2.2 Schwingungen

2.2.1 Freie Schwingungen in einer Dimension

Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn er sich nicht-beschleunigt bewegt, $\ddot{x} = 0$; also keine (Netto-) Kraft auf ihn wirkt. (NB: verschwindende Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$ zu fordern, ist nicht notwendig, da man mit einem Galilei-Boost immer in das Ruhsystem des Körpers transformieren kann; dort gilt per definitionem $\dot{x} = 0$ im Gleichgewicht)

Bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage x_0 kann die Kraft in eine Taylor-Reihe entwickelt werden,

$$F(x) = F(x_0) + \frac{dF(x)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x_0}(x - x_0)^2 + \ldots \qquad (2.19)$$

Nach Voraussetzung verschwindet $F(x_0) = 0$.

Wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} > 0$$

ist $\ddot{x} > 0$ für $(x - x_0) > 0$ und $\ddot{x} < 0$ für $(x - x_0) < 0$,

d.h. der Körper entfernt sich ~~von~~ der Gleichgewichtsposition (labiles Gleichgewicht)

Für

$$\frac{dF(x_0)}{dx} < 0$$

hingegen wird der Körper wieder zu x_0 hin beschleunigt (stabiles Gleichgewicht).

Hier haben wir angenommen, dass die höheren Terme $\sim \frac{d^2F}{dx^2}$ etc. vernachlässigbar sind. Dies lässt sich durch Wahl hinreichen kleiner Werte $(x-x_0)$ für Taylor-entwickelbare Kräfte immer erreichen.

Setzen wir im Fall des stabilen Gleichgewichts

$$\frac{dF(x_0)}{dx} =: -k \quad , k>0 , \qquad (2.20)$$

dann lautet die Kraft für kleine Auslenkungen vom Gleichgewicht x_0

$$F(x) = -k(x-x_0) \qquad (2.21)$$

Dieses Hooke'sche Gesetz ist also ein sehr generischer Fall für Kräfte auf Massepunkte in der Nähe von stabilen Gleichgewichtspositionen.

Wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) $x_0 = 0$, ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x} = -k x \qquad (2\text{-}22a)$$

oder

$$\underline{\underline{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}} \qquad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2.22b)$$

(Bewegungsgleichung des Harmonischen Oszillators)

Es handelt sich um eine Differenzialgleichung 2. Ordnung die zwei linear unabhängige Lösungen $x_1(t)$, $x_2(t)$ besitzt.

(NB: $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind linear unabhängig, wenn

$$\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) = 0$$

für alle t nur durch $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ erfüllt werden kann.)

Die allgemeine Lösung ist dann eine Linearkombination

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t), \qquad (2.23)$$

wobei die Konstanten C_1 und C_2 durch Anfangsbedingungen bestimmt werden können.

Linear unabhängige Lösungen von (2.22) sind

$$x_1(t) = \sin \omega_0 t \quad , \quad x_2(t) = \cos \omega_0 t \tag{2.24}$$

Für die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 \end{aligned} \tag{2.25}$$

lautet dann die Lösung

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t \tag{2.26}$$

Eine weitere nützliche Form der Lösung ergibt sich mit $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ zu

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \delta_0) \tag{2.27}$$

mit der <u>Amplitude</u> $A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \geq 0$

und

$$\tan \delta_0 = \frac{v_0}{x_0 \omega_0} \quad , \quad 0 \leq \delta_0 < 2\pi \tag{2.28}$$

Die Lösung beschreibt eine <u>harmonische</u> Schwingung mit <u>Kreisfrequenz</u> ω_0 (und Frequenz $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$)

und Schwingungsperiode $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (2.29)

Die Schwingungsfrequenz ist insbesondere unabhängig von der anfänglichen Auslenkung oder der Anfangsgeschwindigkeit.

Der Bewegungszustand des ein-dimensionalen harmonischen Oszillators ist wie oben beschrieben durch die Angaben vom Ort $x(t)$ und Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ zu einem Zeitpunkt t vollständig spezifiziert. Es ist nützlich, die Größen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ als Koordinaten einer Ebene, dem Phasenraum*, zu betrachten. Mit fortschreitender Zeit t bewegt sich der Punkt $(x(t), \dot{x}(t))$ im Phasenraum und bildet dadurch eine Phasenraumtrajektorie. Die Menge aller möglichen Trajektorien bilden das Phasendiagramm des Systems.

