwicklung in der Tat gleich der Ordnung in  $\hbar$  bei einer Entwicklung bezüglich des klassischen Feldes  $\phi$ . Dies ist besonders gut an Gleichung (1.1.9) zu sehen.

### 1.1.2 Die Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion

#### Die 1-Loop effektive Wirkung der Quantenelektrodynamik

Die quantentheoretische Beschreibung der Propagation von Photonen innerhalb eines elektromagnetischen Feldes erfolgt mit Hilfe der Quantenelektrodynamik, deren Wirkung durch

$$S[\psi, \bar{\psi}, \mathcal{A}] = \int d^4x \left( \bar{\psi} (i\mathcal{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (1.1.17)$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet

$$\mathcal{D} = \gamma_\mu D^\mu = \gamma_\mu (\partial^\mu - ie\mathcal{A}^\mu) \quad (1.1.18)$$

die kovariante Ableitung. Für die hier verwendeten Gamma-Matrizen, welche in der Dirac-Darstellung die Form

$$\{\gamma^i\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (1.1.19)$$

annehmen, gelten folgende wichtige Beziehungen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2g_{\mu\nu} \quad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\sigma^{\mu\nu}, \quad (1.1.20)$$

wobei  $\sigma^{\mu\nu}$  ein vollständig antisymmetrischer Tensor ist, der aus den Pauli-Matrizen  $\sigma_i$  ( $i = 1 \dots 3$ ) aufgebaut werden kann. Der Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \quad (1.1.21)$$

erfasst die Wechselwirkungen zwischen dem kovarianten Viererpotential  $\mathcal{A}_\mu$  (Photonenfeld) und den fermionischen Teilchen bzw. Antiteilchen (Elektronen und Positronen), welche durch die vierkomponentigen Dirac-Spinoren  $\psi$  bzw.  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$  gegeben sind.

Der Fokus liegt hier auf der Propagation von Licht in einem fermionischen Vakuum, in dem  $\psi = 0 = \bar{\psi}$  gilt. Daher ist

$$\frac{\delta S^2}{\delta \bar{\psi} \delta \psi} = -i\mathcal{D} + m \quad (1.1.22)$$

der einzige Beitrag zur 1-Loop effektiven Wirkung  $\Gamma^{(1)}$  (Gl. (1.1.14)) mit der QED-Wirkung gemäß Gleichung (1.1.17). Es ist zu beachten, dass auf Grund der fermionischen Natur von  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  bei der Ableitung ein Minus entstanden ist. Beim Übergang in den Minkowski-Raum, bei welchem ein zusätzlicher Faktor  $i$  entsteht, erhält man für die 1-Loop effektive Wirkung:

$$\Gamma^{(1)}[\mathcal{A}] = -i \ln \det (-i\mathcal{D} + m). \quad (1.1.23)$$

Um daraus die Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion herzuleiten, wird Gleichung (1.1.23) in die Schwinger-Eigenzeit-Darstellung umgeschrieben, indem einige einfache Manipulationen vorgenommen werden: Zunächst lässt sich zeigen, dass

$$\det (-i\mathcal{D} + m) = \det [(-i\mathcal{D} + m)\gamma_5^2] = \det [\gamma_5(i\mathcal{D} + m)\gamma_5] = \det (i\mathcal{D} + m). \quad (1.1.24)$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen wurde die Beziehung  $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$  genutzt und beim letzten Gleichheitszeichen wurde zyklisch durchgetauscht, was keine Veränderung der Determinante bewirkt. Gleichung (1.1.23) lässt sich nun schreiben als

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}[\mathcal{A}] &= -i \ln \det(-i\mathcal{D} + m) \\ &= -\frac{i}{2} (\ln \det(-i\mathcal{D} + m) + \ln \det(i\mathcal{D} + m)) = -\frac{i}{2} \ln \det(\mathcal{D}^2 + m^2).\end{aligned}\quad (1.1.25)$$

Das Quadrat der kovarianten Ableitung kann mit Hilfe der Beziehungen aus (1.1.20) und dem Zusammenhang (1.1.21) zwischen dem Feldstärketensor und der kovarianten Ableitung zu

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^2 &= \gamma^\mu \gamma^\nu D_\mu D_\nu = \frac{1}{2} D_\mu D_\nu [\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]] \\ &= -D^2 - \sigma^{\mu\nu} D_\mu D_\nu = -D^2 - \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu] \\ &= -D^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\end{aligned}\quad (1.1.26)$$

umformuliert werden. Für die 1-Loop effektive Wirkung gilt somit

$$\begin{aligned}\Gamma^{(1)}[\mathcal{A}] &= -\frac{i}{2} \ln \det(\mathcal{D}^2 + m^2) \\ &= -\frac{i}{2} \text{Spur} \left( \ln(-D^2 + m^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \right) \\ &= \frac{i}{2} \int_{1/\Lambda}^{\infty} \frac{ds}{s} \text{Spur} \left( e^{-(D^2 + m^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})s} \right),\end{aligned}\quad (1.1.27)$$

wobei sich die Spur sowohl auf die Raum-Zeit-Koordinaten als auch auf die Spinor-Indizes bezieht. Im letzten Schritt wurde die allgemein gültige Beziehung

$$\ln M = - \int_{1/\Lambda}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-Ms} + \text{const.}\quad (1.1.28)$$

unter Vernachlässigung des konstanten Anteils verwendet, bei der es sich um die Eigenzeit-Darstellung von  $\ln M$  handelt. Diese entspricht im Wesentlichen einer Umformulierung eines inversen Propagators in eine Exponentialfunktion [31]. Der Parameter  $s$  wird dabei als Eigenzeit bezeichnet. Um ein exaktes Ergebnis zu erhalten, muss der Limes  $\Lambda \rightarrow \infty$  betrachtet werden. Dies garantiert, dass alle Energien berücksichtigt werden. Der Vorteil der Eigenzeit-Darstellung besteht im Allgemeinen darin, dass sie eichinvariant ist und nur die elektromagnetischen Feldstärken enthält.

### Von der 1-Loop effektiven Wirkung zur Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion

Aus der 1-loop effektive Wirkung (1.1.27) lässt sich eine Lagrange-Funktion gewinnen, indem der Zusammenhang zwischen Wirkung und Lagrange-Funktion

$$\Gamma = \int d^4x \mathcal{L}(x) \text{ bzw. } \Gamma^{(1)}[\mathcal{A}] = \int d^4x \mathcal{L}^{(1)}(x)\quad (1.1.29)$$

genutzt wird. Der Anteil der Spur über die Raumzeit wird in Form eines Integrals ( $\int d^4x \langle x | \dots | x \rangle$ ) explizit ausgeschrieben, wobei die Spur  $\text{Tr}$  bezüglich der Spinor-Indizes übrig bleibt:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} \langle x | e^{-(D^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu})s} | x \rangle e^{-m^2 s} \stackrel{s \rightarrow is}{=} \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-im^2 s} \text{Tr} \langle x | e^{-iHs} | x \rangle \quad (1.1.30)$$

mit der Hamilton-Funktion

$$H = -D^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = (p_\mu - e\mathcal{A}_\mu)^2 - \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (1.1.31)$$

Die Idee ist nun durch einen Wechsel in das Heisenberg-Bild den Term  $\langle y | e^{-iHs} | x \rangle = \langle y; 0 | x; s \rangle$  explizit zu bestimmen, sodass für  $x = y$  die Spur  $\text{Tr}(\langle x | e^{-iHs} | x \rangle)$  ausgewertet werden kann. Diese Methode zur Herleitung der Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion wurde erstmals von J. Schwinger verwendet [6] (siehe dazu auch [59]).

Der Zusammenhang der im Heisenberg-Bild zeitabhängigen Operatoren zu den bisher verwendeten zeitunabhängigen Operatoren ist durch  $x^\mu(s) = e^{iHs} x^\mu e^{-iHs}$  gegeben. Die Heisenberg-Bewegungsgleichung für einen beliebigen Operator lautet damit

$$\frac{dO(s)}{ds} = i[H, O(s)]. \quad (1.1.32)$$

Die Zustände ändern sich gemäß  $|x; s\rangle = e^{iHs}|x\rangle$ , sodass sich die Differentialgleichung

$$i\partial_s \langle y; 0 | x; s \rangle = i\partial_s \langle y | e^{-iHs} | x \rangle = \langle y; 0 | H | x; s \rangle \quad (1.1.33)$$

ergibt. Um die rechte Seite dieser Gleichung explizit bestimmen zu können, muss die Hamilton-Funktion (1.1.31) umgeformt werden.

Ausgangspunkt hierfür sind die Heisenberg-Bewegungsgleichungen für den Ortsoperator  $x$  und den Operator  $\Pi^\mu = p^\mu - e\mathcal{A}^\mu(x)$ . Diese ergeben sich mit Hilfe der Kommutatoren  $[x^\mu(s), \Pi^\nu(s)] = ig^{\mu\nu}$ , was aus  $[x^\mu(s), p^\nu(s)] = ig^{\mu\nu}$  folgt, sowie  $[\Pi^\mu(s), \Pi^\nu(s)] = ieF^{\mu\nu}$  zu

$$\frac{d\Pi^\mu}{ds} = 2e\Pi_\nu F^{\mu\nu} - ie\partial_\nu F^{\mu\nu} + \frac{e}{2} \sigma^{\lambda\nu} \partial^\mu F_{\lambda\nu} \quad \text{und} \quad \frac{dx^\mu}{ds} = 2\Pi^\mu. \quad (1.1.34)$$

Die Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion lässt sich hieraus gewinnen, wenn man die Betrachtung der Propagation von Photonen in einem elektromagnetischen Hintergrundfeld  $F_{\mu\nu}$  auf solche Felder einschränkt, die zeitlich und räumlich (annähernd) konstant sind. Die partiellen Ableitungen  $\partial_\nu F^{\mu\nu}$  in (1.1.34) verschwindet in diesem Fall. Da die typischen Ausdehnung der Quantenfluktuationen im Bereich der Compton-Wellenlänge  $\lambda_c = 3.86 \cdot 10^{-13} \text{m}$  bzw. der Compton-Zeit  $\tau_c = 1.29 \cdot 10^{-21} \text{s}$  liegen, bedeutet dies konkret, dass die Änderung des Hintergrundfeldes räumlich (zeitlich) deutlich größer sein muss als die Compton-Wellenlänge (Compton-Zeit) [60]. In diesem Fall kann das Feld lokal durch einen konstanten Wert approximiert werden und die Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion behält ihre Gültigkeit bei.

In Matrix-Notation lässt sich (1.1.34) (konstantes  $F^{\mu\nu}$ ) schreiben als

$$\frac{d\Pi}{ds} = 2e\mathbf{F}\Pi \quad \text{und} \quad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 2\Pi. \quad (1.1.35)$$

Aus den Lösungen der Differentialgleichungen (1.1.35) und unter Verwendung der Antisymmetrie des Feldstärketensors ( $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ ) ergibt sich

$$\mathbf{\Pi}(0) = \frac{e\mathbf{F}}{2} \frac{e^{-e\mathbf{F}s}}{\sinh(e\mathbf{F}s)} (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0)) \quad (1.1.36)$$

$$\mathbf{\Pi}(s) = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0)) \frac{e\mathbf{F}}{2} \frac{e^{-e\mathbf{F}s}}{\sinh(e\mathbf{F}s)}. \quad (1.1.37)$$

Um das Matrixelement  $\langle y; 0|H|x; s \rangle$  berechnen zu können, werden in dem in der Hamilton-Funktion auftretenden Produkt

$$(\mathbf{\Pi}(s))^2 = (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0)) \frac{e\mathbf{F}}{4 \sinh^2(e\mathbf{F}s)} (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0)) \quad (1.1.38)$$

$$= \mathbf{x}(s)\mathbf{K}\mathbf{x}(s) + \mathbf{x}(0)\mathbf{K}\mathbf{x}(0) - 2\mathbf{x}(s)\mathbf{K}\mathbf{x}(0) - K_{\mu\nu}[x^\mu(0), x^\nu(s)] \quad (1.1.39)$$

mit  $\mathbf{K} = \frac{e^2\mathbf{F}^2}{4 \sinh^2(e\mathbf{F}s)}$  die Elemente  $\mathbf{x}(s)$  nach links und die Elemente  $\mathbf{x}(0)$  nach rechts geordnet. Der bei der Umordnung verwendete Kommutator berechnet sich zu

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}[x^\mu(0), x^\nu(s)] &\stackrel{(1.1.37)}{=} \text{tr} \left( \mathbf{K}[\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(0) + 2e^{e\mathbf{F}s} \frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{e\mathbf{F}} \mathbf{\Pi}(0)] \right) \\ &= \frac{i}{2} \text{tr} \left( \frac{e\mathbf{F}}{\sinh(e\mathbf{F}s)} e^{e\mathbf{F}s} \right) \\ &= \frac{i}{2} \text{tr}(e\mathbf{F} + e\mathbf{F} \coth(e\mathbf{F}s)). \end{aligned} \quad (1.1.40)$$

Da der Feldstärketensor eine antisymmetrische Größe ist, verschwindet die Spur  $\text{tr}(e\mathbf{F})$ . Mit der sich damit ergebenden Hamilton-Funktion (vgl. Gl. (1.1.31))

$$H = \mathbf{x}(s)\mathbf{K}\mathbf{x}(s) + \mathbf{x}(0)\mathbf{K}\mathbf{x}(0) - 2\mathbf{x}(s)\mathbf{K}\mathbf{x}(0) - \frac{i}{2} \text{tr}(e\mathbf{F} \coth(e\mathbf{F}s)) - \frac{e}{2} \text{tr}(\sigma\mathbf{F}) \quad (1.1.41)$$

erhält man gemäß (1.1.33) und unter Verwendung der Beziehung  $\langle y|e^{-iHs}x^\mu(s) = y^\mu\langle y|e^{-iHs}$  die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} i\partial_s \langle y; 0|x; s \rangle &= \\ &\left( (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{e^2\mathbf{F}^2}{4 \sinh^2(e\mathbf{F}s)} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{i}{2} \text{tr}(e\mathbf{F} \coth(e\mathbf{F}s)) - \frac{e}{2} \text{tr}(\sigma\mathbf{F}) \right) \langle y; 0|x; s \rangle \end{aligned} \quad (1.1.42)$$

mit den Positionsvektoren (nicht mehr Operatoren)  $\mathbf{x} \hat{=} x^\mu$  und  $\mathbf{y} \hat{=} y^\mu$ . Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle y; 0|x; s \rangle &= C(x, y) \exp \left( i(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{e\mathbf{F}}{4} \coth(e\mathbf{F}s) (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{1}{2} \text{tr} \left( \ln \left[ \frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{e\mathbf{F}} \right] \right) + \frac{ie}{2} \text{tr}(\sigma\mathbf{F})s \right) \end{aligned} \quad (1.1.43)$$

mit der Konstanten  $C(x, y)$ . Diese lässt sich explizit berechnen, da aber letztendlich der Fall  $x = y$  betrachtet werden soll, wird nachfolgend nur  $C(x, x)$  bestimmt.

Für  $x = y$  ergibt sich aus (1.1.43) das in der Lagrange-Funktion (1.1.30) vorhandene Matricelement

$$\langle x|e^{-iHs}|x\rangle = \langle x; 0|x; s\rangle = C(x, x) \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\ln\left[\frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{e\mathbf{F}}\right]\right) + \frac{ie}{2} \operatorname{tr}(\sigma\mathbf{F})s\right). \quad (1.1.44)$$

Im Grenzfall  $\mathbf{F} \rightarrow 0$  muss sich aus (1.1.44) der freie Fermionen-Propagator

$$D_F(x, x) = \int_0^\infty ds e^{-ism^2} \langle x|e^{-iHs}|x\rangle|_{F \rightarrow 0} = -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-im^2s} \quad (1.1.45)$$

ergeben, woraus man  $\langle x|e^{-iHs}|x\rangle|_{F \rightarrow 0} = -i/16\pi^2 s^2$  ablesen kann. Zugleich erhält man aus Gleichung (1.1.44)  $\langle x|e^{-iHs}|x\rangle|_{F \rightarrow 0} = C(x, x)/s^2$ , sodass  $C(x, x) = -i/16\pi^2$  gelten muss. Die Lagrange-Funktion (1.1.30) nimmt damit die Form

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-im^2s} \operatorname{Tr}\left[\exp\left\{-\frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(\ln\left[\frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{e\mathbf{F}}\right]\right) + \frac{ie}{2} \operatorname{tr}(\sigma\mathbf{F})s\right\}\right] \quad (1.1.46)$$

an.

Es sind nun noch jeweils die hierin auftretenden Spuren auszuwerten. Es wird zuerst der Term  $\operatorname{Tr}\{\exp[-i\frac{e}{2} \operatorname{tr}(\sigma\mathbf{F}s)]\}$  betrachtet. Zum einen wird die Relation

$$[\operatorname{tr}(\sigma\mathbf{F})]^2 = \frac{1}{2}\{\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\alpha\beta}\} = 8(\mathcal{F} + i\gamma_5\mathcal{G}) \quad (1.1.47)$$

mit den Eich- und Lorentzinvarianten des elektromagnetischen Feldes

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \quad \mathcal{G} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\mathbf{E}\mathbf{B} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (1.1.48)$$

benutzt. Diese folgt direkt aus der Eigenschaft  $\frac{1}{2}\{\sigma^{\mu\nu}, \sigma^{\alpha\beta}\} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta} + i\gamma_5\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  der Pauli-Matrizen [59]. Zum anderen werden die Eigenwerte der Gamma-Matrix  $\gamma^5$  benötigt, welche  $\pm 1$  betragen. Die vier Eigenwerte von  $\sigma F$  lassen sich damit zu

$$\lambda_j^{\sigma F} = \pm\sqrt{8(\mathcal{F} \pm i\mathcal{G})} \quad (1.1.49)$$

bestimmen, wobei alle vier ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) möglichen Vorzeichenkombinationen gebildet werden müssen. Für die gesuchte Spur ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}[e^{\frac{ies}{2} \operatorname{tr}(\sigma\mathbf{F}s)}] &= \sum_{j=1}^4 e^{\frac{ies}{2} \lambda_j^{\sigma F}} \\ &= 2(\cos[e\sqrt{2(\mathcal{F} - i\mathcal{G})}s] + \cos[e\sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})}s]) \\ &= 4 \cosh(esa) \cos(esh) \end{aligned} \quad (1.1.50)$$

mit den Invarianten

$$a \equiv \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} - \mathcal{F}} \quad b \equiv \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} + \mathcal{F}}. \quad (1.1.51)$$

Für die Auswertung der zweiten Spur in Gl. (1.1.46) müssen zunächst die Eigenwerte des Feldstärketensors  $F_{\mu\nu}$  bestimmt werden. Hierzu werden die Beziehungen

$$F^{\mu\alpha} \tilde{F}^\nu{}_\alpha = \tilde{F}^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha = \mathcal{G}g^{\mu\nu} \quad (1.1.52)$$

$$F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \tilde{F}^{\mu\alpha} \tilde{F}^\nu{}_\alpha = 2\mathcal{F}g^{\mu\nu} \quad (1.1.53)$$

genutzt [61]. Setzt man die Eigenwertgleichung des Feldstärketensors

$$F_{\mu\nu}\psi^\nu = F'\psi_\mu \quad (1.1.54)$$

in Gleichung (1.1.52) ein, erhält man die Eigenwertgleichung

$$\tilde{F}^{\mu\alpha}\psi_\alpha = -\frac{\mathcal{G}}{F'}\psi^\mu \quad (1.1.55)$$

des dualen Feldstärketensors. Aus der Relation (1.1.53) angewandt auf einen Eigenzustand  $\psi_\nu$  ergibt sich zusammen mit den Eigenwertgleichungen (1.1.54) und (1.1.55) der auf eine quadratische Gleichung reduzierbare Zusammenhang

$$(F')^4 + 2\mathcal{F}(F')^2 - \mathcal{G}^2 = 0. \quad (1.1.56)$$

Diese Gleichung besitzt die vier Lösungen

$$F' = \pm\sqrt{-\mathcal{F} \pm \sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2}}, \quad (1.1.57)$$

wobei alle möglichen Kombinationen der Vorzeichen zu bilden sind. Diese entsprechen den gesuchten Eigenwerten des Feldstärketensors  $F_{\mu\nu}$ . Ausgedrückt durch die in Gleichung (1.1.51) eingeführten Invarianten bedeutet dies  $F' = \{\pm a, \pm ib\}$ . Es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \text{tr} \left( \ln \frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{e\mathbf{F}} \right) &= \sum_{j=1}^4 \left( \ln \frac{\sinh(eF'_j s)}{eF'_j} \right) = \ln \left[ -\frac{\sinh^2(eas) \sinh^2(iebs)}{e^4 a^2 b^2} \right] \\ &= 2 \ln \left[ \frac{\sinh(eas) \sin(ebs)}{e^2 ab} \right] \end{aligned} \quad (1.1.58)$$

und damit für die gesuchte Spur:

$$\text{Tr} \left[ e^{-\frac{1}{2} \text{tr} \left( \ln \frac{\sinh(e\mathbf{F}s)}{e\mathbf{F}} \right)} \right] = \frac{e^2 ab}{\sinh(eas) \sin(ebs)} \quad (1.1.59)$$

Das Einsetzen der Spuren (1.1.50) und (1.1.59) in Gleichung (1.1.46) führt auf die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}(x) &= \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} ab \coth(eas) \cot(ebs) e^{-im^2 s} \\ &\stackrel{is \rightarrow s}{=} -\frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} ab \cot(eas) \coth(ebs) e^{-m^2 s}, \end{aligned} \quad (1.1.60)$$

welche nun noch renormiert werden muss. Dazu wird eine Reihenentwicklung des Arguments

$$\cot(eas) \coth(ebs) = \frac{1}{(es)^2 ab} + \frac{1}{3ab} (a^2 - b^2) - \frac{(es)^2}{ab} \left[ \frac{a^4 + b^4}{45} + \frac{a^2 b^2}{9} \right] + \mathcal{O}((es)^4) \quad (1.1.61)$$

in  $s$  (bzw. gleichbedeutend: in  $e$ ) durchgeführt und die darin zur Divergenz des Integrals führenden Terme vom Integrand subtrahiert. Die renormierte Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion lautet damit

$$\mathcal{L}_{HE}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} [(es)^2 ab \cot(eas) \coth(ebs) + \frac{a^2 - b^2}{3} (es)^2 - 1]. \quad (1.1.62)$$

Die Ladung  $e$  und Feldstärke  $F^{\mu\nu}$  sind nun renormierte Größen. Dies wird durch den mittleren Term in Gl. (1.1.62) erreicht. Der letzte Term in Gleichung (1.1.62) entspricht einer Vakuumsabtraktion. Hierdurch werden keine reine Vakuumprozesse berücksichtigt, bei denen es also keine Kopplung an das äußere Feld gibt.

Im Folgenden wird immer nur die führende Ordnung in  $F^{\mu\nu}$  betrachtet, da bereits die nächste Ordnung einen deutlich geringeren Beitrag liefert. Dazu wird nochmal auf die Entwicklung (1.1.61) des Integranden der Lagrange-Funktion zurückgegriffen. Entscheidend ist der dritte Term der Entwicklung, da dieser bei der Renormierung nicht kompensiert werden muss. Die Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion in der Schwachfeldnäherung (weak-field approximation) lautet damit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WF}^{(1)} &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} s (es)^4 \left( \frac{a^4 + b^4}{45} + \frac{a^2 b^2}{9} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{e}{m} \right)^4 \left( \frac{a^4 + b^4}{45} + \frac{a^2 b^2}{9} \right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \left( \frac{e}{m} \right)^4 \frac{4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2}{45}. \end{aligned} \quad (1.1.63)$$

Aus Furrys Theorem [62], welches auf die Invarianz der QED bei Ladungskonjugation abzielt, ist bekannt, dass die effektive Lagrange-Funktion gerade in der Elementarladung  $e$  ist. Daher ergibt sich immer eine gerade Anzahl an Kopplungen an das klassische elektromagnetische Feld. Der Ausdruck (1.1.63) entspricht dem in Abbildung 1.1a dargestellten Feynman-Diagramm, welches verdeutlicht, dass die Korrektur führender Ordnung zur klassischen Maxwelltheorie durch eine vierfache Kopplung an ein als klassisch betrachtetes elektromagnetisches Feld entsteht. Zur nächsthöheren Ordnung ergibt sich das in Abbildung 1.1b dargestellte Feynman-Diagramm mit einer sechsfachen Kopplung an das äußere Feld.



Abb. 1.1: Feynman-Diagramme der ersten (a) und zweiten Ordnung (b) der Entwicklung der Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion (1.1.62). Das Diagramm (a) entspricht dem Ausdruck (1.1.63) mit vier Kopplungen an ein äußeres Feld (durch Kreuze gekennzeichnet). Das Diagramm (b) entspricht der nächsthöheren Ordnung der Entwicklung.

## 1.2 Der Effekt der Doppelbrechung im Quantenvakuum

### 1.2.1 Theoretische Beschreibung

Es ist naheliegend, darauf zu schließen, dass es durch die Wechselwirkung zwischen einem angelegten elektromagnetischen Feld mit den elektrisch geladenen Teilchen-Antiteilchen-Paaren, welche als virtuelle Zustände eines realen Photons existieren, eine Beeinflussung der Lichtausbreitung geben muss: Die geladenen Teilchenpaare richten sich gemäß der durch das äußere Feld gegebenen Vorzugsrichtung aus und verringern effektiv die Feldstärke in diese Richtung. Das Vakuum verhält sich in Folge wie ein doppelbrechendes Medium, d.h. der Brechungsindex des Vakuums unterscheidet sich für den Anteil der Polarisation in Vorzugsrichtung und in die dazu senkrechte Richtung (vgl. Abb. 1.2).

Mathematisch lässt sich der Effekt der Doppelbrechung im Vakuum aus der Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = -\mathcal{F} + \mathcal{L}^{(1)} = -\mathcal{F} + c_1 \mathcal{F}^2 + c_2 \mathcal{G}^2, \quad c_1 = \frac{\alpha^2}{m^4} \frac{8}{45}, \quad c_2 = \frac{\alpha^2}{m^4} \frac{14}{45} \quad (1.2.1)$$

mit  $\mathcal{L}^{(1)}$  entsprechend Gleichung (1.1.63) durch die Betrachtung der Bewegungsgleichungen für Photonen in einem äußeren elektromagnetischen Feld herleiten (s. [31] und [61]). Die Vorfaktoren in (1.1.63) wurden mit der Feinstrukturkonstante  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$  ausgedrückt. Da die Lagrange-Funktion nur vom Vektorpotential  $\mathcal{A}_\mu$ , aber von diesem auch nicht explizit, abhängt, folgt aus dem Euler-Lagrange-Formalismus

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial F_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) \stackrel{(1.1.48)}{=} \frac{1}{2} \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} F^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}} \tilde{F}^{\mu\nu} \right). \quad (1.2.2)$$

Für ein Pump-Probe-Experiment, bei dem ein starker Laser ein Hintergrundfeld generiert und der Einfluss dieses auf die Photonen eines schwächeren Lasers untersucht wird, lässt sich der Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  in zwei Teile zerlegen – das Feld  $f_{\mu\nu}$  des Probe-Lasers und das Feld  $\bar{F}_{\mu\nu}$  des Pump-Feldes. Dabei soll die Stärke des Probe-Feldes viel kleiner sein als die des als konstant angenommenen Hintergrundfeldes (Pump-Feld).

