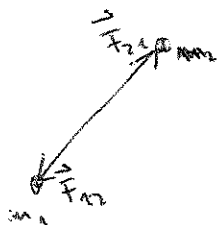


7 Mechanik eines Systems von Massenpunkten

Im Folgenden wollen wir ein allgemeines System von N Massenpunkten mit den Massen m_i , $i=1, \dots, N$ betrachten, die aufeinander Kräfte ausüben und zusätzlich unter dem Einfluss einer äußeren Kraft stehen $\vec{F}^{(e)}$. Die Überlegungen finden direkte Anwendung bei der Beschreibung von z.B. Kugelsternhaufen, Galaxienhaufen oder Simulationen der Verteilung von Dunkler Materie in Galaxien.

7.1 Schwerpunktsbewegung

Seien die Bahnkurven der Massenpunkte gegeben durch $\vec{x}_i(t)$. Die Kraft des i -ten Massenpunkts auf den j -ten sei \vec{F}_{ij} . Nach Newton III gilt



$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \text{ bzw. } \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0, \quad (7.1)$$

d.h. die inneren Kräfte heben sich paarweise auf.

Die äußere Kraft auf den i -ten Massenpunkt sei $\vec{F}_i^{(e)}$.

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} \quad (7.2)$$

Der Schwerpunkt des Systems ist (im Veralgemeinerung von (6.3)) definiert durch

$$\vec{X} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (7.3)$$

mit der Gesamtmasse M .

Die Summe der Bewegungsgleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i &= \sum_{i,j \neq i} \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} (\underbrace{\vec{F}_{ji} + \vec{F}_{ij}}_{\substack{\text{Index Umtausch} \\ \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \\ 0}}) + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Mit (6.48) lässt sich dies schreiben als

$$M \ddot{\vec{X}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} \quad (7.5)$$

Die inneren Kräfte heben sich also paarweise auf, und die Bewegung des Gesamtsystems ist durch die Bewegung des Schwerpunkts gegeben, an dem die Summe aller äußeren Kräfte angreifen. Wirken keine äußeren Kräfte, folgt

$$M \ddot{\vec{x}} = 0 \Rightarrow M \dot{\vec{x}} = \text{const} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{P}, \quad (7.6)$$

d.h. der Gesamtimpuls bleibt erhalten und die Schwerpunktsbewegung lautet

$$\dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{x}}_0 + \frac{\vec{P}}{M} (t - t_0) \quad (7.7)$$

7.2. Drehimpuls und Energie

Im Folgenden nehmen wir an, dass die inneren Kräfte längs der Verbindungslinie zwischen den Massenpunkten wirken,

$$\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{x}_i - \vec{x}_j), \quad \vec{F}_{ij} \times (\vec{x}_i - \vec{x}_j) = 0, \quad (7.8)$$

wie dies z.B. für Gravitationswechselwirkende Massenpunkte der Fall ist. Der Drehimpuls des i -ten Massenpunkts bezüglich des Koordinatenursprungs ist

$$\vec{L}_i = \vec{x}_i \times \vec{p}_i = m_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i). \quad (7.9)$$

Der Gesamt-drehimpuls ist folglich

$$\vec{L} := \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_i m_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i). \quad (7.10)$$

Die Zeitableitung des Drehimpulses ergibt

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i) = \sum_i (\vec{x}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}) + \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} (\vec{x}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{x}_j \times \vec{F}_{ij}) + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} \underbrace{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}_{\substack{(7.8) \\ = 0}} \times \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \\
 &= \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \tag{7.11}
 \end{aligned}$$

Innere Kräfte tragen also auch zum Gesamtdrehimpuls eines Systems von Massepunkten nicht bei.

Die rechte Seite von (7.11) definieren wir als

Gesamtdrehmoment

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)}, \tag{7.12}$$

so dass der Drehimpulsatz für ein System von Massepunkten lautet

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \tag{7.13}$$

Da der Drehimpuls von der Wahl des Koordinatenursprungs abhängt, gibt es ein günstiges Koordinatensystem, das durch das System, in dem der Schwerpunkt ruht, gegeben ist. Wir erhalten dieses Schwerpunktsystem (mit dem Schwerpunkt im Koordinatenursprung) durch die Transformation

$$\vec{x}_i \rightarrow \vec{x}'_i = \vec{x}_i - \vec{X}. \quad (7.14)$$

Aus der Definition des Schwerpunkts folgt

$$\sum_i m_i \vec{x}'_i = \sum_i m_i \vec{x}_i - M \vec{X} = \mathbf{0}, \quad (7.15)$$

und damit auch

$$\mathbf{0} = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}'_i \quad \text{mit} \quad \dot{\vec{x}}'_i = \dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}}. \quad (7.16)$$

D.h. der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem verschwindet, $\vec{P}' = \mathbf{0}$.

