2.3 Erhaltungssätze

Wichtige Konsequenzen der Newtonschen Gesetze sind eine Reihe von Erhaltungssätzen. Ihre experimentelle Überprüfung liefert dann einen wichtigen Test der Newtonschen Dynamik.

Falls ein Teilchen keine Kraft erfährt, reduziert sich das zweite Newtonsche Gesetz auf

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = 0 \qquad (2.64)$$

D.h. der Gesamtimpuls $\vec{p}$ eines Teilchens ist zeitlich erhalten, wenn die gesamten auf es wirkenden Kräfte verschwinden. Als Vektorgleichung bezieht sich der Erhaltungssatz auf alle Komponenten des Impulses.

Selbst in Anwesenheit von Kräften können Impulskomponenten erhalten sein: Sei $\vec{F}$ eine gegebene Kraft. Falls es einen konstanten Vektor $\vec{s}$ gibt, der auf $\vec{F}$ senkrecht steht,

$$\vec{F}\cdot\vec{s} = 0 ,$$

so folgt

$$\frac{d}{dt}\vec{p}\cdot\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}\cdot\vec{s} = \text{const.} , \qquad (2.65)$$

d.h. die Impulskomponenten senkrecht zur Kraftrichtung sind zeitlich erhalten.

Ein zweiter Erhaltungssatz bezieht sich auf den Drehimpuls eines Teilchens bei Position $\vec{r}$ bezüglich eines Ursprungs $\mathcal{O}$:

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.66}$$

(NB: Der Drehimpuls eines Teilchens ist somit keine rein intrinsische Größe, sondern abhängig von der Wahl des Ursprungs. Der folgende Impulserhaltungssatz bleibt davon unberührt.)

Wir definieren des Weiteren das Drehmoment $\vec{N}$ bezüglich des gleichen Ursprungs durch

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \overset{\text{Newton II.}}{=} \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \tag{2.67}$$

Nun gilt mit $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ für einen Massepunkt:

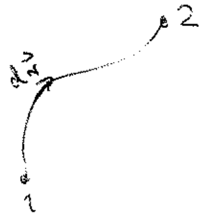
$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{\substack{= m\,\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} \\ = 0}} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{N} \tag{2.68}$$

Damit ist der Drehimpuls eines Teilchens zeitlich erhalten, falls auf es kein Drehmoment wirkt.

Für den nächsten Erhaltungssatz führen wir den Begriff der <u>Arbeit</u> ein. Wirkt eine Kraft $\vec{F}$ auf ein Teilchen, um es aus einem Punkt 1 zu einem Punkt 2 zu bewegen, so wird folgende Arbeit verrichtet

$$W_{21} := \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (2.69)$$



Im Prinzip ist in (2.69) der Weg zu spezifizieren, über den das Teilchen von 1 nach 2 bewegt wird. Wir zeigen nun, dass die Arbeit für einen Massepunkt, der dem 2. Newtonschen Gesetz genügt, wegunabhängig ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt \\ &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v})\, dt = \frac{m}{2} \frac{d}{dt} v^2\, dt = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right) . \end{aligned} \qquad (2.70)$$

Der Integrand in (2.69) ist somit eine totale Ableitung (exaktes Differential).

Damit folgt für die Arbeit

$$W_{21} = \left(\tfrac{1}{2} m v^2\right)\Big|_1^2 = \tfrac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) =: T_2 - T_1 \qquad (2.71)$$

Hier haben wir die kinetische Energie eines Teilchens definiert,

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 . \qquad (2.72)$$

Falls z.B. $W_{21} < 0$ verrichtet das Teilchen Arbeit. Als Folge reduziert sich dessen kinetische Energie. (Wichtig bei der Definition von W_{21} ist, dass $\vec{F}$ die Gesamtkraft auf ein Teilchen bezeichnet.)

Am einfachen Beispielen wird nun intuitiv klar, dass das Konzept von kinetischer Energie alleine nicht ausreicht, um die Fähigkeit eines Teilchens Arbeit zu verrichten zu beschreiben: so kann z.B. ein Wasserteilchen in einem höheren Becken anfänglich in Ruhe sein, d.h. $T_1 = 0$, ein Mühlrad auf seinem Weg in ein tieferes Becken antreiben, und anschließend wieder ruhen, $T_2 = 0$.

Diese "Fähigkeit" eines Teilchens, Arbeit verrichten zu können, lässt sich mit dem Begriff der <u>potentiellen</u> <u>Energie</u> erfassen.

