12 Relativistischer Massepunkt

Im Folgenden gehen wir über die Newtonsche Mechanik hinaus und geben die bisherige Idealisierung auf, dass alle auftretenden Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit $|\vec{v}| \ll c$ sein sollen. Damit betreten wir den Bereich der speziellen Relativitätstheorie (SRT) (Einstein 1905). An dieser Stelle sei auf ausführliche Hintergründe (z.B. Widerlegung der Äther-Theorie durch das Michelson-Morley Experiment, etc.) verzichtet. Ziel ist, die Dynamik eines Massepunkts im Rahmen auf Basis des Hamiltonschen Prinzips auch relativistisch beschreiben zu können.

Die SRT behält das Konzept von Inertialsystemen der Newtonschen Mechanik und den Grundgedanken des klassischen Relativitätsprinzips (Gleichberechtigung aller Inertialsysteme) bei, fügt aber einen entscheidenden Zusatz hinzu:

Postulate der speziellen Relativitätstheorie

Relativitätsprinzip: in allen zueinander gleichförmig bewegten Bezugssystemen (Inertialsystemen) laufen physikalische Vorgänge bei gleichen Bedingungen gleich ab.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: in allen Inertialsystemen ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (unabhängig vom Bewegungszustand der Quellen) gleich groß.

(NB: Wenn man das Relativitätsprinzip auf die Elektrodynamik bezieht, ist das Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bereits im Relativitätsprinzip enthalten, weil in der Elektrodynamik die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ein Resultat der Vakuum-Maxwellgleichungen ist.)

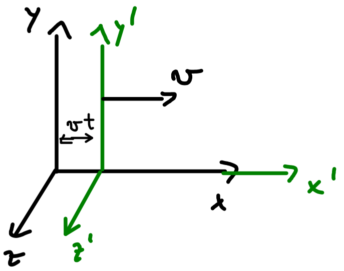
Eine radikale Konsequenz der Postulate ist, dass die Zeit ihren Charackter als absolute Bezugsgröße verlieren muss: Ereignisse, die in einem Inertialsystem als gleichzeitig wahrgenommen werden, können vom bewegten Inertialsystem aus gesehen nicht mehr gleichzeitig sein. Z.B. wird eine Lampe in der Mitte eines Raumes eingeschaltet, trifft das Licht an gegenüberliegenden Wänden gleichzeitig auf. Betrachten wir dieses Einschalten aber aus einem Bezugssystem, das sich relativ zu den Wänden bewegt, sehen wir das Licht auf die Wand zuerst auftreffen, die sich auf den Punkt in unserem Koordinatensystem zubewegt, an dem die Lampe eingeschaltet wurde. Auf die gegenüberliegende Wand trifft das Licht vom bewegten System aus gemessen später auf.

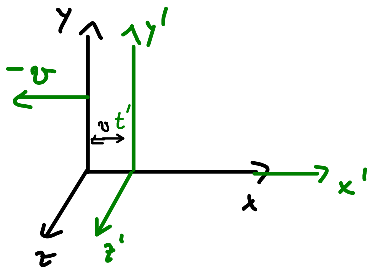
Die eingangs der Vorlesung angesprochenen Galilei-Transformationen, die der Zeit lediglich eine Verschiebung $t \to t + t_a$, $t_a = \text{const.}$, zubilligen, sind folglich nicht im Einklang mit den Postulaten.

12.1 Lorentz-Transformationen

Wir benötigen daher allgemeinere Koordinatentransformationen für den Wechsel zwischen Inertialsystemen, die die Zeit mit einschließen.

Dazu betrachten wir zwei Koordinatensysteme, die sich relativ zueinander entlang der x-Achse mit Geschwindigkeit v bewegen





Zum Zeitpunkt $t = 0 = t'$ befinden sich auch die Ursprünge im gleichen Punkt, in dem ein Lichtblitz gezündet wurde. Das Licht wird kugelförmig abgestrahlt. Gemäß des Postulats bewegt sich die Lichtfront in beiden Systemen mit Lichtgeschwindigkeit c vom jeweiligen Ursprung weg. Die Lichtfront erfüllt also jeweils die Gleichung

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 &= 0 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 &= 0 \end{aligned} \tag{12.1}$$

Um die Transformation $(t, x, y, z) \Leftrightarrow (t', x', y', z')$ zu finden, genügt es, lineare Transformationen zu betrachten, da andernfalls geradlinig gleichförmige Bewegungen nicht auf ebensolche abgebildet würden.