Der Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem lässt sich aus der Zerlegung des Drehimpulses im ursprünglichen System extrahieren:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{L}}} &= \sum_{i=1}^N (\vec{x}_i \times m_i \dot{\vec{x}}_i) = \sum_i m_i (\vec{X} + \vec{x}'_i) \times (\dot{\vec{X}} + \dot{\vec{x}}'_i) \\ &= \vec{X} \times M \dot{\vec{X}} + \vec{X} \times \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{x}}'_i}_{(7.16) = 0} + \sum_i m_i \vec{x}'_i \times \dot{\vec{X}} + \sum_i \vec{x}'_i \times m_i \dot{\vec{x}}'_i \\ &= \underline{\underline{\vec{X} \times M \dot{\vec{X}}}} + \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\vec{x}'_i \times m_i \dot{\vec{x}}'_i}} \quad (7.17) \end{aligned}$$

Der erste Term in (7.17) ist der Drehimpuls des Gesamt-systems bezüglich des Ursprungs und der zweite Term ist der innere Drehimpuls des Systems.

Im Folgenden nehmen wir zusätzlich an, dass die inneren und äußeren Kräfte Potentialkräfte seien, es sollen also Potentiale V_{ji} existieren, so dass

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ji} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|). \quad (7.18)$$

Die Potentiale erfüllen somit $V_{ji} = V_{ij}$, und wir definieren $V_{ii} = 0$. In (7.18) haben wir $\vec{\nabla}_i := \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i}$ verwendet. Für die äußeren Kräfte gelte entsprechend

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i). \quad (7.19)$$

Die Bewegungsgleichung für den i -ten Massenpunkt lautet man

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = - \sum_{j \neq i} \vec{\nabla}_i V_{ji} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) - \vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i) \quad (7.20)$$

Wir multiplizieren mit $\dot{\vec{x}}_i$ und summieren über alle

i :

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i + \sum_{i,j \neq i} \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ji} + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_i^{(e)} = 0, \quad (7.21)$$

was als totale Zeitableitung geschrieben werden kann

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) + \sum_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i) \right] = 0. \quad (7.22)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ im zweiten Term kommt aus folgender Überlegung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i,j} V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) &= \sum_{i,j} \left(\dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ji} + \dot{\vec{x}}_j \cdot \vec{\nabla}_j V_{ji} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left(\dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ji} + \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i \underbrace{V_{ij}}_{=V_{ji}} \right) = 2 \sum_{i,j} \left(\dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ji} \right) \end{aligned}$$

(Wegen $V_{ii} = 0$ kann die Einschränkung $j \neq i$ in der Summe fallen gelassen werden.)

Gleichung (7.22) entspricht dem Energiesatz für N -Teilchensysteme. Dabei ist

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \quad (7.23)$$

die gesamte kinetische Energie und

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ji} + \sum_i V_i^{(e)} \quad (7.24)$$

die gesamte potentielle Energie, und es gilt

$$E = T + V = \text{const.} \quad (7.25)$$

7.3 Elastische Zwei-Körper-Stöße

Im Zwei-Körper-Problem im Kapitel 6 haben wir die Konzepte Schwerpunkt, Drehimpuls und Energieerhaltung für N -Teilchensysteme bereits für den Spezialfall $N=2$ und insbesondere gebundene Zustände verwendet. Im Folgenden wollen wir für $N=2$ insbesondere die ungebundenen Stoß- oder Streuprozesse diskutieren. Wir führen diese Betrachtung unter zwei Grundannahmen durch

- 1) Der Stoßprozess verläuft elastisch, d.h. keine Energie geht in innere Anregungen, Deformationen, Reibung, etc. der Stoßteilchen. Die Energieerhaltung wird allein durch die kinetischen und potentiellen (aus der Wechselwirkung entstehenden) Energien getragen.
- 2) Die Wechselwirkung ist "kurzreichweitig", d.h. die potentiellen Energien der Wechselwirkung der Teilchen fallen mit zunehmender Distanz hinreichend schnell ab. Dadurch kann die Energieerhaltung bei "asymptotisch" großen Abständen allein auf Basis der kinetischen

Energien diskutiert werden. Beispiele für kurzreichweitige Wechselwirkungen sind Stoßprozesse (Metallkugeln, ...) mit Kontaktwechselwirkung. Hingegen wäre ein Wechselwirkungspotential $V_{ij} \sim |x_i - x_j|^2$ langreichweitig. Das Gravitations- oder Coulombpotential vom Typ $V(r) \sim \frac{1}{r}$ ist ein Grenzfall. Für die Überlegungen im folgenden Abschnitt dürfen wir es als hinreichend kurzreichweitig betrachten.

