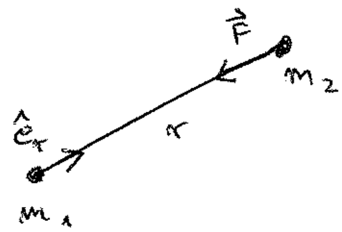
3. Newtonsche Gravitation

Eine der fundamentalen Kräfte der Natur ist die Gravitationskraft. In der klassischen Mechanik wird dieses durch das Newtonsche Gravitationsgesetz beschrieben:

> Jede Punktmasse zieht jede andere Punktmasse im Universum mit einer Kraft an, die proportional zum Produkt der Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der Massepunkte ist

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r \,, \tag{3.1}$$



wobei r der Abstand zwischen m_1 und m_2 ist und $\hat{e}_r$ den Einheitsvektor von m_1 nach m_2 bezeichnet. (3.1) bezeichnet also die Kraft, mit der m_2 zu m_1 hingezogen wird. Die Kraft, mit der m_1 zu m_2 hingezogen wird, ergibt sich nach dem 3. Newtonschen Gesetz. Die Proportionalitäts -

konstante G ist eine fundamentale Naturkonstante, die erstmals 1798 von Henry Cavendish mittels einer Torsionswaage vermessen wurde. Ihr bester Messwert ist gegenwärtig

$$G = 6{,}67428(67) \cdot 10^{-11} \, \frac{m^3}{kg\, s^2} \, . \tag{3.2}$$

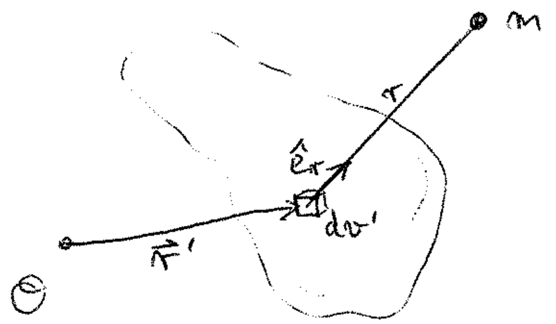
Die Newtonsche Gravitationskonstante ist damit bei weitem noch nicht so genau vermessen, wie andere Naturkonstanten (z.B. e, c, $\hbar$, ...). Dies mag daran liegen dass die Gravitation verglichen mit anderen Kräften so "schwach" ist.

Die Form des Gesetzes (3.1) gilt streng genommen nur für Punktteilchen. Für den Fall, dass z.B. $m_1 \equiv M$ eine ausgedehnte Massenverteilung besitzt, die durch eine <u>Massendichte</u> $\varrho(\vec{r}\,')$ beschrieben wird

$$M = \int_V dv' \, \varrho(\vec{r}\,') \, , \tag{3.3}$$

gilt für die Kraft auf $m_2 \equiv m$ das Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = - G m \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,') \, \hat{e}_r}{r^2} \, dv' \qquad (3.4)$$



Zu beachten ist hierbei, dass $\hat{e}_r$ auch von $\vec{r}\,'$ abhängt.

Die der klass. Gravitation zugrundeliegende Annahme ist hierbei, dass die Gravitationskräfte der einzelnen Volumina dv' auf m sich linear aufaddieren. (NB: tatsächlich ist die Allgemeine Relativitätstheorie als fundamentale Beschreibung der Gravitation keine lineare Theorie mehr.)

Ist auch der zweite Körper $m_2 \equiv m$ ausgedehnt, wird eine weitere Volumenintegration über die entsprechende Massendichte benötigt.

Da die Kraft $\vec{F}$ auf einen Massepunkt m von m abhängt, ist es zweckmäßig ein Vektorfeld $\vec{g}$ für die von einer Masseverteilung $\rho(\vec{r}')$ einzuführen, dass von der (Test-)masse m unabhängig ist und inherent nur die Eigenschaften der Masseverteilung $\rho(\vec{r}')$ beschreibt:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2} \hat{e}_r \, dv' \,. \tag{3.5}$$

$\vec{g}$ hat die Bedeutung einer Beschleunigung. Nahe der Erdoberfläche entspricht $\vec{g}$ in der Tat der Erdbeschleunigung, vgl. (2.10).

Aus den Definitionen für $\vec{F}$, bzw. $\vec{g}$, lässt sich direkt nachrechnen, dass

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla} \times \vec{g} = 0 \tag{3.6}$$

Dies bedeutet, dass $\vec{g}$ durch eine skalare Funktion dargestellt werden kann,

$$\vec{g} = -\vec{\nabla} \Phi \,, \tag{3.7}$$

das sogenannte <u>Gravitationspotential</u>.

Für Punktmassen M hat Φ die Form

$$\Phi = -G\frac{M}{r}\,, \tag{3.8}$$

(vgl. Aufgabe (2) der Übungen), wie sich leicht nachrechnen lässt. Ähnlich wie bei der potentiellen Energie sind konstante Verschiebungen des Potentials physikalisch irrelevant. Die Konstante in (3.8) ist implizit so gewählt, dass $\Phi \to 0$ für $r \to \infty$.