Aus der Skizze ist z.B. ersichtlich, dass alle Punkte, für die $y=0$ im KS ist, auch $y'=0$ im KS' erfüllen

$$y=0 \iff y'=0 \tag{12.2}$$

Da dies für alle x, z, t gilt, muss der Zusammenhang

$$y = c\, y' \tag{12.3}$$

lauten, wobei c eine Funktion von v^2 sein könnte. Da KS und KS' gleichberechtigt sind, muss ebenso $y' = c\, y$ gelten, woraus $y = c\, y' = c^2 y \Rightarrow c^2 = 1$ folgt.
Lassen wir reine Spiegelungen $(c=-1)$ außen vor, folgt

$$y = y' \quad , \quad z = z' \tag{12.4}$$

wobei wir verwendet haben, dass die analoge Überlegung für die z-Richtung ebenfalls gilt.
Als nicht-triviale Transformationen für die x und t Richtungen verbleiben:

$$\begin{aligned} x' &= A x + B t \\ t' &= D t + E x \end{aligned} \tag{12.5}$$

Da der Ursprung im KS', $x'=0$, sich von KS aus betrachtet mit Geschwindigkeit v bewegt, sich also bei $x = vt$ im KS befindet, reduziert sich die erste Gleichung auf

$$x' = A\,(x - vt) \tag{12.6}$$

Umgekehrt können wir die Bewegung des Ursprungs von KS, $x=0$, aus KS' betrachten. Hierfür gilt im KS': $x' = -v t'$.

Für diesen Ursprung reduziert sich die zweite Gleichung aus (12.5) auf $t' = Dt$ und (12.6) auf $x' = -Avt = -\frac{A}{D} v t'$. Damit folgt, dass $A = D$ gelten muss.

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x' &= A(x - vt) \\ t' &= At + Ex \end{aligned} \qquad (12.7)$$

Diese linearen Transformationen (12.4 & 7) setzen wir nun in die Lichtfront-Gleichung (12.1) im KS' ein:

$$\begin{aligned} 0 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t' \\ &= A^2 (x^2 - 2vxt + v^2 t^2) + y^2 + z^2 - c^2 (A^2 t^2 - 2AExt + E^2 x^2) \\ &= (A^2 - c^2 E^2) x^2 + y^2 + z^2 - \left(A^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right) c^2 t^2 + 2A \left(c^2 E - Av\right) xt \end{aligned}$$

Damit dies ebenso die Lichtfront (12.1) im KS beschreibt, muss gelten:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma \qquad (12.8)$$

$$E = \frac{v}{c^2} A \equiv \frac{v}{c^2} \gamma$$

(Hier haben wir die positive Wurzel gewählt, damit die Transformation für $v=0$ zur Identität wird.)

Wir erhalten zusammenfassend:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - vt) \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x\right) \end{aligned} \qquad (12.9)$$

$$\underline{\underline{\text{Lorentz-Transformation}}}$$

Da nun die Zeit keine Sonderrolle mehr spielt wie in der Newtonschen Mechanik, ist es zweckmäßig, Zeit und Orte zu einem 4-er Vektor zusammenzufassen, wobei wir $c \cdot t$ als "Zeitkoordinate" verwenden, damit alle Koordinaten die gleiche Dimension einer Länge haben. Die Lorentz-Transformation schreibt sich dann in Matrix-Notation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta := \frac{v}{c} \qquad (12.10)$$

Selbstverständlich gelten analoge Transformationsregeln auch für den Fall, dass die Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme in eine andere Richtung als die x-Richtung zeigt.

Mit Hilfe der eigentlichen orthogonalen Transformationen (Drehungen) lässt sich die allgemeine Lorentz-Transformation schreiben als:

("eigentlichen Lorentz-Trafos")

$$\Lambda := \begin{pmatrix} 1 & 0\;0\;0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0\;0\;0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & R_1 \end{pmatrix} , \qquad (12.11)$$

wobei $R_1, R_2 \in SO(3)$. Hier dreht R_1 zunächst die gewünschte Richtung der Relativgeschwindigkeit in die x-Richtung, dann erfolgt der "Lorentz-Boost" (12.10), und abschließend wählt man mit R_2 die gewünschte Drehung der Koordinatensysteme zueinander.

