10.3 Stabilität dynamischer Systeme und Lyapunov-Exponenten

Wir wollen im Folgenden der Frage nachgehen, wie die Stabilität von dynamischen Systemen klassifiziert und quantifiziert werden kann. Dies wollen wir im Rahmen und als Beispiel von Hamiltonschen Systemen tun, auch wenn sich diese Diskussion noch allgemeiner fassen lässt.

Sei ein Dynamisches System gegeben durch die Hamiltonfunktion $H(\vec{\Gamma})$, wobei

$$\vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \\ p_1 \\ \vdots \\ p_s \end{pmatrix} \tag{10.42}$$

einen Punkt im Phasenraum beschreibt.

Die Dynamik des Systems ist gegeben durch die kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\vec{\Gamma} \equiv \dot{\vec{\Gamma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_s} \\ -\frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ -\frac{\partial H}{\partial p_s} \end{pmatrix} =: \vec{F}(\vec{\Gamma}) \tag{10.43}$$

für die wir hier eine verkürzte Notation eingeführt haben. Für den Fall, dass $\vec{F}$ explizit zeitunabhängig ist, nennt man das System <u>autonom.</u>

Der Begriff der Ruhelage in einem Newtonschen System verallgemeinert sich auf den Begriff eines <u>Fixpunkts</u> $\vec{\Gamma}_*$ des Hamiltonschen Systems, der definiert ist durch

$$\frac{d}{dt}\vec{\Gamma}_* = \vec{F}(\vec{\Gamma}_*) = 0 \qquad (10.44)$$

Im Folgenden sei angenommen, dass unser Hamiltonsches System einen oder mehrere Fixpunkte hat.

Nun betrachten wir eine Trajektorie $\vec{\Gamma}(t)$, die für eine gewisse Zeit nahe an einem Fixpunkt vorbeiläuft und daher in diesem Zeitraum durch

$$\vec{\Gamma}(t) = \vec{\Gamma}_* + \delta\vec{\Gamma}(t) \qquad (10.45)$$

parametrisiert werden kann. Wegen $\dot{\vec{\Gamma}}_* = 0$ gilt

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{\Gamma}(t) = \frac{d}{dt}\vec{\Gamma}(t) = \vec{F}(\vec{\Gamma}_* + \delta\vec{\Gamma}(t)) \,. \qquad (10.46)$$

Wir beschränken uns nun auf die Trajektorien, bzw. die Zeiträume, für die eine linearisierte Beschreibung zu niedrigster Ordnung in $\delta\vec{\Gamma}(t)$ hinreichend genau ist;

für die i-te Komponente lautet dann die Zeitevolution

$$\frac{d}{dt}\delta\Gamma_i = F_i(\vec{\Gamma}_* + \delta\vec{\Gamma}) = \underbrace{F_i(\vec{\Gamma}_*)}_{=0} + \left.\frac{\partial F_i}{\partial \Gamma_j}\right|_{\vec{\Gamma}_*} \delta\Gamma_j + \mathcal{O}((\delta\Gamma)^2)$$

$$= B_{ij}\,\delta\Gamma_j + \mathcal{O}((\delta\Gamma)^2). \qquad (10.47)$$

Die Jacobi-Matrix B_{ij} heißt auch Stabilitätsmatrix.

Wir nehmen nun an, dass wir $\delta\Gamma_i$ durch Rechts-eigenvektoren von B_{ij} aufspannen können:

$$\delta\Gamma_j = c_A\,\gamma_{Aj} \qquad (10.48)$$

mit Koordinaten c_A und den Rechtseigenvektoren γ_{Ai} für die gilt:

$$B_{ij}\,\gamma_{Aj} = \lambda_A\,\gamma_{Ai}, \qquad (10.49)$$

mit den Eigenwerten λ_A. Diese heißen auch Lyapunov-Exponenten. (NB: da B_{ij} nicht notwendigerweise symmetrisch ist, müssen die λ_A nicht reell sein. I. A. sind $\lambda_A \in \mathbb{C}$. Auch folgt aus $B_{ij}\gamma_{Aj} = \lambda_A\gamma_{Ai}$ i. A. nicht, dass auch $\gamma_{Ai}B_{ij} = \lambda_A\gamma_{Ai}$. Die Eigenwerte λ_A lassen sich aber immer noch aus dem charakteristischen Polynom

$\det(B - \lambda \mathbb{1}) = 0$ bestimmen.)

Da für autonome Systeme $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ gilt, folgt ebenso $\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \gamma_{Ai}}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \lambda_A}{\partial t}$.