Für eine Materieverteilung gilt entsprechend

$$\Phi = -G\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r}\,dv' \tag{3.9}$$

Die physikalische Bedeutung des Gravitationspotentials erschliesst sich bei der Betrachtung der Arbeit, die an einer Test-Einheitsmasse verrichtet werden muss, um das Teilchen um $d\vec{r}$ im einem Gravitationsfeld zu verschieben:

$$dW = -\vec{g}\cdot d\vec{r} = (\vec{\nabla}\Phi)\cdot d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\,dx_i = d\Phi\,. \tag{3.10}$$

Diese Arbeit pro Einheitsmasse entspricht also der Potentialdifferenz an den um $d\vec{r}$ verschobenen Punkten.

I. A. ist nur eine Potential*differenz* von physikalischer Bedeutung. Durch unsere Normierung $\Phi \to 0$ für $r \to \infty$ können wir $\Phi(\vec{x})$ auch als Arbeit interpretieren, die zu verrichten ist, um eine Einheitsmasse aus dem unendlichen zu einem Punkt $\vec{x}$ zu bringen. Da $\Phi < 0$, wird im Gravitationsfeld immer Arbeit "gewonnen".

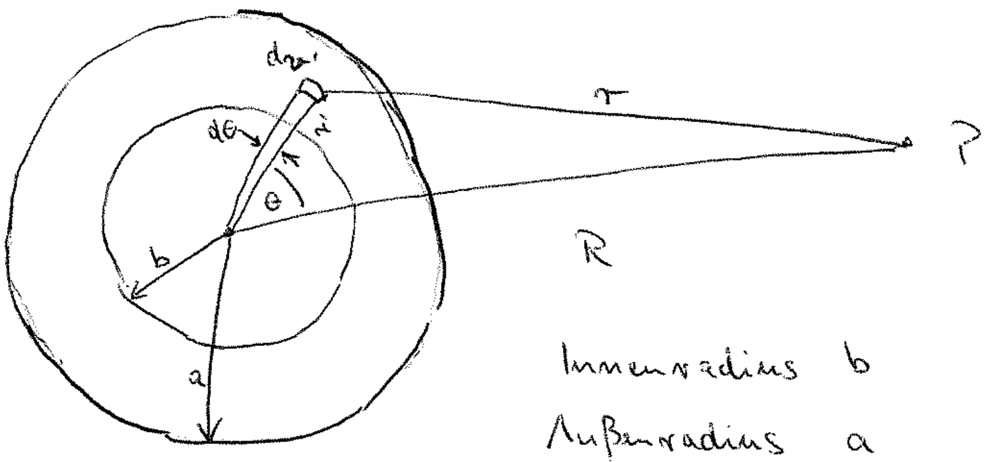
Analoges gilt für die potentielle Energie, die sich direkt aus dem Potential durch Multiplikation mit der Masse (eines Testteilchens) ergibt

$$U = m\,\Phi\,. \tag{3.11}$$

Entsprechend ergibt sich die Kraft gemäß

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U\,. \tag{3.12}$$

Beispiel: Gravitationspotential einer Kugelschale



Innenradius b
Außenradius a

Wir betrachten das Gravitationspotential einer Kugelschale am Punkt P im Abstand R vom Schalenmittelpunkt. Das Problem ist offensichtlich rotationssymmetrisch um die Achse vom Schalenmittelpunkt nach P. Wir benutzen ein Koordinatensystem mit Ursprung im Schalenmittelpunkt, sowie Kugelkoordinaten mit einem Polarwinkel, der von der Achse OP gemessen wird. Die genannte Rotationssymmetrie bedeutet, dass es keine Abhängigkeit vom azimuthal Winkel φ geben kann. Die Massendichte sei homogen,

$$\rho(\vec{r}') = \rho = \text{const}, \tag{3.13}$$

So dass die Gesamtmasse der Kugel gegeben ist durch

$$M = \int_V dv' \varrho = \varrho \underbrace{\int_b^a dr' \, r'^2}_{= \frac{1}{3}(a^3-b^3)} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}_{\overset{u=\cos\theta}{=} \int_{-1}^{1} du \, = 2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}$$

$$= \frac{4}{3} \pi \varrho \, (a^3 - b^3) \quad . \tag{3.14}$$

Das Gravitationspotential folgt aus (3.9):

$$\Phi = -G \int_V \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{r} dv' = -\varrho G \int_b^a r'^2 dr' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r} d\theta \tag{3.15}$$

Nach dem Cosinussatz folgt gemäß Skizze

$$r^2 = r'^2 + R^2 - 2r' R \cos\theta \quad = r^2(\theta) \tag{3.16}$$

Bei festem R folgt für gegebenes r':

$$2r \, dr = -2r' R \, (-\sin\theta) \, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{r} d\theta = \frac{dr}{r' R} \quad . \tag{3.17}$$