7.3.1 Erhaltungssätze

Gegeben seien zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 : ihre Geschwindigkeiten seien \vec{v}_1, \vec{v}_2 vor und \vec{v}'_1, \vec{v}'_2 nach dem Stoß. Abgesehen von der (kurzreichweitigen) wechselseitigen Wechselwirkung bewegen sich die Teilchen kräftefrei. Daher gilt der Impulserhaltungssatz:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2. \quad (7.26)$$

Die Energieerhaltung verlangt

$$\frac{m_1}{2} \vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2 = \frac{m_1}{2} \vec{v}'_1{}^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}'_2{}^2 \quad (7.27)$$

Die Erhaltungssätze werden im Schwerpunktsystem

besonders transparent. Die Koordinaten relativ zum Schwerpunkt lauten

$$\vec{x}_i' = \vec{x}_i - \vec{X}, \quad \vec{X} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2). \quad (7.28)$$

Der Abstand der Teilchen ist natürlich in beiden Systemen identisch

$$\vec{x}_1' - \vec{x}_2' = \vec{x}_1 - \vec{x}_2. \quad (7.29)$$

Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im Schwerpunktsystem

sind

$$\dot{\vec{x}}_i' = \dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}}, \quad \ddot{\vec{x}}_i' = \ddot{\vec{x}}_i - \ddot{\vec{X}} = \ddot{\vec{x}}_i = -\ddot{\vec{V}}_i' \sqrt{(|\vec{x}_1' - \vec{x}_2'|)} \quad (7.30)$$

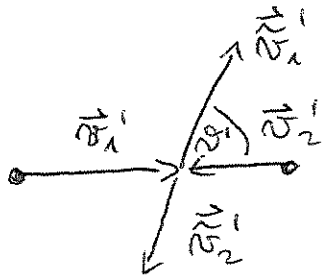
Im Schwerpunktsystem lauten die Erhaltungssätze

$$\frac{m_1}{2} \vec{v}_1'^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2'^2 = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1'^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2'^2 \quad (7.31)$$

$$m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' \stackrel{(7.16)}{=} \vec{0} \quad (7.32)$$

(der Gesamtimpuls verschwindet im Schwerpunktsystem, vgl. (7.16)). Damit folgt

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1' &= -m_2 \vec{v}_2' \\ m_1 \vec{v}_1' &= -m_2 \vec{v}_2' \end{aligned} \quad (7.33)$$



Skizze für die Zwei-Körper-Streuung im Schwerpunktsystem für den Fall $m_1 < m_2$.

Der Winkel zwischen Einfalls- und Ausfallsrichtung heißt Streuwinkel. Im Schwerpunktsystem ist er wegen (7.33) für beide Teilchen gleich.

(7.33) kann nun verwendet werden, um im Energiesatz \vec{v}_2^i und \vec{v}_2^f durch \vec{v}_1^i, \vec{v}_1^f auszu-drücken:

$$m_1 \vec{v}_1^i{}^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1^i \right)^2 = m_1 \vec{v}_1^f{}^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1^f \right)^2 \quad (7.34)$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_1^f| = |\vec{v}_1^i|, \quad |\vec{v}_2^f| = |\vec{v}_2^i|$$

Die Beträge der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß sind im Schwerpunktsystem also für beide Massepunkte gleich.

Damit sind die Erhaltungssätze ausgenutzt. Sie machen also keine Aussage über den Streuwinkel $0 \leq \vartheta' \leq \pi$. Dieser hängt von der Form des

Zwischen den Körpern herrschenden Kraftgesetz ab. Andersherum lässt sich aus der Vermessung des Streuwinkels Information über die Natur der Wechselwirkung erlangen.

7.3.2 Transformation des Streuwinkel

Zwar ist die theoretische Beschreibung des Streuprozesses im Schwerpunktsystem am einfachsten, allerdings wird der Streuwinkel i. A. im Laborsystem bestimmt. Wir benötigen also die Transformation des Streuwinkel zwischen den verschiedenen Systemen.