Wir definieren die potentielle Energie eines Teilchens mit Hilfe der Arbeit, die benötigt wird um ein Teilchen vom Punkt 1 nach Punkt 2 zu bewegen <u>ohne</u> dass sich die kinetische Energie ändert:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} =: U_1 - U_2 \qquad (\Delta T = 0) \qquad (2.73)$$

Für $\Delta T = 0$ ist die Arbeit daher zur Differenz der Potentiellen Energie.

Während (2.73) für jede beliebige Kraft eine Potentialdifferenz definiert, lässt sich im Allgemeinen nicht jede Kraft $\vec{F}$ aus einem Potential U herleiten.

Diejenigen Kräfte, für die dies möglich ist, heißen <u>konservative</u> Kräfte. Sie spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Die Gleichung (2.73) lässt sich mit folgendem Ansatz reproduzieren:

Konservative Kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, (2.74)

d.h. konservative Kräfte ergeben sich als Gradientenfelder einer skalaren Funktion $U(\vec{r})$ (oder $U(\vec{r},t)$).
Denn daraus folgt

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 (\vec{\nabla}U)\cdot d\vec{r} = -\int_1^2 \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\, dx_i$$

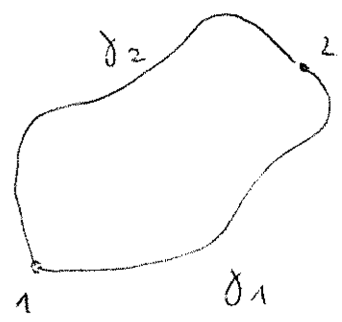
$$= -\int_1^2 dU = U_1 - U_2 \,. \quad \text{(vgl. (2.73))} \qquad (2.75)$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass $\vec{F}$ konservativ ist und durch (2.74) dargestellt werden kann, ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \,. \qquad (2.76)$$

Die Notwendigkeit ergibt sich aus der Identität, dass
$-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0$ (für hinreichend glatte Funktionen U).

Die Bedingung (2.76) gewährleistet, dass in (2.73) eine pfadunabhängige Funktion U gewählt werden kann. Betrachten wir dazu zwei verschiedene Pfade γ_1 und γ_2 von 1 nach 2:



Für den Fall, dass $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ Pfadabhängig ist,

d.h. $\int_{1,\gamma_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{1,\gamma_2}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$, wäre auch die im (2.73)

definierte Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ pfadabhängig, und damit eine eindeutige Definition von $U(x)$ nicht möglich. Umgekehrt definiert (2.73) eine eindeutige Potentialdifferenz, wenn $\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ pfad-unabhängig ist. Zu zeigen ist also

$$0 = \int_{1,\gamma_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{1,\gamma_2}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1,\gamma_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{2,-\gamma_2}^1 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Sigma (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} \qquad (2.77)$$

wobei $(-\gamma_2)$ den Pfad γ_2 mit entgegengesetztem Durchlaufsinn bedeutet, und $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ ein geschlossener Pfad ist. Im letzten Schritt haben wir den Stokesschen Satz verwendet, wobei Σ eine von γ berandete Fläche mit Flächenelement $d\vec{\sigma}$ bezeichnet. Wir sehen, dass mit der Bedingung (2.76) die Pfadunabhängigkeit gegeben ist und damit für konservative Kraftfelder $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ ein Potential z.B. durch

$$U(\vec{x}) = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{mit } \vec{x}: \text{Ortsvektor von Punkt 2} \tag{2.78}$$

gegeben ist. Hierbei haben wir willkürlich $U_1 = 0$ gewählt. Jede andere Wahl mit z.B. $U_1 = U_0 = \text{const}$ wäre ebenso legitim und ergäbe das Potential

$$U(\vec{x}) = U_0 - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \,. \tag{2.79}$$

D.h. die Wahl des Potentialnullpunkts ist irrelevant. Bei der Berechnung der Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ fällt U_0 heraus und bleibt dadurch unbeobachtbar.

Nun definieren wir die Gesamtenergie eines Teilchens als die Summe von kinetischer und potentieller Energie:

$$\underline{E = T + U} \tag{2.80}$$

Die Zeitableitung der Gesamtenergie ist

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \tag{2.81}$$

Nach (2.70) gilt

$$dT = d\left(\tfrac{1}{2} m v^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}\ , \tag{2.82}$$

so dass

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\ . \tag{2.83}$$

Andererseits gilt für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale

$$\frac{d}{dt} U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = (\vec{\nabla} U) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \tag{2.84}$$

Für die zeitliche Änderung der Gesamtenergie erhalten wir damit

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} + (\vec{\nabla} U) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = (\vec{F} + \vec{\nabla} U) \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \qquad (2.85)$$

Für konservative Kraftfelder $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ und für den Fall, dass das Potential nicht explizit von der Zeit abhängt, d.h. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, ist die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße in der Zeit

