

9. Aspekte der Quantenelektrodynamik (QED)

Quantenelektrodynamik (QED) ist die Theorie eines Dirac-spinoriellen Materiefeldes — des Elektron — welches über den Austausch von Photonen wechselwirkt. QED liefert somit die mikroskopische Grundlage für Licht-Materie-Wechselwirkungen.

Ihr feldtheoretischer Inhalt wird beschrieben durch den Lagrangian

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (9.1)$$

wobei

$$D_\mu \equiv D_\mu[A] = \partial_\mu + ieA_\mu(x) \quad (9.2)$$

die eichkovariante Ableitung bezeichnet, welche die "minimale Kopplung" zwischen Elektronen und Photonen beschreibt

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass der Photon kinetische Term $\sim F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ invariant unter lokalen Transformationen des Photonfeldes ist

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \quad (9.3)$$

Diese Invarianz gilt auch für die volle QED, wobei die Dirac-Felder der lokalen Transformation

$$\psi(x) \rightarrow e^{-i\lambda(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\lambda(x)} \quad (9.4)$$

unterliegen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{\psi} (i\not{D}) \psi &\rightarrow \bar{\psi} e^{i\lambda(x)} (i\not{D} - e\not{A}_\mu(x) - e(\not{\partial}\lambda(x))) e^{-i\lambda(x)} \psi(x) \\ &= \bar{\psi} \cancel{e^{i\lambda(x)}} \cancel{e^{-i\lambda(x)}} (i\not{D} + \cancel{e(\not{\partial}\lambda(x))} - e\not{A}_\mu(x) - \cancel{e(\not{\partial}\lambda(x))}) \psi(x) \\ &= \bar{\psi} i\not{D} \psi. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Diese Invarianz heisst Eichinvarianz. Da die Eichtrasfos der Dirac-Felder in (9.4) Phasentransformationen entsprechen, ist die zugehörige Symmetrie -

Gruppe die $U(1)$, $e^{-i\lambda(x)} \in U(1)$.

Die QED ist damit automatisch invariant unter einer globalen Transformation (mit $\lambda = \text{const.}$). Die zugehörige Noether-Ladung ist die Fermionzahl, die wir in der QED mit der elektrischen Ladung der Elektronen identifizieren können. Unter

$\lambda(x) \rightarrow \lambda = \text{const}$ transformiert sich das Photonfeld in (9.3) trivial, $A_\mu \rightarrow A_\mu$, d.h. das Photon ist ungeladen bezüglich dieser Noetherladung, d.h. "elektrisch neutral".

Die Eichtransformationen (9.3 & 9.4) können wir auf dem Raum der Felder auch mit folgendem Generator infinitesimaler Transformationen schreiben

$$\mathcal{G}(x) = -\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} - ie \psi(x) \frac{\delta}{\delta \psi(x)} + ie \bar{\psi}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)}$$

Eine infinitesimale Eichtrafo eines Funktionals der Felder lässt sich damit schreiben als

(9.6)

$$F[A, \psi, \bar{\psi}] \rightarrow F[A, \psi, \bar{\psi}] + \delta F[A, \psi, \bar{\psi}]$$

$$\delta F[A, \psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \lambda(x) \mathcal{G}(x) F[A, \psi, \bar{\psi}] \quad (9.7)$$

Das Erzeugende Funktional der QED ist nun gegeben durch $S_{QED} = \int \mathcal{L}_{QED}$

$$Z_{QED}[J, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i S_{QED}[A, \psi, \bar{\psi}] + i S_{gf} - i \int J_\mu A^\mu - i \int \bar{\eta} \psi + i \int \bar{\psi} \eta} \quad (9.8)$$

wobei die Quantisierung des Photonfeldes wieder einen Eichfixierungsbeitrag erfordert, z.B. $S_{gf} = -\frac{1}{2\alpha} \int (\partial_\mu A^\mu)^2$. (9.9)

Das Funktionalintegral ist invariant unter Variablentransformation der Integrationsvariablen $A_\mu, \psi, \bar{\psi}$.

Da eine Eichtransf. der Felder einer solchen Variablentransformation entspricht, folgt die Invarianz des Erzeugenden Funktionals:

$$0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{G}(x) e^{i S_{QED} + i S_{gf} - i \int J_\mu A^\mu - i \int \bar{\eta} \psi + i \int \bar{\psi} \eta} \quad (9.10)$$

Nur S_{gf} und die Quellterme sind nicht explizit invariant. Für $\eta, \bar{\eta} = 0$ folgt damit

$$0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left[\underbrace{\left(\mathcal{G}(x) S_{gf} - \mathcal{G}(x) \int \mathcal{J}_\mu A^\mu \right)}_{= -\frac{1}{\alpha} \partial^2 \partial_\mu A^\mu(x) - \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x)} \right] e^{iS_{QED} + iS_{gf} - i\int \mathcal{J} A} \quad (9.11)$$