Es wird nun die Ersetzung  $F_{\mu\nu} \rightarrow \bar{F}_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}$  vorgenommen und eine Entwicklung im Probenfeld bis zu in  $f$  linearen Termen der in Gl. (1.2.2) auftretenden Ableitungen des Heisenberg-Euler-Lagrangians durchgeführt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} &= -1 + \left. \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{F}} \right|_{F=\bar{F}} + f^{\mu\nu} \left. \frac{\partial}{\partial F^{\mu\nu}} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{F}} \right|_{F=\bar{F}} + \mathcal{O}(f^2) \\ &= -1 + \left. \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{F}} \right|_{F=\bar{F}} + \frac{1}{2} f^{\mu\nu} \left[ F_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{F}^2} + \tilde{F}_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{F} \partial \mathcal{G}} \right]_{F=\bar{F}} + \mathcal{O}(f^2) \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}} = \left. \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{G}} \right|_{F=\bar{F}} + \frac{1}{2} f^{\mu\nu} \left[ F_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{F} \partial \mathcal{G}} + \tilde{F}_{\mu\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{G}^2} \right]_{F=\bar{F}} + \mathcal{O}(f^2). \quad (1.2.4)$$

Durch die Linearisierung in  $f$  wird die Selbstwechselwirkung der propagierenden Photonen vernachlässigt. Obige Entwicklungen in Gleichung (1.2.2) eingesetzt führt unter Verwendung

der Bianchi-Identität  $\partial_\mu \tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = 0 = \partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu}$  auf den Zusammenhang

$$\begin{aligned}
 0 = \partial_\mu f^{\mu\nu} & \left( 1 - \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{F}} \Big|_{F=\bar{F}} \right) - \frac{1}{2} \partial_\mu f^{\alpha\beta} \left( F_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{F}^2} + \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{G}^2} \right) \Big|_{F=\bar{F}} \\
 & - \frac{1}{2} \partial_\mu f^{\alpha\beta} \left( \tilde{F}_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + F_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \Big|_{F=\bar{F}} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \mathcal{F} \partial \mathcal{G}} \\
 & = \partial_\mu f^{\mu\nu} (1 - 2c_1 \mathcal{F}) - \partial_\mu f^{\alpha\beta} (c_1 F_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + c_2 \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu}).
 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Dies entspricht der linearisierten Bewegungsgleichung für ein Probe-Photon in einem konstanten äußeren Feld. Im Sinne der Übersichtlichkeit wurde im letzten Schritt, in dem die „weak-field“ Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion (1.1.63) eingesetzt wurde, die Notation zu  $\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}$  geändert.

Beim Übergang in den Impulsraum

$$a^\mu(x) = \int_k e^{ikx} a^\mu(k) \rightarrow f^{\mu\nu}(x) = i \int_k e^{ikx} [k^\mu a^\nu(k) - k^\nu a^\mu(k)] \tag{1.2.6}$$

mit dem Vektorpotential  $a^\mu(x)$  des Probe-Feldes, und unter Verwendung der Lorentz-Eichung  $\partial_\mu a^\mu(x) = 0$  bzw.  $k_\mu a^\mu(k) = 0$  nimmt die Bewegungsgleichung (1.2.5) die Form

$$0 = k^2 a^\nu(k) (1 - 2c_1 \mathcal{F}) - 2k_\mu k^\alpha a^\beta(k) (F_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} c_1 + \tilde{F}_{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} c_2) \tag{1.2.7}$$

an. Dies entspricht einer Matrix-Gleichung vom Typ  $M_\beta^\nu a^\beta = 0$ . Der Ansatz

$$a_1^\mu \propto \tilde{F}^{\mu\nu} k_\nu \equiv (\tilde{F}k)^\mu \tag{1.2.8}$$

$$a_2^\mu \propto F^{\mu\nu} k_\nu \equiv (Fk)^\mu \tag{1.2.9}$$

zur Lösung von Gleichung (1.2.7) wird aus einer Betrachtung des Polarisationsensors für beliebige, konstante schwache Felder motiviert, welche z.B. in [31] vorgenommen wurde. Setzt man diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung (1.2.7) ein, führt dies auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 a_1^\mu : 0 & = \left[ k^2 (1 - 2c_1 \mathcal{F} + 4c_2 \mathcal{F}) - 2c_2 (Fk)^2 \right] (\tilde{F}k)^\nu - 2c_1 \mathcal{G} k^2 (Fk)^\nu \\
 a_2^\mu : 0 & = \left[ k^2 (1 - 2c_1 \mathcal{F}) - 2c_1 (Fk)^2 \right] (Fk)^\nu - 2c_2 \mathcal{G} k^2 (\tilde{F}k)^\nu.
 \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Mit dem Ansatz  $k^2 = 0 + \mathcal{O}(c_1, c_2)$ , der sich aus der klassischen Relation  $k^2 = 0$  mit zusätzlichen kleinen Korrekturen durch die Quantentheorie begründet, erhält man nun aus den Gleichungen (1.2.10) die modifizierten Dispersionsrelationen

$$k^2 = 2(Fk)^2 c_2 \quad \text{für } a_1^\mu \tag{1.2.11}$$

$$k^2 = 2(Fk)^2 c_1 \quad \text{für } a_2^\mu. \tag{1.2.12}$$

Die expliziten Darstellung von  $(Fk)^\mu$  lässt sich mit Hilfe der Matrixdarstellung des Feldstärke-Tensors

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2.13}$$

einfach zu

$$(Fk)^\mu = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}, \mathbf{k} \times \mathbf{B} + \omega \mathbf{E}) \quad (1.2.14)$$

berechnen. Durch Quadrieren erhält man

$$(Fk)^2 = \omega^2 \mathbf{E}^2 - (\mathbf{kE})^2 + \mathbf{k}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{kB})^2 + 2(\mathbf{k} \times \mathbf{B}) \mathbf{E} \omega, \quad (1.2.15)$$

was gemäß

$$\begin{aligned} (Fk)^2 &\approx (Fk)^2 \Big|_{k^2=0} \\ &= \mathbf{k}^2 \mathbf{E}^2 - (\mathbf{kE})^2 + \mathbf{k}^2 \mathbf{B}^2 - (\mathbf{kB})^2 + 2((\mathbf{k} \times \mathbf{B}) \mathbf{E}) |\mathbf{k}| \\ &= (\mathbf{k} \times \mathbf{E})^2 + (\mathbf{k} \times \mathbf{B})^2 - 2\mathbf{k}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) |\mathbf{k}| \\ &= \mathbf{k}^2 (\mathbf{E}^2 \sin^2(\angle(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{E}})) + \mathbf{B}^2 \sin^2(\angle(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{B}})) - 2|\mathbf{E}||\mathbf{B}|(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{S}})) \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

genähert werden kann. Durch Einsetzen dieses Zusammenhangs in die Gleichungen (1.2.11) und (1.2.12) und unter Verwendung der Näherung  $\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2}$  für sehr kleine  $x$  ergibt sich die Dispersionsrelation

$$\omega = |\mathbf{k}| \left[ 1 - c_i \left\{ \mathbf{E}^2 \sin^2(\angle(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{E}})) + \mathbf{B}^2 \sin^2(\angle(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{B}})) - 2(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{S}})|\mathbf{E}||\mathbf{B}| \right\} \right] \quad (1.2.17)$$

mit  $c_i$  entsprechend Gl. (1.2.1) ( $i \in \{1, 2\}$ ), dem Einheits-Poynting-Vektor  $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}}$  und den Einheitsvektoren  $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ ,  $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}|$ ,  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ . Es zeigt sich, dass die Gruppengeschwindigkeit  $v_{gr} = \frac{d\omega}{d|\mathbf{k}|}$  gleich der Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$  ist. Die Probe-Photonen, die sich im Polarisationszustand  $a_1^\mu \sim (\tilde{F}k)^\mu$  bzw.  $a_2^\mu \sim (Fk)^\mu$  befinden, bewegen sich mit der Geschwindigkeit

$$v_i = 1 - \frac{\alpha p_i}{\pi 90} \left[ \left( \frac{e\mathbf{E}}{m^2} \right)^2 \sin^2(\angle(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{E}})) + \left( \frac{e\mathbf{B}}{m^2} \right)^2 \sin^2(\angle(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{B}})) - 2(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{S}}) \frac{eE}{m^2} \frac{eB}{m^2} \right] + \alpha \mathcal{O} \left( \left( \frac{eF}{m^2} \right)^4 \right) \quad (1.2.18)$$

im unter dem Einfluss des Pump-Feldes stehenden Vakuum. Für die beiden Polarisationsmoden folgt aus einer Umformulierung der Faktoren  $c_1$  und  $c_2$ :  $p_1 = 7$  bzw.  $p_2 = 4$ . Es wurde hiermit gezeigt, dass das Quantenvakuum in Anwesenheit eines externen elektromagnetischen Feldes die Eigenschaft eines doppelbrechenden Mediums hat.

### 1.2.2 Experimentelle Beschreibung – Elliptizität

Die Geschwindigkeit der in den Zuständen  $a_1^\mu \sim (\tilde{F}k)^\mu$  und  $a_2^\mu \sim (Fk)^\mu$  polarisierten Probe-Photonen im Quantenvakuum wird also unterschiedlich beeinflusst. Dementsprechend hängt auch der Brechungsindex  $n = 1/v$  des Quantenvakuums von der Polarisation der einfallenden Photonen bezüglich des äußeren Feldes ab, analog zu der Doppelbrechung von Licht an bestimmten Kristallen, z.B. Kalkspat. Wie stark doppelbrechend ein Material ist, wird üblicherweise durch die Differenz der Brechungsindizes in Richtung des außerordentlichen Strahls und des ordentlichen Strahls  $\Delta n = n_{ao} - n_o$  charakterisiert. Die Begriffe des ordentlichen und des außerordentlichen Strahls beschreiben zwei Polarisationsrichtungen eines Lichtstrahls in Bezug auf eine durch die Ausbreitungsrichtung und die optische Achse aufgespannte Ebene. Dabei ist der ordentliche Strahl durch den Anteil der Polarisation eines Lichtstrahls gegeben,

der senkrecht auf dieser Ebene steht. Der außerordentliche Strahl ist entsprechend der Anteil, der in der Ebenen liegt (vergleiche Abbildung 1.2). Die optische Achse ist jene Richtung in einem anisotropen Material, für die der Brechungsindex unabhängig von der Polarisation ist. Für die Vakuumdoppelbrechung ist die optische Achse durch die Richtung des äußeren Feldes gegeben.

Typische Werte (betragsmäßig) für stark doppelbrechende Kristalle liegen im Bereich von  $\Delta n \approx 1$ , bei schwach doppelbrechenden Kristallen gilt in etwa  $\Delta n \approx 0.01$ . Beim Paradebeispiel Kalkspat ist  $\Delta n = -0.172$  [63]. Auf die Polarisationsmoden  $a_1^\mu \sim (\tilde{F}k)^\mu$  und  $a_2^\mu \sim (Fk)^\mu$  übertragen, bedeutet dies

$$\Delta n = \left| \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right| \quad (1.2.19)$$

mit  $v_i$  entsprechend Gleichung (1.2.18). Für den derzeitig realisierten Aufbau des PVLAS Experiments [43], bei dem der Effekt der Vakuumdoppelbrechung mit Hilfe eines reinen Magnetfeldes als externem Feld nachgewiesen werden soll, ist ein Wert von ungefähr  $\Delta n = 2.5 \cdot 10^{-23}$  ( $B \approx 2.5\text{T}$ ) zu erwarten. Sogar bei Verwendung der aktuell stärksten Magnetfelder mit einer Stärke von  $B \approx 100\text{T}$  (z.B. [64]) würde man lediglich  $\Delta n \approx 4.0 \cdot 10^{-20}$  erhalten. Wird das Pump-Feld anstatt durch einen Permanentmagneten (PVLAS [44]) oder gepulsten Elektromagneten (BMV [46]) durch einen Hochintensitätslaser generiert, kann man mit Feldstärken arbeiten, die im Bereich von  $10^5$  bis  $10^6$  T liegen. Nimmt man bei dieser Feldstärke den Fall konstanter, gekreuzter Felder an, d.h.  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}| = E = 1 \cdot 10^6$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$  ergibt sich für  $\mathbf{k} = -\mathbf{S}$  ein Wert von  $\Delta n \approx 1.5 \cdot 10^{-12}$ . Zur Messung der Vakuumdoppelbrechung scheint dies also zunächst eine geeigneterer Aufbau zu sein. Es ist allerdings zu beachten, dass  $\Delta n$  keine direkt messbare Größe darstellt.

Eine beobachtbare Folge der für die Polarisationsrichtungen unterschiedlichen Brechungsindizes ist eine Phasenverschiebung

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{L}{\lambda} \Delta n \quad (1.2.20)$$

des ausfallenden Licht im Vergleich zum einfallenden. Diese ist von der im doppelbrechenden Medium zurückgelegten optischen Weglänge  $L$  und der Wellenlänge  $\lambda$  der Probe-Photonen abhängig. Für ursprünglich linear polarisiertes Licht bedeutet dies beispielsweise, dass es nach der Durchquerung des doppelbrechenden Mediums eine elliptische Polarisation aufweist, wie in Abbildung 1.2 dargestellt. Für reine Magnetfelder erhält man aus den Gleichungen (1.2.18) und (1.2.19) in erster Näherung eine Phasenverschiebung von

$$\Delta\Phi_{\text{QED},B}^{1\text{-loop}} = \alpha \frac{1}{15} \left( \frac{eB}{m^2} \right)^2 \frac{L}{\lambda}. \quad (1.2.21)$$

In Experimenten dieser Art ist die Wellenlänge typischerweise auf  $\lambda \approx 500 \dots 1000$  nm festgelegt und es gilt  $L \cdot B^2$  zu maximieren. Bei PVLAS werden die Probe-Photonen hierfür bis zu  $10^6$  mal durch das Magnetfeld geschickt, für das  $L \cdot B^2 = 10.25 \text{ T}^2\text{m}$  gilt. Die Phasenverschiebung liegt damit bei  $\Delta\Phi_{\text{QED},B}^{1\text{-loop}} \approx 5 \cdot 10^{-10}$ . Verwendet man als Pump-Feld einen Laser, kann der oben bereits beschriebene Fall konstanter, gekreuzter Felder angenommen werden und man erhält eine Phasenverschiebung

$$\Delta\Phi_{\text{QED},E}^{1\text{-loop}} = \alpha \frac{4}{15} \left( \frac{eE}{m^2} \right)^2 \frac{L}{\lambda}. \quad (1.2.22)$$

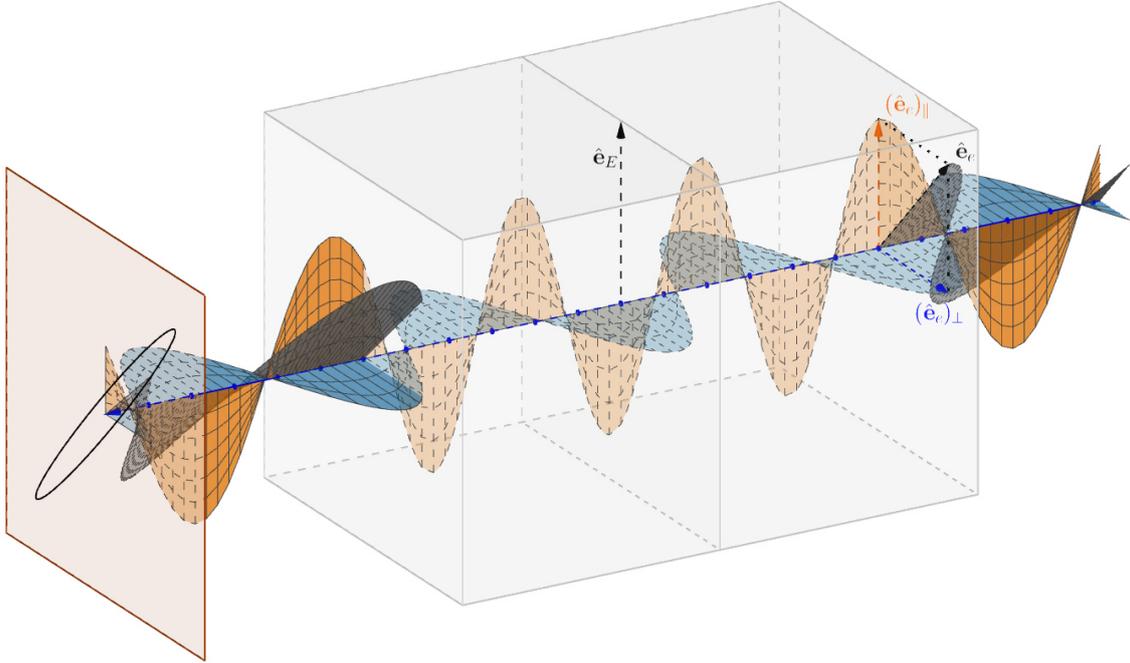


Abb. 1.2: Skizze des Effekts der Vakuumdoppelbrechung. Durch ein von außen in Richtung  $\hat{e}_E$  angelegtes Pump-Feld verhält sich das Vakuum wie ein anisotropes Medium (grau gefärbter Bereich). Von rechts läuft ein Probe-Strahl (schwarz) ein, der zunächst linear in Richtung  $\hat{e}_e$  polarisiert ist. Durchquert der Probe-Strahl das doppelbrechende Gebiet erfährt der zu  $\hat{e}_E$  parallele Anteil der Polarisation ( $\hat{e}_e$ ) $_{\parallel}$  (orange) eine Phasenverzögerung  $\phi_{\parallel}$ . Dieser Anteil der Polarisation entspricht dem außerordentlichen Strahl. Der ordentliche Strahl ist durch den zu  $\hat{e}_E$  senkrechten Anteil der Polarisation ( $\hat{e}_e$ ) $_{\perp}$  (blau) gegeben. Beim Durchqueren des anisotropen Gebiets erfährt dieser eine Phasenverschiebung  $\phi_{\perp} < \phi_{\parallel}$ . Nach Verlassen des Pump-Feldes sind ( $\hat{e}_e$ ) $_{\parallel}$  und ( $\hat{e}_e$ ) $_{\perp}$  nicht mehr in Phase. Das Licht des Probe-Strahls ist i.A. elliptisch polarisiert, was in der braun hinterlegten Ebene dargestellt ist.

Die optische Weglänge, die die Probe-Photonen bei einem entsprechenden Aufbau im Pump-Feld zurücklegen, ist bei einer realistischen Beschreibung der Laserpulse als Gaußschen Strahl durch dessen Intensitätsprofil auf  $L = \mathcal{O}(1 \dots 10) \mu\text{m}$  festgelegt. Das Verhältnis  $E/\lambda$  wird durch eine geeignete Wahl von Pump- und Probe-Laser maximiert. Das Pump-Feld wird durch einen Hochintensitätslaser generiert und hat somit eine sehr große Feldstärke. Das Probe-Feld wird durch einen Freie-Elektronen-Laser gebildet, der eine sehr kleine Wellenlänge aufweist ( $\lambda = 0.05 \dots 6 \text{ nm}$  am European XFEL [54]). Auf diese Weise erhält man eine Phasenverschiebung  $\Delta\Phi_{\text{QED},E}^{1\text{-loop}} \approx 4 \cdot 10^{-5}$ , also einen um 4 Größenordnungen höheren Wert als im PVLAS-Experiment.

## Kapitel 2

# Vakuumdoppelbrechung als Vakuummisionsprozess

Einen weiteren, sowohl theoretischen als auch experimentellen Zugang zum Effekt der Vakuumdoppelbrechung erhält man, wenn man Pump- und Probe-Laser unaufgelöst, d.h. zusammen als ein makroskopisches Feld, und das Vakuum als Quelle einzelner Signalphotonen [60, 65, 66] betrachtet. Diese induzierten Photonen haben im Allgemeinen einen gegenüber den ursprünglichen Photonen des Probe-Strahls veränderten Polarisationszustand und können als solche außerhalb des Interaktionsbereichs der Laserstrahlen detektiert werden. Besonders geeignet zur Messung des Doppelbrechungseffekts ist der Anteil der induzierten Photonen, die eine senkrechte Polarisation im Vergleich zum Probe-Strahl aufweisen.

In diesem Kapitel wird zuerst der entsprechende Formalismus zur Beschreibung der Vakuumdoppelbrechung als Emissionsprozess allgemein eingeführt und dann auf eine bestimmte Feldkonfiguration des Pump- und des Probe-Lasers angewandt. Es ergibt sich ein Ausdruck für die differentielle Anzahl an Signalphotonen, die senkrecht zu den Probe-Photonen polarisiert sind. Es folgt eine Diskussion darüber, welche in einem Experiment zugängliche Messgröße sich daraus ergibt.

### 2.1 Der Vakuummisionsprozess

Bei Betrachtung des Doppelbrechungseffekts im Vakuum als Emissionsprozess entsprechen die Signalphotonen einem Übergang des Vakuumzustands ohne Photonen  $|0\rangle$  zu einem Vakuumzustand mit einem Photon  $|\gamma_{p'}(\mathbf{k}')\rangle \equiv a_{\mathbf{k}',p'}^\dagger|0\rangle$ , wobei  $p' \in (1, 2)$  den Polarisationszustand angibt. Es sind auch Übergänge zu Multi-Photon-Zuständen möglich. Diese sind jedoch stark unterdrückt und werden daher vernachlässigt. Die Übergangsamplitude von einem Zustand ohne Photonen zu einem Ein-Photon-Zustand mit dem Feldstärketensor  $f_{\mu\nu}$  ist gegeben durch [60]

$$S_{(p')}(\mathbf{k}') = \langle \gamma_{p'}(\mathbf{k}') | \int d^4x f^{\mu\nu}(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^{\mu\nu}}(x) | 0 \rangle. \quad (2.1.1)$$

Angeregt wird dieser Übergang durch ein makroskopisches, langsam veränderliches Feld  $F_{\mu\nu}(x)$ . Die Anzahl an Signalphotonen weit außerhalb der Wechselwirkungsregion mit einer bestimmten Polarisation  $p'$  ergibt sich rechnerisch durch Integration der differentielle Anzahl der

Signalphotonen

$$d^3 N_{(p')} = \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} |\mathcal{S}_{(p')}(\mathbf{k}')|^2, \quad (2.1.2)$$

welche sich aus Fermis goldener Regel ergibt.

Durch Einsetzen des quantisierten Signalphotonenfeldes in Lorentz-Eichung ( $\nabla \cdot \mathbf{k} = 0$ ,  $k = |\mathbf{k}|$ )

$$a^\mu(x) = \sum_{p'} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2k'}} \left( \epsilon_{(p')}^\mu(\hat{\mathbf{k}}') e^{-ik'x} a_{\mathbf{k}',p'} + \epsilon_{(p')}^{*\mu}(\hat{\mathbf{k}}') e^{ik'x} a_{\mathbf{k}',p}^\dagger \right) \quad (2.1.3)$$

mit den Polarisationsvektoren  $\epsilon_{(p)}^\mu(\hat{\mathbf{k}}')$  kann Gl. (2.1.1) zu

$$S_{(p')}(\mathbf{k}') = \frac{i}{\sqrt{2k'}} \int d^4 x e^{ik'x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^{\mu\nu}}(x) \hat{f}_{(p')}^{\mu\nu}(k') \quad (2.1.4)$$

mit dem normierten Feldstärketensor der Signalphotonen im Impulsraum

$$\hat{f}_{(p')}^{\mu\nu}(k') = k'^\mu \epsilon_{(p')}^\nu(\hat{\mathbf{k}}') - k'^\nu \epsilon_{(p')}^\mu(\hat{\mathbf{k}}') \quad (2.1.5)$$

umgeformt werden. Als Lagrange-Funktion wird an dieser Stelle die Schwachfeldnäherung der Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion entsprechend Gleichung (1.1.63) benutzt, sodass sich

$$S_{(p')}(\mathbf{k}') = \frac{i}{\sqrt{2k'}} \frac{\alpha^2}{m^4} \frac{2}{45} \int d^4 x e^{ik'x} \left( 4\mathcal{F}F_{\mu\nu} + 7\mathcal{G}\tilde{F}_{\mu\nu} \right) \hat{f}_{(p')}^{\mu\nu}(\mathbf{k}') \quad (2.1.6)$$

ergibt. Diese Relation ist gültig, solange die makroskopischen elektrischen  $\mathbf{E}$ - und magnetischen  $\mathbf{B}$ -Felder deutlich schwächer sind als der Wert der kritischen elektrischen (magnetischen) Feldstärke  $E_{cr} = \frac{m^2 c^3}{\hbar e} \approx 1.3 \cdot 10^{18}$  V/m ( $B_{cr} = \frac{E_{cr}}{c} \approx 4.4 \cdot 10^9$  T). Diese entsprechen dem Wert, ab dem es zur Paarerzeugung kommt. Die bei der Herleitung der Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion getroffene Annahme eines fermionischen Vakuums wäre für diese Feldstärken nicht mehr gegeben.

Die Beschreibung der elektrischen und magnetischen Felder der Pump- und Probe- Laserpulse, sowie der Ausbreitungs- und der Polarisationsvektoren dieser und der Signalphotonen erfolgt in Kugelkoordinaten. Der allgemeine Impulsvektor der Probe-Photonen ist in diesen Koordinaten durch

$$\hat{\mathbf{k}} = (\cos \varphi \sin \vartheta, -\sin \varphi \sin \vartheta, -\cos \vartheta) \quad (2.1.7)$$

gegeben. Es ist zu beachten, dass das Koordinatensystem so gewählt wurde, dass der Probe-Strahl für  $\vartheta = 0$  in die negative  $z$ -Richtung zeigt ( $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{e}}_z$ ). Analog lässt sich der Impulsvektor der Signalphotonen als  $\hat{\mathbf{k}}' = (\cos \varphi' \sin \vartheta', -\sin \varphi' \sin \vartheta', -\cos \vartheta')$  schreiben.

Eine beliebige Richtung in der Ebene senkrecht zum Ausbreitungsvektor  $\hat{\mathbf{k}}$ , parametrisiert durch den Winkel  $\beta$ , ist durch den Vektor

$$\hat{\mathbf{e}}_{\varphi, \vartheta, \beta} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \beta - \cos \varphi \cos \vartheta \cos \beta \\ \cos \varphi \sin \beta + \sin \varphi \cos \vartheta \cos \beta \\ -\sin \vartheta \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

gegeben bzw. für den Impulsvektor der Signalphotonen  $\hat{\mathbf{k}}'$  durch  $\hat{\mathbf{e}}_{\varphi', \vartheta', \beta'}$ . Die zwei transversalen Polarisationsmoden der Signalphotonen lassen sich demnach gemäß  $\epsilon_{(p')}^\mu(\hat{\mathbf{k}}') = (0, \hat{\mathbf{e}}_{\varphi', \vartheta', \beta'})$

definieren. Auf diese Weise ist  $\hat{k}'_\mu \epsilon^\mu_{(p')}(\hat{\mathbf{k}}') = 0$  sichergestellt. Bei linearer Polarisation können die Polarisationsmoden durch eine beliebige (aber feste) Wahl von  $\beta'$  auf  $\epsilon^\mu_{(1)}(\hat{\mathbf{k}}')$  und den dazu senkrechten Vektor  $\epsilon^\mu_{(2)}(\hat{\mathbf{k}}')|_{\beta' \rightarrow \beta' - \frac{\pi}{2}}$  festgelegt werden. Analoges gilt für die Polarisationsvektoren des Probe-Pulses, auf die nachfolgend noch genauer eingegangen wird.