(Für reine Geschwindigkeitstrasformationen (Boosts) wählt man $R_2 = R_1^T$.)

Somit werden die Lorentz-Trasformationen ebenso wie die Galilei-Trasformationen durch 6 Trasformationsparameter bestimmt:

Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$: 3 Parameter

relative Drehung $(\varphi, \vartheta, \psi)$: 3 Parameter

Im (12.11) sind 2 der 3 Geschwindigkeitsparameter im R_1 kodiert, da mit R_1 (2 Winkel) die Richtung von $\vec{v}$ bestimmt wird.

Die Menge aller eigentlichen Lorentz-Trasformationen bilden eine Gruppe, die SO(1,3), die noch um räumliche Spiegelungen (Parität P) und um Zeitumkehr (T) und die Kombination von beidem (PT) erweitert werden kann.

12.2 Wirkung des relativistischen Massepunkts

Erstes Ziel ist es nun, die relativistische Dynamik eines Massepunkts aus dem Hamiltonschen Prinzip herzuleiten. Dafür benötigen wir die Wirkung des Massepunkts, deren Extrema die entsprechende Bewegungsgleichung liefern. Bisher haben wir die Wirkungen von nicht-relativistischen Systemen in der Form, z.B.,

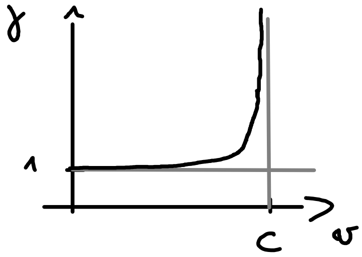
$$S[\vec{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \quad L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}; t) \qquad (12.12)$$

geschrieben. Im relativistischen Kontext stoßen wir mit dieser Form auf zwei Probleme: damit die resultierende Dynamik dem Relativitätsprinzip gehorcht, sollte sich die Wirkung so schreiben lassen können, dass sie in jedem Inertialsystem die gleiche Form hat. Entsprechend werden auch die Extrema und damit die Bewegungsgleichungen die jeweils gleiche Form (mit gleichen Lösungen) annehmen können. Allerdings scheint dafür die Form (12.12) als Ausgangspunkt schlecht geeignet zu sein, denn bereits das Integrationsmaß "dt" transformiert sich nicht-trivial unter Lorentz-Transformationen:

$$dt' = \gamma \, dt \,. \qquad (12.13)$$

Im übrigen bringt dieser Zusammenhang das Phänomen der Zeit<u>dilatation</u> zum Ausdruck, denn

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \underset{\substack{\uparrow \\ =\text{ nur für} \\ v=0}}{\geq} 1 \,, \qquad (12.14)$$



d.h., wenn wir dt als das (infinitesimale) "Ticken" einer Uhr im KS betrachten, so tickt die Uhr im relativ dazu bewegten System KS' mit $dt' > dt$ (für $\vec{v} \neq 0$). Dies wird oft mit dem Satz "Bewegte Uhren gehen langsamer" zusammenfassen. Das Phänomen ist vielfach experimentell präzise bestätigt worden (z.B. Lebensdauer von relativistischen Myonen, etc.)

Falls wir also die Wirkung in die Form (12.12) bringen wollen, benötigen wir eine Lagrange-Funktion, deren Transformationsverhalten (12.13) kompensiert.

Das zweite Problem ist, dass die nicht-relativistische Physik bislang Ort und Zeit unterschiedlich behandelt hat, wie bereits die Notation in (12.12) verdeutlicht. Lorentz-invariante Beschreibungen müssen es allerdings ermöglichen, dass Ort und Zeit auf gleicher Ebene behandelt werden können.

Für die Konstruktion einer Wirkung benötigen wir also eine invariante Größe unter Lorentz-Transformation, die Raum- und Zeitkoordinaten auf gleicher Ebene behandeln. Einer solchen Größe sind wir bereits bei der Beschreibung der Lichtfront begegnet:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad (12.15)$$

Wir haben die Lorentz-Transformation genau so konstruiert, dass im KS' galt:

$$s'^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \equiv s^2 \qquad (12.16)$$

Für die Lichtfront gilt darüberhinaus $s^2 = 0 = s'^2$, allerdings haben wir dies tatsächlich nicht für die Konstruktion der Transformation verwendet.