Aus (2.27)

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \delta_0)$$

folgt

$$\dot{x}(t) = - A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t - \delta_0)$$

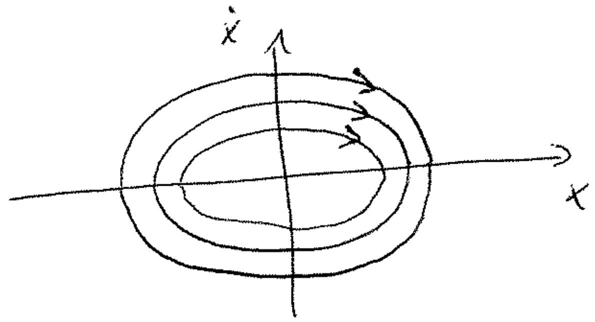
---

* üblicherweise wählt man Ort $x(t)$ und Impuls $p(t)$; letzterer ist für Massepunkte wegen $p(t) = m\,\dot{x}(t)$ trivialerweise mit $\dot{x}(t)$ verknüpft.

Daraus folgt

$$\frac{x^2(t)}{A_0^2} + \frac{\dot{x}^2}{A_0^2\,\omega_0^2} = 1 \qquad (2.30)$$

Diese Gleichung entspricht einer Ellipsengleichung in der $(x, \dot{x})$ - Ebene mit Halbachsen A_0 und $A_0 \omega_0$.



Zwei Trajektorien können sich nicht schneiden. Gäbe es einen Schnittpunkt, entspräche dies einer Anfangsbedingung die zwei verschiedene Zeitentwicklungen zuließe. Da aber die Lösung der Differenzialgleichung eindeutig ist, können sich die Phasenraumtrajektorien nicht schneiden.

2.2.2 Gedämpfte Schwingungen

Eine (phänomenologisch begründbare) Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit

$$F_R = -b\dot{x} \quad (b>0) \tag{2.31}$$

führt zur Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \,. \tag{2.32}$$

Zur vereinfachten Lösung betrachten wir die Gleichung im Komplexen

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0 \quad \text{mit } z \in \mathbb{C} \,. \tag{2.33}$$

Da (2.33) linear in z ist, ist mit z auch $x_1(t) = \mathrm{Re}\, z(t)$ und $x_2 = \mathrm{Im}\, z(t)$ jeweils eine Lösung von (2.32). Mit dem Ansatz $z(t) = e^{i\omega t}$ ergibt sich

$$(-m\omega^2 + i\omega b + k)\, e^{i\omega t} = 0 \tag{2.34}$$

Da (2.34) für beliebige t gelten muss, muss der Term in Klammern verschwinden:

$$-m\omega^2 + i\omega b + m\omega_0^2 = 0 \tag{2.35}$$

(wobei wieder $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ gilt.)

Der Ansatz löst also die komplexe Bewegungsgleichung für

$$\omega_{1,2} = i\lambda \pm \bar{\omega} \qquad (2.36)$$

mit $\lambda = \frac{b}{2m}$, $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Im Folgenden unterscheiden wir die Fälle $\omega_0 \gtreqless \lambda$:

Schwache Dämpfung

Für $\lambda < \omega_0$ gilt $\bar{\omega} \in \mathbb{R}_0^+$

Wir erhalten die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\lambda t} \cos \bar{\omega} t \\ x_2(t) &= e^{-\lambda t} \sin \bar{\omega} t \end{aligned} \qquad (2.37)$$

und damit die allgemeine Lösung

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left(C_1 \sin \bar{\omega} t + C_2 \cos \bar{\omega} t \right) \qquad (2.38)$$

bzw. in der Form

$$x(t) = \bar{A}_0 \, e^{-\lambda t} \cos(\bar{\omega} t - \bar{\delta}_0), \qquad (2.39)$$

wobei $\bar{A}_0$ und $\bar{\delta}_0$ analog zum ungedämpften Fall definiert sind. (NB: an Stelle von Anfangsort x_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0, die C_1 und C_2 in (2.38) festlegen, kann man die Lösung auch durch Wahl von $\bar{A}_0$ und $\bar{\delta}_0$ bestimmen.)