Die beiden Laser-Pulse werden als Gaußsche Strahlen angenommen. Dies wird in Abschnitt 2.2 konkretisiert. Zunächst wird nur die Eigenschaft Gaußscher Strahlen genutzt, dass das elektrische und das magnetische Feld, welche beide das gleiche Amplitudenprofil aufweisen, senkrecht aufeinander und auf der Strahlachse stehen. Unabhängig davon sollen beide Laser zudem eine lineare Polarisation aufweisen. Da die Richtung des Probe-Pulses, charakterisiert durch  $\vartheta$  und  $\varphi$ , beliebig ist, kann die Ausbreitung des Pump-Pulses ohne Einschränkungen in Richtung der positiven  $z$ -Achse erfolgen. Die Richtung des elektrisches bzw. magnetisches Feldes ist durch

$$\hat{\mathbf{e}}_E = (\cos \Phi, \sin \Phi, 0) \quad \hat{\mathbf{e}}_B = (-\sin \Phi, \cos \Phi, 0) \quad (2.1.9)$$

auf die dazu senkrechte Ebene festlegt. Der Polarisationsvektor des Pump-Feldes lautet damit  $\epsilon^\mu_{\text{pump}} = (0, \hat{\mathbf{e}}_E)$  und wird durch eine Wahl des Winkels  $\Phi$  fixiert. Das auf  $\hat{\mathbf{k}}$  (Gl. (2.1.7)) senkrecht stehende elektrische bzw. magnetische Feld des Probe-Pulses lässt sich mittels des Vektors aus Gl.(2.1.8) darstellen:

$$\hat{\mathbf{e}}_e = \hat{\mathbf{e}}_{\varphi, \vartheta, \beta} \quad \hat{\mathbf{e}}_b = \hat{\mathbf{e}}_{\beta \rightarrow \beta + \frac{\pi}{2}}. \quad (2.1.10)$$

Der Polarisationsvektor des Probe-Feldes lautet damit  $\epsilon^\mu_{\text{probe}} = (0, \hat{\mathbf{e}}_e)$  und wird durch eine Wahl des Winkels  $\beta$  fixiert. Wie eingangs erläutert, sollen die Felder von Probe und Pump als ein nicht voneinander zu trennendes Feld mit dem Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  betrachtet werden. Dieses stimuliert den Vakuumemissionsprozess von Signalphotonen. Die Feldstärke des Pump-Feldes soll dabei viel größer sein als die des Probe-Feldes. Der elektrische bzw. magnetische Anteil des zusammengesetzten Feldes lässt sich als

$$\mathbf{E}(x) = \mathcal{E} \hat{\mathbf{e}}_E + \mathfrak{E} \hat{\mathbf{e}}_e = \begin{pmatrix} \mathcal{E} \cos \Phi + \mathfrak{E}(\sin \varphi \sin \beta - \cos \varphi \cos \vartheta \cos \beta) \\ \mathcal{E} \sin \Phi + \mathfrak{E}(\cos \varphi \sin \beta + \sin \varphi \cos \vartheta \cos \beta) \\ -\mathfrak{E} \sin \vartheta \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2.1.11)$$

bzw.

$$\mathbf{B}(x) = \mathcal{E} \hat{\mathbf{e}}_B + \mathfrak{E} \hat{\mathbf{e}}_b = \begin{pmatrix} -\mathcal{E} \sin \Phi + \mathfrak{E}(\sin \varphi \cos \beta + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \beta) \\ \mathcal{E} \cos \Phi + \mathfrak{E}(\cos \varphi \cos \beta - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \beta) \\ \mathfrak{E} \sin \vartheta \sin \beta \end{pmatrix} \quad (2.1.12)$$

schreiben, wobei  $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(x)$  bzw.  $\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{E}(x)$  die Feldstärkeprofile der Felder des Pump- bzw. Probe-Laserpulses sind, die im folgenden Kapitel 2.2 diskutiert werden.

Aus den Gleichungen (1.1.48) und den hier verwendeten Feldern (2.1.11) und (2.1.12) lässt sich erkennen, dass der Integrand der Übergangsamplitude (2.1.6) eine Abhängigkeit von den Laserprofilen  $\mathcal{E}$  und  $\mathfrak{E}$  der Form

$$\left(4\mathcal{F}F_{\mu\nu} + 7\mathcal{G}\tilde{F}_{\mu\nu}\right) \hat{f}^{\mu\nu}_{(p')}(\mathbf{k}') \sim \mathcal{E}^3 + \mathcal{E}^2 \mathfrak{E} + \mathcal{E} \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{E}^3 \quad (2.1.13)$$

hat, da  $\mathcal{F} \sim (\mathcal{E} + \mathfrak{E})^2 \sim \mathcal{G}$  und  $F_{\mu\nu} \hat{f}^{\mu\nu}_{(p')}(\mathbf{k}') \sim \mathcal{E} + \mathfrak{E} \sim \tilde{F}_{\mu\nu} \hat{f}^{\mu\nu}_{(p')}(\mathbf{k}')$ . Da die Feldstärke des Pump-Feldes im Vergleich zu der des Probe-Feldes sehr viel größer ist, also  $\mathfrak{E} \ll \mathcal{E}$  gilt, liefert

der Term linear in  $\mathfrak{E}$  den Hauptbeitrag zu  $S_{(p')}(\mathbf{k}')$ . Im Weiteren wird daher nur dieser Term berücksichtigt. Für  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  müssen somit jeweils nur die Anteile proportional zu  $\mathcal{E}^2$  und  $\mathcal{E}\mathfrak{E}$  berechnet werden. Setzt man die Felder (2.1.12) in die Definition (1.1.48) ein, erhält man

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) = \mathcal{E}\mathfrak{E}(1 + \cos\vartheta) \cos(\Phi + \varphi + \beta) + \mathcal{O}(\mathfrak{E}^2) \quad (2.1.14)$$

$$\mathcal{G} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = -\mathcal{E}\mathfrak{E}(1 + \cos\vartheta) \sin(\Phi + \varphi + \beta) + \mathcal{O}(\mathfrak{E}^2). \quad (2.1.15)$$

Man erkennt, dass  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  in diesem Fall keinen von  $\mathfrak{E}$  unabhängigen Term besitzen, sodass für die Kontraktionen  $F_{\mu\nu}\hat{f}_{(p')}^{\mu\nu}(\mathbf{k}')$  und  $\tilde{F}_{\mu\nu}\hat{f}_{(p')}^{\mu\nu}(\mathbf{k}')$  nur der von  $\mathcal{E}$  abhängige Teil explizit berechnet werden muss. Es ergibt sich für die durch  $p' = 1$  gekennzeichnete Polarisationsmode:

$$F_{\mu\nu}\hat{f}_{(1)}^{\mu\nu}(\mathbf{k}') = k'\mathcal{E}(1 + \cos\vartheta') \cos(\Phi + \varphi' + \beta') \quad (2.1.16)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}\hat{f}_{(1)}^{\mu\nu}(\mathbf{k}') = -k'\mathcal{E}(1 + \cos\vartheta') \sin(\Phi + \varphi' + \beta'). \quad (2.1.17)$$

Durch den Übergang  $\beta' \rightarrow \beta' - \pi/2$  erhält man das Ergebnis der Übergangsamplitude für  $p' = 2$ . Obige Beziehungen in Gl. (2.1.6) eingesetzt resultieren in folgender in der Probe-Feldstärke  $\mathfrak{E}$  linearen Übergangsamplitude

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(p')}(\mathbf{k}') &= im^2 \frac{\sqrt{\alpha}}{45} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{k'}(1 + \cos\vartheta')(1 + \vartheta) \\ &\quad \times [4 \cos\gamma' \cos\gamma + 7 \sin\gamma' \sin\gamma] \frac{e\mathfrak{E}_0}{2m^2} \left(\frac{e\mathcal{E}_0}{2m^2}\right)^2 \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Hierin wurden zum einen die Winkelkombinationen  $\gamma = \Phi + \varphi + \beta$  und  $\gamma' = \Phi + \varphi' + \beta'$  eingeführt, welche alle Informationen bezüglich Polarisation der Pump-, Probe- und Signalphotonen enthält. Zum anderen wurde das Matrixelement

$$\mathcal{M} = \int d^4x e^{ik'x} \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_0} \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}\right)^2 \quad (2.1.19)$$

mit den Peak-Feldstärken des Pump-Lasers  $\mathcal{E}_0$  und des Probe-Lasers  $\mathfrak{E}_0$  definiert. Aus dieser Darstellung geht hervor, dass im Falle konstanter Felder  $\mathcal{M} \rightarrow (2\pi)^4\delta(k')$  und somit  $\mathcal{S}_{(p')}(\mathbf{k}') = 0$ . Es werden somit keine Signalphotonen induziert. Im Falle einer ebenen Welle  $\mathfrak{E}(x) \sim \mathfrak{E}_0 e^{ikx}$  als Probe in einem konstanten Pump-Feld ergibt sich hingegen  $\mathcal{M} \rightarrow (2\pi)^4\delta(k - k')$ , sodass Impulserhaltung für die Signalphotonen sichergestellt ist.

Das zu Gleichung (2.1.18) zugehörige Feynman-Diagramm ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

Für die in Gleichung (2.1.2) eingeführte differentielle Anzahl an Signalphotonen ergibt sich

$$\begin{aligned} d^3N_{(p')} &= m^4 \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{\alpha}{45^2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 k' (1 + \cos\vartheta')^2 (1 + \cos\vartheta)^2 \left(\frac{e\mathfrak{E}_0}{2m^2}\right)^2 \left(\frac{e\mathcal{E}_0}{2m^2}\right)^4 |\mathcal{M}|^2 \\ &\quad \times [4 \cos\gamma \cos\gamma' + 7 \sin\gamma \sin\gamma']^2 \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

mit  $d^3k' = k'^2 dk' d\varphi' d\cos\vartheta'$ . Die differentielle Gesamtanzahl an Signalphotonen  $d^3N = \sum_{p'} dN_{(p')}$  ergibt sich als Summe über die beiden einzelnen Polarisationsmoden der Signalphotonen aus Gleichung (2.1.20), indem die Ersetzung  $[4 \cos\gamma \cos\gamma' + 7 \sin\gamma \sin\gamma']^2 \rightarrow [16 + 33 \sin\gamma]^2$  durchgeführt wird.

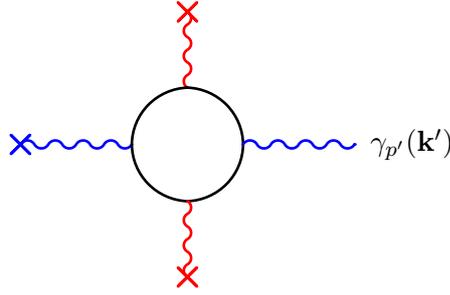


Abb. 2.1: Feynman-Diagramm des durch Gleichung (2.1.18) gegebenen dominanten Prozessanteils, bei dem ein Signalphoton der Polarisation  $p'$  und mit Wellenvektor  $\mathbf{k}'$  durch die Wechselwirkung eines virtuellen Elektron-Positron-Paares mit dem externen elektromagnetischen Feld aus dem Vakuum emittiert wird. Die Kopplung an das aus dem Probe- und dem Pump-Feld kombinierte makroskopische Feld ist in der hier betrachteten führenden Ordnung linear bezüglich des Probe-Feldes (blaues Kreuz) und quadratisch bezüglich des Pump-Feldes (rotes Kreuz).

Wie bereits erläutert, stellen die senkrecht zu den Probe-Photonen polarisierten Signalphotonen eine experimentelle Signatur der Vakuumdoppelbrechung dar. In diesem Fall können die Probe-Photonen idealerweise vollständig blockiert werden und eine zuverlässige Detektion der dazu senkrecht polarisierten Signalphotonen ist möglich. Die entsprechende differentielle Anzahl an Signal-Photonen soll durch  $d^3 N_{\perp}$  angegeben werden. Der Winkel  $\beta'$  ist dabei so zu wählen, dass der Polarisationsvektor  $\epsilon_{\text{probe}}^{\mu}(\hat{\mathbf{k}}) = (0, \hat{\mathbf{e}}_e)$  (vgl. Gl. (2.1.10)) senkrecht auf dem Polarisationsvektor der Signalphotonen  $\epsilon_{(p')}^{\mu}(\hat{\mathbf{k}}') = (0, \hat{\mathbf{e}}_{\varphi', \vartheta', \beta'})$  (vgl. Gl. (2.1.21)) steht, d.h.  $\epsilon_{\text{probe}}^{\mu}(\hat{\mathbf{k}})\epsilon_{(p')\mu}(\hat{\mathbf{k}}') = 0$ . Die Lösung  $\beta'_{\perp}$ , die sich aus dieser Gleichung durch Auflösen nach  $\beta'$  ergibt, lautet

$$\beta'_{\perp} = \arctan \left\{ \frac{\sin \beta \cos \vartheta' \sin(\varphi - \varphi') - \cos \beta (\cos \vartheta \cos \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \sin \vartheta \sin \vartheta')}{\sin \beta \cos(\varphi - \varphi') + \cos \beta \cos \vartheta \sin(\varphi - \varphi')} \right\}. \quad (2.1.21)$$

Der entsprechende Polarisationsvektor der Signalphotonen soll als  $\epsilon_{\perp}^{\mu}(\hat{\mathbf{k}}') = (0, \mathbf{e}_{\varphi', \vartheta', \beta'_{\perp}})$  bezeichnet werden. Die senkrechte Polarisationsrichtung der Signalphotonen zu der der Probe-Photonen ergibt sich also zum einen aus der Ausbreitungsrichtung  $(\varphi, \vartheta)$  und der Polarisationsrichtung  $(\beta)$  der Probe-Photonen, zum anderen aber auch aus der Ausbreitungsrichtung der Signalphotonen selbst  $(\varphi', \vartheta')$ .

Dadurch, dass die Frequenz bzw. die Skala der Veränderung des Pump-Pulses sehr viel geringer sein soll als die des Probe-Pulses um ein möglichst großes Signal zu erhalten (vgl. Gl. (1.2.22)), werden Frequenz und Impuls des Probe-Pulses nicht sehr stark durch den Pump-Puls beeinflusst. Der Großteil der Signalphotonen wird daher in die Ausbreitungsrichtung der Probe-Photonen emittiert, also  $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}'$  bzw.  $\varphi' \approx \varphi$  und  $\vartheta' \approx \vartheta$ . Aus Gleichung (2.1.21) ergibt sich dafür  $\beta'_{\perp} \approx (\beta \bmod \pi) - \frac{\pi}{2}$ . Die Polarisationsvektoren von Probe-Strahl und von Signalphotonen sind also näherungsweise, wie zu erwarten um  $\pi/2$  bzw.  $90^{\circ}$  zueinander gedreht.

## 2.2 Feldkonfigurationen von Pump- und Probe-Laser

Die Feldstärkeprofile des Pump-Lasers  $\mathcal{E}$  und des Probe-Lasers  $\mathfrak{E}$  sollen im Folgenden spezifiziert werden. Um die Erfolgchancen eines Verifizierungsexperiment zur Vakuumdoppelbrechung anhand der senkrecht zur Ausgangsstrahlung polarisierte Signalphotonen zu maximieren, benötigt man, wie an den Gleichungen (2.1.19) und (2.1.20) zu sehen, möglichst hohe Feldstärken  $\mathcal{E}$  und  $\mathfrak{E}$ . Es ist jedoch zu beachten, dass hier der Fall betrachtet wird, in dem die Bedingung  $\mathfrak{E} \ll \mathcal{E}$  erfüllt ist.

In dieser Arbeit wird von einem Pump-Laser mit Pulsen von hoher Intensität und einem Probe-Laser im Röntgenbereich (XFEL) ausgegangen, die in einem zukünftigen Experiment zur Verifikation der Vakuumdoppelbrechung z.B. an der Lasereinrichtung HIBEF (Helmholtz International Beamline for Extreme Fields [53]) genutzt werden könnten.

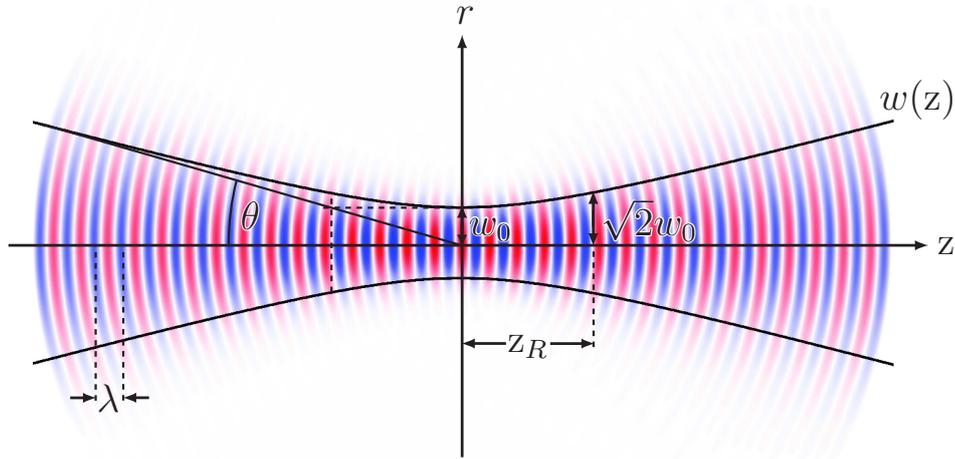


Abb. 2.2: Schematische Darstellung eines sich in  $z$ -Richtung ausbreitenden Gaußschen Laserstrahls der Wellenlänge  $\lambda$ . Der Strahl ist rotationssymmetrisch um die  $z$ -Achse ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ). Im Strahlfokus bei  $z = 0$  beträgt der Strahldurchmesser  $2w_0$ . Die Rayleighlänge  $z_R$  ist als der Abstand vom Fokus gegeben, bei dem der Strahlradius auf  $w(\pm z_R) = \sqrt{2}w_0$  gewachsen ist. Der Divergenzwinkel ist durch  $\Theta \simeq \frac{w_0}{z_R}$  gegeben (entnommen aus [66]).

Der Pump-Laser wird durch einen gepulsten gaußschen Strahl in der paraxialen Approximation modelliert. Dies entspricht dem Profil einer  $TEM_{00}$ -Mode (TEM für transverse electric and magnetic), also der dauerhaft transversalen Schwingungsmode in einem Laser ohne Knotenlinien quer zum Laserstrahl. Bei dieser Mode treten keine Phasenverschiebungen quer zum Strahl auf, der Streuwinkel des Strahls ist klein und der Strahl lässt sich gut fokussieren. In Abbildung 2.2 ist die Feldverteilung in einem Gaußschen Strahl dargestellt. Bei Ausbreitung des Laserstrahls in  $z$ -Richtung ist die Verteilung der Feldstärke durch

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{(z-t)^2}{(\tau/2)^2}} \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \cos(\Phi(x)) \quad (2.2.1)$$

mit  $\Phi(x) = \Omega(z-t) + \frac{\Omega(x^2+y^2)}{2R(z)} - \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$  gegeben. Dies beschreibt einen Strahl der

Pulsdauer  $\tau$  und Frequenz  $\Omega$  (bzw. Wellenlänge  $\lambda$ ) mit der maximalen Feldstärke  $\mathcal{E}_0$ , dessen Strahltaile bei  $z = 0$  einen Radius von  $w_0$  hat. Die Funktion  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}$  beschreibt, wie stark sich der Strahl mit der Entfernung von  $z = 0$  weitet. Ein Laser wird üblicherweise entweder durch die Strahltaile  $w_0$  oder die Rayleigh-Länge  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$  charakterisiert, welche den Wert  $z$  angibt, für den sich die Strahlquerschnittsfläche verdoppelt hat. Desweiteren gibt die Funktion  $R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right]$  den Krümmungsradius der Phasenflächen des Gauß-Strahls an. Damit weist der gaußsche Strahl die geringste Krümmung bei  $z = \pm z_R$  auf, nämlich die einer Kugelwelle, die in  $z = -z_R$  bzw.  $z = +z_R$  ihren Ursprung hat. Für  $z \gg z_R$  gilt  $R(z) \approx z$ , was einer Kugelwelle entspricht, die im Fokuspunkt des Strahls startet. Der Term  $\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$  entspricht der Gouyschen Phasenverschiebung. Die Feldstärkeverteilung  $\mathcal{E}(x)$  des Pump-Lasers lässt sich auf eine für die weitere Rechnung handlichere Form bringen, indem der letzte Term in Gl. (2.2.1) zu

$$\cos(\Phi(x)) = \frac{1}{2} \frac{w_0}{w(z)} \sum_{l=\pm 1} e^{i l \Omega(z-t)} e^{i l \frac{z}{z_R} \frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \left(1 - i l \frac{z}{z_R}\right) \quad (2.2.2)$$

umgeformt wird. Hier wurde lediglich das Additionstheorem für trigonometrische Funktionen sowie die Darstellung trigonometrischer Funktionen als Exponentialfunktionen benutzt. Es ergibt sich hiermit:

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{(z-t)^2}{(\tau/2)^2}} \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{1}{2} \sum_{l=\pm 1} \left(1 - i l \frac{z}{z_R}\right) e^{i l \Omega(z-t)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \left(1 - i l \frac{z}{z_R}\right). \quad (2.2.3)$$

Zur Berechnung der differentiellen Teilchenzahl gemäß der Gleichungen (2.1.2) und (2.1.19) muss Gleichung (2.2.3) quadriert werden. Hierbei entsteht ein von der Pump-Laserfrequenz  $\Omega$  abhängiger Teil und ein von ihr unabhängiger Teil:

$$\mathcal{E}^2(x) = \frac{1}{4} \mathcal{E}_0^2 e^{-2\frac{(z-t)^2}{(\tau/2)^2}} \left[ 2 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} + \sum_{l=\pm 1} \frac{1}{\left(1 + i l \frac{z}{z_R}\right)^2} e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \left(1 - i l \frac{z}{z_R}\right) e^{2i l \Omega(z-t)} \right]. \quad (2.2.4)$$

In Kapitel 3.2 wird für eine bestimmte Wahl von Parametern exemplarisch gezeigt, dass der von der Frequenz  $\Omega$  unabhängige Teil stark dominiert (siehe auch [55]). Im Folgenden wird daher die Näherung

$$\mathcal{E}^2(x) \approx \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 e^{-2\frac{(z-t)^2}{(\tau/2)^2}} e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \quad (2.2.5)$$

benutzt. Das gleiche Ergebnis erhalte man auch, wenn man das Quadrat der Gleichung (2.2.1) durch seine Einhüllende nähern würde, d.h. die Feldmodulation über eine Periode mitteln würde, was  $\cos^2(\Phi(x)) \rightarrow \frac{1}{2}$  zur Folge hätte.

Der Probe-Lasers soll entsprechend der Eigenschaften eines Elektronenstrahl lasers mit seiner Wellenlänge im Bereich von Röntgenstrahlung (XFEL) modelliert werden. Da die Frequenz  $\omega$  des Probe-Lasers mit dieser Annahme viel größer ist als die des Pump-Lasers, ändert sich die Strahlweite des Probe-Strahls sehr viel weniger als die des Pump-Strahls. Fokussierungseffekte des Probe-Strahls spielen daher im Bereich der Wechselwirkung zwischen Pump-

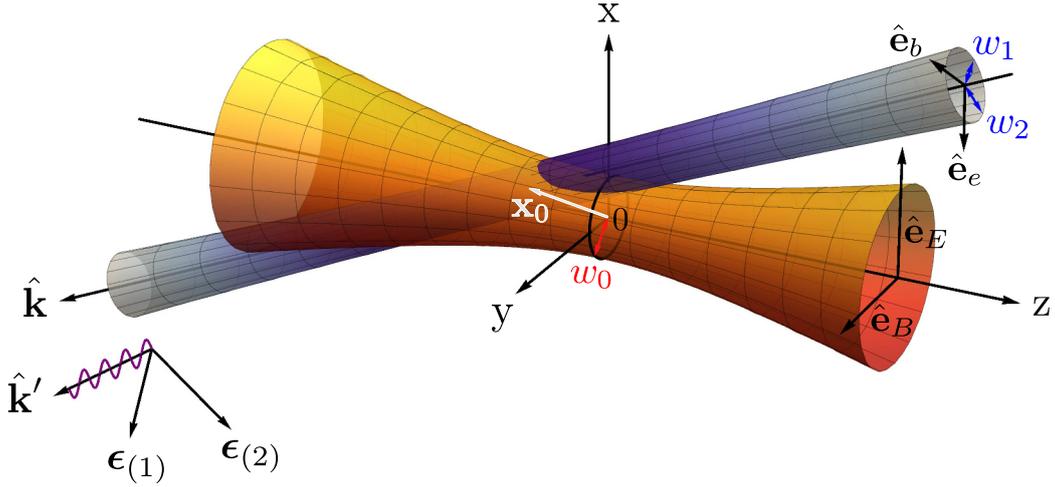


Abb. 2.3: Skizze des hier betrachteten Szenarios. Das transversale Profil des Pump-Strahls (orange), dessen Fokus mit dem Koordinatenursprung zusammen fällt, entspricht einem linear polarisierten Gaußschen Strahl mit einem Radius  $w_0$  in der Fokusebene. Der Probe-Strahl (blau), dessen Strahlachse entlang  $\hat{\mathbf{k}}$  verläuft, hat einen i.A. elliptischen Strahlquerschnitt, der durch die Parameter  $w_1$  und  $w_2$  parametrisiert ist. Die normierten elektrischen  $\hat{\mathbf{e}}_E$  ( $\hat{\mathbf{e}}_e$ ) und magnetischen  $\hat{\mathbf{e}}_B$  ( $\hat{\mathbf{e}}_b$ ) Feldvektoren von Pump (Probe) stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\hat{\mathbf{e}}_z$  ( $\hat{\mathbf{k}}$ ). Zwischen den Fokussen des Pump- und Probe-Strahls kann eine Verschiebung  $x_0^\mu$  vorliegen (entnommen aus [56]).

und Probe-Laser kaum eine Rolle. In der Berechnung von  $\mathcal{M}$  (Gl. (2.1.19)) wird vereinfacht angenommen, dass sich der Probe-Strahl nicht weitet und somit einem Gaußschen Strahl im Limes  $z_R \rightarrow \infty$  entspricht. Für die Fernfeldbetrachtung muss die Weitung des Strahls später wieder berücksichtigt werden, wie im Abschnitt 'Divergenz' des Kapitels 2.3 erläutert wird. Neben der Anpassung des Gaußschen Strahlprofils (2.2.1) an die hohe Frequenz des Probe-Strahls muss im Vergleich zu der Beschreibung des Pump-Strahl auch noch berücksichtigt werden, dass der Probe-Strahl in eine beliebige Richtung  $\hat{\mathbf{k}}$  (Gl. (2.1.7)) zeigen kann und es möglich sein soll den Fokus beliebig – also sowohl räumlich als auch zeitlich – um einen Vektor  $x_0^\mu = (t_0, \mathbf{x}_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0)$  gegenüber dem des Pump-Strahls zu verschieben. Zudem soll der Strahlquerschnitt im Allgemeinen eine elliptische Form haben und nicht auf eine Kreisfläche beschränkt sein. Zu diesem Zweck werden die zwei Parameter  $\{w_1, w_2\}$  eingeführt, die den beiden zueinander und zu der Ausbreitungsrichtung des Probe-Strahls  $\hat{\mathbf{k}}$  senkrechten Rich-

tungen  $\{\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}\}$  zugeordnet werden. Nach Festlegung dieser mit Hilfe des Vektors (2.1.8) auf  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{e}}_{\varphi, \vartheta, \delta_0}$  und  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{e}}_{\varphi, \vartheta, \delta_0 + \frac{\pi}{2}}$  kann die Orientierung der Ellipse, welche den Strahlquerschnitt beschreibt, durch die Wahl des Winkels  $\delta_0$  fixiert werden. Der Radius des Probe-Strahls in beliebige Richtung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\hat{\mathbf{k}}$  ergibt sich zu

$$w(\delta) = \sqrt{w_1^2 \cos^2(\delta - \delta_0) + w_2^2 \sin^2(\delta - \delta_0)}, \quad (2.2.6)$$

wobei der Winkel  $\delta$  eine Rotation um  $\hat{\mathbf{k}}$  parametrisiert. Wie zu erwarten hebt sich die Winkelabhängigkeit für einen runden Querschnitt ( $w_1 = w_2$ ) weg.

Der Probe-Puls der Frequenz  $\omega$  und Pulsdauer  $T$  ergibt sich mit diesen Modifikationen zu

$$\mathfrak{E}(x) = \mathfrak{E}_0 e^{-\frac{[\hat{\mathbf{k}} \cdot (x - x_0)]^2}{(T/2)^2}} e^{-\frac{[\hat{\mathbf{a}} \cdot (x - x_0)]^2}{w_1^2}} e^{-\frac{[\hat{\mathbf{b}} \cdot (x - x_0)]^2}{w_2^2}} \cos(\omega \hat{k}(x - x_0) + \psi_0). \quad (2.2.7)$$

Dabei bezeichnet  $\mathfrak{E}_0$  die maximale Feldstärke des Probe-Pulses,  $\psi_0$  gibt eine konstante Phase an und  $\hat{k}^\mu = (1, \hat{\mathbf{k}})$  ist der normierte Vierer-Wellenvektor des Probe-Strahls ( $k^\mu = \omega \hat{k}^\mu$ ). Die sich ergebende Anordnung von Probe- und Pump-Feld ist in Abbildung 2.3 skizziert.

