5.4 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Wir haben bereits in Abschnitt 4.2 die Methode der Lagrange-Multiplikatoren kennengelernt, um Variationsrechnung mit Zwangsbedingungen behandeln zu können.

Gegeben eine Zwangsbedingung der Form (holonom)

$$g_j(q_i,t) = 0 \quad , \; j=1..m \, , \; i=1..n \qquad (5.38)$$

und ein dynamisches System mit Lagrange-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$. (NB: Wir verwenden hier die Schreibweise generalisierter Koordinaten q_i, um anzudeuten, dass es sich nicht notwendigerweise um Ortskoordinaten handeln muss. Dennoch lassen wir zu, dass die q_i noch über die Zwangsbedingung (5.38) z.T. noch miteinander verknüpft sein können, so dass nicht alle q_i unabhängig sein müssen.)

Nach 4.2 erhalten wir als notwendige Bedingung für ein Extremum der Wirkung die „Lagrange-Gleichungen 1. Art"

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_j \lambda_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial q_i} = 0 \, . \qquad (5.39)$$

(5.38) und (5.39) ergeben zusammen mit n Bestimmungsgleichungen für $\underset{\substack{\uparrow \\ \lambda_j(t)}}{m} + \underset{\substack{\uparrow \\ q_i(t)}}{n}$ unbekannte Funktionen.

Offensichtlich ist in der Praxis die Verwendung der Lagrange-Gleichungen 2. Art, bei der die Zwangsbedingungen aufgelöst werden und das Problem unmittelbar durch generalisierte Koordinaten ausgedrückt wird, einfacher, da weniger Differentialgleichungen zu lösen sind.

Der Vorteil der Lagrange-Gleichungen 1. Art ist, dass sie eine Bestimmung der Lagrange-Multiplikatoren zulässt, die die Bedeutung von Zwangskräften haben.

Beispiel: hangabwärts rollender Zylinder (Version 2)

Wir betrachten erneut die Lagrangefunktion (5.32)

$$L = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - Mg(l-y)\sin\alpha\,, \tag{5.40}$$

mit der Zwangsbedingung

$$g(y,\theta) = y - R\theta = 0 \tag{5.41}$$

Aus den Lagrange-Gleichungen 1. Art,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.42}$$

folgt $\quad (I = \frac{1}{2} M R^2)$

$$\left.\begin{aligned} Mg \sin\alpha - M\ddot{y} + \lambda &= 0 \qquad (a) \\ -\frac{1}{2} M R^2 \ddot{\theta} - \lambda R &= 0 \qquad (b) \end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

Zusammen mit der Zwangsbedingung (5.41) ergibt sich ein auflösbares Gleichungssystem:

$$y = R\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{y}}{R} \tag{5.44}$$

Aus (5.43(b)) folgt damit

$$\lambda = -\frac{1}{2} M \ddot{y} \tag{5.45}$$

Einsetzen in (5.43(a)) führt auf das Resultat (5.36)

$$\ddot{y} = \frac{2}{3} g \sin\alpha . \tag{5.46}$$

Damit ergibt sich der Lagrange-Multiplikator zu

$$\lambda = -\frac{1}{3} M g \sin\alpha \tag{5.47}$$

Im Vergleich zum reibungsfreien Rutschen $\ddot{y} \overset{(5.37)}{=} g \sin\alpha$ entspricht (5.47) der Kraft, die dem Zylinder bei der Abwärtsbewegung entgegenwirkt, um auf die reduzierte Beschleunigung (5.46) zu führen.

Den Zwangsbedingungen entsprechen somit Zwangskräfte, die mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren berechenbar sind.

5.5 Äquivalenz von Lagrange- und Newton-Gleichungen

Bislang haben wir anhand von Beispielen verdeutlicht, dass die Newtonschen Axiome und das Hamiltonsche Prinzip die gleiche Dynamik beschreiben. Die Äquivalenz lässt sich auch direkt nachweisen. Wir beschränken uns im Folgenden auf konservative Kräfte, die die Bewegung eines Massepunkts beeinflussen. Die Lagrange-Gleichung für Ortskoordinaten lautet dann