Betrachten wir zunächst den Fall, dass der Massepunkt m_2 im Laborsystem ruht, $\vec{v}_2 = 0$, dann gilt für den Schwerpunkt

$$\dot{\vec{X}} = \frac{m_1}{M} \vec{v}_1, \quad (7.35)$$

Daraus folgt

$$\dot{\vec{x}}_1 \equiv \vec{v}_1 = \dot{\vec{x}}_1' + \dot{\vec{X}} = \vec{v}_1' + \frac{m_1}{M} \vec{v}_1$$

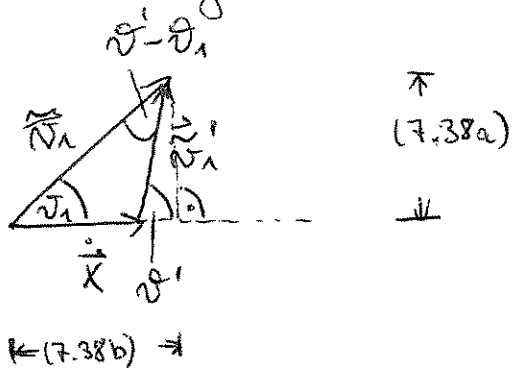
$$\Rightarrow \vec{v}_1' = \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) \vec{v}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}_1. \quad (7.36)$$

Entsprechend gilt für die Rücktransformation

nach dem Stoß

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{X} = \vec{v}_1' + \frac{m_1}{M} \vec{v}_1, \quad (7.37)$$

was sich im folgenden Bild verdeutlichen lässt:



Aus dem Bild lässt sich ablesen, dass

$$|\vec{v}_1| \sin \vartheta_1 = |\vec{v}_1'| \sin \vartheta' \quad (7.38a)$$

$$\begin{aligned} |\vec{v}_1| \cos \vartheta_1 &= \vec{X} + |\vec{v}_1'| \cos \vartheta' \\ &= \frac{m_1}{M} |\vec{v}_1| + |\vec{v}_1'| \cos \vartheta'. \end{aligned} \quad (7.38b)$$

Die Einfachheit halber schreiben wir $v_1 = |\vec{v}_1|$, etc.

Damit folgt für den Tangens des Streuwinkels im Laborsystem

$$\begin{aligned} \tan \vartheta_1 &= \frac{v_1' \sin \vartheta'}{v_1' \cos \vartheta' + \frac{m_1}{M} v_1} = \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + \frac{m_1}{m_2}} \quad (7.39) \\ &\stackrel{(7.36)}{=} \frac{m_1}{m_2} v_1' \stackrel{(7.34)}{=} \frac{m_1}{m_2} \tilde{v}_1' \end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Transformation des Streuwinkels.

Der Streuwinkel des zweiten (ruhenden) Massepunkts lässt sich direkt aus ϑ' rekonstruieren, siehe unten.

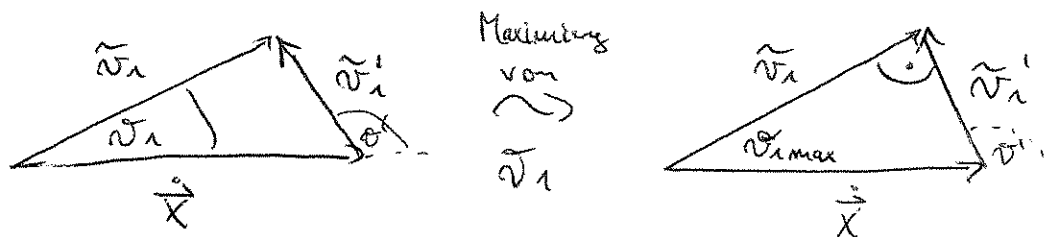
Betrachten wir (7.38) zunächst für verschiedene Limits:

- Für $m_1 \ll m_2$ gilt $\tan \vartheta_1 \approx \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta'} = \tan \vartheta'$

$$\Rightarrow \vartheta_1 \approx \vartheta' \quad (7.40)$$

- für $m_1 < m_2$ sind alle Streuwinkel erlaubt: $0 \leq \vartheta_1 \leq \pi$

- für $m_1 \geq m_2$ gibt es einen maximalen Streuwinkel



mit $|\vec{X}| = \frac{m_1}{M} v_1 = \frac{m_1}{m_2} \tilde{v}_1'$ folgt

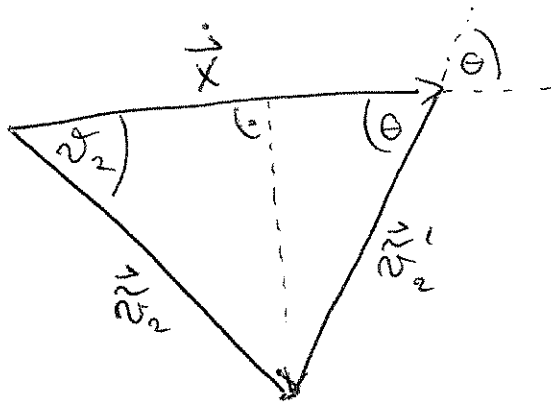
$$\underline{\underline{\sin \vartheta_{1\max} = \frac{\tilde{v}_1'}{|\vec{X}|} = \frac{m_2}{m_1}}} \quad (7.41)$$

- Für $m_1 = m_2$ ist

$$\tan \vartheta_1 = \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + 1} = \tan \frac{\vartheta'}{2}, \quad (7.42)$$

so dass $\vartheta_1 = \frac{\vartheta'}{2}$ folgt.