Im Fernfeld sollen beide Strahlen als Gaußsche Strahlen betrachtet werden. In diesem Bereich wächst der Strahlradius in etwa linear mit  $z$  an, sodass sich der Divergenzwinkel  $\Theta(\delta)$  für den Probe-Strahl aus der Kleinwinkelnäherung

$$\tan \Theta \approx \Theta(\delta) = \lim_{z \gg z_R} \frac{w(z)}{z} = \frac{w(\delta)}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w(\delta)} = \frac{2}{\omega w(\delta)} \quad (2.2.8)$$

definieren lässt. Der Divergenzwinkel des Pump-Strahl ergibt sich analog, spielt aber im Weiteren keine Rolle. Eine wichtige Erkenntnis hieraus ist, dass sich der Strahl umso stärker weitet, je stärker er fokussiert ist d.h. je kleiner die Strahltaile  $w(\delta)$  ist.

## 2.3 Signalphotonenanzahl bei expliziten Feldkonfigurationen

### 2.3.1 Matrixelement $\mathcal{M}$

Mit den im vorherigen Kapitel 2.2 spezifizierten Feldkonfigurationen  $\mathcal{E}^2(x)$  des Pump-Lasers (Gl.(2.2.5)) und  $\mathfrak{E}$  des Probe-Lasers (Gl.(2.2.7)) können die Integrale über  $t$ ,  $x$  und  $y$  im Term  $\mathcal{M}$  (Gl. (2.1.19)) explizit ausgeführt werden. Diese nehmen jeweils die Form Gaußscher Integrale an. Die  $z$ -Integration kann hingegen im Allgemeinen nicht analytisch ausgeführt werden.

Auf Grund der vielen Parameter, die die Möglichkeit zu einer realistischen, experimentnahen Beschreibung der Gegebenheiten in Bezug auf die Lasereigenschaften und des räumlichen Aufbaus geben sollen, bläht sich die Formel für  $\mathcal{M}$  trotz der unkomplizierten Integration stark auf. Um dem entgegenzuwirken werden folgende Abkürzungen eingeführt ( $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ):

$$f_{ij} = 8 \frac{(\hat{k}_i - \delta_{3i})(\hat{k}_j - \delta_{3j})}{2T^2 + \tau^2} + \frac{\hat{a}_i \hat{a}_j}{w_1^2} + \frac{\hat{b}_i \hat{b}_j}{w_2^2} + 2 \frac{\delta_{ij} - \delta_{3i} \delta_{3j}}{w^2(z)} \quad (2.3.1)$$

$$g_i = 2\hat{a}_i \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}_0}{w_1^2} + 2\hat{b}_i \frac{\hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{x}_0}{w_2^2} + (\hat{k}_i - \delta_{3i}) \frac{16\hat{k}x_0}{2T^2 + \tau^2} \quad (2.3.2)$$

$$\mathfrak{g}_i = k'(\hat{k}'_i - \delta_{3i}) + (\hat{k}_i - \delta_{3i}) \frac{2l\omega T^2 - k'\tau^2}{2T^2 + \tau^2}. \quad (2.3.3)$$

Diese haben für sich genommen keine besondere Bedeutung, ermöglichen aber eine relativ kompakte und übersichtliche Darstellung des Matrixelements  $\mathcal{M}$  bei noch ausstehender  $z$ -Integration:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T\tau}{\sqrt{2T^2 + \tau^2}} e^{-\frac{(\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}_0)^2}{w_1^2} - \frac{(\hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{x}_0)^2}{w_2^2} - 8 \frac{(\hat{k}x_0)^2}{2T^2 + \tau^2}} \sum_{l=\pm 1} e^{-\frac{T^2\tau^2}{2T^2 + \tau^2} \frac{(k'+l\omega)^2}{16}} e^{-i\hat{k}x_0 \frac{2l\omega T^2 - k'\tau^2}{2T^2 + \tau^2}} \\ & \times e^{il\psi_0} \int dz \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}} e^{\frac{(g_1^2 - g_1^2)f_{22} + (g_2^2 - g_2^2)f_{11} - 2f_{12}(g_1g_2 - g_1g_2)}{4(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}} \\ & \times e^{\frac{i}{2} \frac{g_1g_1f_{22} + g_2g_2f_{11} - f_{12}(g_1g_2 + g_2g_1)}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}} e^{z \left[ \frac{f_{12}f_{13} - f_{11}f_{23}}{f_{11}(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} (f_{11}g_2 - f_{12}g_1) - \frac{f_{13}}{f_{11}} g_1 + g_3 \right]} \\ & \times e^{iz \left[ \frac{f_{12}f_{13} - f_{11}f_{23}}{f_{11}(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} (f_{11}g_2 - f_{12}g_1) - \frac{f_{13}}{f_{11}} g_1 + g_3 \right]} e^{-z^2 \left[ f_{33} - \frac{f_{13}^2}{f_{11}} - \frac{(f_{12}f_{13} - f_{11}f_{23})^2}{f_{11}(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} \right]}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Beachtet man, dass  $f_{11}$  und  $f_{22}$  über  $w(z)$  von  $z$  abhängen, lässt sich anhand der Gleichung (2.3.4) bereits erahnen, dass die  $z$ -Integration nicht analytisch durchführbar ist, was durch eine genaue Analyse auch bestätigt wird. Da von den verwendeten Abkürzungen (2.3.1) bis (2.3.3) nur die letzte eine Abhängigkeit vom Betrag des Impulses der Signal-Photonen  $k'$  hat, hängt Gleichung (2.3.4) nur via lineare und quadratische Terme in den Exponentialfunktionen von  $k'$  ab.

Die in Gleichung (2.3.4) auftretenden Funktionen und Parameter sind alle rein reellwertig, sodass eine Zerlegung von (2.3.4) unter Verwendung der Relation  $e^{ix} = \cos \chi + i \sin \chi$  in die reellen ( $\Re(\mathcal{M})$ ) und imaginären Anteile ( $\Im(\mathcal{M})$ ) einfach zu bewerkstelligen ist. Diese Zerlegung bietet sich an, um das Betragsquadrat  $|\mathcal{M}|^2 = \Re^2(\mathcal{M}) + \Im^2(\mathcal{M})$  zu berechnen, das in der Gleichung (2.1.20) zur Berechnung der differentiellen Anzahl an Signal-Photonen auftritt.

Weiterhin lässt sich darauf schließen, dass der Beitrag  $l = +1$  der Summe in Gleichung (2.3.4) im Vergleich zu  $l = -1$  stark unterdrückt ist. Dies erkennt man am einfachsten, wenn man den Fall betrachtet, bei dem die Signal-Photonen hauptsächlich in die Richtung der Probe-Photonen mit annähernd der gleichen Frequenz induziert werden, d.h.  $\mathbf{k}' \approx \mathbf{k}$ . Da bei den in Kapitel 2.2 angenommenen Lasern die Frequenz  $\Omega$  des Pump-Pulses sehr viel kleiner ist als die Probe-Frequenz  $\omega$ , ruft das Pump-Feld nur geringfügige Veränderungen im Probe-Feld hervor. Daher ist  $\mathbf{k}' \approx \mathbf{k}$  eine gerechtfertigte Annahme. Setzt man also  $\hat{k}'_i \approx \hat{k}_i$  und  $k' \approx \omega$  in die Funktion (2.3.3) ein, die die einzige Abhängigkeit der Gl. (2.3.4) von  $k'$  enthält, erhält man

$$\mathbf{g}_i \approx (\hat{k}_i - \delta_{3i}) \frac{2T^2\omega}{2T^2 + \tau^2} (1 + l), \quad (2.3.5)$$

sodass  $\mathbf{g}_i \approx 0$  für  $l = -1$ . Die entsprechenden, im Gegensatz zu denen für  $l = -1$ , für  $l = +1$  nicht-verschwindenden Terme in (2.3.4) der Form  $e^{iAz}$  verursachen eine starke Oszillation des Integranden, welche den Wert des Integrals quasi auf Null setzt. Zudem fallen durch  $\mathbf{g}_i \approx 0$  für  $l = -1$  einige Terme unter dem Integral weg, die für  $l = +1$  eine exponentielle Unterdrückung verursachen. Eine exponentielle Unterdrückung ergibt sich für  $l = +1$  auch im  $z$ -unabhängigen Teil von (2.3.4), der für  $l = -1$  hingegen eine exponentielle Verstärkung verursacht.

Um den rechnerischen Aufwand zu verkleinern, wird bei den in den folgenden Kapiteln explizit berechneten Werten der zu erwartenden Signalphotonenanzahl nur der Beitrag mit  $l = -1$  benutzt, sofern nicht anders angegeben.

### 2.3.2 Verteilung der Signalphotonen

Die Anzahl der senkrecht zu den Probe-Photonen polarisierten Signalphotonen  $N_{\perp}$  kann bei gegebenen Laserparametern durch Integration der Gleichung (2.1.20) mit obigem  $\mathcal{M}$  (Gl. (2.3.4)) für eine beliebige Anordnung von Pump- und Probe-Lasern berechnet werden. Allerdings ist die Gesamtzahl an Signalphotonen  $N_{\perp}$  experimentell mit den momentan verfügbaren Instrumenten nicht zugänglich, da die Anzahl der Probe-Photonen sehr viel größer ist und diese somit ein starkes Hintergrundsignal verursachen. Ein besonderer Fokus liegt daher im Folgenden zunächst auf der differentiellen Anzahl an Signalphotonen

$$\frac{d^2 N_{\perp}}{d\varphi' d \cos \vartheta'} \equiv \int_0^{\infty} dk' k'^2 \frac{d^3 N_{(p')}}{d^3 k'}. \quad (2.3.6)$$

Diese unterscheidet sich in ihrem Abfallverhalten für zunehmendes  $\vartheta'$ , d.h. mit zunehmenden Abstand von der optischen Achse, deutlich von dem der Probe-Photonen  $\frac{d^2 N}{d\varphi' d \cos \vartheta'}$  und zwar in der Weise, dass die Anzahl der Probe-Photonen schneller abnimmt als die der Signalphotonen, wie im folgenden Kapitel 3.2 eingehend diskutiert wird. Hierdurch eröffnet sich die Möglichkeit die Signalphotonen in einem Bereich zu suchen, in dem das Hintergrundsignal der Probe-Photonen bereits deutlich schwächer ist als beispielsweise auf der Strahl-Achse des Probe-Pulses. Das Verhältnis der Anzahl von Signal- zu Probe-Photonen ist daher günstiger. In der vorliegenden Arbeit wird zum einen die theoretische Anzahl der senkrecht polarisierten Signalphotonen außerhalb der Divergenz  $\Theta(\delta)$  des Probe-Strahls betrachtet, also in einem Bereich, der nur  $1/e^2 \approx 13.5\%$  der Gesamtanzahl der Probe-Photonen enthält. Diese Anzahl soll mit  $N_{\perp > \Theta}$  bezeichnet werden. Wie man sie berechnet, wird im folgenden Abschnitt genauer

erläutert. Zum anderen wird die Anzahl der senkrecht zu den Probe-Photonen polarisierten Signalphotonen berechnet, die sich in einem Bereich befinden, in dem das Verhältnis von Signal- zu Probe-Photonen einen bestimmten Wert überschreitet, nämlich die mit heutigen Mitteln maximal erreichbarer Messgenauigkeit der Polarisation  $\mathcal{P}$ . Diese Anzahl an Signal-Photonen soll mit  $N_{\perp>\sigma}$  bezeichnet werden, wobei  $\sigma$  der Winkel ist, der die beschriebene Region parametrisiert. Eine genaue Erläuterung hierzu findet sich im Anschluss an den kommenden Abschnitt zur Divergenz.

### Divergenz

Wie bereits in Kapitel 2.2 beschrieben, sollen beide Laser im Fernfeld als Gaußsche Strahlen angenommen werden. Für den Probe-Strahl ist der Divergenzwinkel, d.h. der Winkel, bei dem im Fernfeld die Feldstärke auf das  $1/e$ -fache bzw. die Intensität auf  $1/e^2$ -fache abgefallen ist, entsprechend Gleichung (2.2.8) durch  $\Theta(\delta) = \frac{2}{\omega w(\delta)}$  gegeben. Der Radius  $w(\delta)$  berechnet sich gemäß Gleichung (2.2.6).

Da die Anzahl der Photonen in einem Laser proportional zu dem Betrag der Feldstärke ist ( $N \sim \mathcal{E}^2$ ), hängt die Winkelverteilung der Photonen mit der Divergenz gemäß

$$\frac{d^2 N}{d\delta d \cos \zeta} \simeq \tilde{N} e^{-2\left(\frac{\zeta}{\Theta(\delta)}\right)^2} \quad (2.3.7)$$

zusammen. Hierbei beschreibt  $\zeta$  den Winkel, der von der Ausbreitungsrichtung weg geht. Die Konstante  $\tilde{N}$  lässt sich bei bekannter Gesamtzahl  $N$  der Probe-Photonen durch Integration der Gleichung (2.3.7) bestimmen. Da für den Divergenzwinkel  $\Theta(\delta) \ll 1$  gilt, wird der Hauptbeitrag zum Integral durch kleine Werte von  $\zeta$  geliefert, sodass die Näherung  $\sin(\zeta) \rightarrow \zeta$  durchgeführt werden kann. Für die Integration von (2.3.7) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} N &= \tilde{N} \int_0^{2\pi} d\delta \int_0^{\pi} d\zeta \sin \zeta e^{-2\left(\frac{\zeta}{\Theta(\delta)}\right)^2} \simeq \tilde{N} \int_0^{2\pi} d\delta \int_0^{\gg\Theta(\delta)} d\zeta \sin \zeta e^{-2\left(\frac{\zeta}{\Theta(\delta)}\right)^2} \\ &\simeq \tilde{N} \int_0^{2\pi} d\delta \int_0^{\infty} d\zeta \zeta e^{-2\left(\frac{\zeta}{\Theta(\delta)}\right)^2} \\ &\simeq \tilde{N} \frac{2\pi}{\omega^2 w_1 w_2}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Für die differentielle Anzahl an Probe-Photonen im Fernfeld erhält man somit

$$\frac{d^2 N}{d\delta d \cos \zeta} = \frac{\omega^2 w_1 w_2}{2\pi} N e^{-2\left(\frac{\zeta}{\Theta(\delta)}\right)^2}. \quad (2.3.9)$$

Der Vergleich der differentiellen Anzahl an Probe- und an Signalphotonen erfolgt in einem an die Signalphotonen angepassten Koordinatensystem, in dem Richtungen durch  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  angegeben werden. Es soll also  $\frac{d^2 N}{d\vartheta' d \cos \varphi'}$  mit  $\frac{d^2 N_{\perp}}{d\vartheta' d \cos \varphi'}$  verglichen werden. Hierfür müssen die Winkel  $\delta$  und  $\zeta$  in Gleichung (2.3.9) mit Hilfe von  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  ausgedrückt werden.

Bei  $\zeta$  handelt es sich um den Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung des Probe-Strahls  $\hat{\mathbf{k}} = (\cos \varphi \sin \vartheta, -\sin \varphi \sin \vartheta, -\cos \vartheta)$  (Gl.(2.1.7)) mit festen Winkeln  $\vartheta$  und  $\varphi$  und einem beliebigen Vektor  $\hat{\mathbf{k}}' = (\cos \varphi' \sin \vartheta', -\sin \varphi' \sin \vartheta', -\cos \vartheta')$ . Es gilt:

$$\zeta = \arccos(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = \arccos(\sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta'). \quad (2.3.10)$$

Weiterhin wird der Winkel  $\delta$  in der Ebene senkrecht zu  $\hat{\mathbf{k}}_{\text{probe}}$ , welche durch die Vektoren  $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{e}_{\varphi, \vartheta, \delta_0}$  und  $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{e}_{\varphi, \vartheta, \delta_0 + \frac{\pi}{2}}$  aufgespannt wird, ausgedrückt durch  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  gesucht. Diesen erhält man als den Winkel zwischen  $\hat{\mathbf{a}}$  und der Projektion

$$\mathbf{k}'_{\text{proj}} = (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{a}}) \hat{\mathbf{a}} + (\hat{\mathbf{k}}' \cdot \hat{\mathbf{b}}) \hat{\mathbf{b}} \quad (2.3.11)$$

des Vektors  $\hat{\mathbf{k}}'$  in die  $\hat{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{b}}$ -Ebene. Er entspricht dem Winkel  $\delta - \delta_0$ , sodass sich

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_0 + \arccos \left( \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{k}'_{\text{proj}}}{|\mathbf{k}'_{\text{proj}}|} \right) \\ &= \delta_0 + \arccos \left( \frac{\cos \vartheta' \sin \vartheta \cos \delta_0 + \sin \vartheta' (\sin(\varphi - \varphi') \sin \delta_0 - \cos(\varphi - \varphi') \cos \vartheta \cos \delta_0)}{\sqrt{\sin^2(\varphi - \varphi') \sin^2 \vartheta' + (\sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') \cos \vartheta - \cos \vartheta' \sin \vartheta)^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

ergibt.

Für eine gegenläufige Anordnung von Pump- und Probe-Laser, d.h. bei  $\vartheta = 0 = \varphi$ , erhält man die einfache Ersetzung  $\delta \rightarrow \varphi'$  und  $\zeta \rightarrow \vartheta'$ . Damit sind die Integrationsgrenzen zur Berechnung der Anzahl an Signalphotonen außerhalb der Strahldivergenz des Probe-Strahls in Gleichung (2.3.6) eindeutig festgelegt ( $\Theta(\varphi') < \vartheta' < \pi$  und  $0 < \varphi' < 2\pi$ ). Im Allgemeinen sind sowohl  $\delta$  als auch  $\zeta$  von  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  abhängig und eine Auflösung nach  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  ist nicht mehr möglich.

### Detektierbarkeit

Eine für eine experimentelle Messung noch geeignetere Größe als  $N_{\perp > \Theta}$  ist die Anzahl an senkrecht zu den Probe-Photonen polarisierten Signalphotonen  $N_{\perp > \sigma}$ , welche mit Instrumenten auf dem neuesten Stand der Technik tatsächlich detektiert werden kann. Das momentan beste Spektrometer für Strahlung im Röntgenbereich hat eine Messgenauigkeit für die Polarisationsmessung von  $\mathcal{P} = 5.7 \cdot 10^{-10}$  [67, 68], sodass ein sinnvolles Kriterium, ob Signalphotonen in einem gegebenen Raumwinkelelement  $d\varphi' d \cos \vartheta'$  sicher gemessen werden können, durch

$$\frac{d^2 N_{\perp}}{d\varphi' d \cos \vartheta'} / \frac{d^2 N}{d\varphi' d \cos \vartheta'} \geq \mathcal{P} \quad (2.3.13)$$

gegeben ist. Ist Gleichung (2.3.13) erfüllt, reicht das Verhältnis von Signal- zu Probe-Photonen aus, um erstere sicher vom Hintergrund der Probe-Photonen unterscheiden zu können. Allgemein lässt sich hieraus für jeden Winkel  $\varphi'$  das zugehörige  $\vartheta' = \sigma(\varphi')$  bestimmen, ab dem das Kriterium (2.3.13) erfüllt ist. Zur Berechnung der Gesamtzahl an Signal-Photonen  $N_{\perp > \sigma}$  wird dann über  $\vartheta'$  im Bereich  $\sigma(\varphi') < \vartheta' < \pi$  und über eine volle Umdrehung in  $\varphi'$  integriert. Dies ist jedoch numerisch aufwendig, da für jedes  $\varphi'$  zunächst die untere Integrationsgrenze der  $\vartheta'$ -Integration aus obiger Bedingung (2.3.13) bestimmt werden muss.

Der numerische Aufwand lässt sich durch Ausnutzung der elliptischen Symmetrie des Strahlquerschnitts des Probe-Lasers verringern. Bei einer exakt gegenläufigen Anordnung von Pump- und Probe-Puls ( $\vartheta = 0 = \varphi$ ,  $x_0^{\mu} = 0$ ) wird die Verteilung der Signal-Photonen und somit auch das Verhältnis der differentiellen Anzahl von Signal- zu Probe-Photonen die gleiche elliptische Symmetrie aufweisen. Die Funktion  $\sigma(\varphi')$ , welche die untere Grenze der  $\vartheta'$ -Integration bildet, entspricht somit einer Ellipsengleichung, bei der lediglich die Werte der großen Hauptachse

$\sigma_1$  und der kleinen Hauptachse  $\sigma_2$ , d.h. für  $\varphi' = \delta_0$  und  $\varphi' = \delta_0 + \frac{\pi}{2}$ , direkt aus der Bedingung (2.3.13) bestimmt werden muss. Es ergibt sich:

$$\sigma(\varphi') = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 \cos^2(\varphi' - \delta_0) + \sigma_1^2 \sin^2(\varphi' - \delta_0)}}. \quad (2.3.14)$$

Sind die Pump- und Probe-Strahlen gegeneinander verkippt ( $\vartheta, \varphi \neq 0$ ) und/oder zueinander verschoben ( $x_0^\mu \neq 0$ ) nimmt  $\sigma(\varphi')$  im Allgemeinen nicht mehr die Form einer Ellipse an, sodass die Gleichung (2.3.13) theoretisch für jedes  $\varphi'$  einzeln gelöst werden muss. Es zeigt sich jedoch, dass die Abweichung von der Ellipsenform sehr gering ist, sodass Gl. (2.3.14) näherungsweise auch für diese Fälle verwendet werden kann.

Neben der in Gleichung (2.3.13) angegebenen Bedingung zur Detektierbarkeit der Signalphotonen muss gleichermaßen beachtet werden, dass überhaupt genügend Photonen in den betrachteten Winkelbereich gestreut werden, um genügend Messungen für eine fundierte Statistik zu erhalten. Dazu wird im Folgenden auch betrachtet, wie viele Signalphotonen  $N_{\perp > \sigma}$  bei den angenommenen Laserparametern pro Stunde zu erwarten sind.

# Kapitel 3

## Ergebnisse

Um die Effekte der Parameter  $\vartheta$ ,  $\varphi$  und  $x_0$ , also der relativen Positionierung der beiden Laserstrahlen zueinander systematisch untersuchen zu können, wird im Folgenden als erstes der Fall exakter Gegenpropagation, d.h. ohne Verschiebung ( $x_0 = 0$ ) und ohne Drehung der Strahlen gegeneinander ( $\vartheta = 0 = \varphi$ ) betrachtet. Danach folgt die Untersuchung der Fälle  $\vartheta = 0 = \varphi$  aber  $x_0 \neq 0$ , sowie  $x_0 = 0$  aber  $\vartheta, \varphi \neq 0$ . Des Weiteren wird eine Näherungslösung für die Anzahl der Signalphotonen angegeben, die man durch die Ersetzung  $w(z) \rightarrow w_{\text{eff}} = \text{const.}$  erhält.

Für alle untersuchten Anordnungen wird zudem auf den Einfluss der Querschnittsfläche des Probe-Strahls, parametrisiert durch  $w_1$  und  $w_2$ , eingegangen. Alle weiteren Parameter werden im folgenden Abschnitt 3.1 fixiert.

### 3.1 Laserparameter

Um eine Abschätzung der in einem Experiment zu erwartenden Anzahl an senkrecht zu den Probe-Photonen polarisierten Signalphotonen machen zu können, werden Parameter verwendet, wie sie bei modernen Lasereinrichtungen mit FEL und Hochintensitätslaser wie etwa dem noch im Bau befindlichen 'Helmholtz International Beamline for Extreme Fields' (HIBEF) am 'European XFEL' am DESY in Hamburg zu finden sein werden.

Als Pump-Laser soll ein Hochintensitätslaser im optischen oder nahinfraroten Wellenlängenbereich mit einer Leistung von 1 Petawatt verwendet werden. Solche Leistungen können durch die sogenannte 'Chirped-Pulse-Amplification' (CPA) erreicht werden. Hierbei werden Laserpulse mit hoher Spitzenintensität räumlich gestreckt bevor sie durch einen Verstärker geschickt und danach wieder komprimiert werden. Durch die herabgesetzte Pulsspitzenintensität im Verstärkermedium wird dieses nicht zerstört, wie es sonst passieren würde [63].

Typische, in dieser Arbeit angenommene, Parameter eines solchen Lasers sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Die darin angegebene Peak-Intensität berechnet sich gemäß  $\mathcal{I}_0 = \mathcal{E}_0^2 = \frac{2 \cdot 0.87 W}{\pi w_0^2 \tau}$  aus den anderen angegebenen Parametern. Diese Formel ergibt sich, wenn man von der gaußverteilten, Gesamtpulsenergie nur den Teil im effektiven Fokus-Volumen berücksichtigt. Dieses schließt den Bereich ein, in dem die Pulsenergie noch größer ist als  $1/e^2$  des Ausgangswerts ( $\rightarrow$  Faktor  $\text{erf}^3(\sqrt{2}) \approx 0.87$ ). Da die differentielle Anzahl an senkrecht zum Probe-Strahl polarisierten Signalphotonen mit  $\mathcal{E}_0^4 \sim \mathcal{I}_0^2 \sim W^2$  skaliert (vgl. Gln. (2.1.19), (2.1.20)), lassen sich die in den folgenden Kapiteln präsentierte Ergebnisse für  $d^3 N_{\perp}$  (mit  $W = 30\text{J}$ ) durch eine

Skalierung mit dem Faktor  $(\frac{W[J]}{30})^2$  auf beliebige Pulsenergien  $W$  umrechnen. Die Frequenz  $\Omega$  bzw. die Wellenlänge  $\lambda$  des Pump-Lasers spielt für die differentielle Anzahl an Signalphotonen (Gl. (2.1.20) mit  $\mathcal{M}$  entsprechend Gl. (2.3.4)) durch die Näherung, welche bei der Modellierung des Pump-Feldes (Gl. (2.2.5)) gemacht wurde, keine Rolle. Die Angabe wird dennoch benötigt, um den durch diese Näherung gemachten Fehler zu untersuchen.

Tab. 3.1: Parameter des Pump-Lasers. Werte sind angelehnt an moderne Hochintensitätslaser.

Leistung $P$	1 PW	=	$4.11 \cdot 10^{18} \text{ eV}^2$
Pulsenergie $W$	30 J	=	$1.872 \cdot 10^{20} \text{ eV}$
Pulsdauer $\tau$	30 fs	=	$45.6 \text{ eV}^{-1}$
Wellenlänge $\lambda$	800 nm	=	$4.048 \text{ eV}^{-1}$
Frequenz $\Omega$	2.36 PHz	=	$1.55 \text{ eV}$
Strahlradius $w_0$	1 $\mu\text{m}$	=	$5.06 \text{ eV}^{-1}$
Peak-Intensität $I_0$	$5.54 \cdot 10^{22} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$	=	$4.55 \cdot 10^{14} \text{ eV}^3$
Impulsfolgefrequenz PRF	1 Hz		

Als Probe-Laser soll ein Frei-Elektronen-Laser mit einer Frequenz im Röntgenbereich (XFEL) dienen. Bei dieser Art von Lasern wird die Strahlung erzeugt, indem Elektronen in einem periodischen Magnetfeld (Undulator) beschleunigt werden und dabei Licht emittieren. Der mögliche Frequenzbereich reicht vom Infraroten bis zu Röntgenlicht. Die im Weiteren verwendeten Parameter des Probe-Lasers sind in Tabelle 3.2 angegeben. Für genau diese Werte kann das aktuell empfindlichste Röntgenstrahlungspolarimeter eine Reinheit von  $\mathcal{P} = 5.7 \cdot 10^{-10}$  bei der Polarisationsmessung erreichen [67]. Die Pulsenergie des Probe-Lasers ergibt sich als Produkt der Anzahl an Photonen  $N$  mit der Frequenz  $\omega$ . Die Peak-Intensität berechnet sich analog zu der des Pump-Lasers gemäß  $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{E}_0^2 = 2 \frac{0.87 N \omega}{\pi w_1 w_2 T}$ , wobei die den Strahldurchmesser bestimmenden Parameter  $w_1$  und  $w_2$  zunächst nicht näher festgelegt werden. Da die differentielle Anzahl an Signalphotonen über  $\mathfrak{E}_0^2 \sim \mathfrak{I}_0 \sim N$  von der Anzahl der Probe-Photonen abhängt (vgl. Gln. (2.1.19), (2.1.20)), lassen sich die Ergebnisse für  $d^3N_{\perp}$  (mit  $N = 10^{12}$ ) durch einen zusätzlichen Faktor  $\frac{N}{10^{12}}$  leicht auch auf andere Werte von  $N$  umrechnen.

