Theoretische Mechanik

Holger Gies

TPI, FSU Jena

Vorlesungsnotizen

1. Einführung

Mechanik liefert die Beschreibung der Dynamik (Bewegungslehre) von Teilchen (Massepunkte, starre Körper, Vielteilchensysteme) unter dem Einfluss von äußeren oder wechselseitigen Kräften.
Die theoretische Mechanik als Teilgebiet der theoretischen Physik versucht die Vielfalt an Erfahrungstatsachen (Experimente) durch möglichst fundamentale Gesetze mit wenigen Grundbegriffen zu beschreiben.
Die im Rahmen der klassischen Mechanik eingeführten Begriffe von Raum, Zeit, Kraft, Impuls, Energie, Wirkung, ... haben darüber hinaus in nahezu allen Teildisziplinen der Physik wichtige Bedeutung erlangt. Die Konzepte der theoretischen Mechanik sind daher von grundlegender Bedeutung für die gesamte Physik.

Historisch gaben Galileis Fallversuche und Tycho Brahes Messungen der Marsbahn wichtige Anstöße zur Entwicklung der klassischen Mechanik.

Brahes Beobachtungen und ihre gesetzmäßige Zusammenfassung durch Johannes Kepler wiederum waren wichtige Meilensteine für das auf Isaac Newton zurückgehende Gravitationsgesetz sowie das von ihm entwickelte System von Axiomen der klassischen Mechanik. Wichtige Beiträge zum Gravitationsgesetz kamen zur gleichen Zeit von Robert Hooke.

Newtons Konzepte wurden wesentlich durch Leonhard Euler in die uns heute vertraute Form gebracht.

Wichtige später folgende formale Entwicklungen in der Mechanik sind verknüpft mit den Namen Lagrange, d'Alembert, Hamilton, Poincaré und weitere.

Der Entwicklung und Anwendung der physikalischen Gesetze liegen oft Idealisierungen zugrunde. Im folgenden kommen zwei Arten von Idealisierungen zum Tragen:

- Idealisierungen, die wesentliche von unwesentlichen Eigenschaften unterscheiden
  (z.B. Vernachlässigung von Reibung, endliche Ausdehnung von Massepunkten, nicht-ideale Inertialsysteme, usw.)

- Idealisierungen, um im Rahmen der Gültigkeitsgrenzen der klassischen Mechanik zu bleiben. So stößt die klassische Mechanik an ihre Grenzen,

  - wenn schnell bewegte Körper beteiligt sind (nahe der Lichtgeschwindigkeit), so dass speziell relativistische Effekte berücksichtigt werden müssen und die Begriffe vom absoluten Raum und absoluter Zeit ihre Bedeutung verlieren

  - wenn Teilchen und Kräfte bei atomaren Abständen betrachtet werden und quantenmechanische Effekte wichtig werden (genauer: wenn Wirkungen von der Ordnung des Planckschen Wirkungsquantums sind)

  - wenn sehr große Massen und/oder Energiedichten betrachtet werden und daher der Euklidsche Raum durch eine gekrümmte Raumzeit beschrieben durch die allgemeine Relativitätstheorie ersetzt werden muss.

1.1 Mathematische Vorbemerkungen

Die Mechanik und die zugehörige Mathematik (z.B. Differentialrechnung, Variationsrechnung) haben sich oft parallel entwickelt. Ähnlich soll in dieser Vorlesung die notwendige Mathematik aus der Physik heraus motiviert werden.
Vor der Diskussion der Newtonschen Mechanik seien daher die Konzepte von Raum und Zeit eingeführt.

Reduzieren wir einen Körper auf einen Massepunkt (ohne räumliche Ausdehnung), so ist die Position dieses Körpers im Raum durch einen Punkt P charakterisiert. Zur Bestimmung der Position von Punkten relativ zueinander benötigen wir Maßstäbe $\vec{s}$ (z.B. Urmeter, Zollstock, usw). Maßstäbe verknüpfen einen Anfangs- und einen Endpunkt. Maßstäbe tragen also eine Abstands- und eine Richtungsinformation. Maßstäbe können (auch in verschiedene Richtungen zeigend) addiert werden – z.B. durch aneinanderkleben von Zollstöcken – und bilden dadurch neue Maßstäbe

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \vec{S} . \qquad (1.1)$$

Maßstäbe können vervielfacht werden

$$\vec{s} \Rightarrow a\,\vec{s} \qquad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R} . \qquad (1.2)$$

Die Vervielfachung ist distributiv im Faktor a als auch bezüglich der Maßstäbe, d.h.