Die Bewegungsgleichung ist daher

$$\frac{d}{dt}\delta\Gamma_i = \dot{c}_A \gamma_{Ai} = c_A B_{ij} \gamma_{Aj} = c_A \lambda_A \gamma_{Ai} \tag{10.50}$$

Für linear unabhängige γ_{Ai} folgt daraus

$$\dot{c}_A = \lambda_A c_A \tag{10.51}$$

mit der Lösung

$$c_A(t) = c_A(0)\, e^{\lambda_A \cdot t} \tag{10.52}$$

Die Lyapunov-Exponenten erlauben es uns nun, die Fixpunkte und ihre Stabilitätseigenschaften zu klassifizieren:

(1) Alle λ_A haben negativen Realteil, $\mathrm{Re}\,\lambda_A < 0$

$\Rightarrow \quad c_A(t \to \infty) \to 0$

$\Rightarrow$ der Fixpunkt ist attraktiv $\vec{\Gamma}(t) \to \vec{\Gamma}_*$

$\Rightarrow$ alle Phasenraumtrajektorien in der Nähe des Fixpunktes werden in der Nähe des Fixpunktes "angezogen"

(2) mindestens ein λ_A hat positiven Realteil $\mathrm{Re}\,\lambda_A > 0$ für mindestens einen Eigenwert. Der Fixpunkt ist instabil,

$\Rightarrow$ es existieren Trajektorien, die sich exponentiell schnell vom Fixpunkt entfernen

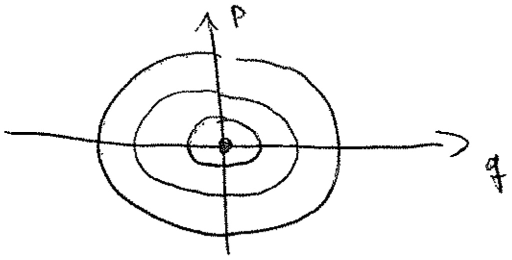
(3) mindestens ein Eigenwert hat Realteil $= 0$, alle anderen haben negativen Realteil.

Sei z.B $\lambda_1 = i\,\mathrm{Im}\,\lambda_1$, dann gibt es Trajektorien, die um den Fixpunkt oszillieren,

$$C_A(t) = C_1(0)\, e^{i|\lambda_1|t} \tag{10.53}$$

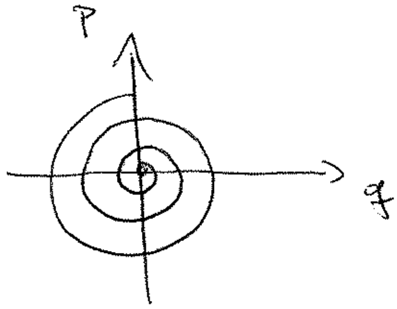
Ob der Fixpunkt wirklich stabil oder instabil ist entscheiden dann Terme der Ordnung $(\delta \bar{\Gamma})^2$.

Fall (3) mit sogar allen $\mathrm{Re}\,\lambda_A = 0$ kann in konservativen Systemen auftreten. Z.B. der harmonische Oszillator hat Phasenraum-Trajektorien, die Ellipsen entsprechen,



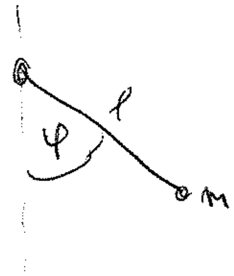
Der Fixpunkt $\Gamma_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt im Zentrum aller Ellipsen. Jede kleine Störung $\delta\Gamma$ führt zu oszillatorischem Verhalten, muss also dem Fall (10.53) entsprechen.

Fall (1) ist charakteristisch für dissipative Systeme wie z.B. dem harmonischen Oszillator mit Dämpfung



Eine kleine Störung $\delta\Gamma$ spiralisiert in den Fixpunkt $\Gamma_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Beispiel: mathematisches Pendel



$$H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi \tag{10.54}$$

Phasenraum: $\vec{\Gamma} = \begin{pmatrix} \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}$

Bewegungsgleichung:

$$\dot{\vec{\Gamma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} \\ -\frac{\partial H}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_\varphi}{ml^2} \\ -mgl\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{10.55}$$

Fixpunkte:

$$\vec{\Gamma}_{*,n} = \begin{pmatrix} n\pi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10.56}$$

Stabilitätsmatrix:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl\cos\varphi\big|_{\varphi=n\pi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ -mgl(-1)^n & 0 \end{pmatrix} \tag{10.57}$$

Eigenwerte (Lyapunov-Exponenten):

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{m\ell^2} \\ -mg\ell(-1)^n & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + \frac{g}{\ell}(-1)^n$$

$\Rightarrow \quad n = 0, 2, 4 \ldots \qquad \lambda_\pm^{\text{unten}} = \pm i \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \rightsquigarrow$ Fall (3)

$n = 1, 3, 5 \ldots \qquad \lambda_\pm^{\text{oben}} = \pm \sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad \rightsquigarrow$ Fall (2)
instabil