Der Integrationsbereich für die Variable r hängt offensichtlich von der Position vom P relativ zur Kugelschale ab. Im Allgemeinen ist der Integrationsbereich beschränkt auf ein Interval $[r_{min}, r_{max}]$:

$$\Phi = -\frac{2\pi \varrho G}{R} \int_b^a r' dr' \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \qquad (3.18)$$

Betrachten wir zunächst den Fall, dass P außerhalb der Kugelschale liegt. Dann gilt

$$r_{min} = R - r' \quad , r_{max} = R + r'$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\Phi(R>a)}} = -\frac{2\pi \varrho G}{R} \int_b^a r' dr' \underbrace{\int_{R-r'}^{R+r'} dr}_{= 2r'}$$

$$= -\frac{4\pi \varrho G}{R} \int_b^a r'^2 dr'$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \frac{\varrho G}{R} (a^3 - b^3) \overset{(3.14)}{\equiv} \underline{\underline{-\frac{GM}{R}}} \qquad (3.19)$$

Es zeigt sich, dass das Gravitationspotential außerhalb der Kugelschale gleich demjenigen eines Massepunktes M ist, der im Schalenmittelpunkt positioniert ist. Dieses Ergebnis lässt sich auf alle sphärisch-symmetrischen

Masseverteilungen verallgemeinern. D.h. um das Gravitationspotential im Außenraum zu berechnen, genügt es, sich die Masse als im Mittelpunkt konzentriert vorzustellen.

Betrachten wir nun den Fall, dass P im Inneren der Kugelschale liegt, $R < b$

$$r_{min} = r' - R \quad , \quad r_{max} = r' + R$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Phi(R<b)}} = -\frac{2\pi \varrho G}{R} \underbrace{\int_b^a r' dr'}_{\frac{1}{2}(a^2-b^2)} \underbrace{\int_{r'-R}^{r'+R} dr}_{= 2R}$$

$$= \underline{\underline{-2\pi \varrho G (a^2 - b^2)}} \quad . \qquad (3.20)$$

Damit ist das Potential unabhängig von R. Es muss also keine Arbeit verrichtet werden, um einen Massepunkt im Inneren der Kugelschale umher zu bewegen. Ein Massepunkt im Inneren ist damit kräftefrei.

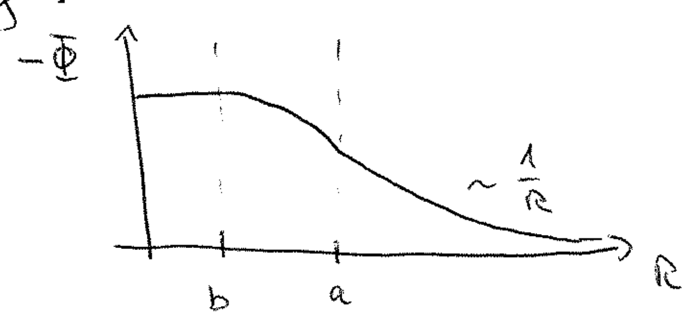
Für den Fall, dass P innerhalb der Kugelschale liegt, d.h. $b < R < a$, können wir uns die Kugelschale als zusammengesetzt aus zwei

Kugelschalen denken. Die innere hat die Radien b und R, die äußere hat die Radien R und a. Das gesamte Potential ergibt sich dann aus der Summe der Potentiale für die innere Schale (Außenraumformel (3.19) $a \to R$) und für die äußere Schale (Innenraumformel (3.20), $b \to R$).

Wir erhalten

$$\Phi(b < R < a) = -4\pi\varrho G\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3R} - \frac{R^2}{6}\right) \qquad (3.21)$$

Damit ist das Potential bei $R = a$ und $R = b$ stetig.

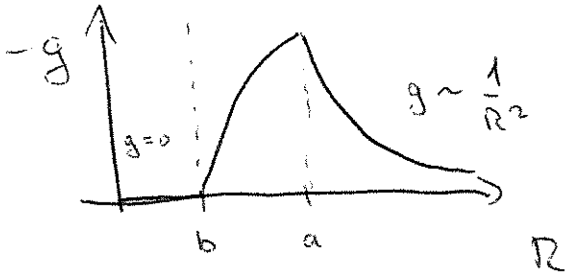


Es ist sogar differenzierbar, so dass die Gravitationsbeschleunigung $g = -\frac{d\Phi}{dR}$ für alle R berechenbar ist.

$$g(R < b) = 0$$

$$g(b < R < a) = \frac{4\pi\varrho G}{3}\left(\frac{b^3}{R^2} - R\right) \qquad (3.22)$$

$$g(R > a) = -\frac{GM}{R^2}$$



$-g$
$g=0$
$g \sim \frac{1}{R^2}$
b
a
R