5.7 Das Noether-Theorem

Die vorhergehenden Überlegungen und Beispiele zeigen einen Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen. Einen allgemeinen solchen Zusammenhang stellt das Noether-Theorem her.

Wir sprechen von einer Symmetrie oder Invarianz, wenn eine Transformation der (verallgemeinerten) Koordinaten oder/und der Zeit die Bewegungsgleichungen invariant lassen. Folglich sind auch die Lösungen der Bewegungsgleichungen und damit die physikalischen Observablen invariant.

Im Folgenden betrachten wir infinitesimale Transformationen der Koordinaten

$$q_i \to q_i' = q_i + \alpha\, \tilde{q}_i(t, q, \dot{q})$$

$$(5.98)$$

und/oder der Zeit

$$t \to t' = t + \alpha\, \tilde{t}(t, q, \dot{q}) \,,$$

wobei α ein kontinuierlicher infinitesimaler Parameter ist. Nach dem Hamiltonschen Prinzip bleiben die Bewegungsgleichungen invariant, wenn die Wirkung invariant bleibt. Tatsächlich genügt schon eine schwächere Forderung: lediglich die Extremalpunkte der Wirkung müssen invariant bleiben. Letzteres ist insbesondere erfüllt, wenn die Wirkung sich unter (5.98) um eine

Konstante ändert:

$$S \to S' = S + \alpha \cdot \text{const.} \qquad (5.99)$$

Auf dem Niveau der Lagrange-Funktion entspricht dies einer Änderung um eine totale Ableitung:

$$S' = \int_{t_0'}^{t_1'} dt'\, L(q', \dot{q}'; t') = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(q, \dot{q}; t) + \alpha \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{df}{dt} \qquad (5.100)$$
$$= S + \alpha \cdot \text{const.}$$

mit einer Funktion f, die von der Zeit und den Koordinaten q abhängen darf. Da bei der Ableitung der Euler-Lagrange-Gleichung die Randpunkte $q(t_0)$ und $q(t_1)$ nicht mitvariiert werden, trägt $f(q, t)$ nicht zu den Bewegungsgleichungen bei. Mit der Variablensubstitution $t' \to t$ lässt sich die linke Seite von (5.100) auch schreiben als

$$\int_{t_0'}^{t_1'} dt'\, L(q', \dot{q}'; t') = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \frac{dt'}{dt}\, L(q', \dot{q}', t') \,. \qquad (5.101)$$

Da die Wahl der Zeitpunkte t_0 und t_1 für die Ableitung der Bewegungsgleichung beliebig sind, folgt aus (5.100) mit (5.101) für die Integranden:

$$\alpha \frac{df}{dt} = L(q', \dot{q}'; t') \frac{dt'}{dt} - L(q, \dot{q}; t) \,. \qquad (5.102)$$

Nun entwickeln wir die transformierte Lagrange-Funktion um $\alpha = 0$:

$$L(q', \dot{q}'; t') \frac{dt'}{dt} = L(q, \dot{q}; t) + \alpha \frac{d}{d\alpha} \left[L(q', \dot{q}'; t') \frac{dt'}{dt} \right]_{\alpha=0} + O(\alpha^2)$$

(5.103)

Die Invarianzbedingung (5.100) an die Wirkung lautet somit

$$\frac{df}{dt} \overset{(5.100)}{\underset{\substack{(5.102)\\(5.103)}}{=}} \frac{d}{d\alpha} \left[L(q', \dot{q}'; t') \frac{dt'}{dt} \right]_{\alpha=0} \qquad (5.104)$$

mit f beliebig. Praktisch bedeutet dies, dass man für ein gegebenes System, d.h. gegebenes L, eine Transformation (5.98) ausführt und damit eine rechte Seite von (5.104) erhält. Kann man diese Seite als totale Ableitung $\frac{df}{dt}$ schreiben, dann ist die gewählte Transformation eine Symmetrie des Systems.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass im Fall einer solchen Symmetrie eine Erhaltungsgröße existiert. Wir benötigen dazu, vgl. (5.98)

$$\dot{q}_i' = \dot{q}_i + \alpha \dot{\tilde{q}}_i \;, \quad \frac{dt'}{dt} \equiv \dot{t}' = 1 + \alpha \dot{\tilde{t}} \;, \qquad (5.105)$$

woraus folgt

$$\frac{dq'_i}{dt'} = \frac{dt}{dt'}\,\dot{q}'_i = \left(\dot{t}'\right)^{-1}\dot{q}'_i = \frac{\dot{q}_i + \alpha\dot{\tilde{q}}_i}{1+\alpha\dot{\tilde{t}}}$$

$$= \dot{q}_i + \alpha\dot{\tilde{q}}_i - \alpha\,\dot{q}_i\dot{\tilde{t}} + \mathcal{O}(\alpha^2)\,. \qquad (5.106)$$

Zur Berechnung von (5.104), rechte Seite, benötigen wir nur die Terme bis zur ersten Ordnung in α, d.h.

$$\frac{df}{dt} \overset{(5.104)}{=} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \underbrace{\left.\frac{dq'_i}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}}_{=\tilde{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\left.\frac{d\left(\frac{dq'_i}{dt'}\right)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}}_{=\dot{\tilde{q}}_i - \dot{q}_i\dot{\tilde{t}}} + \frac{\partial L}{\partial t} \underbrace{\left.\frac{dt'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}}_{=\tilde{t}} + L \underbrace{\left.\frac{d\dot{t}'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}}_{=\dot{\tilde{t}}} \right]$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\tilde{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\tilde{q}}_i \right) + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right)\dot{\tilde{t}} + \frac{\partial L}{\partial t}\tilde{t}$$

wobei hier $L = L(q_i, \dot{q}_i; t)$. (5.107)

Mit der Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ gilt

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\tilde{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\tilde{q}}_i \right) + \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i \right)\dot{\tilde{t}} + \frac{\partial L}{\partial t}\tilde{t}$$

(5.108)

Mit

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \Big) + \frac{\partial L}{dt}$$

$$= \sum_i \Big(\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \Big) + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i \Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q}_i \Big) + \frac{\partial L}{\partial t} \qquad (5.109)$$

und somit

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \Big(L - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) \qquad (5.110)$$

folgt aus (5.108)

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} \Big[\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tilde{q}_i + \Big(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Big) \tilde{t} \Big] \qquad (5.111)$$

Damit erhalten wir die wichtige Aussage, dass zu jeder Symmetrie der Wirkung, d.h. (5.99) oder (5.100) oder (5.104), unter der Transformation (5.98) die Größe

$$J(q, \dot{q}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tilde{q}_i + \Big(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \Big) \tilde{t} - f \qquad (5.112)$$

zeitlich erhalten ist, wenn $q_i(t)$ die Bewegungsgleichung erfüllt. Zu jeder kontinuierlichen Transformation (5.98) die einer Symmetrie entspricht, gehört somit eine Erhaltungsgröße.