Tab. 3.2: Parameter des Probe-Laser, angelehnt an die Parameter des XFEL bei DESY.

Photonenanzahl pro Puls $N$			$10^{12}$
Pulsdauer $T$	30 fs	=	$45.6 \text{ eV}^{-1}$
Frequenz $\omega$	$1.96 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$	=	$12914 \text{ eV}$
Wellenlänge $\lambda$	0.10 nm	=	$4.88 \cdot 10^{-4} \text{ eV}^{-1}$
Pulsenergie $W$	2.1 mJ	=	$1.2914 \cdot 10^{16} \text{ eV}$

## 3.2 Exakt gegenläufige Anordnung

Die einfachste, aber bereits sehr aufschlussreiche Anordnung erhält man, wenn die optischen Achsen von Pump- und Probe-Laser genau aufeinander liegen und es keine Verschiebung zwischen deren Fokussen gibt, d.h.  $x_0^\mu = 0$ . Die Ausbreitung des Pump-Pulses erfolgt dabei in positive  $z$ -Richtung. Die Ausbreitung des Probe-Pulses erfolgt in negative  $z$ -Richtung, d.h.  $\hat{k}^\mu = (1, -\hat{e}_z)$ , was sich aus Gl. (2.1.7) ergibt, wenn  $\vartheta = 0$  gesetzt wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird zudem  $\varphi = 0$  gewählt.

Neben den Ergebnissen für die Anzahl an senkrecht polarisierten Signalphotonen  $N_\perp$  bzw. diese in bestimmten Winkelbereichen ( $N_{\perp>\Theta}$ ,  $N_{\perp>\sigma}$ ) für unterschiedliche Querschnittsprofile des Probe-Strahls, wird für diesen noch gut überschaubaren Fall auch auf das Verhalten der differentiellen Anzahl an Signalphotonen mit  $\vartheta'$  und  $k'$  eingegangen. Zudem wird untersucht, wie sich der vernachlässigte, von der Frequenz  $\Omega$  abhängige Teil des Pump-Feldprofils auf die Ergebnisse auswirkt und dabei gezeigt, dass dessen Vernachlässigung gerechtfertigt ist.

### 3.2.1 Matrixelement $\mathcal{M}$

Die den folgenden Betrachtungen zu Grunde liegende Gleichungen (2.1.20) und (2.3.4) vereinfachen sich für den betrachteten Fall exakt gegenläufiger Strahlen erheblich:

Wie am Ende des Kapitels 2.1 erläutert, gilt durch die geringe Abweichung der Impulse von Probe- und Signalphotonen näherungsweise  $\beta'_\perp = \beta - \frac{\pi}{2}$ . Der Faktor  $[4 \cos \gamma \cos \gamma'_\perp + 7 \sin \gamma \sin \gamma'_\perp]^2$ , der in der Gleichung (2.1.20) für die differentielle Anzahl an senkrecht polarisierten Signalphotonen auftritt, lässt sich in dieser Näherung zu  $\frac{9}{4} \sin^2(2\gamma)$  umformen ( $\gamma = \Phi + \varphi + \beta$ ,  $\gamma'_\perp = \Phi + \varphi' + \beta'_\perp$ ). Dieser Ausdruck wird durch die Wahl  $\beta = \frac{\pi}{4}(2n + 1) - \Phi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) maximiert. Da  $\beta$  und  $\Phi$  nur an dieser Stelle auftreten (vgl. Gln. (2.1.20), (2.3.4)), lässt sich hieraus schließen, dass die Anzahl an senkrecht polarisierten Signalphotonen maximal ist, wenn der Polarisationsvektor des Probe-Feldes  $\epsilon_{\text{probe}}^\mu = (0, -\cos \beta, \sin \beta, 0)$  einen Winkel von  $45^\circ$  sowohl mit dem elektrischen als auch mit dem magnetischen Feldstärkevektor des Pump-Feldes (Gln. (2.1.9)) einschließt.

Für die differentielle Anzahl an Signalphotonen erhält man bei  $\vartheta = 0$  und  $\varphi = 0$  mit dieser Näherung:

$$d^3 N_\perp \approx m^4 \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{\alpha}{15^2} k' (1 + \cos \vartheta')^2 \left( \frac{e\mathfrak{E}_0}{2m^2} \right)^2 \left( \frac{e\mathfrak{E}_0}{2m^2} \right)^4 \left( \frac{2}{\pi} \right)^3 |\mathcal{M}|^2. \quad (3.2.1)$$

Von den in Formel (2.3.4) für  $\mathcal{M}$  verwendeten Abkürzungen (2.3.1), (2.3.2) und (2.3.3) bleiben für  $x_0 = 0$  und  $\vartheta = 0 = \varphi$  nur folgende Elemente übrig:

$$f_{11} = \frac{\cos^2 \delta_0}{w_1^2} + \frac{\sin^2 \delta_0}{w_2^2} + \frac{2}{w^2(z)}, \quad f_{22} = \frac{\sin^2 \delta_0}{w_1^2} + \frac{\cos^2 \delta_0}{w_2^2} + \frac{2}{w^2(z)}$$

$$f_{12} = f_{21} = \cos \delta_0 \sin \delta_0 \left( -\frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right), \quad f_{33} = \frac{32}{2T^2 + \tau^2}$$

$$g_{I1} = k' \hat{k}'_1, \quad g_{I2} = k' \hat{k}'_2, \quad g_{I3} = k' (\hat{k}'_3 - 1) - 2 \frac{2l\omega T^2 - k' \tau^2}{2T^2 + \tau^2}.$$

Für alle restlichen Kombinationen der Indizes  $i, j$  verschwindet  $f_{ij}$  und auch  $g_{\mathcal{R}_i} = 0$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T\tau}{\sqrt{2T^2 + \tau^2}} \sum_{l=\pm 1} e^{il\psi_0} e^{-\frac{T^2\tau^2}{2T^2+\tau^2} \frac{(k'+l\omega)^2}{16}} \\ &\quad \times \int dz \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}} e^{-z^2 f_{33}} e^{izg_{\mathcal{I}3}} e^{-\frac{g_{\mathcal{I}1}^2 f_{22} + g_{\mathcal{I}2}^2 f_{11} - 2g_{\mathcal{I}1}g_{\mathcal{I}2}f_{12}}{4(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T\tau}{\sqrt{2T^2 + \tau^2}} \sum_{l=\pm 1} e^{il\psi_0} e^{-\frac{T^2\tau^2}{2T^2+\tau^2} \frac{(k'+l\omega)^2}{16}} \\ &\quad \times \int dz \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}} e^{-\frac{3z}{2T^2+\tau^2} z^2} e^{i \left[ k' \left( \frac{\tau^2 - 2T^2}{2T^2 + \tau^2} - \cos \vartheta' \right) - \frac{4l\omega T^2}{2T^2 + \tau^2} \right] z} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{k'^2 \sin^2 \vartheta' \left( \frac{2}{w^2(z)} + \frac{w^2(\vartheta')}{w_1^2 w_2^2} \right)}{4(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} \right\} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

mit der von  $z$  abhängigen Kombination

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \frac{1}{w_1^2 w_2^2} + \frac{2}{w^2(z) \left( \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right)} \quad (3.2.4)$$

und der Abkürzung  $w(\vartheta') = \sqrt{w_1^2 \cos^2(\vartheta' - \delta_0) + w_2^2 \sin^2(\vartheta' - \delta_0)}$ . Diese stellt die einzige Abhängigkeit der Gl (3.2.3) von  $\vartheta'$  dar, sodass  $\mathcal{M}$  und damit die Näherung (3.2.1) für die differentielle Anzahl der Signalphotonen im Falle eines kreisförmigen Probe-Strahl-Querschnitts ( $w_1 = w_2$ ) unabhängig von  $\vartheta'$  und  $\delta_0$  ist. Der Winkel  $\delta_0$  gibt im Fall eines elliptischen Querschnitts des Probe-Strahls die Orientierung der Ellipse an. Diese Orientierung relativ zu den Feldern des Probe-Strahls  $\hat{\mathbf{e}}_e$  und  $\hat{\mathbf{e}}_b$  (Gln. (2.1.10)) ist durch die Vektoren  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{e}}_{0,0,\delta_0}$  und  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{e}}_{0,0,\delta_0 + \frac{\pi}{2}}$  (Gl. (2.1.8)) gegeben. Die gesamte, d.h. aufintegrierte Anzahl der Signalphotonen ist unabhängig von der Orientierung der Ellipse.

An Gleichung (3.2.3) ist ebenfalls zu erkennen, dass der Term mit  $l = +1$  gegenüber dem mit  $l = -1$  zum einen durch eine starke Oszillation mit  $z$ , zum anderen durch die exponentielle Unterdrückung im  $z$ -unabhängigen Teil stark unterdrückt ist.

### 3.2.2 Differenzielle Anzahl der Signalphotonen

Bevor die im Experiment zu erwartende Anzahl an senkrecht zu den Probe-Photonen polarisierten Photonen berechnet wird, soll zunächst noch einmal auf die Verteilung der Signalphotonen, also deren differentielle Anzahl eingegangen werden.

Bei der Herleitung dieser wurde der von der Frequenz  $\Omega$  abhängige Teil des Pump-Feldes im Prinzip im Vorgriff auf das in Abbildung 3.1 dargestellte Ergebnis vernachlässigt, das man erhält, wenn dieser Teil berücksichtigt wird (vgl. Kapitel 2.2). Hier wurde die differentielle Anzahl (2.1.20) über die Winkel  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  ausintegriert und dabei die Funktion  $\mathcal{M}$  benutzt, die man unter Verwendung der Gleichung (2.2.4) als Pump-Feld erhält, d.h. ohne Näherung bezüglich  $\Omega$ . Im Vergleich zu Gleichung (3.2.3) ergibt sich dadurch für einen symmetrischen

Probe-Strahlquerschnitt ( $w_1 = w_2 = w$ ) ein zusätzlicher Term

$$\mathcal{M}_\Omega = \frac{T\tau}{\sqrt{2T^2 + \tau^2}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{16} \sum_{q=\pm 1} \sum_{l=\pm 1} e^{-\frac{T^2\tau^2}{2T^2+\tau^2} \frac{(k'+q\omega+2l\Omega)^2}{16}} \int dz \frac{1}{\left(1 + il\frac{z}{z_R}\right)^2} \frac{1}{\frac{2}{w^2(z)} \left(1 - il\frac{z}{z_r}\right) + \frac{1}{w^2}} e^{-\frac{32}{2T^2+\tau^2} z^2} e^{\frac{4iz}{2T^2+\tau^2} (l\Omega\tau^2 - T^2(q\omega+k'))}. \quad (3.2.5)$$

Wie aus Abbildung 3.1 abzulesen, liefert dieser um 15 Größenordnungen unterdrückte Beiträge zu der Anzahl der Signalphotonen bei Frequenzen  $\approx \omega \pm 2\Omega$ . Als Referenz ist ebenfalls der Verlauf für  $\frac{dN_\perp}{dk'}$  bei Verwendung von  $\mathcal{M}$  gemäß Gleichung (3.2.3), d.h. bei Vernachlässigung der von  $\Omega$  abhängigen Terme, in Abbildung 3.1 eingezeichnet.

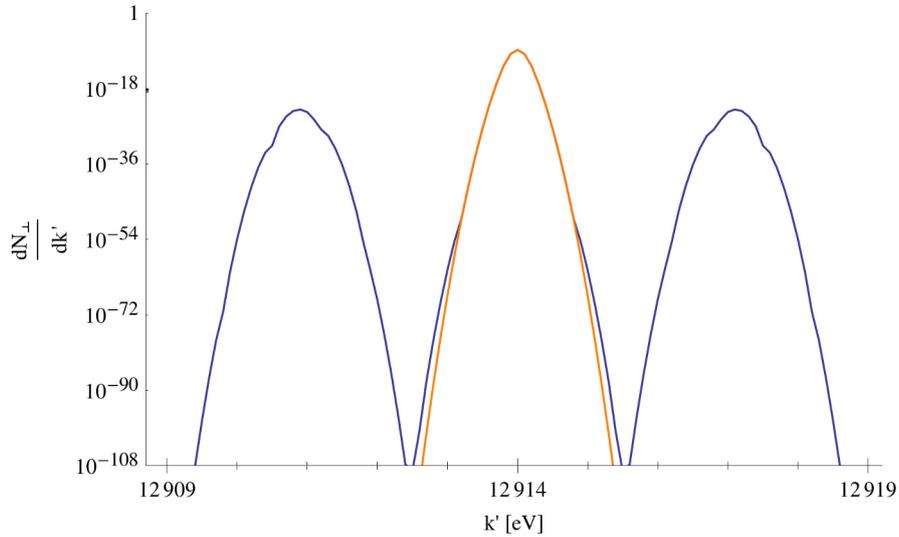


Abb. 3.1: Darstellung der differentiellen Signalphotonenanzahl  $\frac{dN_\perp}{dk'}$  als Funktion von  $k'$  mit logarithmischer Skala. Die orangene und die blaue Kurve unterscheiden sich darin, dass bei ersterer der von der Frequenz  $\Omega$  abhängige Anteil des Pump-Feldes nicht berücksichtigt wurde, bei letzterer hingegen schon. Im Bereich, der ungefähr durch  $12913\text{eV} < k' < 12915$  gegeben ist, stimmen beide Kurven nahezu perfekt überein. Es sind bei Frequenzen  $\approx \omega \pm 2\Omega$  deutlich stark unterdrückten Beiträge zu erkennen (ca. 15 Größenordnungen). Die Unebenheiten der blauen Kurve sind vermutlich auf numerische Effekte zurückzuführen.

Um zu zeigen, dass die Verwendung der Näherung  $\beta_\perp = \beta - \frac{\pi}{2}$  sinnvoll ist, ist in Abbildung 3.2 noch einmal die differentielle Anzahl  $\frac{dN_\perp}{dk'}$  (aus (2.1.20) ohne Näherung  $\mathbf{k}' \approx \mathbf{k}$ ) in einem kleineren Bereich um  $\omega$  für unterschiedliche Probe-Strahldurchmesser dargestellt. Die Näherung beruht darauf, dass sich der Impulsvektor der Signalphotonen  $\mathbf{k}'$  nur geringfügig von dem der Probe-Photonen  $\mathbf{k}$  unterscheidet, d.h.  $k' \approx \omega$ ,  $\vartheta' \approx \vartheta$  und  $\varphi' \approx \varphi$ . Aus Abbildung 3.2 lässt sich ablesen, dass der Impuls  $k'$  der Signalphotonen weniger als 0.1eV (1/e-Kriterium) von der Frequenz  $\omega$  des Probe-Pulses abweicht. Es gilt also tatsächlich  $k' \approx \omega = k$ . Aus Abbildung 3.3, die die differentielle Anzahl der Signalphotonen (Gl. (2.1.20)) integriert über den Impuls  $k'$  für  $w_1 = w_2 = 3w_0$  (Abb. 3.3a) sowie  $w_1 = 3w_0$ ,  $w_2 = w_0/3$  (Abb. 3.3b) zeigt, ist zu erkennen, dass sich der Unterschied zwischen der Ausbreitungsrichtung der Signalpho-

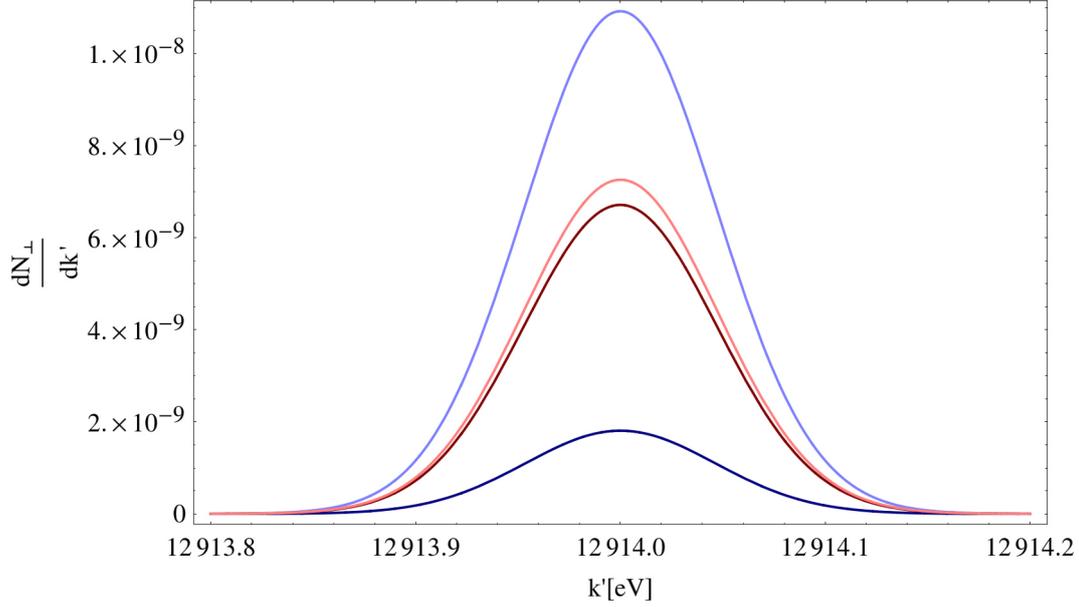


Abb. 3.2: Darstellung von  $\frac{dN_{\perp}}{dk'}$  als Funktion von  $k'$  in einem schmalen Frequenzbereich um die Probe-Frequenz  $\omega = 12914\text{eV}$  für unterschiedliche Probe-Strahl Querschnitte:  $w_1 = w_2 = 3w_0$  (dunkelblau),  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = \frac{w_0}{3}$  (dunkelrot),  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = \frac{w_0}{10}$  (hellrot),  $w_1 = w_2 = w_0$  (hellblau).

tonen und der des Probe-Strahls in einem Bereich von nur einigen 10 bis  $100\mu\text{rad}$  bewegt. Dies bestätigt den zweiten Teil der der Näherung zu Grunde liegenden Annahme:  $\vartheta' \approx \vartheta$  und  $\varphi' \approx \varphi$ .

Aus Abbildung 3.3 ist ebenfalls der bereits angesprochene, unterschiedlich starke Abfall mit zunehmendem Winkel  $\vartheta'$  für die Signal- und die Probe-Photonen bei einem gegebenen Probe-Strahlradius ersichtlich. Die Verteilung der Probe-Photonen ist dabei gemäß Gleichung (2.3.9) mit der Ersetzung  $\delta \rightarrow \varphi'$  und  $\zeta \rightarrow \vartheta'$  durch

$$\frac{d^2N}{d\varphi' d \cos \vartheta'} = \frac{\omega^2 w_1 w_2}{2\pi} N e^{-2\left(\frac{\vartheta'}{\Theta(\varphi')}\right)^2} \quad (3.2.6)$$

mit dem Divergenzwinkel

$$\Theta(\varphi') = \frac{2}{\omega \sqrt{w_1^2 \cos^2(\varphi' - \delta_0) + w_2^2 \sin^2(\varphi' - \delta_0)}} \quad (3.2.7)$$

gegeben. Im Fall eines asymmetrischen Querschnitts des Probe-Strahls, d.h.  $w_1 \neq w_2$ , ist auch die Verteilung der Signal-Photonen und insbesondere der Abfall der Signalphotonenanzahl mit  $\vartheta'$  asymmetrisch, d.h. unterschiedlich je nach Wahl des azimuthalen Winkels  $\varphi'$  (vgl. Abbildung 3.3b). Sowohl die Signal- als auch die Probe-Photonen sind über einen umso breiteren Bereich verteilt, je schmaler die Taille des Probe-Strahls in einer durch  $\varphi'$  parametrisierte Richtung ist. Der Abfall der differentiellen Anzahl an Probe-Photonen  $\frac{dN}{d\varphi' d \cos \vartheta'}$  mit  $\vartheta'$  erfolgt dabei jedoch immer wesentlich schneller als der Abfall der differentiellen Anzahl an Signalphotonen  $\frac{dN_{\perp}}{d\varphi' d \cos \vartheta'}$ .

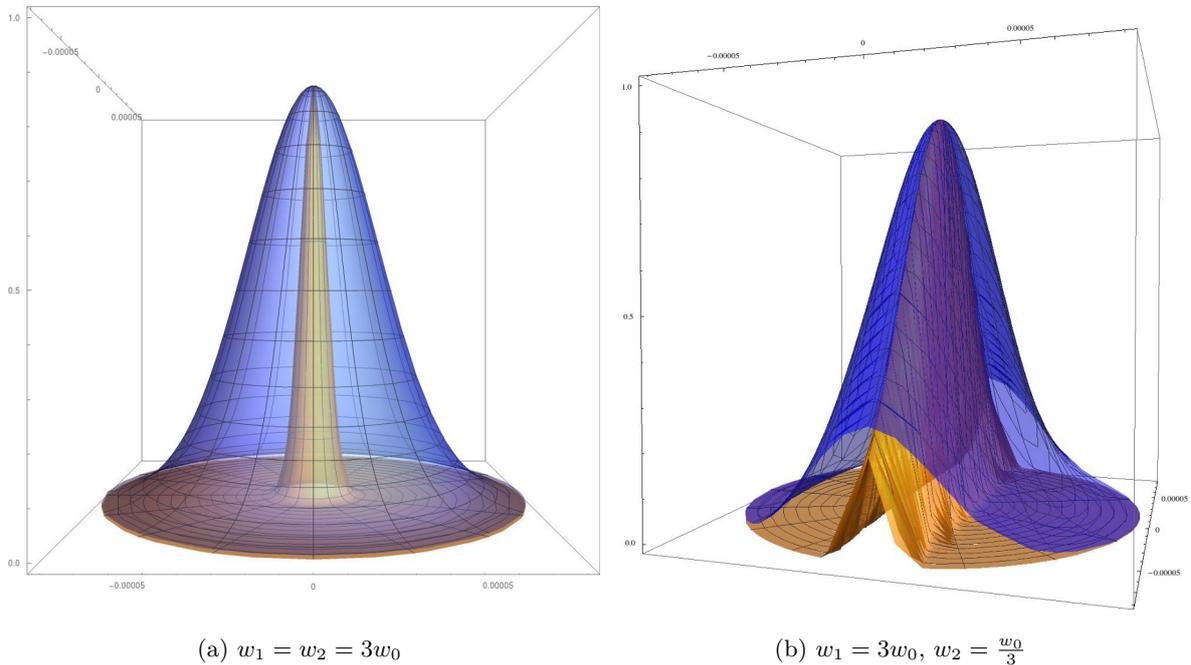


Abb. 3.3: Auf den jeweiligen Wert bei  $\vartheta' = 0 = \varphi'$  normierte Darstellung von  $\frac{d^2 N_{\perp}}{d\varphi' d \cos \vartheta'}$  (blau, Gl. (3.2.1)) sowie  $\frac{d^2 N}{d\varphi' d \cos \vartheta'}$  (orange, Gl. (3.2.6)) als Funktion von  $\varphi'$  und  $\vartheta'$  in Polarkoordinaten für einen (a) symmetrischen und einen (b) asymmetrischen Querschnitt des Probe-Strahls. Die Radialkoordinate ist durch den Winkel  $\vartheta'$  gegeben. Der Winkel  $\varphi'$  entspricht dem Polarwinkel.

### 3.2.3 Signalphotonenanzahl

Das oben beschriebene Abfallverhalten der differentiellen Anzahl der Signal- und Probe-Photonen lässt sich durch Integration dieser Größen auch quantitativ erfassen. In Tabelle 3.3 sind zum einen für unterschiedliche Probe-Strahlquerschnitte die Gesamtzahl der senkrecht polarisierten Signalphotonen  $N_{\perp}$  angegeben. Die den Querschnitt des Probe-Strahls bestimmenden Parameter  $w_1$  und  $w_2$  sind in Einheiten der Pump-Strahltaile  $w_0$  angegeben. Wie zu erwarten, werden am meisten Signal-Photonen induziert, wenn die Probe-Photonen nahe der optischen Achse des Pump-Feldes propagieren, wo dieses am stärksten und der Effekt daher am größten ist. Zum anderen ist der Tabelle 3.3 die Anzahl an Signalphotonen in bestimmten Winkelbereichen zusammen mit der Begrenzung eben dieser zu entnehmen. Hierbei handelt es sich einerseits um die Signal-Photonen  $N_{\perp > \Theta}$ , die sich außerhalb des Divergenzwinkels  $\Theta(\varphi')$  (Gl.(3.2.7)) befinden. Der nicht betrachtete Winkelbereich ist dabei umso kleiner, je größer der Strahlquerschnitt ist. Wie Tabelle 3.3 zu entnehmen ist, vergrößert sich entsprechend auch der Anteil der Signal-Photonen  $N_{\perp > \Theta}/N_{\perp}$ , wenn  $w_1$  und  $w_2$  größer gewählt werden. Es ist zu beachten, dass in diesem Fall ( $w_1, w_2$  groß) zwar der Anteil  $N_{\perp > \Theta}/N_{\perp}$  größer, die Gesamtzahl  $N_{\perp}$  jedoch kleiner wird. Um den zu den jeweiligen Ergebnissen zugehörigen Bereich einschätzen zu können, wurden die Winkel  $\Theta$  in Richtung der großen Halbachse ( $\Theta_1 = \Theta(\delta_0)$ ) und der kleinen Halbachse ( $\Theta_2 = \Theta(\delta_0 + \pi/2)$ ) des Probe-Strahlquerschnitts angegeben.

Die Größe  $N_{\perp > \sigma}$  gibt die Anzahl der Signalphotonen in einem Bereich an, in dem die

Tab. 3.3: Zu erwartende Anzahl an Signalphotonen in einem Szenario mit perfekter Ausrichtung von Pump- und Probe-Pulsen zueinander ( $x_0^\mu = 0$ ). Die Werte wurden für unterschiedliche Querschnitte des Probe-Strahls berechnet, die durch die Parameter  $w_1$  und  $w_2$  in Einheiten des Radius der Pump-Strahltaile  $w_0$  gegeben sind.  $N_\perp$  gibt die Gesamtanzahl der senkrecht polarisierten Signalphotonen an. Durch  $N_{\perp>\Theta}$  ist die Anzahl der Signalphotonen gegeben, die im Bereich außerhalb der Divergenz  $\Theta(\varphi')$  des Probe-Strahls emittiert werden. Die angegebenen Divergenzen entsprechen  $\Theta_i \sim \frac{1}{w_i}$ . Durch  $N_{\perp>\sigma}$  ist die Anzahl der senkrecht zu den Probe-Photonen polarisierten Signalphotonen gegeben, die  $\vartheta' \geq \sigma(\varphi')$  mit  $\sigma_i = \sigma(\delta_0 + \frac{\pi}{2}\delta_i; 2)$  erfüllen und mit modernen Messinstrumenten detektiert werden könnten.

$\frac{w_1}{w_0}$	$\frac{w_2}{w_0}$	$\frac{N_\perp}{N}$	$\Theta_1$ [ $\mu\text{rad}$ ]	$\Theta_2$ [ $\mu\text{rad}$ ]	$\frac{N_{\perp>\Theta}}{N_\perp}$	$\sigma_1$ [ $\mu\text{rad}$ ]	$\sigma_2$ [ $\mu\text{rad}$ ]	$\frac{N_{\perp>\sigma}}{N_\perp}$	$\frac{N_{\perp>\sigma}}{h}$
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$5.91 \cdot 10^{-13}$	306.07	306.07	14.0%	4303.95	4303.95	0.0%	0.00
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$5.01 \cdot 10^{-13}$	91.82	91.82	18.9%	423.47	423.47	0.0%	0.00
1	1	$2.15 \cdot 10^{-13}$	30.61	30.61	48.7%	80.57	80.57	0.7%	5.56
3	3	$3.52 \cdot 10^{-14}$	10.20	10.20	88.8%	26.32	26.32	45.5%	57.54
3	$\frac{1}{10}$	$1.44 \cdot 10^{-13}$	10.20	306.07	68.4%	23.17	5138.50	27.1%	140.51
3	$\frac{1}{3}$	$1.33 \cdot 10^{-13}$	10.20	91.82	69.5%	23.37	495.11	26.9%	128.51
3	1	$8.70 \cdot 10^{-14}$	10.20	30.61	76.0%	24.35	88.38	27.0%	84.60

Bedingung (2.3.13) erfüllt ist. Das Verhältnis der differentiellen Anzahl an Signal- zu Probe-Photonen ist also größer als die momentan maximal erreichbare Genauigkeit bei der Polarisationsmessung. Dieser Bereich ist durch  $\vartheta' > \sigma(\varphi')$  (Gl. (2.3.14)) gegeben. Die tatsächliche Anzahl der Probe- und Signalphotonen in diesem Bereich unterscheidet sich ebenso wie der Winkel  $\sigma(\varphi')$  je nach Probe-Strahlquerschnitt. Wie sich  $\sigma$  für die einzelnen Winkel  $\varphi'$  ergibt, ist für den Fall  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = w_0/3$  in Abbildung 3.4 illustriert.