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0 \tag{5.48}$$

bzw. mit $L = T - U$

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad . \qquad (5.49)$$

Da für die genannten Voraussetzungen

$$T = T(\dot{x}_i) \quad , \quad U = U(x_i) \qquad (5.50)$$

gilt, folgt

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \quad . \qquad (5.51)$$

Die linke Seite ist identisch mit der Kraft,

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i \quad , \qquad (5.52)$$

während für die rechte Seite folgt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2} m \dot{x}_j^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{3} m \dot{x}_j \delta_{ij}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i) = \dot{p}_i , \qquad (5.53)$$

und somit

$$\underline{\underline{F_i = \dot{p}_i}} \quad . \qquad (5.54)$$

Falls wir also rechtwinklige (kartesische) Koordinaten wählen, ist die Lagrange-Gleichung für eine Komponente x_i identisch mit der Newton-Gleichung für eine entsprechende Kraftkomponente F_i.

Wir wollen im Folgenden den umgekehrten Weg beschreiben und von der Newton-Gleichung in x_i-Koordinaten zur Lagrange-Gleichung in generalisierten Koordinaten übergehen. Wir beginnen mit dem allgemeinen Zusammenhang

$$x_i = x_i(q_j, t), \tag{5.55}$$

aus dem für die Geschwindigkeit

$$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{5.56}$$

folgt, und damit

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \tag{5.57}$$

Wir definieren nun den verallgemeinerten (bzw. kanonischen) Impuls, der mit der verallgemeinerten Koordinate q_j verknüpft ist, über

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \overset{\substack{\text{konserv.}\\ \text{Kräfte}}}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}. \tag{5.58}$$

z.B. für ein Teilchen in einer Ebene gilt in Polarkoordinaten

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right), \tag{5.59}$$

so dass wir die verallgemeinerten Impulse

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \qquad \text{(Radialimpuls)}$$
$$p_\theta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \qquad \text{(Drehimpuls)} \qquad (5.60)$$

erhalten. Wir definieren nun verallgemeinerte Kräfte mit Hilfe der "virtuellen" Arbeit δW, die von einer infinitesimalen Variation δx_i eines Pfades verrichtet wird,

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha$

$$=: \sum_j Q_j \delta q_j \, , \qquad (5.61)$$

mit der verallgemeinerten Kraft

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \, , \qquad (5.62)$$

die mit der Koordinate q_j verknüpft ist (wenn z.B q_j ein Winkel ist, ist Q_j ein Drehmoment). Für ein konservatives System (im Sinne der verallgemeinerten Koordinaten), ist Q_j durch ein Potential ableitbar

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (5.63)$$

Nun betrachten wir

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2\right) = \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \overset{(5.57)}{=} \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$(5.64)$$

Für die Zeitableitung erhalten wir folglich

$$\dot{p}_j = \sum_i \Big(\underbrace{m \ddot{x}_i}_{=F_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \Big) . \tag{5.65}$$

Der letzte Term bestimmt sich zu $\quad (x_i = x_i(q_j, t))$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_k \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} , \tag{5.66}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{p}_j = \underbrace{\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}}_{\overset{(5.62)}{=} Q_j} + \sum_{i,k} m \dot{x}_i \dot{q}_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} + \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} \tag{5.67}$$

Die beiden letzten Terme folgen ebenso aus

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \overset{(5.56)}{=} \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)$$

$$= \sum_{ik} m \dot{x}_i \dot{q}_k \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k} + \sum_i m \dot{x}_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t} . \tag{5.68}$$

Damit folgt für die Zeitentwicklung des kanonischen Impulses

$$\dot{p}_j = Q_j + \frac{\partial T}{\partial q_j} \tag{5.69}$$

Mit (5.63) und (5.58) ergibt sich $(L = T - U)$,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0} \tag{5.70}$$

was die Äquivalenz beweist.

5.6 Erhaltungssätze im Lagrange-Formalismus

Die Erhaltungssätze der Newtonschen Mechanik spiegeln sich ebenfalls in den Strukturen des Lagrange-Formalismus wieder.