Der Streuwinkel von m_2 folgt aus der Skizze



$$\Rightarrow \tilde{v}_2 \sin \vartheta_2 = \tilde{v}_2' \sin \vartheta' \quad (7.43)$$

$$\tilde{v}_2 \cos \vartheta_2 = |\vec{x}| - \tilde{v}_2' \cos \vartheta'$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar (üA)

$$\vartheta_2 = \frac{\pi - \vartheta'}{2} \quad (7.44)$$

7.3.3 Beispiel: Energieübertrag bei elastischer Streuung

Als Beispiel betrachten wir ein Neutron der Masse m , welches an einem Kern der Masse $A m$ elastisch streut.

Der Kern ruhe im Laborsystem im Ursprung ($\vec{v}_2 = 0$).

Die kinetischen Energien des Neutrons vor und nach dem Stoß sind

$$T = \frac{m}{2} \vec{v}_1^2 \quad \text{bzw.} \quad \tilde{T} = \frac{m}{2} \tilde{v}_1^2 \quad (7.45)$$

Es gilt (nach dem Stoß)

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1^2 &= \left(\vec{v}_1' + \dot{X} \right)^2 \stackrel{(7.35)}{=} \left(\vec{v}_1' + \frac{1}{1+A} \vec{v}_1 \right)^2 \\ &= \vec{v}_1'^2 + \frac{2}{1+A} |\vec{v}_1'| |\vec{v}_1| \cos \vartheta' + \frac{\vec{v}_1^2}{(1+A)^2} \end{aligned} \quad (7.46)$$

Aus der Energieerhaltung folgt zudem

$$\tilde{v}_1^2 = \vec{v}_1'^2 \stackrel{(7.36)}{=} \left(\frac{m_2}{m} \right)^2 \vec{v}_1^2 = \left(\frac{A}{1+A} \right)^2 \vec{v}_1^2. \quad (7.47)$$

$$\stackrel{(7.46)}{\Rightarrow} \tilde{v}_1^2 = \vec{v}_1^2 \left(1 + \frac{2A}{(1+A)^2} (\cos \vartheta' - 1) \right) \quad (7.48)$$

Damit erhalten wir für die Änderung der kinetischen

Energie des Neutrons (bezogen auf die Ausgangsenergie)

$$\frac{T-T'}{T} = 1 - \frac{v_1^2}{v_1'^2} = \frac{2A}{(1+A)^2} (1 - \cos \vartheta') \quad (7.49)$$

Wenn wir (ohne die Details des Wechselwirkungs zu kennen) der Einfachheit halber annehmen, dass die Streuwinkel im Schwerpunktsystem gleichverteilt sind (wie z.B. für harte Kugeln), erhalten wir für den mittleren relativen Energieverlust des Neutrons

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{T-T'}{T} \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \frac{2A}{(1+A)^2} (1 - \cos \vartheta') \sin \vartheta' \\ &= \frac{A}{(1+A)^2} \int_{-1}^1 du (1-u) du = \frac{2A}{(1+A)^2} \end{aligned} \quad (7.50)$$

Der Energieverlust wird maximal für $A=1$, d.h. die Streuung von Neutronen an Atomkernen brast die Neutronen dann am effektivsten, wenn die Atomkerne möglichst leicht sind. Dies macht man sich z.B. bei der Neutronenmoderation z.B. mit Wasser oder Paraffin zunutze.

7.4 Rutherford Streuung

Ein wichtiges Beispiel für die Streuung eines Massepunkts an einem Zentralkraftpotential ist durch die Rutherford'sche Streuformel gegeben, bei der das Zentralkraftpotential der Coulomb-Kraft entspricht, die ebenso wie die Gravitation ein Kraftgesetz der Form $F \sim \frac{1}{r^2}$ erfüllt.