Aus den in Tabelle 3.3 angegebenen Werten für  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ergibt sich, dass der Winkel  $\sigma_i$  für kleine  $w_i \lesssim w_0$  ( $i \in \{1, 2\}$ ) vergleichsweise große Werte annimmt und einen Bereich beschreibt, in dem sich im Grunde genommen keine Signal-Photonen befinden. Damit lässt sich das obige Kriterium in diesem Fall nicht auf ein tatsächliches Experiment anwenden. Für  $w(\varphi') \gtrsim w_0$  hingegen befindet sich ein Großteil der Signal-Photonen außerhalb von  $\vartheta' = \sigma(\varphi')$ . Dies ist in Abbildung 3.5 für einen elliptischen Probe-Strahlquerschnitt ( $w_1 = 3w_0$ ,  $w_2 = w_0/3$ ) illustriert.

Das in Tabelle 3.3 angegebene Verhältnis  $N_{\perp>\sigma}/N_\perp$  nimmt den maximalen Wert bei dem größten betrachteten Querschnitt des Probe-Strahls an. Eine entscheidendere Angabe in Hinblick auf ein Nachweisexperiment zur Vakuumdoppelbrechung ist jedoch die Gesamtzahl an pro Zeiteinheit, z.B. eine Stunde, detektierbaren Signalphotonen  $N_{\perp>\sigma}$ . Diese lässt sich bei bekannter, durch den Hochintensitätslaser begrenzter, Impulsfrequenz (PSF) und bekannter Anzahl der Probe-Photonen  $N$  berechnen und ist in der letzten Spalte der Tabelle 3.3 für unterschiedliche Kombinationen von  $w_1$  und  $w_2$  zu finden. Von den betrachteten Querschnitten ist die Anzahl der Signalphotonen pro Stunde maximal für einen asymmetrischen Querschnitt mit  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = w_0/10$ . Bei dieser Konfiguration wird zum einen eine große Anzahl Signalphotonen induziert, da sich die Probe-Photonen aus der einen Richtung betrachtet nahe der optischen Achse und somit der maximalen Feldstärke des Pump-Feldes

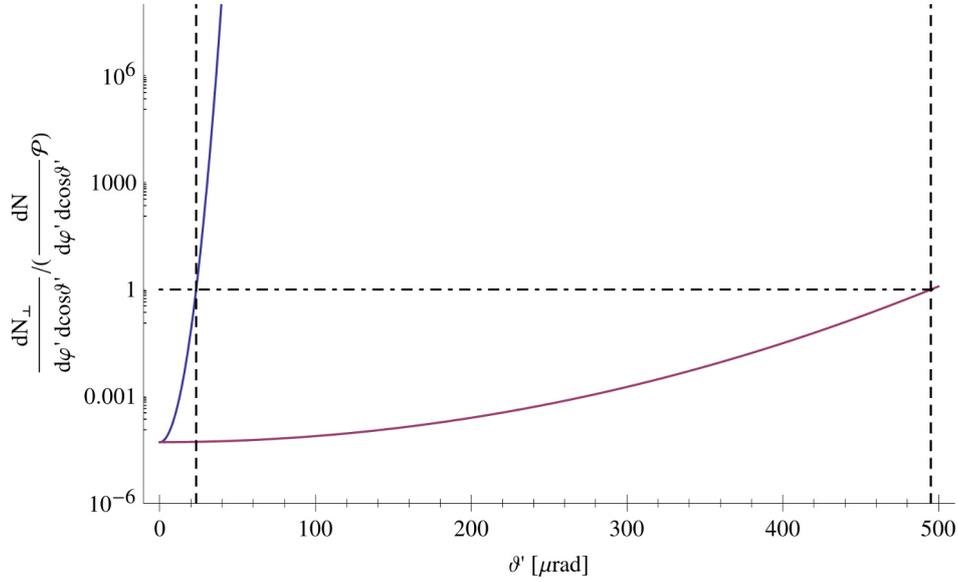


Abb. 3.4: Plot des Verhältnisses  $\frac{d^2 N_{\perp}}{d\varphi' d \cos \vartheta'} / \left( \frac{d^2 N}{d\varphi' d \cos \vartheta'} \mathcal{P} \right)$  als Funktion des Winkels  $\vartheta'$  für  $\varphi' = \delta_0$  (blau) und  $\varphi' = \delta_0 + \frac{\pi}{2}$  (lila) bei einem Probe-Strahl mit  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = \frac{w_0}{3}$ . Die erste gestrichelte, vertikale Linie zeigt den Wert  $\vartheta' = \sigma_1 = 23.37 \mu\text{rad}$  an, bei dem die blaue Kurve für  $\varphi' = \delta_0$  den Wert 1 annimmt. Die zweite gestrichelte, vertikale Linie gibt den entsprechenden Wert für  $\varphi' = \delta_0 + \frac{\pi}{2}$ :  $\vartheta' = \sigma_2 = 495.11 \mu\text{rad}$ .

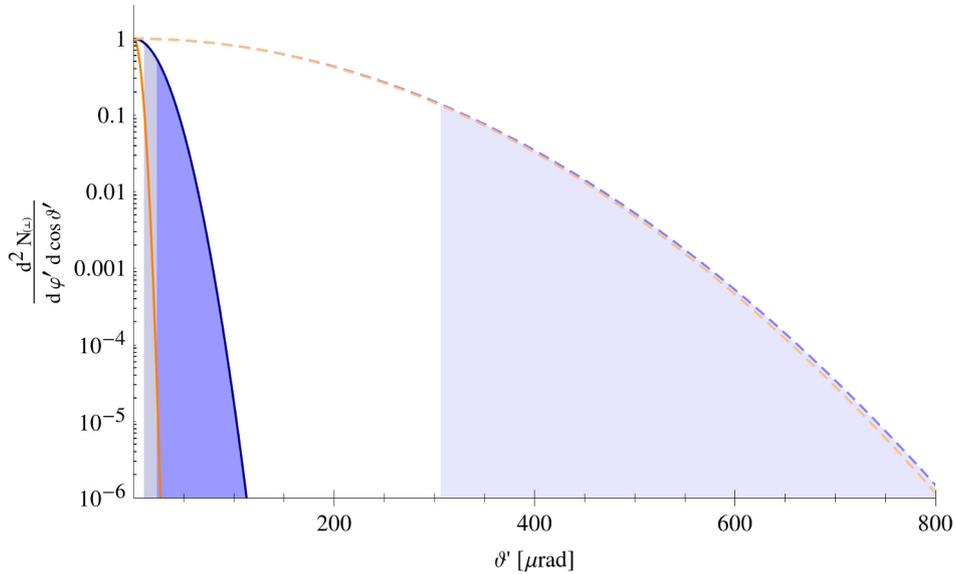


Abb. 3.5: Logarithmische Darstellung von  $\frac{d^2 N_{\perp}}{d\varphi' d \cos \vartheta'}$  (blau) und  $\frac{d^2 N}{d\varphi' d \cos \vartheta'}$  (orange) für  $\varphi' = \delta_0$  (durchgezogen) und  $\varphi' = \delta_0 + \frac{\pi}{2}$  (gestrichelt). Der Probe-Querschnitt ist durch  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = \frac{w_0}{10}$  gegeben. Der Bereich außerhalb der Divergenz des Probe-Strahls  $\vartheta' > \Theta(\varphi')$  ist hellblau gefüllt, der Bereich mit  $\vartheta' > \sigma(\varphi')$  dunkelblau. Für  $\varphi = \delta_0 + \frac{\pi}{2}$  liegt der dunkelblaue Bereich außerhalb des dargestellten Ausschnitts.

befinden, wo der Effekt am größten ist. Zum anderen verteilen sich die Probe-Photonen in der dazu senkrechten Richtung über einen breiten Bereich und sorgen unter dem Einfluss des vollen transversalen Profils des Pump-Feldes dafür, dass ein großer Anteil der Signal-Photonen in einen Bereich gestreut wird, in dem ihre Detektion mit modernen Messinstrumenten möglich ist. Diesen beiden Effekten ist es geschuldet, dass ein asymmetrischer Querschnitt des Probe-Strahls in einem Experiment zu bevorzugen ist.

### 3.3 Gegenläufige Anordnung mit verschobenem Probe-Strahl

Unter realen Bedingungen sind Laserpulse nicht immer auf den gleichen Ort zu fokussieren, sondern sie springen zufällig um den gewünschten Fokuspunkt. Es ist daher von Interesse, die zu erwartende Anzahl an Signalphotonen für einen gewissen Offset  $x_0^\mu \neq 0$  des Fokus des Probe-Lasers von dem des Pump-Lasers zu kennen. Die Ausbreitungsrichtung des Probe-Lasers  $\hat{k}^\mu = (1, -\hat{e}_z)$  ist dabei immer noch der des Pump-Lasers entgegengesetzt. Es gilt also  $\vartheta = 0 = \varphi$ .

Die differentielle Anzahl an Signalphotonen berechnet sich wie für den exakt gegenläufigen Fall gemäß Gl. (3.2.1) allerdings mit einem veränderten  $\mathcal{M}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T\tau}{\sqrt{2T^2 + \tau^2}} e^{-\frac{(x_0 \cos \delta_0 - y_0 \sin \delta_0)^2}{w_1^2} - \frac{(x_0 \sin \delta_0 + y_0 \cos \delta_0)^2}{w_2^2} - 8\frac{(t_0 + z_0)^2}{2T^2 + \tau^2}} \\
 &\times \sum_{l=\pm 1} e^{il\psi_0} e^{i(t_0 + z_0)\frac{2l\omega T^2 - k'\tau^2}{2T^2 + \tau^2}} e^{-\frac{T^2\tau^2}{2T^2 + \tau^2} \frac{(k' + l\omega)^2}{16}} \int dz \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{e^{-z^2 f_{33}} e^{z g_3} e^{iz g_3}}{\sqrt{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}} \\
 &\times \exp \left[ \frac{(g_1^2 - g_1^2) f_{22} + (g_2^2 - g_2^2) f_{11} - 2f_{12}(g_1 g_2 - g_1 g_2)}{4(f_{11} f_{22} - f_{12}^2)} \right] \\
 &\times \exp \left[ \frac{i}{2} \frac{g_1 g_1 f_{22} + g_2 g_2 f_{11} - (g_1 g_2 + g_2 g_1) f_{12}}{f_{11} f_{22} - f_{12}^2} \right] \tag{3.3.1}
 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen  $f$ ,  $g$  und  $g$  wie in den Gleichungen (2.3.1) bis (2.3.3). Diese vereinfachen sich für  $x_0 \neq 0$  nicht wesentlich, weshalb sie hier nicht explizit angegeben sind.

Eine genaue Betrachtung von  $\mathcal{M}$  ergibt, dass der zeitliche Offset und die Verschiebung in  $z$ -Richtung nur als Kombination  $t_0 + z_0$  in den Faktoren  $\exp\left(-8\frac{(t_0 + z_0)^2}{2T^2 + \tau^2}\right)$ ,  $\exp\left(i(t_0 + z_0)\frac{2l\omega T^2 - k'\tau^2}{2T^2 + \tau^2}\right)$  und  $\exp\left(\frac{32(t_0 + z_0)}{2T^2 + \tau^2} z\right)$  auftreten. Die Anzahl an Signalphotonen ist demnach wie zu erwarten am größten, wenn sich die Fokus-Ebenen von Pump- und Probe-Laser überlagern.

Zur Untersuchung des Einflusses der Verschiebung des Probe-Strahls in der  $x, y$ -Ebene bietet es sich an, zunächst den Fall eines kreisförmigen Probe-Strahlquerschnitts,  $w_1 = w_2 = w$ , zu betrachten. Wird zur Vereinfachung zudem  $t_0 + z_0 = 0$  gesetzt, ergibt sich aus Gl. (3.3.1)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T\tau}{\sqrt{2T^2 + \tau^2}} e^{-\frac{x_0^2 + y_0^2}{w^2}} \sum_{l=\pm 1} e^{il\psi_0} e^{-\frac{T^2\tau^2}{2T^2 + \tau^2} \frac{(k' + l\omega)^2}{16}} \\
 &\times \int dz \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}} e^{-\frac{32}{2T^2 + \tau^2} z^2} e^{iz \left[ k' \left( \frac{\tau^2 - 2T^2}{2T^2 + \tau^2} - \cos \vartheta' \right) - \frac{4l\omega T^2}{2T^2 + \tau^2} \right]} \\
 &\times e^{\frac{1}{4(f_{11} f_{22} - f_{12}^2)} \left( \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right) \left[ \frac{4(x_0^2 + y_0^2)}{w^4} - k'^2 \sin^2 \vartheta' \right]} e^{\frac{ik' \sin \vartheta'}{w^2} \left( \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right) \frac{x_0 \cos \varphi' - y_0 \sin \varphi'}{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}}. \tag{3.3.2}
 \end{aligned}$$

Hieran ist zu erkennen, dass sich neben einer exponentiellen Unterdrückung durch die Verschiebung senkrecht zur Strahlausbreitungsrichtung von Probe- bzw. Pump, auch eine Abhängigkeit der Funktion  $\mathcal{M}$  von  $\varphi'$  ergibt, die für  $x_0 = y_0 = 0$  wegfällt. Allerdings ist dieser durch den letzten Term in Gl. (3.3.2) gegebener Beitrag sehr gering, da  $\vartheta' \approx \vartheta = 0$  und damit  $\sin \vartheta' \approx 0$  für den Großteil der Signalphotonen. Es spielt insofern kaum eine Rolle, in welche Richtung (bezogen auf die  $x, y$ -Ebene) der Probe-Strahl aus dem Fokus des Pump-Strahls verschoben wird. Abgesehen davon zeichnet sich im unverschobenen Fall bei einem

symmetrischen Querschnitt des Probe-Strahls keine der durch  $\varphi'$  parametrisierten Richtungen besonders aus, sodass Verschiebungen in unterschiedliche Richtungen durch eine Drehung um die  $z$ -Achse ineinander überführt werden können. Je weiter die Fokusse von Probe und Pump auseinander liegen, also je größer  $x_0^2 + y_0^2$ , umso geringer wird die Anzahl der Signalphotonen.

Die Ergebnisse für die Gesamtzahl an Signalphotonen  $N_{\perp}$ , die sich durch Integration der Gl. (3.2.1) mit  $\mathcal{M}$  aus Gl. (3.3.2) für verschiedene Verschiebungen in  $x$ -Richtung bei einem Probe-Strahl mit  $w_1 = w_2 = 3w_0$  ergeben, sind in Tabelle 3.4 zusammengefasst. Es zeigt sich, dass die Anzahl wie zu erwarten mit zunehmendem Abstand kleiner wird, allerdings fällt der Abfall relativ gering aus. So beträgt die Anzahl der induzierten Signalphotonen bei einer Verschiebung von  $x_0 = 1.5w_0$  noch etwa 60% des Wertes unverschobener Strahlen. Die immer noch relativ große Anzahl der Signalphotonen ist dadurch zu erklären, dass es durch die Aufweitung insbesondere des Pump-Strahls im Interaktionsbereich auch dann einen Überlapp von Pump- und Probe-Strahl gibt, wenn sich die Strahlen in der Fokusebene selbst nicht mehr treffen (vgl. Abb. 3.6a).

Tab. 3.4: Anzahl der Signalphotonen im Fall eines symmetrischen Querschnitts des Probe-Strahls ( $w_1 = w_2 = 3w_0$ ) für unterschiedliche Verschiebungen in  $x$ -Richtung in Einheiten des Pump-Querschnitts  $w_0$ . Angegeben ist das Verhältnis der Gesamtanzahl der Signalphotonen  $N_{\perp}$  zu der Anzahl  $N$  der Probe-Photonen, der Anteil der Signalphotonenanzahl  $N_{\perp > \Theta}$  an  $N_{\perp}$  außerhalb der Probe-Strahldivergenz  $\Theta(\varphi')$ , sowie der Anteil der detektierbaren Signalphotonen  $N_{\perp > \sigma}$  an  $N_{\perp}$  und die Anzahl dieser, die pro Stunde zu erwarten sind.

$\frac{x_0}{w_0}$	$\frac{N_{\perp}}{N}$	$\frac{N_{\perp > \Theta}}{N_{\perp}}$	$\frac{N_{\perp > \sigma}}{N_{\perp}}$	$\frac{N_{\perp > \sigma}}{h}$
0	$3.52 \cdot 10^{-14}$	88.783%	45.470%	57.54
0.5	$3.34 \cdot 10^{-14}$	88.782%	45.319%	54.43
1	$2.89 \cdot 10^{-14}$	88.780%	44.869%	46.07
1.5	$2.20 \cdot 10^{-14}$	88.775%	44.128%	34.89

Ebenfalls in Tabelle 3.4 zu finden ist der Anteil an Signalphotonen  $N_{\perp > \Theta}$  außerhalb der Divergenz des Probe-Strahls für den Fall  $w_1 = w_2 = 3w_0$ . Dieser ändert sich mit zunehmendem Abstand nur geringfügig. Die Änderung ist dabei auf die durch den letzten Term in Gleichung (3.3.2) verursachte Asymmetrie bezüglich  $\varphi'$  zurückzuführen, die wie bereits besprochen gering ausfällt. Der verwendete Divergenzwinkel  $\Theta$  ergibt sich wie auch für den unverschobenen Fall aus Gleichung (3.2.7), wie im Abschnitt 'Divergenz' des Kapitels 2.3 diskutiert.

Wegen der durch die Verschiebung der Fokusse von Probe und Pump zueinander verursachte Asymmetrie bzgl.  $\varphi'$  lässt sich die Anzahl der Signalphotonen  $N_{\perp > \sigma}$ , die das Kriterium (2.3.13) erfüllen, mit modernen Messgeräten detektiert werden zu können, nicht wie im Fall gegenläufiger Strahlen mit  $x_0^{\mu} = 0$  berechnen. Die Querschnittssymmetrie des Probe-Strahls lässt sich nicht exakt auf die Verteilung der Signalphotonen übertragen. Da die Asymmetrie jedoch sehr gering ausfällt, lässt sich näherungsweise doch wieder Gleichung (2.3.14) für den Winkel  $\sigma(\varphi')$  verwenden und somit Rechenzeit sparen. Die Änderung von  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  mit der

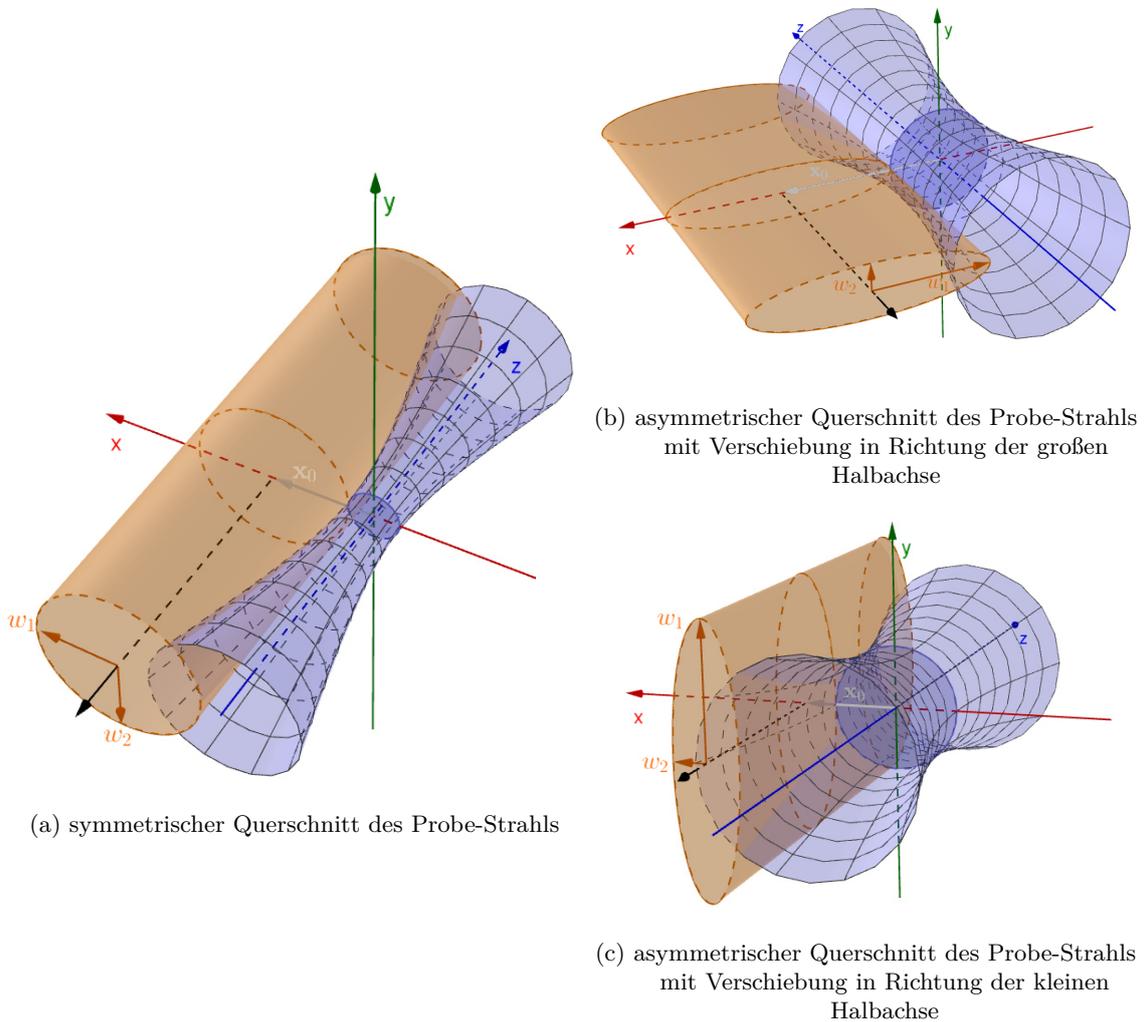


Abb. 3.6: Skizzen der betrachteten Szenarien für einen Offset  $x_0^\mu$  in der  $x, y$ -Ebene zwischen den Fokussen von Probe- (orange) und Pump-Strahl (blau). Die Strahlweite des Probe-Strahls wird in den drei dargestellten Fällen für den Interaktionsbereich mit dem Pump-Strahl vernachlässigt. In(a) ist der Probe-Strahlquerschnitt kreisförmig. In den beiden anderen Abbildungen ist der Probe-Strahlquerschnitt elliptisch. Die Verschiebung erfolgt dabei das eine Mal in Richtung der großen Halbachse dieser Ellipse (b). Das andere Mal wird in Richtung der kleinen Halbachse verschoben (c). Die Szenarien (b) und (c) stellen die beiden Extremfälle in Bezug auf eine Verschiebung des Probe-Strahls im Fall eines asymmetrischen Querschnitts dar.

Verschiebung in  $x$ -Richtung findet man in Tabelle 3.6. Die Abhängigkeit der Winkel  $\sigma_i$  von  $\varphi'$  ist bei der angegebenen Genauigkeit nicht zu erkennen. Sie äußert sich bei den betrachteten Werten für  $x_0$  erst in der fünften Nachkommastelle. Die Ergebnisse für  $N_{\perp>\sigma}/N_{\perp}$ , sowie die daraus resultierende detektierbare Anzahl an Signalphotonen pro Stunde sind für verschiedene Verschiebungen in Tabelle 3.4 zu finden. Wie bei der Anzahl der Signalphotonen außerhalb der Divergenz ändert sich der Anteil der Signalphotonen  $N_{\perp>\sigma}$  an der Gesamtzahl der Signalphotonen  $N_{\perp}$  kaum mit der Verschiebung. Die Anzahl der pro Stunde detektierbaren Signalphotonen ändert sich folglich im gleichen Maß wie die Gesamtzahl  $N_{\perp}$ .

Die Veränderung der absoluten Anzahl der Signalphotonen  $N_{\perp}$ ,  $N_{\perp>\Theta}$  und  $N_{\perp>\sigma}$  ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Dabei wird ein weiterer Bereich abgedeckt als durch die in Tabelle 3.4 gegebenen Werte. Es zeigt sich, dass der Abfall der Anzahl an Signalphotonen bei  $x_0 \approx 2w_0$  am stärksten ist. Für  $x_0 \approx 4w_0$  ist die Signalphotonenanzahl schon deutlich abgefallen, ändert sich aber nicht mehr so stark. Dies entspricht genau dem in Abbildung 3.6a skizzierten Fall, bei dem es in der Fokusebene von Pump- und Probe-Strahl keinen Überlapp mehr gibt.

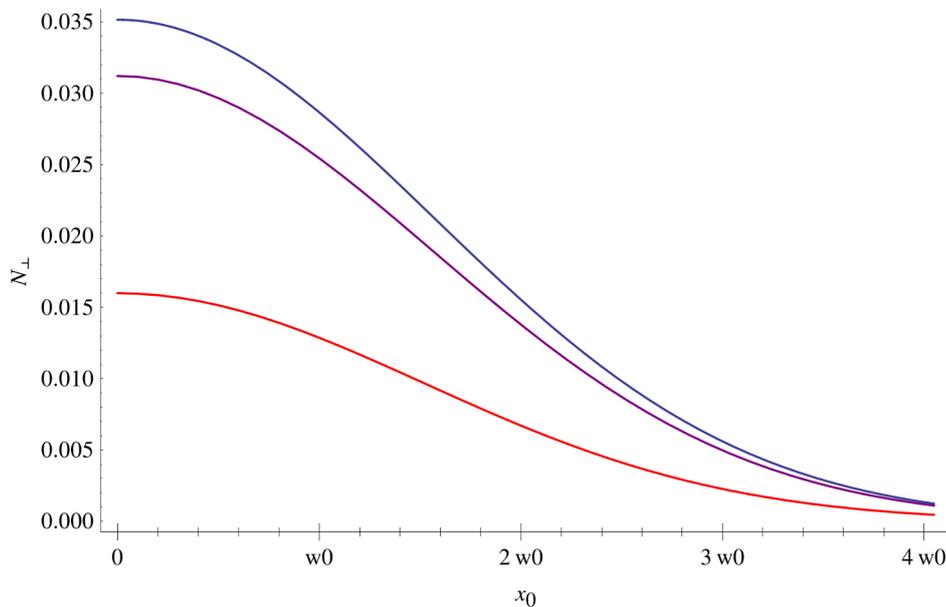


Abb. 3.7: Darstellung der Signalphotonenanzahl  $N_{\perp}$  (blau),  $N_{\perp>\Theta}$  (lila) und  $N_{\perp>\sigma}$  (rot) als Funktion der Verschiebung  $x_0$ . Der Probe-Strahlquerschnitt ist durch  $w_1 = w_2 = 3w_0$  gegeben.

Im Fall eines asymmetrischen Querschnitts des Probe-Strahls gibt es auch bei einer perfekten Ausrichtung von Pump- und Probe-Laser zueinander bereits eine ausgeprägte Abhängigkeit der differentiellen Anzahl der Signalphotonen von  $\varphi'$  (vgl. Abb. 3.3b). Hierdurch ergibt sich eine stark richtungsabhängige Veränderung der Anzahl an Signalphotonen bei einer Verschiebung des Probe-Strahlfokus in der  $(x, y)$ -Ebene. Eine Verschiebung in  $z$ -Richtung oder ein zeitlicher Offset  $t_0$  verursachen hingegen auch in diesem Fall einen exponentiellen Abfall, jedoch keine winkelabhängige Veränderung der Verteilung der Signalphotonen.