$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad (2.86)$$

Unter den genannten Voraussetzungen ist die Energieerhaltung eine einfache Konsequenz der Newtonschen Dynamik von Massepunkten. Aber auch jenseits der genannten Voraussetzungen hat sich die Energieerhaltung als nützliches Konzept erwiesen, so dass man ihr im Allgemeinen den Status eines Postulats verleiht. In Fällen von nicht-konservativen Kräften (z.B. der Lorentzkraft auf geladene Teilchen) erreicht man dann die Energieerhaltung, indem man weiteren charakteristischen Größen des Systems (z.B dem elektromagnetischen Feld) ebenfalls eine Energie zuweist und die Energieerhaltung auf das Gesamtsystem ausdehnt.

Die Nützlichkeit des Energiekonzepts wird insbesondere bei qualitativen Betrachtungen deutlich, aus denen ohne explizite Rechnungen wichtige Eigenschaften eines Systems abgeleitet werden können. Als Beispiel betrachten wir einen Massepunkt unter dem Einfluss einer konservativen Kraft mit Potential $U(x)$. Die Gesamtenergie lautet

$$E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 + U(x) . \qquad (2.87)$$

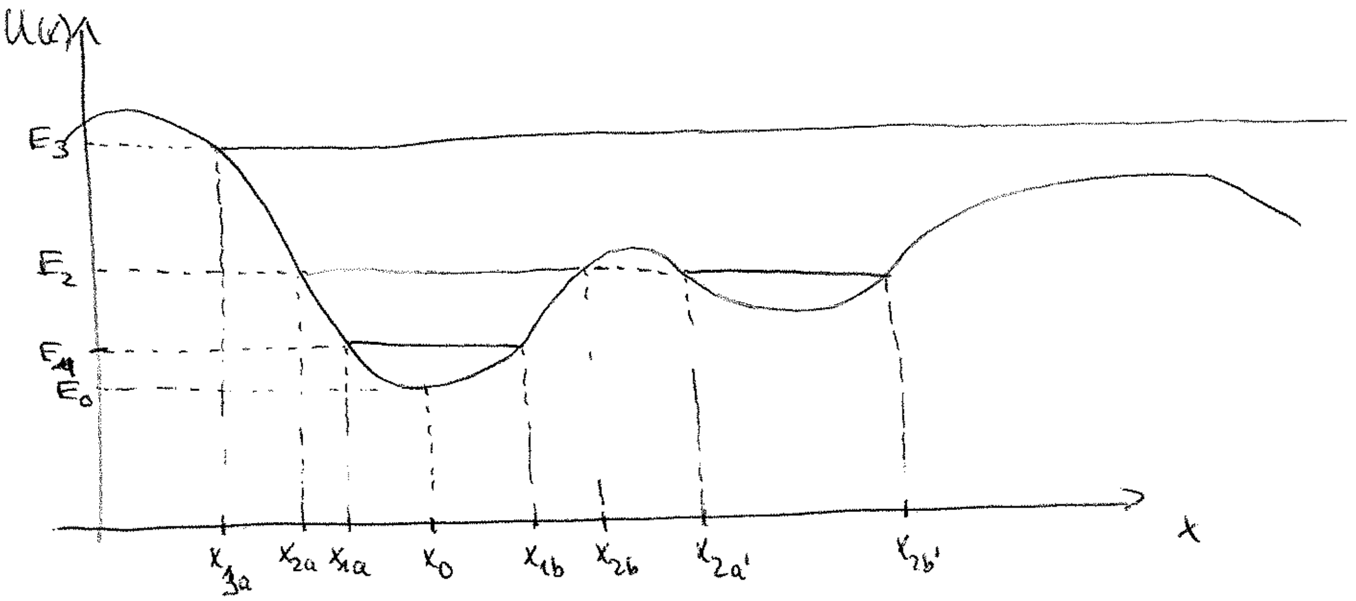
Für die folgende Betrachtung beschränken wir uns der Einfachheit halber auf 1-dimensionale Bewegungen. Aus (2.87) folgt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(x) \right)} . \qquad (2.88)$$

Da aus physikalischen Gründen nur $v \in \mathbb{R}$ sinnvoll ist, ist die Gesamtenergie für jede physikalische Bewegung nach unten beschränkt durch

$$E \geq U(x) \qquad \text{für alle } x \qquad (2.89)$$

Als Beispiel betrachten wir folgende "Potentiallandschaft"



Da die Gesamtenergie erhalten ist, ist sie durch die Anfangsbedingungen bereits festgelegt. Z.B. aus den Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit $x(t_0)$ und $v(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 lässt sich aus (2.87) direkt die Energie ablesen $E = \frac{1}{2} m\, v(t_0)^2 + U(x(t_0)) = \text{const.}$

Für obiges Beispiel ist die gemäß (2.89) minimal zulässige Energie gegeben durch E_0. In diesem Fall ist $E_0 = U(x_0)$. Damit ist die kinetische Energie für alle Zeiten $T=0$; das Teilchen hat immer die Geschwindigkeit

$v=0$ und ruht damit im Gleichgewichtspunkt x_0.