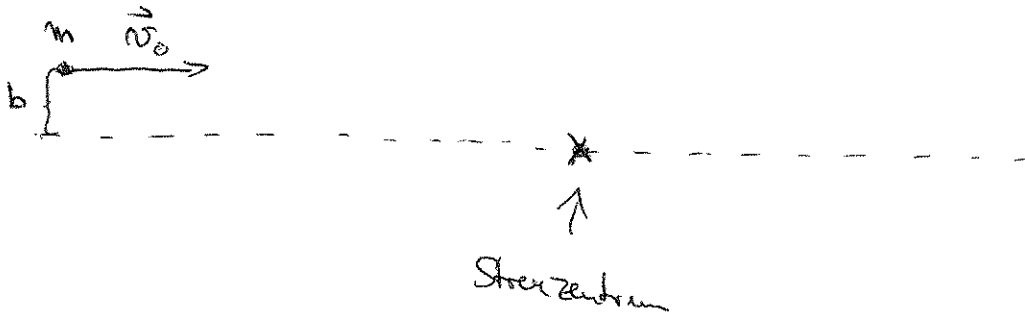
Die Anwendung dieser Streuformel auf die Streuung von α -Teilchen an Goldatomen (in einer Folie) hat erheblich zum modernen Verständnis des Aufbaus der Atome beigetragen.

7.4.1 Streuwinkel

Wir betrachten ein Teilchen (Teilchenstrahl), das an einem Zentralkraftpotential der Form $U \sim \frac{1}{r}$ gestreut wird. Die Streuung sei elastisch, so dass Energie und Drehimpuls erhalten sind

$$E = \frac{m}{2} v_0^2, \quad L_z = b m v_0 \equiv \ell \quad (7.51)$$

wobei m die Masse des Teilchens, v_0 die asymptotische Anfangsgeschwindigkeit (bei Abstand $\rightarrow \infty$ vom Streuzentrum) und b der Stoßparameter (impact parameter) sei.



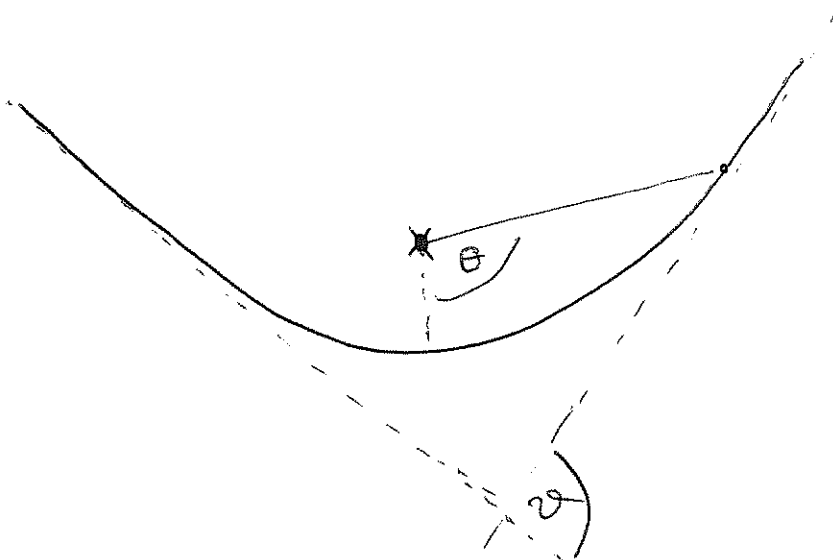
Dieses Problem entspricht dem Kepler-Problem $U = -\frac{k}{r}$ für den Fall $E > 0$, d.h. die Bahnkurve ist eine Hyperbel. Wir nehmen zusätzlich an, dass das Streuzentrum in Ruhe bleibt, dass also der Rückstoß vernachlässigbar ist.

Die Hyperbel erfüllt die Gleichung

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (7.52)$$

mit

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{2l^2 E}{k^2 m} \right]^{1/2} > 0 \quad (7.53)$$



Für asymptotische Abstände $r \rightarrow \infty$ geht der Polwinkel der Hyperbel gegen

$$\theta_{\max} \stackrel{(7.52)}{\rightarrow} \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (7.54)$$

Aus der Skizze wird ersichtlich, dass dieser Winkel direkt mit dem Streuwinkel \mathcal{D} über

$$\mathcal{D} = 2\theta_{\max} - \pi \quad (7.55)$$

zusammenhängt. Der Streuwinkel erfüllt somit

$$\underline{\underline{\sin \frac{\mathcal{D}}{2} = \sin\left(\theta_{\max} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta_{\max} = \frac{1}{\varepsilon}}} \quad (7.56)$$

Die Exzentrizität ε lässt sich über die Erhaltungsgrößen (7.51) mit dem Stoßparameter in Verbindung bringen:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{(b m v_0^2)^2}{k^2}\right)^{1/2} \quad (7.57)$$

Mit (7.56) ergibt sich ein Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter und dem Streuwinkel

$$b^2 = \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{\mathcal{D}}{2}} - 1\right) \frac{k^2}{m^2 v_0^4} \quad (7.58)$$