Um die Auswirkungen einer im Experiment bezüglich der Richtung zufälligen Verschiebung abschätzen zu können, werden die beiden möglichen Extremfälle betrachtet. Dies bedeutet, dass zum einen die Anzahl der Signalphotonen für den Fall berechnet wird, dass die Verschiebung in Richtung der großen Halbachse des Strahlquerschnitts erfolgt. Zum ande-

ren wird die Signalphotonenanzahl für eine Verschiebung in Richtung der kleinen Halbachse ermittelt. Bei einem gegebenen Abstand der Fokusse  $|x_0|$  vom Pump- und vom Probe-Strahl bewirkt die Verschiebung im ersten Fall (vgl. Abb. 3.6b) von allen möglichen Richtungen den geringsten Abfall in der Anzahl der Signalphotonen. Die resultierende Anzahl soll deshalb als  $N_{\perp}^{\max}$  bezeichnet werden. Im zweiten Fall (vgl. Abb. 3.6c) ist der Abfall maximal, weshalb die Anzahl der Signalphotonen hier als  $N_{\perp}^{\min}$  bezeichnet wird. Zur Berechnung der entsprechenden differentiellen Photonenzahl wurde der Winkel  $\delta_0$ , welcher über die Vektoren  $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{e}}_{0,0,\delta_0} = (-\cos \delta_0, \sin \delta_0, 0)$  und  $\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{e}}_{0,0,\delta_0+\frac{\pi}{2}}$  die Orientierung des Probe-Strahlquerschnitts beschreibt, durch die Verschiebungen  $x_0$  und  $y_0$  ausgedrückt. Im ersten Quadranten, auf welchen man sich auf Grund der elliptischen Symmetrie beschränken kann, ergibt sich durch eine einfache geometrische Betrachtung  $\delta_{0,\max} = -\arctan \frac{y_0}{x_0}$  bzw.  $\delta_{0,\min} = -\arctan \frac{y_0}{x_0} + \frac{\pi}{2}$ . Setzt man dies in Gleichung (3.3.1) ein, erhält man ( $t_0 + z_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\max} = & \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T\tau}{\sqrt{2T^2 + \tau^2}} e^{-\frac{x_0^2+y_0^2}{w_1^2}} \sum_{l=\pm 1} e^{il\psi_0} e^{-\frac{T^2\tau^2}{2T^2+\tau^2} \frac{(k'+l\omega)^2}{16}} \\ & \times \int dz \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}} e^{-\frac{32}{2T^2+\tau^2} z^2} e^{iz \left[ k' \left( \frac{\tau^2 - 2T^2}{2T^2 + \tau^2} - \cos \vartheta' \right) - \frac{4l\omega T^2}{2T^2 + \tau^2} \right]} \\ & \times e^{-\frac{1}{4(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} \left( 2 \frac{x_0^2+y_0^2}{w^2(z)} \frac{(x_0 \sin \varphi' + y_0 \cos \varphi')^2}{w_1^2} + \frac{(x_0 \cos \varphi' - y_0 \sin \varphi')^2}{w_2^2} \right) \frac{k' \sin^2 \vartheta'}{x_0^2+y_0^2}} e^{\frac{1}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} \frac{1}{w_1^4} \left( \frac{1}{w_2^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right)} \\ & \times e^{\frac{ik' \sin \vartheta'}{w_1^2(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} \left[ \left( \frac{1}{w_2^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right) (x_0 \cos \varphi' - y_0 \sin \varphi') + \frac{x_0 y_0}{x_0^2+y_0^2} \left( \frac{1}{w_2^2} - \frac{1}{w_1^2} \right) (y_0 \cos \varphi' - x_0 \sin \varphi') \right]}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

$\mathcal{M}_{\min}$  ergibt sich aus der Vertauschung von  $w_1$  und  $w_2$  ( $w_1 \rightleftharpoons w_2$ ). Für  $w_1 = w_2$  erhält man das Ergebnis (3.3.2) zurück. Für den Fall einer Verschiebung in  $x$ -Richtung mit  $y_0 = 0$  kann man hieraus erkennen, dass im Vergleich zu der Verschiebung im Fall eines kreisförmigen Querschnitts des Probe-Strahls ein zusätzlicher von  $x_0$  abhängige Term  $\exp\left(-\frac{k' \sin^2 \vartheta'}{2(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} \frac{x_0^2 \sin^2 \varphi'}{w^2(z)w_1^2}\right)$  existiert. Dieser liefert nur einen geringen Beitrag zum Integral über  $z$ , sodass die zusätzliche Abhängigkeit von den Winkeln  $\varphi'$  und  $\vartheta'$  erneut sehr gering ist.

In Tabelle 3.5 ist für  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = w_0/10$  jeweils die Anzahl der Signalphotonen für verschiedene Verschiebungen in die  $x$ -Richtung für die beiden eingeführten Fälle angegeben, sowie die Anzahl der Signalphotonen außerhalb von  $\Theta$  und außerhalb von  $\sigma$ . Der Abfall der Gesamtzahl der Signalphotonen verläuft für  $N_{\perp}^{\min}$  wie erwartet sehr viel schneller als der von  $N_{\perp}^{\max}$ . Solange die Verschiebung des Probe-Strahls nicht größer als  $x_0 = 0.5w_0$  ist, kann immer noch eine signifikante Anzahl an Signalphotonen pro Stunde detektiert werden. Insbesondere liefert damit ein asymmetrischer Probe-Strahl mit  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = w_0/10$  bei dieser Verschiebung in etwa genauso viele Signalphotonen pro Stunde wie im Fall eines symmetrischen Strahlquerschnitts ohne Verschiebung (vgl. Tab. 3.4). Der Abfall des Anteils der Signalphotonen außerhalb von  $\Theta$  bzw. von  $\sigma$  fällt in beiden Fällen relativ gering aus. Jedoch ist er stärker als im symmetrischen Fall, was durch die oben beschriebene zusätzliche Abhängigkeit von  $\varphi'$ ,  $\vartheta'$  im asymmetrischen Fall zu erklären ist.

Der Divergenzwinkel  $\Theta$  des Probe-Strahls ist unabhängig von der Verschiebung  $x_0^{\mu}$ . Der Winkel  $\sigma(\varphi')$  hingegen ändert sich mit der Verschiebung. Die elliptische Symmetrie bleibt dabei jedoch in guter Näherung erhalten. Die Änderung von  $\sigma_1 = \sigma(\delta_0)$  und  $\sigma_2 = \sigma(\delta_0 + \frac{\pi}{2})$  mit zunehmender Verschiebung ist für  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = \frac{w_0}{10}$ , sowie für  $w_1 = w_2 = 3w_0$  in

### 3.3. GEGENLÄUFIGE ANORDNUNG MIT VERSCHOBENEM PROBE-STRAHL

Tab. 3.5: Anzahl der Signalphotonen im Fall eines asymmetrischen Querschnitts des Probe-Strahls ( $w_1 = 3w_0$ ,  $w_2 = \frac{w_0}{10}$ ) für unterschiedliche Verschiebungen in  $x$ -Richtung. Diese ist in Einheiten des Pump-Querschnitts  $w_0$  angegeben. Die Orientierung des Probe-Querschnitts wurde wie in Abb. 3.6b ( $N_{\perp}^{\max}$ ) bzw. 3.6c ( $N_{\perp}^{\min}$ ) gewählt. Angegeben ist das Verhältnis der Gesamtanzahl der Signalphotonen  $N_{\perp}^{\max(\min)}$  zu der Anzahl  $N$  der Probe-Photonen, der Anteil der Signalphotonenanzahl  $N_{\perp>\Theta}^{\max(\min)}$  an  $N_{\perp}^{\max(\min)}$  außerhalb der Probe-Strahldivergenz  $\Theta(\varphi')$ , sowie der Anteil der detektierbaren Signalphotonen  $N_{\perp>\sigma}^{\max(\min)}$  an  $N_{\perp}^{\max(\min)}$  und die Anzahl dieser, die pro Stunde zu erwarten sind.

$\frac{x_0}{w_0}$	$\frac{N_{\perp}^{\max}}{N}$	$\frac{N_{\perp>\Theta}^{\max}}{N_{\perp}^{\max}}$	$\frac{N_{\perp>\sigma}^{\max}}{N_{\perp}^{\max}}$	$\frac{N_{\perp>\sigma}^{\max}}{h}$	$\frac{N_{\perp}^{\min}}{N}$	$\frac{N_{\perp>\Theta}^{\min}}{N_{\perp}^{\min}}$	$\frac{N_{\perp>\sigma}^{\min}}{N_{\perp}^{\min}}$	$\frac{N_{\perp>\sigma}^{\min}}{h}$
0	$1.44 \cdot 10^{-13}$	68.4%	27.1%	140.51	$1.44 \cdot 10^{-13}$	68.4%	27.1%	140.51
0.5	$1.37 \cdot 10^{-13}$	68.447%	26.971%	132.71	$5.97 \cdot 10^{-14}$	68.297%	24.810%	53.32
1	$1.17 \cdot 10^{-13}$	68.443%	26.584%	111.81	$4.48 \cdot 10^{-15}$	67.694%	18.939%	3.06
1.5	$9.00 \cdot 10^{-14}$	68.435%	25.954%	84.05	$7.76 \cdot 10^{-17}$	65.950%	11.433%	0.03

Tabelle 3.6 gegeben. Es zeigt sich, dass sich  $\sigma_1$  für alle drei Fälle kaum ändert. Die Änderung von  $\sigma_2$  bewegt sich prozentual gesehen im gleichen Bereich. Die absolute Änderung fällt damit jedoch deutlich größer aus als bei  $\sigma_1$ . Um die zu  $N_{\perp>\sigma}^{\max}$  gehörenden  $\sigma_i$  mit denen von  $N_{\perp>\sigma}^{\min}$  vergleichen zu können, würde es sich anbieten die Werte in Abhängigkeit vom Anteil der Verschiebung  $x_0$  am Strahlradius in der Richtung der Verschiebung zu betrachten.

Tab. 3.6: Entwicklung des Winkel  $\sigma(\varphi')$  mit der Verschiebung  $x_0$ . Es sind Winkel  $\sigma_1 = \sigma(\delta_0)$  und  $\sigma_2 = \sigma(\delta_0 + \frac{\pi}{2})$  für die in Abb. 3.6 dargestellten Szenarien für unterschiedliche  $x_0$  angegeben. Konkret wird ein symmetrischer Strahlquerschnitt (*symm.*) mit  $w_1 = w_2 = 3w_0$  betrachtet und ein asymmetrischer Strahlquerschnitt mit  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = \frac{w_0}{10}$  für  $\delta_0 = 0$  (*asymm., max*) und für  $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$  (*asymm., min*).

$\frac{x_0}{w_0}$	<i>symm.</i>		<i>asymm., max</i>		<i>asymm., min</i>	
	$\sigma_1[\mu\text{rad}]$	$\sigma_2[\mu\text{rad}]$	$\sigma_1[\mu\text{rad}]$	$\sigma_2[\mu\text{rad}]$	$\sigma_1[\mu\text{rad}]$	$\sigma_2[\mu\text{rad}]$
0	26.32	26.32	23.17	5138.50	5138.50	23.17
0.5	26.38	26.38	23.24	5152.49	5383.71	24.21
1	26.54	26.54	23.42	5194.21	5859.60	27.02
1.5	26.81	26.81	23.73	5263.30	5840.57	30.97

### 3.4 Gegeneinander verkippte Anordnung

Bisher wurden nur Fälle betrachtet, bei denen Pump- und Probe-Puls direkt aufeinander zu-  
 liefern oder diese parallel zueinander verschoben waren. Es soll nun noch untersucht werden,  
 wie sich die Anzahl der Signalphotonen bei verschwindendem Offset ( $x_0^\mu = 0$ ) verändert, wenn  
 Pump- und Probe-Strahl zueinander gedreht sind, d.h.  $\vartheta, \varphi \neq 0$ . Im Experiment spielt dieser  
 Effekt kaum eine Rolle, da eine präzise Ausrichtung der Laser gut möglich ist.

Pump- und Probe-Strahl können prinzipiell in beliebige Richtungen gegeneinander verkippt  
 werden. Jedoch sind alle so entstandenen Konfigurationen durch eine einfache Koordinaten-  
 transformation ineinander überführbar. Im Fall eines elliptischen Probe-Strahlquerschnitts  
 ist dabei zu beachten, dass auch die Orientierung der Ellipse entsprechend angepasst wer-  
 den muss. Die Verkipfung lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf  $\varphi = 0$  und  
 einen beliebigen Winkel  $\vartheta$  einschränken. Der Wellenvektor des Probe-Pulses ist dann durch  
 $\hat{\mathbf{k}} = (\sin \vartheta, 0, -\cos \vartheta)$  gegeben. Der Wellenvektor des Pump-Pulses soll auch hier in  $z$ -Richtung  
 zeigen.

Es wird der Fall eines kreisförmigen Querschnitts des Probe-Strahls, d.h.  $w_1 = w_2 = w$ ,  
 betrachtet. Aus Gleichung (2.3.4) ergibt sich unter den oben genannten Bedingungen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T\tau}{\sqrt{2T^2 + \tau^2}} \sum_{l=\pm 1} e^{-\frac{T^2\tau^2}{2T^2 + \tau^2} \frac{(k'+l\omega)^2}{16}} e^{il\psi_0} \int dz \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}} \\
 &\times e^{-\frac{g_1^2 f_{22} - g_2^2 f_{11} + 2f_{12}g_1g_2}{4(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}} e^{iz \left[ \frac{f_{12}f_{13} - f_{11}f_{23}}{f_{11}(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} (f_{11}g_2 - f_{12}g_1) - \frac{f_{13}}{f_{11}} g_1 + g_3 \right]} e^{-z^2 \left[ f_{33} - \frac{f_{13}^2}{f_{11}} - \frac{(f_{12}f_{13} - f_{11}f_{23})^2}{f_{11}(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} \right]} \\
 &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T\tau}{\sqrt{2T^2 + \tau^2}} \sum_{l=\pm 1} e^{-\frac{T^2\tau^2}{2T^2 + \tau^2} \frac{(k'+l\omega)^2}{16}} e^{il\psi_0} \int dz \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{f_{11} \left( \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right)}} \\
 &\times e^{iz \frac{k' \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi' \left( \frac{8}{2T^2 + \tau^2} - \frac{1}{w^2} \right) + \frac{8k' \sin \vartheta}{2T^2 + \tau^2} [\sin \vartheta' \cos \varphi' - (1 + \cos \vartheta) \sin \vartheta]}{f_{11}}} \\
 &\times e^{iz \frac{\cos \vartheta \left( \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right) \frac{k'\tau^2 - 2l\omega T^2 (1 + \cos \vartheta)}{2T^2 + \tau^2} - k' \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{w^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right) \left( \frac{2T^2}{2T^2 + \tau^2} + \cos \vartheta' \right)}{f_{11}}} \\
 &\times e^{-\frac{k'^2 \sin^2 \vartheta' + \sin^2 \vartheta \left( \frac{2l\omega T^2 - k'\tau^2}{2T^2 + \tau^2} \right)^2 + \frac{2l\omega T^2 - k'\tau^2}{2T^2 + \tau^2} 2k' \sin \vartheta' \sin \vartheta \cos \varphi'}{4f_{11}}} \\
 &\times e^{-\frac{k'^2 \sin^2 \vartheta' \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi' \frac{2}{2T^2 + \tau^2}}{f_{11} \left( \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right)}} e^{-z^2 \frac{\frac{8}{2T^2 + \tau^2} (1 + \cos \vartheta)^2 \left( \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w^2(z)} \right) + \frac{2}{w^2(z)} \frac{\sin^2 \vartheta}{w^2}}{f_{11}}} \quad (3.4.1)
 \end{aligned}$$

mit dem von  $z$  abhängigen Ausdruck  $f_{11} = \frac{8 \sin^2 \vartheta}{2T^2 + \tau^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{w^2} + \frac{2}{w^2(z)}$ . Die differentielle Anzahl an  
 Signalphotonen berechnet sich hieraus gemäß Gleichung (2.1.20). Es gilt dabei weiterhin, dass  
 die Signalphotonen hauptsächlich die gleiche Richtung aufweisen wie die Probe-Photonen. In  
 Abbildung 3.8 ist dargestellt, wie sich das Maximum der differentiellen Anzahl der Signalpho-  
 tonen  $\frac{d^2 N}{d\varphi' d \cos \vartheta'}$  mit zunehmendem Winkel  $\vartheta$  verändert. Dafür wurde  $\varphi' = \varphi = 0$  und  $\vartheta' = \vartheta$   
 gesetzt. Die maximale Signalphotonenanzahl ist über einen relativ großen Winkelbereich von  
 $\vartheta$  nahezu konstant. Erst ab  $\vartheta \approx 2000 \mu\text{rad}$  beginnt eine stärkere Veränderung. Bis zu einem  
 Winkel von  $\vartheta \approx 12000 \mu\text{rad}$  nimmt das Maximum der differentielle Photonen um fast zehn  
 Größenordnungen ab. Für größere Winkel bleibt der Wert etwa konstant. Zusätzlich ist ein-  
 gezeichnet, wie sich die differentielle Anzahl an Signalphotonen mit  $\vartheta'$  für verschiedene, feste

Winkel  $\theta$  verhält. Es zeigen sich hier keine große Änderungen der Winkelabhängigkeit für unterschiedliche Drehungen  $\vartheta$ .

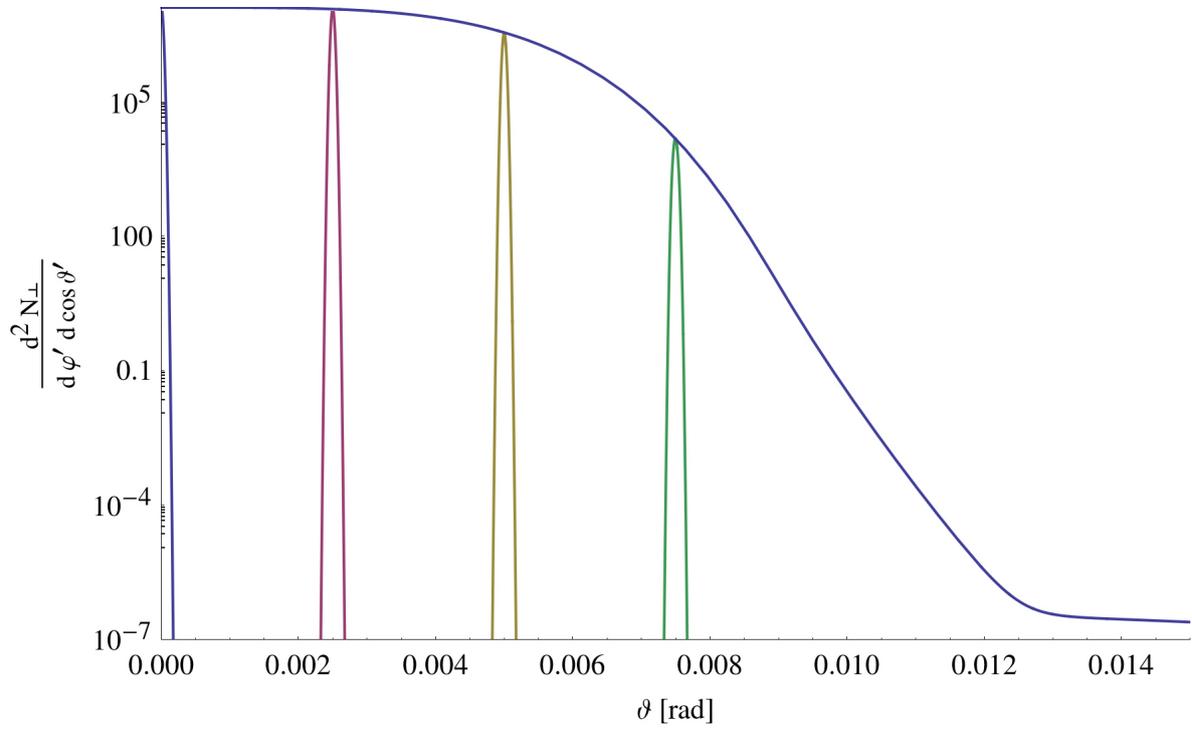


Abb. 3.8: Darstellung von  $\frac{d^2 N_{\perp}}{d\varphi' d \cos \vartheta'}$  für  $\vartheta' = \vartheta$  und  $\varphi' = \varphi = 0$  als Funktion der Drehung  $\vartheta$  (blau), sowie für  $\varphi' = 0$  als Funktion von  $\vartheta'$  für unterschiedliche Drehungen  $\vartheta$  ( $\vartheta = 0$ : grau,  $\vartheta = 0.0025$ : lila,  $\vartheta = 0.005$ : gelb,  $\vartheta = 0.0075$ : grün). Die blaue Kurve entspricht der Entwicklung des Maximums der differentiellen Signalphotonenanzahl mit  $\vartheta$ . Für den Probe-Strahl gilt  $w_1 = w_2 = 3w_0$ .

### 3.5 Approximatives Ergebnis für die Signalphotonenanzahl

Zum Abschluss wird eine Näherung betrachtet, die es ermöglicht die bisher immer numerisch durchgeführte  $z$ -Integration in Gleichung (2.3.4) analytisch zu behandeln. Es soll im Ausdruck (2.2.5) der Feldstärkeverteilung des Pump-Lasers die Größe  $w(z)$  in der Exponentialfunktion durch einen effektiven Radius  $w_{\text{eff}} = \text{const.}$  ersetzt werden. Dadurch wird die Weitung des Pump-Strahls mit  $z$  vernachlässigt. Der Abfall der Intensität des Pump-Feldes mit zunehmendem Abstand vom Fokus wird hingegen weiterhin berücksichtigt. Für die Funktion  $\mathcal{M}$  bedeutet dies, dass in den verwendeten Abkürzungen (Gl. (2.3.1) bis (2.3.3)) die Ersetzung  $w(z) \rightarrow w_{\text{eff}}$  vorgenommen wird. Das Integral in Gleichung (2.3.4) nimmt die Form

$$\int dz \left( \frac{w_0}{w(z)} \right)^2 e^{-Az^2 + (B+iC)z} = \frac{\pi}{2} z_R \sum_{q=\pm 1} e^{qz_R(C-iB)} \left[ 1 - \text{erf} \left( z_R \sqrt{A} + \frac{q(C-iB)}{2\sqrt{A}} \right) \right] \quad (3.5.1)$$

mit  $A \geq 0$  an.

Die Größe  $w_{\text{eff}}$  soll so festgelegt werden, dass die Anzahl an Signalphotonen in dieser Näherung dem Ergebnis der vollen Rechnung entspricht. Die quadrierte Feldstärke des Pump-Feldes skaliert mit  $\exp(-2\frac{x^2+y^2}{w(z)^2})$ . Da  $w(z) \geq w_0$  gilt fällt dies weniger schnell ab als  $\exp(-2\frac{x^2+y^2}{w_0^2})$ . Es ist daher davon auszugehen, dass auch  $w_{\text{eff}} \geq w_0$  sein wird.

Es soll hier nur der Fall einer gegenläufigen Anordnung von Probe- und Pump-Pulsen betrachtet werden ( $\vartheta, \varphi = 0$ ). Bei dieser ergibt sich die differentielle Anzahl an Signalphotonen in der betrachteten Näherung zu

$$\begin{aligned} d^3 N_{\perp}^{\text{approx}} &\approx m^4 \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \frac{\alpha}{15^2} k' (1 + \cos \vartheta')^2 \left( \frac{e\mathcal{E}_0}{2m^2} \right)^2 \left( \frac{e\mathcal{E}_0}{2m^2} \right)^4 \frac{\pi^5}{256} \frac{z_R^2 T^2 \tau^2}{2T^2 + \tau^2} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}} e^{-\frac{2(x_0 \cos \delta_0 - y_0 \sin \delta_0)^2}{w_1^2} - \frac{2(x_0 \sin \delta_0 + y_0 \cos \delta_0)^2}{w_2^2} - 16 \frac{(t_0 + z_0)^2}{2T^2 + \tau^2}} \\ &\times e^{-\frac{k'^2 \sin^2 \vartheta' \left( \frac{\sin^2(\delta_0 + \varphi')}{w_1^2} + \frac{\cos^2(\delta_0 + \varphi')}{w_2^2} + \frac{2}{w_{\text{eff}}^2} \right)}{2(f_{11}f_{22} - f_{12}^2)}} e^{\frac{64z_R^2}{2T^2 + \tau^2}} \\ &\times e^{\frac{2ik' \sin \vartheta'}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} \left[ \frac{x_0 \cos \varphi' - y_0 \sin \varphi'}{w_1^2 w_2^2} + \frac{2 \cos(\delta_0 - \varphi')}{w_1^2 w_{\text{eff}}^2} (x_0 \cos \delta_0 - y_0 \sin \delta_0) + \frac{2 \sin(\delta_0 - \varphi')}{w_2^2 w_{\text{eff}}^2} (x_0 \sin \delta_0 + y_0 \cos \delta_0) \right]} \\ &\times e^{\frac{2(x_0 \cos \delta_0 - y_0 \sin \delta_0)^2}{w_1^4 (f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} \left( \frac{2}{w_{\text{eff}}^2} + \frac{1}{w_2^2} \right) + \frac{2(x_0 \sin \delta_0 + y_0 \cos \delta_0)^2}{w_2^4 (f_{11}f_{22} - f_{12}^2)} \left( \frac{2}{w_{\text{eff}}^2} + \frac{1}{w_1^2} \right)} \\ &\times \left[ \sum_{l=\pm 1} e^{il\psi_0} e^{-\frac{T^2 \tau^2}{2T^2 + \tau^2} \frac{(k'+l\omega)^2}{16}} e^{i(t_0 + z_0) \frac{2l\omega T^2 - k'\tau^2}{2T^2 + \tau^2}} \sum_{q=\pm 1} e^{-qz_R \left( k'(\cos \vartheta' + 1) + 2 \frac{2l\omega T^2 - k'\tau^2}{2T^2 + \tau^2} + 32i \frac{t_0 + z_0}{2T^2 + \tau^2} \right)} \right] \\ &\left[ 1 - \text{erf} \left\{ z_R \sqrt{\frac{32}{2T^2 + \tau^2}} - \frac{q}{2} \sqrt{\frac{2T^2 + \tau^2}{32}} \left( k'(\cos \vartheta' + 1) + 2 \frac{2l\omega T^2 - k'\tau^2}{2T^2 + \tau^2} + 32i \frac{t_0 + z_0}{2T^2 + \tau^2} \right) \right\} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

mit  $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \frac{1}{w_1^2 w_2^2} + \frac{4}{w_{\text{eff}}^4} + \frac{2}{w_{\text{eff}}^2 \left( \frac{1}{w_1^2} + \frac{1}{w_2^2} \right)}$ .

Exemplarisch wird hieraus die Anzahl an Signalphotonen für einen symmetrischen ( $w_1 =$

### 3.5. APPROXIMATIVES ERGEBNIS FÜR DIE SIGNALPHOTONENANZAHL

$w_2 = 3w_0$ ) und einen asymmetrischen ( $w_1 = 3w_0$ ,  $w_2 = w_0/10$ ) Probe-Strahlquerschnitt bei verschiedenen Verschiebungen  $x_0$  berechnet. Die Ergebnisse hierzu sind in Tabelle 3.7 und 3.8 zusammen mit denen der exakten Rechnung angegeben (vgl. Tab. 3.4, 3.5 und 3.6).

Tab. 3.7: Vergleich der Ergebnisse für die Signalphotonenanzahl in der Näherung  $w(z) \rightarrow w_{\text{eff}}$  mit den exakten Ergebnissen (zu entnehmen Tab. 3.4, 3.6) für verschiedene Verschiebungen  $x_0$ . Der Probe-Querschnitt ist durch  $w_1 = w_2 = 3w_0$  gegeben. Der effektive Radius  $w_{\text{eff}}$  ist so bestimmt, dass das exakte und das genäherte Ergebnis der Gesamtanzahl  $N_{\perp}$  an Signalphotonen übereinstimmen. Es ist weiterhin die Signalphotonenanzahl für  $\vartheta' > \Theta$  und für  $\vartheta' > \sigma$ , sowie die Winkel  $\sigma_1 = \sigma(\delta_0)$  und  $\sigma_2 = \sigma(\delta_0 + \frac{\pi}{2})$ .