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)\,\vec{s} &= a_1 \vec{s} + a_2 \vec{s} \\ a(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) &= a\vec{s}_1 + a\vec{s}_2 \end{aligned} \qquad (1.3)$$

(was im "Zollstock"-Bild unmittelbar einsichtig ist).
Diese Regeln bedeuten, daß Maßstäbe einen <u>Vektorraum</u> über $\mathbb{R}$ bilden.
Maßstäbe sind <u>linear unabhängig</u>, falls keiner der Maßstäbe als Linearkombination der übrigen Maßstäbe darstellbar ist. In $d=3$ Dimensionen kann man immer 3 linear unabhängige Maßstäbe finden (mehr als 3 Maßstäbe sind immer linear abhängig).

Ein solches linear unabhängiges Tripel von Maßstäben $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bildet eine <u>Basis</u> des 3-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^3$, so dass jeder weitere Maßstab darstellbar ist als

$$\begin{aligned} \vec{s} &= s_1 \vec{e}_1 + s_2 \vec{e}_2 + s_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} s_i \vec{e}_i \\ &\equiv s_i \vec{e}_i \end{aligned} \qquad (1.4)$$

wobei wir im letzten Schritt die Einstein Summen-Konvention verwendet haben, nach der über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

Von besonderer Bedeutung für die Physik sind Längen- und Winkelmessungen, also die metrischen Eigenschaften des Raums. Mathematisch lassen sich diese am besten mit Hilfe des Skalarproduktes (inneres Produkt) zweier Maßstäbe beschreiben.

Längenmessungen können allerdings nicht absolut, sondern nur relativ zu einem skalendefinierenden Einheits-maßstab $\vec{e}$ durchgeführt werden, welcher per definition die Länge

$$l(\vec{e}) = 1 \tag{1.5}$$

habe. Die Länge $l(\vec{s})$ eines Maßstabs $\vec{s}$ definieren wir dann operativ durch den Faktor

$$\vec{s} =: l \, \vec{e} \tag{1.6}$$

welcher sich ergibt, wenn sichergestellt ist, dass $\vec{s}$ und $\vec{e}$ in die gleiche Richtung zeigen (parallel sind). Es gilt dann

$$l(\vec{s}) \geq 0 . \tag{1.7}$$

Diese Länge wird mathematisch auch als Norm bezeichnet

$$l(\vec{s}) = \|\vec{s}\| \tag{1.8}$$

(oder auch abkürzend $= |\vec{s}|$).

Wir definieren das Skalarprodukt zwischen zwei Maßstäben (Vektoren) als Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \tag{1.9}$$

durch

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 := l_1\, l_2 \cos\varphi \tag{1.10}$$

wobei $l_i = l(\vec{s}_i)$ und φ den Winkel zwischen zwei Maßstäben bezeichnet, deren Anfangspunkte zur Deckung gebracht worden sind. Das Skalarprodukt ist eine symmetrische und positive Bilinearform auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Aus seiner Definition folgen die Eigenschaften

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_1 \qquad \text{(symmetrisch)}$$

$$\vec{s} \cdot (a_1 \vec{s}_1 + a_2 \vec{s}_2) = a_1\, \vec{s} \cdot \vec{s}_1 + a_2\, \vec{s} \cdot \vec{s}_2 \quad \text{(bilinear)}$$

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = l^2(\vec{s}) = \|\vec{s}\|^2 > 0 \quad \text{oder} \quad \vec{s} = \vec{0}\,, \tag{1.11}$$

wobei $\vec{0}$ den Nullvektor (Nullelement unter Addition,

$\vec{S} + \vec{0} = \vec{S}$) bezeichnet.