Für größere Energien, z.B. E_1, gibt es in der Regel einen endlichen Ortsbereich $x_{1a} \le x \le x_{1b}$, in dem (7.88) erfüllt ist. An den Umkehrpunkten x_{1a}, x_{1b} gilt $E_1 = U(x_{1a}) = U(x_{1b})$ an denen wiederum die Geschwindigkeit verschwindet $v \overset{(7.88)}{=} 0$. Das Teilchen oszilliert also zwischen den Umkehrpunkten hin und her. Im Zwischenbereich $x_{1a} < x < x_{1b}$ liegt die kinetische Energie $T = E_1 - U(x)$ vor und das Teilchen hat eine endliche Geschwindigkeit.

Für höhere Energien, z.B. E_2, sind im obigen Beispiel Oszillationen in disjunkten Bereichen möglich: $x_{2a} \le x \le x_{2b}$ und $x_{2a'} \le x \le x_{2b'}$.

In all diesen Beispielen bleibt x beschränkt und man spricht von gebundenen Bewegungen oder gebundenen Zuständen.

Für noch höhere Energien, z.B. E_3, gibt es in diesem Beispiel nur einen Umkehrpunkt bei x_{3a}. Das Teilchen kann also aus dem Unendlichen $x \to \infty$ kommen, wird bei x_{3a} "reflektiert", und läuft

wieder ins Unendliche $x \to \infty$. Die Bewegung ist
<u>ungebunden</u> und man spricht auch von <u>Streuzuständen</u>.

Eine Klassifikation der Gleichgewichtszustände wird durch eine Taylorentwicklung von $U(x)$ um den Gleichgewichtspunkt x_0 einsichtig:

$$U(x) = U(x_0) + (x-x_0)\frac{dU(x_0)}{dx} + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{d^2U(x_0)}{dx^2} + \dots \tag{2.90}$$

Der konstante Anteil $U(x_0)$ ist wegen willkürlicher Nullpunktswahl von U ohnehin irrelevant.
Der Term $\frac{dU(x_0)}{dx} = -F(x_0)$ beschreibt die Kraft auf das Teilchen bei x_0. Wir sprechen genau dann von einem <u>Gleichgewichtspunkt</u> x_0, wenn die Kraft auf das Teilchen bei x_0 verschwindet, d.h.

$$\frac{dU(x_0)}{dx} = 0 \iff \text{Gleichgewichtspunkt } x_0 \tag{2.91}$$

Dies ist mathematisch äquivalent zu der Aussage, dass das Potential an x_0 ein lokales Extremum hat.

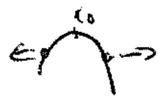
In der Nähe von Gleichgewichtspunkten x_0 gilt also

$$U(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2!} \frac{d^2 U(x_0)}{dx^2} + \mathcal{O}\left((x-x_0)^3\right) \qquad (2.92)$$

In Abhängigkeit vom Vorzeichen der zweiten Ableitung sprechen wir vom

$$\frac{d^2 U(x_0)}{dx^2} > 0 \qquad \text{stabiles Gleichgewicht, (Potentialminimum)}$$

$$\frac{d^2 U(x_0)}{dx^2} < 0 \qquad \text{labiles Gleichgewicht, (Potentialmaximum)} \qquad (2.93)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Kraft im der Nähe von x_0 im stabilen Fall in Richtung von x_0 zeigt  und im labilen Fall von x_0 weg weist  .

Zum Schluss sei bemerkt, dass die Energieerhaltung auch die Lösung der Bewegungsgleichung vereinfacht, da (2.88) bereits die Form einer Differentialgleichung 1. Ordnung hat. Die Bahnkurve (in einer

Dimension) ist dann gegeben durch einfache Integration

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} , \qquad (2.94)$$

wobei $x(t=t_0) = x_0$ gewählt ist. Die Bahnkurve $x(t)$ erhält man aus (2.94) $t = t(x)$ durch Bildung der Umkehrfunktion.

In höheren Dimensionen gibt es diesen einfachen Zusammenhang in der Regel nicht mehr. Allerdings "erspart" einem die Energieerhaltung immer eine Integration.