Da die mit (ct, x, y, z) bzw. (ct', x', y', z') bezeichneten 4-er Vektoren "gebundene" Vektoren darstellen, deren Koordinatenwerte von der Wahl des Ursprungs abhängen, wollen wir übergehen zu eigentlichen Vektoren, die wir ähnlich wie im nicht-relativistischen Fall durch Differenzen von gebundenen Vektoren erhalten können, bzw. unmittelbar durch eine differenzielle Betrachtungsweise.

Wir schreiben

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \qquad (12.17)$$

Die Bedeutung von ds^2 für einen Massepunkt wird deutlich, wenn wir (12.17) in einem Inertialsystem betrachten, in dem der Massepunkt momentan ruht, d.h.

$$\Rightarrow \qquad ds = c\, dt \quad , \text{für } dx = dy = dz = 0 , \qquad (12.18)$$

(wobei wir als Konvention die positive Wurzel verwendet haben). Somit entspricht ds bis auf den konstanten Faktor c dem infinitesimalen Zeitschritt dt, den der Massepunkt in seinem Ruhsystem misst. Unabhängig davon, wie sich der Massepunkt bewegt (ob gleichmäßig geradlinig oder beschleunigt), gilt dieses Argument zu jedem Zeitpunkt im momentanen Ruhsystem des Massepunkts. Wir sprechen daher von ds als der (infinitesimalen) Eigenzeit des Massepunkts.

Da diese in einem beliebigen Inertialsystem für einen sich beliebig bewegenden Massepunkt mit i.A. $dt, dx, dy, dz \neq 0$ Gleichung (12.17) erfüllt, ist ds^2 per constructionem Lorentz-invariant.

Diese Beobachtung schlägt vor, ds als Integrationsmaß für die Konstruktion einer relativistischen Wirkung für einen Massepunkt zu verwenden. Wir betrachten folgenden Ansatz:

$$S = \int_{s_1}^{s_2} ds \; l \qquad (12.19)$$

mit einer invarianten Größe l, die die Rolle der Lagrange-Funktion spielen soll. Nun soll l so gewählt werden, dass (12.19) im Limes kleiner Geschwindigkeiten die Newtonsche Dynamik beschreibt. Im Folgenden zeigen wir, dass dies tatsächlich bereits für die einfachst mögliche Wahl $l = \text{const.}$ der Fall ist. Da S die Dimension einer Wirkung haben soll, d.h. $[S] = \frac{kg\, m^2}{s}$ in SI-Einheiten, und ds die Einheit einer Länge trägt, $[ds] = m$, muss gelten $[l] = \frac{kg\, m}{s}$.

Die einzigen invarianten Größen, die uns als Konstanten zur Verfügung stehen, sind die Masse des Massepunkts m und die Lichtgeschwindigkeit c. Somit muss für $l = \text{const.}$ die Größe l proportional zu m und c

Sein,

$$l = - m c \,, \tag{12.20}$$

wobei wir konventionsbedingt den beliebigen Proportionalitätsfaktor zu -1 gewählt haben,

$$\underline{\underline{S = - m c}} \int ds \,. \tag{12.21}$$

Dies ist per constructionem eine relativistisch invariante Wirkung. Nun können wir ein beliebiges (festes) Koordinatensystem wählen, in welchem wir (12.21) in die uns bekannte Standardform (12.12) bringen. Es folgt mit (12.17):

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= c^2 dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right) \right] \\ &= c^2 dt^2 \left[1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad ds = c \, \frac{dt}{\gamma} \,, \tag{12.22}$$

wobei wir γ im Sinne der Lagrange-Dynamik als Funktion von $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ verstehen:

$$S = - m c \int ds = - m c^2 \int \frac{dt}{\gamma(\dot{\vec{x}})} \,. \tag{12.23}$$

Damit können wir die Lagrange-Funktion des relativistischen freien Massepunkts ablesen:

$$\underline{\underline{L(\dot{\vec{x}})}} = -mc^2 \, \frac{1}{\gamma(\dot{\vec{x}})}$$

$$= -mc^2 \underline{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \qquad (12.24)$$

Im Limes kleiner Geschwindigkeiten $\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} \ll 1$ folgt aus der Taylor-Entwicklung der Wurzel:

$$L(\dot{\vec{x}}) = -mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} \right)^3 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - mc^2 + \frac{1}{4} m \dot{x}^2 \left(\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} \right) + \ldots$$

(12.25)

In der Tat finden wir zu führender Ordnung die nicht-relativistische kinetische Energie $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$. Gemäß $L = T - U$ können wir den zweiten Term als eine Konstante im Potenzial $U_0 = mc^2$ deuten, die allerding für die Dynamik keine Rolle spielt. Die höheren Terme beschreiben offensichtlich relativistische Effekte und spielen mit zunehmender Geschwindigkeit eine wichtige Rolle als "relativistische Korrekturen". Diese sind z.B.

im atomaren Spektren (im Rahmen der Quanten-mechanik) direkt messbar.