Ist $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ eine Basis, dann gilt für einen beliebigen Vektor $\vec{S} = s_i \vec{e}_i$,

$$\|\vec{S}\|^2 = \vec{S} \cdot \vec{S} = \sum_{ij} s_i s_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \equiv s_i s_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \qquad (1.12)$$

Bislang haben wir mit Ausnahme der linearen Unabhängigkeit keine weiteren Forderungen an die Basis gestellt. Dies impliziert auch, dass die Komponenten s_i abhängig von der Wahl der Basis sind. Von besonderer Bedeutung sind <u>orthonormierte</u> Basen mit der Eigenschaft

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad , \quad i,j = 1,2,3 \qquad (1.13)$$

und dem Kronecker Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} . \qquad (1.14)$$

Für orthonormierte Basen gilt

$$\|\vec{s}\|^2 = \vec{S} \cdot \vec{S} = \sum_i s_i^2 , \qquad (1.15)$$

und die Komponenten sind entsprechend direkt berechenbar:

$$S_i = \hat{e}_i \cdot \vec{s}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{s} = \sum_i (\hat{e}_i \cdot \vec{s})\, \hat{e}_i \qquad (1.16)$$

Es ergibt sich eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen Vektoren und Koordinatentripeln

$$\vec{s} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \qquad (1.17)$$

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ definieren einen weiteren (Pseudo-) Vektor $\vec{s}$ durch das bilineare schiefsymmetrische Produkt (Kreuzprodukt, äußeres Produkt)

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad (1.18)$$

was einer Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ entspricht.

Das Kreuzprodukt wird definiert durch

1) $\|\vec{s}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\, \|\vec{b}\| \sin\phi$

2) Für $\|\vec{s}\| \neq 0$ definieren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{s})$ ein rechtshändig (positiv orientiertes) Tripel und es gilt $\vec{a} \perp \vec{s}$, $\vec{b} \perp \vec{s}$ (1.19)

1) legt die Länge und 2) die Richtung des Kreuzprodukts

$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$ eindeutig fest.

Rechtshändigkeit bedeutet für eine Basis $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$,

dass

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \quad , \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \quad , \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \qquad (1.20)$$

Eine orthonormierte rechthändige Basis heißt auch

Kartesisch. Im Folgenden werden wir mit $\{\hat{e}_i\}$

immer eine kartesische Basis bezeichnen.

Aus der Definition des Kreuzprodukts folgt

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \, . \qquad (1.21)$$

Mit $\vec{a} = a_i \hat{e}_i$ und $\vec{b} = b_i \hat{e}_i$ gilt für eine kartesische Basis mit (1.20):

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{e}_3 \, . \qquad (1.22)$$

Folgende Identitäten gelten:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \qquad \text{(Jacobi)} \qquad (1.23)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(Lagrange)

Diese Identitäten lassen sich effizient mit Hilfe des Levi - Civita - Symbols nachweisen, ε_{ijk}. Dieses ist definiert durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1 \\ \varepsilon_{ijk} &= 0 \qquad \text{sonst.} \end{aligned} \tag{1.24}$$

D.h. ε_{ijk} ist total antisymmetrisch in allen Indizes,

$= 1$ für gerade Permutationen von $(1,2,3)$ und

$= -1$ " ungerade " " ".

Es folgt z.B., dass $\varepsilon_{iij} = \varepsilon_{iji} = \varepsilon_{jii} = 0$.

Besonders nützlich ist folgende Identität

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}\,, \tag{1.25}$$

die sich für alle $j,k,l,m = 1,2,3$ durch direktes Nachrechnen verifizieren lässt.

Mit Hilfe von ε_{ijk} gilt für das Kreuzprodukt komponentenweise

$$s_i = (\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k\,. \tag{1.26}$$

Schließlich definieren wir das Spatprodukt 3-er Vektoren ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k c_i = \varepsilon_{jki} a_j b_k c_i$$
$$= \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k \qquad (1.27)$$

(im 2. Schritt haben wir die Permutationssymmetrie von ε_{ijk} benutzt, im 3. Schritt die Summationsindizes umbenannt $j \to i$, $k \to j$, $i \to k$.)

Die zuvor durchgeführte Definition von Maßstäben (Vektoren) und ihren Eigenschaften erlaubt uns nun auch eine Vermessung von Punkten und ihren Abständen. Sei $\mathcal{O}$ ein fester Raumpunkt ("Ursprung") und P ein beliebiger weiterer Punkt. Dann heißt der Maßstab der von $\mathcal{O}$ nach P zeigt

$$\vec{r}(P) = \overrightarrow{\mathcal{O}P} \qquad (1.28)$$

<u>Ortsvektor</u> von P. Bezüglich einer kartesischen Basis $\{\hat{e}_i\}$ sind die Komponenten $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$\vec{r}(P) = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \qquad (1.29)$$

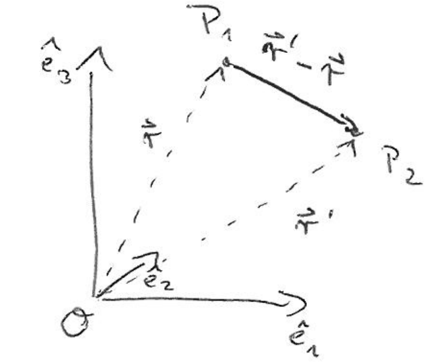
die Kartesischen Koordinaten von P bezüglich O und $\{\hat{e}_i\}$.