Differentiation nach $\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_\nu(y)}$ bei $\mathcal{J}=0$ liefert

$$0 = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left[+i \frac{1}{\alpha} \left(\partial^2 \partial_\mu A^\mu(x) / A^\nu(y) - \partial^\nu \delta^{(4)}(x-y) \right) \right] e^{iS_{QED} + iS_{gf}}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{i}{\alpha} \partial^2 \partial_\mu \langle A^\mu(x) A^\nu(y) \rangle - \partial^\nu \delta^{(4)}(x-y)$$

$$= \frac{i}{\alpha} \partial^2 \partial_\mu G_A^{\mu\nu}(x-y) - \partial^\nu \delta^{(4)}(x-y), \quad (9.12)$$

wobei G_A die volle 2-Punkt-Funktion bezeichnet;
zu niedrigster Ordnung in $e \rightarrow 0$ gilt

$$G_A^{\mu\nu}(x-y) = D^{\mu\nu}(x-y) + \mathcal{O}(e) \quad (9.13)$$

mit $D^{\mu\nu}$ aus (8.94)

Im Fourier-Raum gilt:

$$(9.12) \Rightarrow 0 = \frac{1}{\alpha} p^2 p_\mu G_A^{\mu\nu}(p) - i p^\nu$$

$$\Rightarrow p_\mu G_A^{\mu\nu}(p) = i \alpha \frac{p^\nu}{p^2} \quad (9.14)$$

Vergleichen wir dies mit dem freien Propagator

$$D^{\mu\nu}(p) \stackrel{(8.94)}{=} \frac{i}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} + \alpha \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right), \quad (9.15)$$

so folgt

$$p_\mu G_A^{\mu\nu}(p) \equiv p_\mu D^{\mu\nu} = i \alpha \frac{p^\nu}{p^2}. \quad (9.16)$$

Dies besagt, dass die Quantenfluktuationen keinerlei Effekt auf den longitudinalen Anteil des Photonpropagators haben.

Diese Eigenschaft ist offensichtlich eine Folge der Eichinvarianz; die dahinter liegende Identität wird auch als Ward-Identität bezeichnet.

Die Ward-Identität lässt sich auch diagrammatisch betrachten:

betrachten wir alle Diagramme, die ein-Teilchen-irreduzibel sind (1PI) und zum vollen Photon-propagator beitragen:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagramm (1PI)} &= \text{Diagramm (1PI)} + \mathcal{O}(e^4) \\
 &=: i \Pi^{\mu\nu}(q)
 \end{aligned}
 \tag{9.17}$$

$\uparrow$
 $\sim \text{Diagramm} + \text{Diagramm} + \dots$

Dieses Objekt wird auch als Polarisationstensor bezeichnet. Die Ward-Identität besagt nun, dass die Tensorstruktur von $\Pi^{\mu\nu}(q)$ lauten muss:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q) \tag{9.18}$$

mit einer zu bestimmenden skalaren Funktion $\Pi(q)$; denn der exakte volle Photonpropagator setzt sich aus der geometrischen Reihe im Polarisationstensor

Zusammen:

$$\text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---} = \text{---} + \text{---} \textcircled{1P1} \text{---} + \text{---} \textcircled{1P1} \text{---} \textcircled{1P1} \text{---} + \dots$$

$$\Rightarrow \underline{G_{A(p)}^{\mu\nu}} = \mathcal{J}^{\mu\nu} + \mathcal{J}_\kappa^{\mu\lambda} \Pi^{\kappa\lambda} D_\lambda^\nu + D_\kappa^\mu \Pi^{\kappa\lambda} D_\lambda^\sigma \Pi^{\sigma\tau} D_\tau^\nu + \dots$$

$$\stackrel{(9.18)}{=} \alpha \frac{i}{p^2} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} + \frac{i}{p^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) + \frac{i}{p^2} \left(g^\mu_\kappa - \frac{p^\mu p_\kappa}{p^2} \right) \left[i \left(p^2 g^{\kappa\lambda} - p^\kappa p^\lambda \right) \Pi(p) \right] \frac{i}{p^2} \left(g^\lambda_\sigma - \frac{p^\lambda p_\sigma}{p^2} \right)$$

$$= \alpha \frac{i}{p^2} \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} + \frac{i}{p^2} \frac{1}{(1 - \Pi(p))} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \quad (9.19)$$

Dies erfüllt in der Tat die Ward-Identität (9.16).