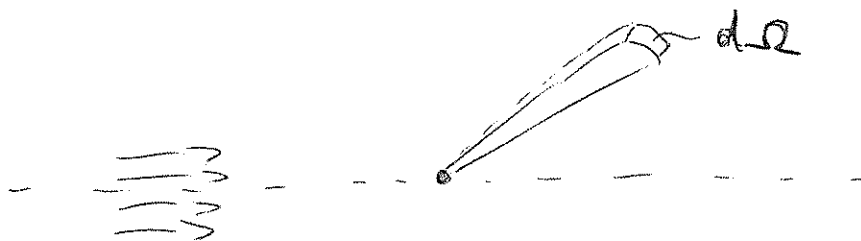
7.4.2 Streuquerschnitt

Gleichung (7.58) liefert basierend auf dem fundamentalen Input der zugrundeliegenden Wechselwirkung eine Vorhersage für den Streuwinkel als Funktion der Parameter b und v_0 , die die Anfangsbedingungen des Streuprozesses charakterisieren. Während v_0 vergleichsweise präzise bestimmt werden kann, ist der Stoßparameter für Streuprozesse auf atomaren Skalen keine gute Beobachtungsgröße, da die beteiligten Streupartikel nicht genügend gut lokalisiert werden können.

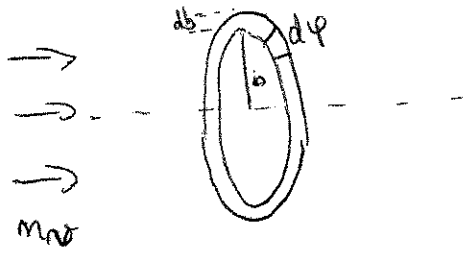
Eine direkte Beobachtungsgröße ist der differenzielle Wirkungsquerschnitt, der definiert ist durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega = \frac{\text{Anzahl der pro Zeit in das Raumwinkel-element } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{Anzahl der pro Zeit einlaufenden Teilchen}} \quad (7.59)$$

(NB: die "Teilchenanzahl pro Zeit" kann man auch als Teilchenstrom auffassen.)



Die Anzahl der pro Zeit gestreuten Teilchen, die innerhalb eines Kreissegments $(b, b+db) d\varphi$ einfallen



die Betragstriche berücksichtigen, dass die Teilchenzahl positiv sein muss.

$$\text{ist } m_v b db d\varphi = m_v b \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta d\varphi, \quad (7.60)$$

wobei m_v die Anzahl der einfallenden Teilchen pro Volumen und Zeit ist. Es folgt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega = \frac{m_v b \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta d\varphi}{m_v} = b \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \underbrace{\sin^2 \vartheta d\vartheta d\varphi}_{= d\Omega}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d\sigma}{d\Omega} = b \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| \frac{1}{\sin^2 \vartheta}}} \quad (7.61)$$

$$\stackrel{(7.58)}{=} \frac{k^2}{2m^2 v_0^4} \frac{\cos \frac{\vartheta}{2}}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2} \sin^2 \vartheta}$$

$$= \underline{\underline{\frac{k^2}{4(E)^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}}}} \quad (7.62)$$

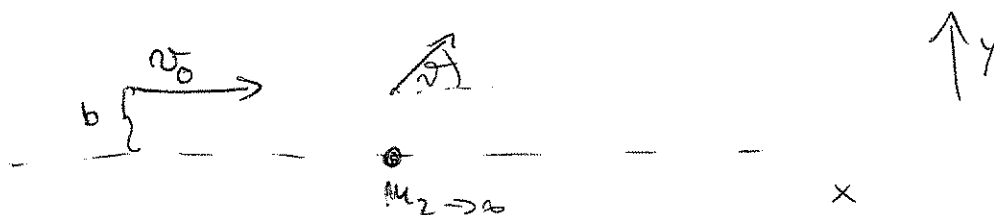
Für die Streuung von Elektronen an Kernen der Ladungszahl Z ist $k = Ze^2$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{4(2E)^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \quad (7.63)$$

Rutherford'sche Streuformel

7.4.3 Streuung unter kleinen Winkeln

Im Limes kleine "Ablenkungen", d.h. kleiner Streuwinkel, vereinfacht sich die Berechnung des Wirkungsquerschnitts. Physikalisch entspricht dies z.B. Streuung bei großen Stoßparametern. In diesem Limes vernachlässigen wir wie im vorhergehenden Abschnitt den Rückstoß von m_2 . Formal kann dies durch den Limes $m_2 \rightarrow \infty$ implementiert werden. Die Berechnung kann komplett im Laborsystem durchgeführt werden (was im Postulaten Limes $m_2 \rightarrow \infty$ mit dem Schwerpunktsystem identisch ist).