5.6.1 Energieerhaltung

In unseren Überlegungen zum 1. Newtonschen Gesetz haben wir über die Eigenschaft nachgedacht, dass die Zeit homogen in Inertialsystemen ist. D.h. geschlossene Systeme sind invariant unter Zeittranslationen $t \to t + t_a$, $t_a = \text{const.}$. Im Lagrange-Formalismus lässt sich diese Homogenität in der Zeit formalisieren durch

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad (5.71)$$

d.h. ein geschlossenes (mit keiner "Außenwelt" wechselwirkendes) dynamisches System kann nicht explizit von der Zeit abhängen. Andersherum, kann man (5.71) als Definition von geschlossenen Systemen betrachten (z.B. das math. Pendel an der rotierenden Scheibe ist nicht geschlossen, da es (5.71) nicht erfüllt; physikalisch gesprochen muss ja die Scheibe irgendwo aufgehängt sein.)

Mit $L = L(q, \dot{q})$ folgt aus (5.71)

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \,. \tag{5.72}$$

Einsetzen von $\frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ auf der rechten Seite liefert

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \tag{5.73}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) , \tag{5.74}$$

woraus folgt

$$\frac{d}{dt} \left(L - \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \,. \tag{5.75}$$

Damit haben wir eine zeitliche Erhaltungsgröße, die wir mit $-H$ bezeichnen, gefunden:

$$H := \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \text{const} \tag{5.76}$$

Mit der Definition des kanonischen Impulse in (5.58), $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, ergibt sich ebenfalls

$$H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L \,. \tag{5.77}$$

Die Größe H eines Systems, die sich allgemein über (5.75) & (5.77) definieren lässt, heißt <u>Hamilton</u>-Funktion. Für geschlossene Systeme ist sie mit (5.71) eine zeitliche Erhaltungsgröße.

Um ihre physikalische Bedeutung näher zu beleuchten, spezialisieren wir uns auf Systeme, die folgende Bedingungen erfüllen:

1) Wir betrachten Systeme, deren generalisierte Koordinaten q_j so gewählt werden können, dass die Transformation auf rechtwinklige Koordinaten nicht von der Zeit abhängt

$$x_i = x_i(q_j)$$

<u>und</u> deren kinetische Energie geschrieben werden kann als $T = \sum_{ij} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ in diesen Koordinaten (mit Konstanten a_{ij}, z.B. $a_{ij} = \frac{1}{2} m \delta_{ij}$).

Für den Fall gilt

$$\underline{\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}} = 2 \sum_{ijk} \dot{q}_j a_{ik} \dot{q}_i \delta_{jk}$$

$$= 2 \sum_{ij} \dot{q}_i a_{jk} \dot{q}_k = \underline{\underline{2T}}. \quad (5.78)$$

2) Die potentielle Energie des Systems hängt nicht von den Geschwindigkeiten ab.

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0 \quad (5.79)$$

Unter diesen Bedingungen folgt aus (5.76)

$$\underline{\underline{H}} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_j \dot{q}_j \Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}}_{\overset{2)}{=}0} \Big) - (T - U)$$

$$= \underbrace{\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}}_{\overset{1)}{=} 2T} - T + U$$

$$= \underline{\underline{T + U}} = E = \text{const.} \qquad (5.80)$$

Unter den genannten Bedingungen entspricht die Hamilton-Funktion der gesamten Energie des Systems, und die zeitliche Erhaltung von H entspricht dem Energieerhaltungssatz.

Die Frage, ob "H=E = const" ist, hat (zwar oft aber) im Allgemeinen keine einfache Antwort. So kann z.B. die Gesamtenergie eines Systems erhalten sein, aber durch die Wahl von mitbewegten Koordinaten q_j $x_i(q_j, t)$ die Äquivalenz von H und E dennoch nicht gegeben sein.

5.6.2 Zyklische Koordinaten

Ist für ein gegebenes dynamisches System $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ die Lagrange-Funktion unabhängig von einer bestimmten verallgemeinerten Koordinate q_k ($k = \text{const}$), so folgt unmittelbar aus der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \overset{L \text{ unabh. von } q_k}{=} 0 \,. \qquad (5.81)$$

D.h. der zu q_k gehörige kanonische Impuls $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ist eine Erhaltungsgröße

$$\frac{d}{dt} p_k = 0 \,. \qquad (5.82)$$

Die korrespondierende Koordinate q_k heißt <u>Zyklische Koordinate</u>.

Ist z.B. q_k gleich einer der rechtwinkligen Ortsraum Koordinaten x_k, dann bedeutet

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0 \,, \qquad (5.83)$$

dass sich die Lagrange-Funktion entlang der x_k-

Richtung nicht ändert. Im Falle rein Geschwindigkeits-abhängiger kinetischer Energien $T = T(\dot{x}_i)$ entspricht (5.83)

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_k = -\frac{\partial U}{\partial x_k} = 0 \,, \qquad (5.84)$$

d.h. die Kraft verschwindet in x_k-Richtung.