Wäre (9.18) nicht erfüllt, hätte es in (9.19) auch

Korrekturen zum longitudinalen ersten Term gegeben,

was im Widerspruch zur Ward-Identität gewesen

wäre. Die Ward-Identität (9.18) fasst man

auch oft als

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0 \quad (9.20)$$

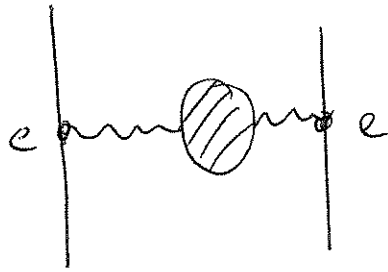
Zusammen:

Eine wichtige Konsequenz der Ward-Identität⁹⁹ ist, dass der Photonpropagator immer einen Pol bei $p^2=0$ hat. Eichinvarianz garantiert in dieser Weise also, dass das Photon auch in der vollen wechselwirkenden Theorie masselos bleibt (NB: Man sagt, dass die Photonenmasse gegen "Strahlungskorrekturen" geschützt ist). Zweite wichtige Konsequenz von (9.19) ist, dass sich das Residuum des Pols um $\Pi(0)$ verschiebt:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ Z_3 \end{array} \equiv \frac{1}{1 - \Pi(0)} \quad (9.24)$$

Photon-Wellenfunktionsrenormierung

Betrachten wir nun z.B. einen Streuprozess zwischen geladenen Teilchen im Niederenergie-
 limes:



im Vergleich zur
klassischen Theorie $e \mu \mu e$

so ist ein Effekt der Fluktuationen dadurch
gekennzeichnet, dass

$$\dots \frac{e^2}{p^2} \dots \rightarrow \dots \frac{Z_3 e^2}{p^2} \dots \quad (9.22)$$

in den entsprechenden Streuamplituden übergeht.

Die Kopplung e taucht also immer in Verbindung
mit $\sqrt{Z_3}$ auf. Im Experiment kann also

immer nur das Produkt $\sqrt{Z_3} e$ gemessen werden,

d.h.

$$\text{physik. Kopplung } e_R \stackrel{\text{e "renormiert"}}{=} \underline{\underline{\sqrt{Z_3} e}} \stackrel{\text{"nackte" Kopplung}}{=} \text{Kopplungsparameter im mikroskop. Lagrangian} \quad (9.23)$$

Diese Überlegung lässt sich auf endliche

Impulse ausdehnen: betrachten wir einen
Streuprozess bei endlichem Impulsübertrag
 q^2 . Die Amplitude dieses Prozesses enthält
die Größe

$$\frac{i}{q^2} \left(g_{rr} - g_r \frac{q_v}{q^2} \right) \frac{e^2}{1 - \Pi(q^2)} = \frac{i}{q^2} \left(g_{rr} - g_r \frac{q_v}{q^2} \right) \frac{e^2}{\underbrace{Z_3(1 - \Pi(q^2))}_{= \frac{1}{1 - \Pi(0)}}}$$

$$\simeq \frac{i}{q^2} \left(g_{rr} - g_r \frac{q_v}{q^2} \right) \frac{e^2}{1 - \Pi(q^2) + \Pi(0)} \quad (9.24)$$

Es lässt sich also analog zu (9.23) eine
impulsabhängige ^{effektive} Kopplungsstärke definieren:

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{e^2/4\pi}{1 - \Pi(q^2) + \Pi(0)} = \frac{e^2/4\pi}{1 - (\Pi(q^2) - \Pi(0))} \quad (9.25)$$

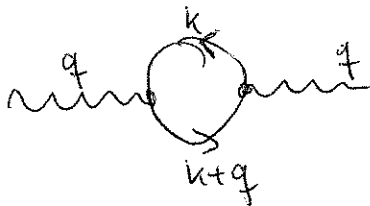
(NB: diese Form, die wir durch entwickeln nach kleinen
 Π motiviert haben, gilt tatsächlich in dieser Form
auch in der vollen Theorie.)

Kopplungsstärken sind somit in der Quantenfeldtheorie keine fixen Konstanten, sondern abhängig von der Impulsskala, bei der sie gemessen werden. Man spricht von "laufenden" Kopplungen ("running couplings").

Im Folgenden wollen wir $\Pi(q^2)$ in verschiedenen Näherungen berechnen. In niedrigster Ordnung Störungstheorie lautet $\Pi(q^2)$:

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = (-ie)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geschl.} \\ \text{Feynman-loop}}}{(-1)} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\cancel{k}-m} \gamma^\nu \frac{i}{\cancel{k+q}-m} \right], \quad (9.26)$$

Was dem Diagramm



entspricht. Der Wechselwirkungsterm in der Wirkung $\sim \int e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi$ führt dazu, dass

Für große Impulsüberträge $-q^2 \gg m^2$
ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Pi(q^2)} &\approx -\frac{2\alpha}{\pi} \underbrace{\int_0^1 dx \, x(1-x)}_{=\frac{1}{6}} \left[-\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \ln\frac{1}{x(1-x)} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{-q^2}\right) \right] \\ &= \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln\frac{-q^2}{m^2} - \frac{5}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{-q^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (9.28)$$