Somit haben wir die Newtonsche Physik eines freien Massepunkts als Grenzfall der relativistischen Mechanik wiederentdeckt. Kräfte können wir nun durch Potenzialterme direkt hinzufügen:

$$\longrightarrow L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - U(\vec{x},\dot{\vec{x}};t) \tag{12.26}$$

12.3 Relativistische Dynamik des freien Massepunkts

Im Folgenden verbleiben wir beim freien Fall $U=0$ und wollen uns die für die Mechanik relevanten Größen Impuls & Energie anschauen.

Der zur Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ kanonisch konjugierte Impuls lautet

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = -\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}}\left(-\frac{\dot{\vec{x}}}{c^2}\right) = \gamma m \dot{\vec{x}} \tag{12.27}$$

Im nicht-relativistischen Grenzfall, $\gamma \to 1$, erhalten wir den Newtonschen Ausdruck $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$, darüber hinaus parametrisiert der Lorentz-Faktor γ die relativistischen

Effekte.

Die Hamilton-Funktion ist gemäß erfüllten Voraussetzungen $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ eine Erhaltungsgröße und kann mit der Energie identifiziert werden (NB: obwohl streng genommen das im früheren Kapiteln gegebene Argument hier nicht angewendet werden kann):

$$E = H = p \cdot \dot{\vec{x}} - L = \gamma m \dot{\vec{x}}^2 + mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \qquad (12.28)$$

Es folgt:

$$\underline{\underline{E^2}} = \frac{(m\dot{\vec{x}}^2)^2}{\left(1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right)} + \cancel{2}\, m^2 \dot{\vec{x}}^2 c^2 + (mc^2)^2 \left(1 - \cancel{\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}\right)$$

$$= \cancel{\frac{(m\dot{\vec{x}}^2)^2}{\left(1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right)}} + \frac{m^2 \dot{\vec{x}}^2 c^2 \left(1 - \cancel{\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}\right)}{\left(1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right)} + (mc^2)^2$$

$$= (\gamma m \dot{\vec{x}})^2 c^2 + (mc^2)^2$$

$$= \underline{\underline{\vec{p}^2 c^2 + (mc^2)^2}} \qquad (12.29)$$

Dies ist die relativistische Energie-Impuls-Beziehung eines freien Massepunkts.

Im Limes des ruhenden Massepunkts $\vec{p} = 0$ erhalten wir Einsteins ikonographische Formel

$$E = mc^2 \quad , \tag{12.30}$$

die die Energie - Masse - Äquivalenz verdeutlicht, die z.B. am "Massendefekt" in der Chemie sichtbar wird.

Die Energie - Impulsbeziehung (12.29) lässt sich auch wie folgt lesen:

$$E^2 - (\vec{p}\, c)^2 = (mc^2)^2 \tag{12.31}$$

Somit lässt sich Masse (rechte Seite) auch als "Lücke" (engl. "gap") zwischen dem Energie^2 - Wert und dem Impuls^2 - Wert verstehen (mit geeigneten Faktoren von c).

Da die rechte Seite offensichtlich eine Konstante ist, die unabhängig vom Bezugssystem ist, muss auch die linke Seite Lorentz - invariant sein.

Dies ist offensichtlich analog zu (12.17) der Fall, wenn sich Energie und Impuls als

Komponenten eines 4er-Vektors transformiere:

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ \vec{p}\,' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad (12.32)$$

Dies lässt sich in der Tat direkt mit den Definitionen verifizieren.

Dies ist ein Beispiel für die Tatsache, dass sich alle physikalischen Observable einer relativistischen Theorie als Skalare, 4er-Vektoren oder entsprechende Tensoren höheren Rangs unter Lorentz-Transformationen klassifizieren lassen.
(z.B. die elektrischen und magnetischen Feldstärken $\vec{E}$ und $\vec{B}$ der Maxwell-Theorie sind Komponenten eines Feldstärke-Tensors 2. Stufe.)