Der Abstand zwischen O und P ist gleich der Länge des Vektors $\vec{r}$, $\|\vec{r}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

(Wir werden im Folgenden auch oft die Bezeichnung $(x_1, x_2, x_3) \to (x, y, z)$ verwenden).

Entsprechend ist der Abstand zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 mit

$$\vec{r}(P_1) = \overrightarrow{OP_1} = x_i \hat{e}_i$$
$$\vec{r}'(P_2) = \overrightarrow{OP_2} = x_i' \hat{e}_i$$



gegeben durch

$$\|\vec{r}' - \vec{r}\| = \left\{ \sum_{i=1}^{3} (x_i' - x_i)^2 \right\}^{1/2} \tag{1.30}$$

Es ist anschaulich klar, dass dieser Abstand sowohl unabhängig von der Wahl des Ursprungs O ist als auch unabhängig von der Ausrichtung und Orientierung der Basis $\{\hat{e}_i\}$.

Damit ist der hier beschriebene Vektorraum

(Euklidscher Raum) homogen und isotrop.

Diese Eigenschaften des Raumes sind implizite Grundannahmen hinter dem Newton'schen Axiomensystem der Mechanik. Physikalisch ausgedrückt: ein Experiment in einem abgeschlossenen System führt immer zum gleichen Resultat, unabhängig davon wo das System sich befindet und wie es orientiert ist.

Eine gleiche Grundannahme der Homogenität gilt für die Zeit. Experimente in abgeschlossenen Systemen bei gleichen Anfangsbedingungen sollen unabhängig davon sein, wann das Experiment durchgeführt wird.

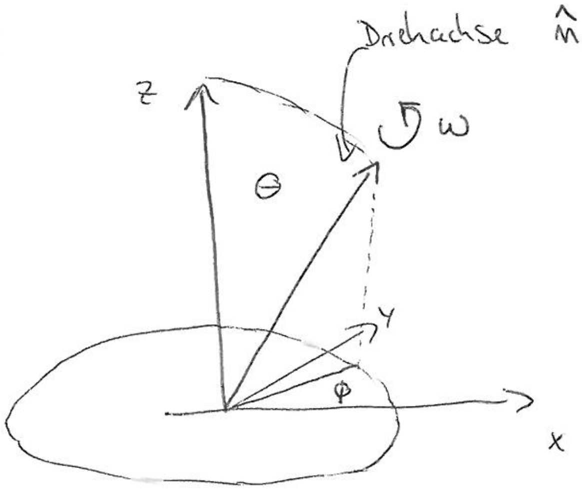
Dadurch werden bereits einige Invarianzeigenschaften der klassischen Mechanik deutlich: abgeschlossene Systeme der kl. Mechanik sind invariant unter

- Zeitverschiebung
- Raumtranslationen
- Raumdrehungen

Zeit- und Raumtranslationen bilden zusammen eine 4-parametrige Schaar von Invarianzen

$$
\begin{aligned}
t &\to t + t_a \quad , \; t_a = \text{const} \\
\vec{r} &\to \vec{r} + \vec{a} \quad , \; \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \text{const}
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

Raumdrehungen bilden eine weitere 3-parametrige Schaar. Dies sieht man z. B. an folgender Parametrisierung



Die Drehachse in Richtung $\hat{n}$ wird durch 2 Winkel parametrisiert: dem Polarwinkel Θ zwischen Drehachse und z-Achse und dem Azimuthalwinkel ϕ, gegeben durch den Winkel zwischen x-Achse und der Projektion der Drehachse auf die x,y-Ebene.

Der dritte Parameter ist gegeben durch den eigentlichen Drehwinkel ω.

Translationen und Drehungen bilden also eine 7-parametrige Schaar von Symmetrietransformationen der klassischen Mechanik. Wir werden im Folgenden zeigen, dass es noch eine weitere 3-parametrige Schaar gibt. Die sich dann ergebende 10-parametrige Schaar von Symmetrietransformationen heißen auch <u>Galilei</u>-<u>Transformationen</u>.