Im Vergleich zur ungedämpften Schwingung finden wir eine verringerte Kreisfrequenz

$$\bar{\omega} \leq \omega_0$$

und eine exponentiell gedämpfte Amplitude $\sim \bar{A}_0 \, e^{-\lambda t}$

Starke Dämpfung

Für $\lambda > \omega_0$ schreiben wir $\bar{\omega} = i\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$x(t) = C_1 \, e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + C_2 \, e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} \qquad (2.40)$$

und ist nicht mehr oszillatorisch.

Kritische Dämpfung

Bei der Konstruktion der Lösung für den Fall $\lambda = \omega_0$, d.h. $\bar{\omega} \to 0$, ergibt sich eine Subtilität, da in (2.37) nur noch die Lösung

$x_1(t) = e^{-\lambda t}$ übrig zu bleiben scheint. Um die 2. linear unabhängige Lösung zu finden, muss der Grenzprozess $\bar{\omega} \to 0$ vorsichtiger durchgeführt werden. Betrachten wir dazu die allgemeine Lösung (2.38) für schwache Dämpfung für den Fall $x(t=0)=0$, also $C_2 = 0$:

$$x(t) = e^{-\lambda t} C_1 \sin \bar{\omega} t \qquad (2.41)$$

Wegen $\dot{x}(t=0) = C_1 \bar{\omega}$ ist C_1 mit der Anfangsgeschwindigkeit verknüpft,

$$C_1 = \frac{v_0}{\bar{\omega}} , \qquad (2.42)$$

also

$$x(t) = e^{-\lambda t} \frac{v_0}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} t \qquad (2.43)$$

Im Limes kritischer Dämpfung $\lambda \to \omega_0$, $\bar{\omega} \to 0$, finden wir nach de l'Hospital,

$$\lim_{\bar{\omega} \to 0} x(t) = e^{-\lambda t} v_0 t \lim_{\bar{\omega} \to 0} \frac{\sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega} t} = e^{-\lambda t} v_0 t , \qquad (2.44)$$

und damit eine zweite linear unabhängige Lösung

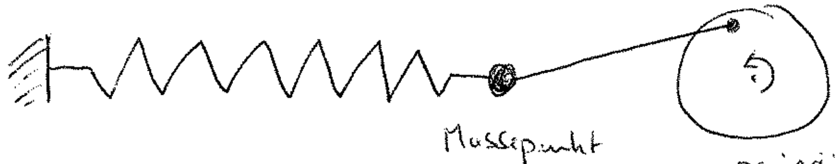
$$x_2(t) = t\, e^{-\lambda t} \qquad (2.45)$$

Die allgemeine Lösung für den Fall kritischer Dämpfung lautet damit

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\lambda t}; \qquad (2.46)$$

dies ist der sogenannte „aperiodische Grenzfall".

2.2.3 Erzwungene Schwingungen



Auf einen Massepunkt wirke von außen eine periodische Kraft

$$F_e = c \cos \omega t . \qquad (2.47)$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = c \cos \omega t \qquad (2.48)$$

Zur Suche nach einer Lösung betrachten wir die komplexifizierte Gleichung

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = c\, e^{i\omega t} \qquad (2.49)$$

mit $z(t) \in \mathbb{C}$, woraus sich über $x(t) := \operatorname{Re} z(t)$ die Lösung von (2.48) ergibt. (Alle Konstanten m, b, k, c seien reell.)

Nach der Theorie der Differenzialgleichungen ergibt sich die allgemeine Lösung aus der Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen (d.h. $F_e \neq 0$) Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen ($F_e = 0$) Gleichung. Letztere ist uns bereits bekannt (vgl. (2.36), (2.37)):

$$z_h(t) = e^{-\lambda t} \, e^{\pm i \bar{\omega} t} \tag{2.50}$$

mit $\lambda = \frac{b}{2m}$, $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ (für $\lambda < \omega_0$).
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Für die partikuläre Lösung probieren wir den Ansatz

$$z_p(t) = z_0 \, e^{i\omega t} \tag{2.51}$$

$$\Rightarrow \quad (-m\omega^2 + ib\omega + k) z_0 = c$$

mit der Lösung

$$z_0 = \frac{c/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\lambda} = \frac{c/m\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\lambda\right]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2} . \tag{2.52}$$

Diese lässt sich auch in der Form

$$z_0 = A \, e^{-i\delta}$$

darstellen. Mit der Annahme (o.B.d.A), dass $c \geq 0$, folgt

$$A = \frac{c/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}} \geq 0 \tag{2.53}$$

und

$$\tan\delta = \frac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad (2.54)$$

mit $0 \le \delta < \pi$ wegen $\lambda \ge 0$.