Für den Fall eines Massepunktes

$$T = \sum_j \frac{1}{2} m \dot{x}_j^2 \qquad (5.85)$$

entspricht der kanonische Impuls mit

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial (T(\dot{x}_j) - U(x_j))}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k \,, \qquad (5.86)$$

so dass

$$\frac{d}{dt} p_k \overset{(5.82)}{=} 0 \qquad (5.87)$$

genau der Impulserhaltung der Newtonschen Dynamik entspricht.

Die hier gemachte Beobachtung geht aber weit über die (in der Newtonschen Formulierung nahezu triviale) Impulserhaltung hinaus: hat ein dynamisches System eine zyklische Koordinate q_k, d.h.

$$\frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i; t)}{\partial q_k} = 0 \quad , \qquad (5.88)$$

dann ist das System offensichtlich invariant unter Verschiebungen in q_k-Richtung,

$$L(q_1, \ldots, q_k + \delta q_k, \ldots \dot{q}_i; t) = L(q_1, \ldots, q_k, \ldots, \dot{q}_i; t) \qquad (5.89)$$

(da L offensichtlich nicht von (5.88) abhängt).
Aus dieser Invarianz folgt aus den Lagrange-Gleichungen eine Erhaltungsgröße, nämlich der kanonische Impuls

$$\frac{d}{dt} p_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad . \qquad (5.90)$$

Der Zusammenhang zwischen Invarianzen der Wirkung bzw. der Lagrange-Funktion, zyklischen Koordinaten und Erhaltungsgrößen ist offensichtlich unabhängig von der Natur der zyklischen Koordinate.
Betrachten wir dazu Beispiel einer Winkelkoordinate:

Ein Massepunkt im einem Zentralkraftpotential hat die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(|\vec{r}|) , \qquad (5.91)$$

wobei die potentielle Energie nur vom Abstand $|\vec{r}|$ vom Zentrum abhängt. In Zylinderkoordinaten (r, θ, z) ist der Abstand $|\vec{r}| = \sqrt{r^2+z^2}$ unabhängig von θ. In Zylinderkoordinaten lautet die Geschwindigkeit (siehe Übungen)

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\, \hat{e}_r + r \dot{\theta}\, \hat{e}_\theta + \dot{z}\, \hat{e}_z , \qquad (5.92)$$

so dass die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 , \right) \qquad (5.93)$$

zwar von r, nicht aber von θ abhängt.

Die Lagrange-Funktion ist somit unabhängig von der zyklischen Koordinate θ, $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$. Aus (5.90) folgt, dass

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \qquad (5.94)$$

eine Erhaltungsgröße ist, $\frac{d}{dt} p_\theta = 0$.

Mit

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = (r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z) \times (\dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{z}\,\hat{e}_z)$$

$$= r^2 \dot{\theta}\, \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta + r\dot{z}\, \hat{e}_r \times \hat{e}_z + z\dot{r}\, \hat{e}_z \times \hat{e}_r + zr\dot{\theta}\, \hat{e}_z \times \hat{e}_\theta$$

$$= r^2 \dot{\theta}\, \hat{e}_z + (z\dot{r} - r\dot{z})\, \hat{e}_\theta - zr\dot{\theta}\, \hat{e}_r \qquad (5.95)$$

folgt, dass

$$L_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z = m r^2 \dot{\theta} \overset{(5.94)}{\equiv} p_\theta \,. \qquad (5.96)$$

Die entsprechende Erhaltungsgröße ist also die z-Komponente des Drehimpulses. Diese Schlussfolgerung hat auch Bestand für Potentiale, die von r und z abhängen $U(r,z)$. Für Zentralkraftpotentiale ist die Wahl der z-Achse tatsächlich völlig beliebig, so dass mit (5.96) folgt, dass $\vec{L} \cdot \hat{e}_z = \text{const}$ für jedes beliebige $\hat{e}_z$ eine Erhaltungsgröße ist, und somit

$$\vec{L} = \text{const} \qquad (5.97)$$

eine Erhaltungsgröße ist.