	$\frac{x_0}{w_0}$	$\frac{w_{\text{eff}}}{w_0}$	$\frac{N_{\perp}}{N}$	$\frac{N_{\perp > \Theta}}{N_{\perp}}$	$\sigma_1 [\mu\text{rad}]$	$\sigma_2 [\mu\text{rad}]$	$\frac{N_{\perp > \sigma}}{N_{\perp}}$	$\frac{N_{\perp > \sigma}}{h}$
<i>Exakt</i>	0	1.0565	$3.52 \cdot 10^{-13}$	88.8%	26.32	26.32	45.5%	57.54
<i>Näherung</i>			$3.52 \cdot 10^{-13}$	89.0%	26.32	26.32	46.0%	58.17
<i>Exakt</i>	0.5	1.0565	$3.34 \cdot 10^{-14}$	88.78%	26.38	26.38	45.32%	54.43
<i>Näherung</i>			$3.34 \cdot 10^{-14}$	88.98%	26.38	26.38	45.82%	55.03
<i>Exakt</i>	1.0	1.0566	$2.89 \cdot 10^{-14}$	88.78%	26.54	26.54	44.87%	46.07
<i>Näherung</i>			$2.89 \cdot 10^{-14}$	88.98%	26.54	26.54	45.37%	46.58
<i>Exakt</i>	1.5	1.0567	$2.20 \cdot 10^{-14}$	88.78%	26.81	26.81	44.13%	34.89
<i>Näherung</i>			$2.20 \cdot 10^{-14}$	88.98%	26.81	26.81	44.64%	35.29

Es ergeben sich bei fast allen betrachteten Größen geringfügige Abweichungen zwischen Näherung und exaktem Ergebnis.

Im Fall des kreisförmigen Probe-Strahlquerschnitts stimmen die Winkel  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sowohl untereinander als auch mit dem exakten Ergebnis überein. Die genäherten und die exakten Ergebnisse der Verhältnisse  $\frac{N_{\perp > \Theta}}{N_{\perp}}$  und  $\frac{N_{\perp > \sigma}}{N_{\perp}}$  unterscheiden sich unabhängig von  $x_0$  um einen Wert von 0.2% bzw. 0.5%. Die Anzahl der pro Stunde detektierbaren Signalphotonen ist in der Näherung etwas größer.

Für einen Probe-Strahl mit elliptischen Querschnitt, der in Richtung der großen Halbachse verschoben wird, sind die Abweichungen zwischen exaktem und Näherungsergebnis von der Verschiebung  $x_0$  abhängig. Im Gegensatz zum Fall des symmetrischen Strahlquerschnitts liefert die Näherung hier zudem kleinere Werte als die exakte Lösung.

Insgesamt liefert die Näherung eine gute Übereinstimmung mit den exakten Ergebnissen. Die Rechenzeit reduziert sich durch die Näherung auf einen Bruchteil (ca. 1/35 der Zeit für die exakte Berechnung). Die Tatsache, dass durch die verwendete Approximation nicht alle Effekte der vollen Rechnung in den Lösungen enthalten sind, spielt für die betrachteten Verschiebungen kaum eine Rolle. Dies betrifft insbesondere azimutale Asymmetrien, die aus Termen hervorgehen, die durch die Ersetzung  $w(z) \rightarrow w_{\text{eff}}$  einen reinen Phasenfaktor darstellen und bei der Bildung des Betragsquadrats von  $\mathcal{M}$  wegfallen.

Tab. 3.8: Vergleich der Ergebnisse für die Signalphotonenanzahl in der Näherung  $w(z) \rightarrow w_{\text{eff}}$  mit den exakten Ergebnissen (zu entnehmen Tab. 3.4, 3.6) für verschiedene Verschiebungen  $x_0$ . Der Probe-Querschnitt ist durch  $w_1 = 3w_0$  und  $w_2 = \frac{w_0}{10}$  gegeben. Der effektive Radius  $w_{\text{eff}}$  ist so bestimmt, dass das exakte und das genäherte Ergebnis der Gesamtanzahl  $N_{\perp}$  an Signalphotonen übereinstimmen. Es ist weiterhin die Signalphotonenanzahl für  $\vartheta' > \Theta$  und für  $\vartheta' > \sigma$ , sowie die Winkel  $\sigma_1 = \sigma(\delta_0)$  und  $\sigma_2 = \sigma(\delta_0 + \frac{\pi}{2})$ .

	$\frac{x_0}{w_0}$	$\frac{w_{\text{eff}}}{w_0}$	$\frac{N_{\perp}}{N}$	$\frac{N_{\perp > \Theta}}{N_{\perp}}$	$\sigma_1 [\mu\text{rad}]$	$\sigma_2 [\mu\text{rad}]$	$\frac{N_{\perp > \sigma}}{N_{\perp}}$	$\frac{N_{\perp > \sigma}}{h}$
<i>Exakt</i>	0		$1.44 \cdot 10^{-13}$	68.4%	23.17	5138.50	27.1%	140.51
<i>Näherung</i>		1.055	$1.44 \cdot 10^{-13}$	68.6%	23.17	5324.16	27.4%	141.66
<i>Exakt</i>	0.5		$1.37 \cdot 10^{-13}$	68.45%	23.17	5138.50	26.97%	132.71
<i>Näherung</i>		1.058	$1.37 \cdot 10^{-13}$	68.55%	23.23	5358.53	27.07%	133.22
<i>Exakt</i>	1.0		$1.17 \cdot 10^{-13}$	68.44%	23.42	5194.21	26.58%	111.81
<i>Näherung</i>		1.068	$1.17 \cdot 10^{-13}$	68.32%	23.41	5463.20	26.34%	110.76
<i>Exakt</i>	1.5		$9.00 \cdot 10^{-14}$	68.43%	23.73	5263.30	25.95%	84.05
<i>Näherung</i>		1.084	$9.00 \cdot 10^{-14}$	67.94%	23.70	5643.21	25.12%	81.35



# Zusammenfassung

Der Effekt der Vakuumdoppelbrechung wurde bereits vor 80 Jahren vorhergesagt, konnte aber bisher nicht experimentell nachgewiesen werden. In der vorliegenden Arbeit wurde eine Möglichkeit aufgezeigt, wie sich diese Attribut der Nichtlinearität des Vakuums in einem Experiment an einer modernen Hochintensitätslaseranlage nachweisen ließe. Eine entscheidende Neuerung des hierfür untersuchten, hypothetischen Setups im Vergleich zu bereits bestehenden experimentellen Anordnungen (PVLAS, BMV) ist die Verwendung eines Lasers zur Generierung des Pump-Feldes anstatt starker Magnete. Die Idee hierzu kam bereits in den Siebzigerjahren auf [69], allerdings hat sich die Lasertechnik erst in den letzten Jahren soweit entwickelt, dass die Realisierung eines entsprechenden Experiments in greifbare Nähe gerückt ist.

Ein Nachweisexperiment, das Signaturen aufzeigen soll, die durch elementare physikalische Prozesse in hochintensiven Laserfeldern auf mikroskopischer Quantenebene hervorgerufen werden, bedarf sehr präziser Messungen. Ein entscheidender Faktor für den Erfolg eines solchen Präzisionsexperiments ist daher eine genaue theoretische Vorhersage der bei der Messung zu erwartenden Signale. Hierfür müssen möglichst alle Parameter des Experiments auch in der Theorie enthalten sein und an das genaue Setup angepasst werden können. Ein Fokus lag in dieser Arbeit darauf, eine möglichst realistische und detaillierte Beschreibung für das Pump- und das Probe-Feld zu verwenden. Ebenso wurde eine Vielzahl an freien Parametern eingeführt, um eine Anpassung der Theorie an die geometrische Anordnung der Laser in einem Experiment zu ermöglichen. Dies beinhaltet zum einen eine mögliche räumliche und zeitliche Verschiebung zwischen den Fokussen der beiden Laserstrahlen und zum anderen eine beliebige, durch zwei Winkel parametrisierte Lage der Laserstrahlen zueinander.

Zugleich wurden an geeigneten Stellen Näherungen durchgeführt, die eine über weite Strecken analytische Rechnung ermöglichen. Mit der ersten hiervon beschäftigt sich ein Großteil des ersten Kapitels: Aus der vollen Theorie der Quantenelektrodynamik wurde durch Ausintegration der fermionische Freiheitsgrade eine effektive Theorie, die in Form der Heisenberg-Euler Lagrange-Funktion gegeben ist. Diese wurde perturbativ behandelt, sodass bei den Vorhersagen der experimentell zu erwartenden Werte letztendlich nur die 1-Loop effektive Wirkung mit einer vierfachen Kopplung an das externe Feld berücksichtigt wurde. Höhere Loop-Terme und auch häufigere Kopplungen an das äußere Feld im 1-Loop Fall wurden vernachlässigt.

Im zweiten Kapitel wurde die für das hypothetische Experiment relevante Signatur zum Nachweis der Vakuumdoppelbrechung beschrieben. Hierbei wurde davon ausgegangen, dass sich alle Photonen des Probe-Pulses im gleichen Polarisationszustand befinden – das Licht also linear polarisiert ist. Quanteneffekte sorgen im hochintensiven Pump-Laserfeld dafür, dass einige Photonen in einen Zustand mit senkrechter Polarisation im Vergleich zu der der Probe-Photonen übergehen. Diese werden als die Signalphotonen betrachtet, die die Signatur der Vakuumdoppelbrechung bilden. In bisher realisierten Experimenten wird wie Ende des ersten

Kapitels erläutert eine andere Signatur, nämlich die Elliptizität von ursprünglich linear polarisiertem Licht, gemessen.

Die Betrachtung der Vakuumdoppelbrechung als Vakuumemissionsprozess führte auf eine Formel für die differentielle Anzahl an Signalphotonen. Bei der Herleitung dieser wurden weitere Approximationen genutzt: Auf Grund der sich stark unterscheidenden Frequenzen von Probe- und Pump-Laser konnten bei der Beschreibung der Feldprofile zum einen die von der Pump-Laserfrequenz abhängigen Terme vernachlässigt werden und zum anderen wurde darauf verzichtet die Strahlweitung des Probe-Lasers im Interaktionsbereich mit dem Pump-Feld zu berücksichtigen.

Aus der so gewonnenen Formel für die differentielle Anzahl an Signalphotonen lässt sich neben der Gesamtzahl der induzierten Signalphotonen auch eine Anzahl dieser in bestimmten Winkelbereichen berechnen. Insbesondere die Streuung von Signalphotonen in einen Bereich außerhalb der Probe-Strahldivergenz und darüber hinaus eröffnet neue Möglichkeiten in Hinblick auf ein Nachweisexperiment zur Vakuumdoppelbrechung. Für diese Bereiche ist das Verhältnis von Signal- zu Probe-Photonen sehr viel größer als beispielsweise auf der Strahlachse. Für ein Experiment bedeutet dies ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis, wodurch die sehr hohen Anforderungen bezüglich der Messgenauigkeit etwas herabgesetzt werden.

Im dritten Kapitel wurde für eine weitestgehend feste, dem aktuelle Stand der Technik entsprechende Wahl der Laserparameter das Verhalten der differentiellen Signalphotonenanzahl sowie der daraus folgenden Gesamtzahl an Signalphotonen in bestimmten Winkelbereichen untersucht. Dabei wurde zum einen betrachtet, wie sich diese Größen für unterschiedliche Anordnungsgeometrien ändern, und zum anderen, welchen Einfluss der Strahlquerschnitt des Probe-Lasers hat.

Die Größe, die für ein Nachweisexperiment die größte Relevanz hat, ist dabei durch  $N_{\perp > \sigma}$  gegeben. Diese gibt die Anzahl an Signalphotonen an, die bei Verwendung der aktuell sensibelsten Geräte zur Polarisationsmessung sicher detektiert werden können. Es konnte gezeigt werden, dass insbesondere bei Verwendung eines Probe-Strahls mit stark elliptischem Querschnitt eine signifikante Anzahl dieser detektierbaren Signalphotonen in einer Stunde zu erwarten ist. Die Pulse von Pump- und Probe-Laser sind dabei idealerweise exakt gegenläufig, d.h. es gibt keine räumliche oder zeitliche Verschiebung der Fokusse zueinander und die Strahlachsen liegen aufeinander. Abweichungen von dieser Geometrie führen zwar zu einer Herabsenkung der Signalphotonenanzahl, jedoch fällt diese bei einer präzisen Ausrichtung im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten so klein aus, dass dies kein Hindernis für die Realisierung eines solchen Experiments darstellt.

Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführte Analyse eines hypothetischen, experimentellen Setups zum Nachweis der Vakuumdoppelbrechung zeigen, dass Experimente dieser Art gute Erfolgsaussichten haben. Die erarbeitete Formel für die differentielle Anzahl an Signalphotonen ermöglicht eine den experimentellen Gegebenheiten angepasste Berechnung des zu erwartenden Signals und kann als Anhaltspunkt zur Optimierung eines entsprechenden realen Experiments dienen.

# Literaturverzeichnis

- [1] WEINBERG, S.: *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, 1996.
- [2] CADORET, M., E. DE MIRANDES, P. CLADÉ, S. GUELLATI-KHÉLIFA, C. SCHWOB, F. NEZ, L. JULIEN und F. BIRABEN: *Combination of Bloch Oscillations with a Ramsey-Bordé Interferometer: New Determination of the Fine Structure Constant*. Physical Review Letters, 101(23), Dez 2008.
- [3] HEISENBERG, W. und H. EULER: *Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons*. Zeitschrift für Physik, 98(11-12):714–732, Nov 1936.
- [4] EULER, H. und B. KOCKEL: *Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie*. Die Naturwissenschaften, 23(15):246–247, Apr 1935.
- [5] WEISSKOPF, V. *Kong. Dans. Vid. Selsk., Mat.-fys. Medd.*, (XIV), 1936.
- [6] SCHWINGER, J.: *On Gauge Invariance and Vacuum Polarization*. Physical Review, 82(5):664–679, Jun 1951.
- [7] KING, B., A. DI PIAZZA und C. H. KEITEL: *A matterless double slit*. Nature Photonics, 4(2):92–94, Jan 2010.
- [8] KING, B., A. DI PIAZZA und C. H. KEITEL: *Double-slit vacuum polarization effects in ultraintense laser fields*. Physical Review A, 82(3), Sep 2010.
- [9] TOMMASINI, D. und H. MICHINEL: *Light by light diffraction in vacuum*. Physical Review A, 82(1), Jul 2010.
- [10] KRYUCHKYAN, G. YU. und K. Z. HATSAGORTSYAN: *Bragg Scattering of Light in Vacuum Structured by Strong Periodic Fields*. Physical Review Letters, 107(5), Jul 2011.
- [11] LUNDSTRÖM, E., G. BRODIN, J. LUNDIN, M. MARKLUND, R. BINGHAM, J. COLLIER, J. T. MENDONÇA und P. NORREYS: *Using High-Power Lasers for Detection of Elastic Photon-Photon Scattering*. Physical Review Letters, 96(8), Mär 2006.
- [12] LUNDIN, J., M. MARKLUND, E. LUNDSTRÖM, G. BRODIN, J. COLLIER, R. BINGHAM, J. T. MENDONÇA und P. NORREYS: *Analysis of four-wave mixing of high-power lasers for the detection of elastic photon-photon scattering*. Physical Review A, 74(4), Okt 2006.
- [13] KING, B. und C. H. KEITEL: *Photon-photon scattering in collisions of intense laser pulses*. New Journal of Physics, 14(10):103002, Okt 2012.

- [14] GIES, H., F. KARBSTEIN und N. SEEGERT: *Quantum reflection as a new signature of quantum vacuum nonlinearity*. New Journal of Physics, 15(8):083002, Aug 2013.
- [15] GIES, H., F. KARBSTEIN und N. SEEGERT: *Quantum reflection of photons off spatio-temporal electromagnetic field inhomogeneities*. New Journal of Physics, 17(4):043060, Apr 2015.
- [16] YAKOVLEV, V. P. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, (51):619–27, 1966.
- [17] DI PIAZZA, A., K. Z. HATSAGORTSYAN und C. H. KEITEL: *Nonperturbative Vacuum-Polarization Effects in Proton-Laser Collisions*. Physical Review Letters, 100(1), jan 2008.
- [18] DI PIAZZA, A., K. Z. HATSAGORTSYAN und C. H. KEITEL: *Laser-photon merging in proton-laser collisions*. Physical Review A, 78(6), Dez 2008.
- [19] GIES, H., F. KARBSTEIN und N. SEEGERT: *Photon merging and splitting in electromagnetic field inhomogeneities*. Physical Review D, 93(8), Apr 2016.
- [20] GIES, H., F. KARBSTEIN und R. SHAISULTANOV: *Laser photon merging in an electromagnetic field inhomogeneity*. Physical Review D, 90(3), Aug 2014.
- [21] BIALYNICKA-BIRULA, Z. und I. BIALYNICKI-BIRULA: *Nonlinear Effects in Quantum Electrodynamics. Photon Propagation and Photon Splitting in an External Field*. Physical Review D, 2(10):2341–2345, nov 1970.
- [22] ADLER, S. L.: *Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field*. Annals of Physics, 67(2):599–647, oct 1971.
- [23] ADLER, S. L., J. N. BAHCALL, C. G. CALLAN und M. N. ROSENBLUTH: *Photon Splitting in a Strong Magnetic Field*. Physical Review Letters, 25(15):1061–1065, Okt 1970.
- [24] PAPANYAN, V.O. und V.I. RITUS. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, (61):2231, 1971.
- [25] PAPANYAN, V.O. und V.I. RITUS. *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, (65):1756, 1973.
- [26] STONEHAM, R. J.: *Phonon splitting in the magnetised vacuum*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 12(11):2187, 1979.
- [27] BAIER, V. N., A. I. MILSTEIN und R. ZH. SHAISULTANOV: *Photon Splitting in a Very Strong Magnetic Field*. Physical Review Letters, 77(9):1691–1694, aug 1996.
- [28] ADLER, S. L. und C. SCHUBERT: *Photon Splitting in a Strong Magnetic Field: Recalculation and Comparison with Previous Calculations*. Physical Review Letters, 77(9):1695–1698, aug 1996.
- [29] DI PIAZZA, A., A. I. MILSTEIN und C. H. KEITEL: *Photon splitting in a laser field*. Physical Review A, 76(3), Sep 2007.
- [30] DITTRICH, W. und M. REUTER: *Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics*. Springer Berlin Heidelberg, 1985.

- [31] DITTRICH, W. und H. GIES: *Probing the Quantum Vacuum*. Springer, 2000.
- [32] MARKLUND, M. und J. LUNDIN: *Quantum vacuum experiments using high intensity lasers*. The European Physical Journal D, 55(2):319–326, jun 2009.
- [33] DUNNE, G. V.: *New strong-field QED effects at extreme light infrastructure*. The European Physical Journal D, 55(2):327–340, feb 2009.
- [34] HEINZL, T. und A. ILBERTON: *Exploring high-intensity QED at ELI*. The European Physical Journal D, 55(2):359–364, apr 2009.
- [35] DI PIAZZA, A., C. MÜLLER, K. Z. HATSAGORTSYAN und C. H. KEITEL: *Extremely high-intensity laser interactions with fundamental quantum systems*. Reviews of Modern Physics, 84(3):1177–1228, aug 2012.
- [36] DUNNE, G. V.: *THE HEISENBERG–EULER EFFECTIVE ACTION: 75 YEARS ON*. International Journal of Modern Physics A, 27(15):1260004, jun 2012.
- [37] BATTISTI, R. und C. RIZZO: *Magnetic and electric properties of a quantum vacuum*. Reports on Progress in Physics, 76(1):016401, 2013.
- [38] KING, B. und T. HEINZL: *Measuring vacuum polarization with high-power lasers*. High Power Laser Science and Engineering, 4, 2016.
- [39] MIGNANI, R. P., V. TESTA, D. GONZÁLEZ CANIULEF, R. TAVERNA, R. TUROLLA, S. ZANE und K. WU: *Evidence for vacuum birefringence from the first optical-polarimetry measurement of the isolated neutron star RX J1856.5-3754*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 465(1):492–500, Nov 2016.
- [40] TOLL, J.S. Doktorarbeit, 1952.
- [41] BAIER, R. und P. BREITENLOHNER: *The vacuum refraction index in the presence of external fields*. Il Nuovo Cimento B Series 10, 47(1):117–120, jan 1967.
- [42] KOTKIN, G.L. und V.G. SERBO: *Polarization of high-energy  $\gamma$ -quanta traversing a bunch of polarized laser photons*. Physics Letters B, 413(1-2):122–129, nov 1997.
- [43] DELLA VALLE, F., A. EJLLI, U. GASTALDI, G. MESSINEO, E. MILOTTI, R. PENGO, G. RUOSO und G. ZAVATTINI: *The PVLAS experiment: measuring vacuum magnetic birefringence and dichroism with a birefringent Fabry–Perot cavity*. The European Physical Journal C, 76(1), Jan 2016.
- [44] DELLA VALLE, F., U GASTALDI, G MESSINEO, E MILOTTI, R PENGO, L PIEMONTESE, G RUOSO und G ZAVATTINI: *Measurements of vacuum magnetic birefringence using permanent dipole magnets: the PVLAS experiment*. New Journal of Physics, 15(5):053026, 2013.
- [45] BERCEAU, P., R. BATTISTI, M. FOUCHÉ und C. RIZZO: *The vacuum magnetic birefringence experiment: a test for quantum electrodynamics* This paper was presented at the International Conference on Precision Physics of Simple Atomic Systems, held at École de Physique, les Houches, France, 30 May – 4 June, 2010. Canadian Journal of Physics, 89(1):153–158, jan 2011.

- [46] CADÈNE, A., P. BERCEAU, M. FOUCHÉ, R. BATTESTI und C. RIZZO: *Vacuum magnetic linear birefringence using pulsed fields: status of the BMV experiment*. The European Physical Journal D, 68(1), Jan 2014.
- [47] ZAVATTINI, G., F. DELLA VALLE, A. EJLLI und G. RUOSO: *A polarisation modulation scheme for measuring vacuum magnetic birefringence with static fields*. The European Physical Journal C, 76(5), may 2016.
- [48] HEINZL, T., B. LIESFELD, K. AMTHOR, H. SCHWOERER, R. SAUERBREY und A. WIPF: *On the observation of vacuum birefringence*. Optics Communications, 267(2):318–321, Nov 2006.
- [49] DI PIAZZA, A., K. Z. HATSAGORTSYAN und C. H. KEITEL: *Light Diffraction by a Strong Standing Electromagnetic Wave*. Physical Review Letters, 97(8), aug 2006.
- [50] DINU, V., T. HEINZL, A. ILDERTON, M. MARKLUND und G. TORGRIMSSON: *Vacuum refractive indices and helicity flip in strong-field QED*. Physical Review D, 89(12), jun 2014.
- [51] ILDERTON, A. und M. MARKLUND: *Prospects for studying vacuum polarisation using dipole and synchrotron radiation*. Journal of Plasma Physics, 82(02), mar 2016.
- [52] KING, B. und N. ELKINA: *Vacuum birefringence in high-energy laser-electron collisions*.
- [53] *HIBEF website*: <http://www.hzdr.de/db/Cms?pNid=3214&pOid=35325>.
- [54] *XFEL Website*. <http://www.xfel.eu>.
- [55] KARBSTEIN, F., H. GIES, M. REUTER und M. ZEPF: *Vacuum birefringence in strong inhomogeneous electromagnetic fields*. Physical Review D, 92(7), Okt 2015.
- [56] KARBSTEIN, F. und C. SUNDQVIST: *Probing vacuum birefringence using x-ray free electron and optical high-intensity lasers*. Physical Review D, 94(1), Jul 2016.
- [57] SCHLENVOIGT, H., T. HEINZL, U. SCHRAMM, T. E. COWAN und R. SAUERBREY: *Detecting vacuum birefringence with x-ray free electron lasers and high-power optical lasers: a feasibility study*. Physica Scripta, 91(2):023010, jan 2016.
- [58] BROWN, L. S.: *Quantum Field Theory*. CAMBRIDGE UNIV PR, 2001.
- [59] SCHWARTZ, M. D.: *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Pr., 2014.
- [60] KARBSTEIN, F. und R. SHAISULTANOV: *Stimulated photon emission from the vacuum*. Physical Review D, 91(11), Jun 2015.
- [61] KARBSTEIN, F.: *Physik des Quantenvakuums in starken Feldern*. Vorlesungsskript, 2015. Friedrich Schiller Universität Jena.
- [62] FURRY, W. H.: *On Fluctuation Phenomena in the Passage of High Energy Electrons through Lead*. Physical Review, 52(6):569–581, Sep 1937.
- [63] EICHLER, H. J. und J. EICHLER: *Laser*. Springer Berlin Heidelberg, 2010.

- [64] ZHERLITSYN, S., B. WUSTMANN, T. HERMANNSDÖRFER und J. WOSNITZA: *Status of the Pulsed-Magnet-Development at the Dresden High Magnetic Field Laboratory*. [www.hzdr.de/db/Cms?pNid=2686](http://www.hzdr.de/db/Cms?pNid=2686).
- [65] KARBSTEIN, F.: *Vacuum Birefringence as a Vacuum Emission Process*.
- [66] KARBSTEIN, F. und R. SHAISULTANOV: *Photon propagation in slowly varying inhomogeneous electromagnetic fields*. *Physical Review D*, 91(8), Apr 2015.
- [67] MARX, B., I. USCHMANN, S. HÖFER, R. LÖTZSCH, O. WEHRHAN, E. FÖRSTER, M. KALUZA, T. STÖHLKER, H. GIES, C. DETLEFS, T. ROTH, J. HÄRTWIG und G.G. PAULUS: *Determination of high-purity polarization state of X-rays*. *Optics Communications*, 284(4):915 – 918, 2011.
- [68] MARX, B., K. S. SCHULZE, I. USCHMANN, T. KÄMPFER, R. LÖTZSCH, O. WEHRHAN, W. WAGNER, C. DETLEFS, T. ROTH, J. HÄRTWIG, E. FÖRSTER, T. STÖHLKER und G. G. PAULUS: *High-Precision X-Ray Polarimetry*. *Physical Review Letters*, 110(25), jun 2013.
- [69] BREZIN, E. und C. ITZYKSON: *Pair Production in Vacuum by an Alternating Field*. *Phys. Rev. D*, 2:1191–1199, Oct 1970.

# Danksagung

Ohne die Hilfe und Unterstützung verschiedener Personen wäre diese Arbeit in der vorliegenden Form nicht zustande gekommen. An dieser Stelle möchte ich mich daher bei einigen von ihnen bedanken, die in besonderer Weise beteiligt waren.

Auf akademischer Ebene gebührt mein Dank Professor Holger Gies, der hiermit bereits meine zweite Abschlussarbeit meines Studiums betreute und begutachtete. Auch wenn nur selten in Anspruch genommen, konnte ich mir sicher sein, dass ich bei Fragen oder Problemen in ihm stets einen Ansprechpartner hatte. Ein großer Dank gilt auch Dr. Felix Karbstein. Diesem verdanke ich zum einen das Thema der Arbeit, das mich gleichermaßen fasziniert wie gefordert hat, und zum anderen gab er mir immer wieder Anregungen und Hilfestellungen zu dessen Bearbeitung. Weiterhin möchte ich mich bei Maximilian Kölsch und Florian Wittkämper für das Korrekturlesen der Arbeit bedanken.

Auf persönlicher Ebene möchte ich meiner Familie danken: Meinem Vater für die stete Unterstützung und dafür, dass er mich, wenn auch nicht bewusst, zum Studium der Physik brachte, meiner Mutter für den bedingungslosen Rückhalt in allen Lebenslagen, und meiner Schwester dafür, dass sie mir zeigt, dass man auch andere Wege gehen kann, wofür ich sie sehr bewundere. Ein Dank geht insbesondere auch an Maximilian Kölsch, dafür dass er immer für mich da war. Obwohl an dieser Stelle etwas ungewöhnlich, möchte ich mich auch bei meiner Rugby-Mannschaft vom USV Jena bedanken, die zu einem wichtigen Teil meines Lebens geworden ist.



# Eigenständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

---

Jena, 15. Mai 2017

---

Chantal Sundqvist

---

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Masterarbeit für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur Verfügung zu stellen.

---

Jena, 15. Mai 2017

---

Chantal Sundqvist