Damit erhalten wir die partikuläre Lösung

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \delta) \qquad (2.55)$$

und mit (2.50) die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + \bar{A}\, e^{-\lambda t} \cos(\bar{\omega} t - \bar{\delta}). \qquad (2.56)$$

Während A und δ durch (2.53 & 54) bereits festgelegt sind, können $\bar{A}$ und $\bar{\delta}$ noch zur Erfüllung der Anfangsbedingungen angepasst werden.

Da die homogene Lösung mit $e^{-\lambda t}$ abfällt, spielt sie nur während des <u>Einschwingvorgangs</u> in der Zeit $t < \frac{1}{\lambda}$ eine Rolle.

Für spätere Zeiten schwingt der Oszillator mit der Frequenz ω der äußeren Kraft, jedoch mit verschobener Phase δ (<u>Phasenverschiebung</u>).

Für $\omega = \omega_0$ ist $\delta = \frac{\pi}{2}$, vgl. (2.54).

Die Amplitude A zeigt als Funktion von ω Resonanzverhalten. D.h. sie erreicht ein Maximum für

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \qquad (\text{für } \omega_0^2 > 2\lambda^2) \qquad (2.57)$$

mit dem Wert

$$A_{max}(\omega = \omega_R) = \frac{c/m}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \qquad (2.58)$$

Ohne Dämpfung $\lambda \to 0$ könnte die Amplitude unbeschränkt wachsen (Resonanzkatastrophe). Selbst für kleine Amplituden c der äußeren Kraft, d.h. c klein aber endlich, kann die Amplitude des Oszillators an der Resonanzfrequenz ω_R sehr groß werden, wenn die Dämpfung λ hinreichend klein ist.

Eine wichtige Kenngröße der Resonanz ist ihre Halbwertsbreite, die definiert ist durch die Bedingung

$$A^2(\omega) = \frac{1}{2} A_{max}^2 . \qquad (2.59)$$

Diese Bedingung ist erfüllt für die Frequenzen

$$\omega_{1/2}^2 = \omega_R^2 \pm 2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} \qquad (2.60)$$

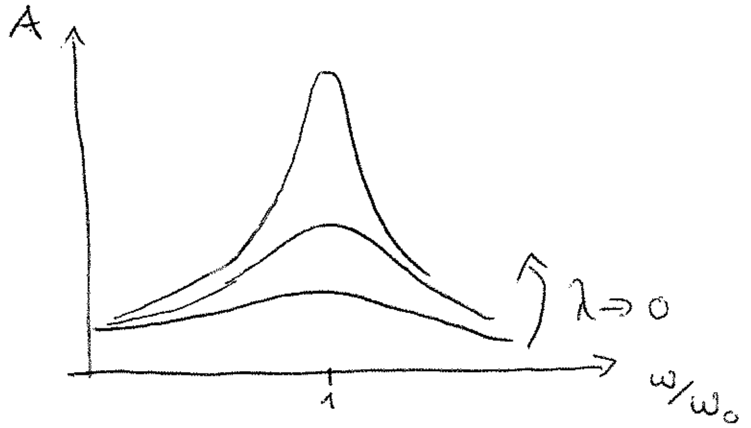
Im Limes schwacher Dämpfung $\lambda \ll \omega_0$ vereinfachen sich diese Beziehungen zu

$$(2.57): \quad \omega_R \simeq \omega_0\left(1-\frac{\lambda^2}{\omega_0^2}\right) \simeq \omega_0 \qquad (2.61)$$

$$(2.60): \quad \omega_{1/2} \simeq \omega_0 \pm \lambda \qquad (2.62)$$

Die Halbwertsbreite Γ bestimmt sich nun durch den Frequenzabstand zwischen ω_1 und ω_2,

$$\Gamma = 2\lambda \qquad (\text{für } \lambda \ll \omega_0) \qquad (2.63)$$



Resonanzverhalten der Amplitude erzwungener Schwingungen