Für die y -Komponente der Geschwindigkeit von m_1 gilt der einfache Zusammenhang

$$\tilde{v}_y = v_0 \sin \vartheta \approx v_0 \vartheta \quad \vartheta \ll 1 \quad (7.64)$$

Allgemein gilt für die y -Komponente

$$m_1 \tilde{v}_y = \int_{-\infty}^{\infty} dt F_y, \quad (7.65)$$

wobei

$$F_y = - \frac{\partial V}{\partial y} \stackrel{\text{Zentralkraft}}{=} - \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = - \frac{dV}{dr} \frac{y}{r}. \quad (7.66)$$

Die Annahme $\vartheta \ll 1$ impliziert, dass auch F_y eine "kleine" Größe ist. Daher ist die weitere Näherung gerechtfertigt, dass das Integral (7.65) entlang der ungestörten Bahn ausgedehnt werden kann ($dt = \frac{dx}{v_0}$)

$$m_1 \tilde{v}_y \stackrel{y=b}{\approx} - \frac{b}{v_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dV}{dr} \frac{dx}{r} \quad (7.66)$$

Mit $r^2 = b^2 + x^2$, $r dr = x dx$ und

$$\frac{dx}{r} = \frac{r}{x} \frac{dr}{r} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}}, \quad (7.67)$$

folgt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vartheta}} &= -\frac{1}{v_0 m_1} \frac{b}{v_0} 2 \int_b^{\infty} \frac{dV}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \\ &= -\frac{2b}{m_1 v_0^2} \int_b^{\infty} \frac{dV}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} . \end{aligned} \quad (7.68)$$

Für allgemeine Potentiale $V(r)$ liefert (7.68) einen Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel (im Limes kleiner Streuwinkel), womit mittels (7.61)

$$\underline{\underline{\frac{d\sigma}{d\Omega}}} = b \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| \frac{1}{\sin \vartheta} \approx \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right| \underline{\underline{\frac{b}{\vartheta}}} \quad (7.69)$$

der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet werden kann.

7.44 Beispiel: Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld

Im Rahmen einer (Newton'schen) korpuskularen Vorstellung von der Natur des Lichtes (Licht als "Teilchenstrom") kann man (7.68) verwenden, um eine klassische Abschätzung der Ablenkung von Licht z.B. im Gravitationsfeld der Sonne zu erhalten. Der Limes $m_2 \rightarrow \infty$ ist für

$m_2 = m_{\text{sonne}}$ und $m_1 = m_{\text{Lichtteilchen}}$ sicherlich
 sehr gut erfüllt. Ebenso erwarten wir wegen der
 Schwäche der Gravitation sehr kleine Streuwinkel.

Mit $V = -\frac{G m_1 m_2}{r}$ ergibt sich aus (7.68):

$$\mathcal{J} = -\frac{2b G m_1 m_2}{m_1 v_0^2} \int_b^{\infty} \frac{1}{r^2 \sqrt{r^2 - b^2}} dr$$

$$v_0 = c \quad \uparrow = -\frac{2G m_2 b}{c^2} \left. \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{r} \right|_b^{\infty} = -\frac{2G m_2}{c^2 b} \quad (7.70)$$

Lichtgeschwindigkeit

Der Streuwinkel ist negativ, da das Licht zur Sonne
 hingelenkt wird. Wir definieren den Schwarzschild-Radius

$$R_S = \frac{2G m_2}{c^2} \quad (7.71)$$

als eine der Masse m_2 durch die Gravitation zu-
 geordnete charakteristische Längenskala. Damit folgt

$$\mathcal{J} = -\frac{R_S}{b} \quad (7.72)$$

Diese klassische Abschätzung führt zwar qualitativ zum richtigen Ergebnis. Quantitativ und vollständig kann die Analyse allerdings erst in der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) durchgeführt werden. Das Ergebnis ist genau das Doppelte der Newtonschen Vorhersage

$$\delta = \frac{2R_s}{b} \quad (7.73)$$

Mit $m_2 = m_{\text{sonne}} \approx 2 \cdot 10^{33} \text{ kg}$ ergibt sich der Schwarzschildradius der Sonne zu

$$R_{s, \odot} = 3 \text{ km} \quad (7.74)$$

Ein Lichtstrahl der genau am Sonnenrand bei

$b = 696\,000 \text{ km}$ die Sonne passiert, wird

nach (7.73) um $\delta = 1,7''$ abgelenkt. Dieser

Wert wurde (im Rahmen der erreichbaren Präzision)

1919 während einer Sonnenfinsternis nachgewiesen.