Damit erhalten wir die effektive Kopplungs-
konstante

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) \stackrel{(9.25)}{=} \frac{\alpha_R}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{-q^2}{e^{5/3} m^2}\right)} \quad (9.29)$$

D.h. mit zunehmenden Impulsübertrag $-q^2$
wird die effektive Kopplung größer!

der Vertex des QED im Feynman-Diagrammen eine Dirac-Struktur erhält: $\gamma_\mu \hat{=} -ie\gamma^\mu$.
 Innere Linien (Fermion- oder Photonpropagator) sind bereits in vorherigen Abschnitten besprochen worden.

Die Berechnung von (9.26) birgt eine Reihe von technisch interessanten Komplikationen.

Daher diskutieren wir das Ergebnis zuerst:

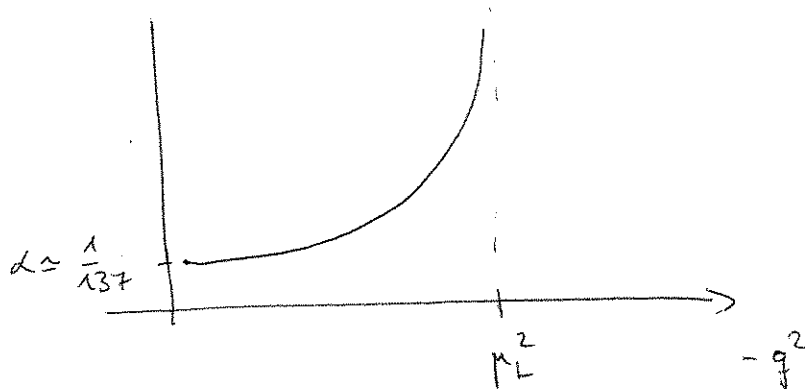
die in (9.25) auftauchende Kombination $\Pi(q^2) - \Pi(0)$ hat folgende einfache Form:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(q^2) = \Pi(q^2) - \Pi(0) &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(Q^2) \end{aligned} \quad (9.27)$$

Dies wird in Streuexperimenten in der Tat beobachtet: während der Wert der Kopplung in Niederenergie-Streuexperimenten (Thomson-Streuung) zu $\alpha \approx \frac{1}{137}$ bestimmt wird, liefert Hochenergiestreuung einen höheren Wert von α : z.B. in Bhabha-Streuung ($e^+e^- \rightarrow e^+e^-$) bei $-q^2 = (30 \text{ GeV})^2$ findet man eine ca. 5% erhöhte Kopplung. Bei LEP 2 Experimenten am CERN bei Impulsüberträgen um die Z-Massenskala $\approx 90 \text{ GeV}$ findet man $\alpha \approx \frac{1}{128}$ (wobei hier nicht lediglich e^+e^- -Fluktuationen relevant sind).

Für immer größeren Impulsübertrag scheint die Kopplung unbeschränkt zu wachsen und divergiert gar für

$$-q^2 = \mu_L^2 := m^2 e^{\frac{3\pi}{\alpha} + \frac{5}{3}} \quad (9.30)$$



Dieses "Landau - Pol" erscheint allerdings erst bei extrem großen Skalen $\mu_L \approx 10^{270} \text{ GeV}$. Da wir (9.29) unter der Voraussetzung kleiner Kopplung abgeleitet haben, besagt (9.29) zunächst lediglich, dass Störungstheorie bei großen Impulsüberträgen zusammenbricht. Würde (9.29) jedoch gar das tatsächliche Verhalten der Theorie bei großen Impulsen wiedergeben, bedeutete dies, dass die QED ihren eigenen Zusammenbruch bei μ_L voraussagt. QED wäre also nicht auf allen Skalen, sondern nur bis $-q^2 \leq \mu_L^2$ gültig.

QFTs haben somit eine neue "Qualität" physikalischer Theorien: sie können aus sich heraus Vorhersagen über ihren eigenen maximalen Gültigkeitsbereich machen.

Betrachten wir nun das andere Extrem kleiner Impulsüberträge. Bereits im Rahmen der Yukawa-Theorie haben wir den Propagator des Austauschteilchens mit einer nicht-relativistischen Potentialbeschreibung im Limes kleiner Impulsüberträge in Verbindung bringen können.

In der QED bedeutet dies für die Fourier-Transformierte des Potentials (vgl. (7.49)):

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 \left(1 - \Pi(-|\vec{q}|^2)\right)} \quad (9.31)$$

für kleine $q^2 \simeq -|\vec{q}|^2 \ll m^2$ gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\hat{\Pi}(q^2)}} &\stackrel{(9.27)}{\simeq} + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \ln \left(1 - x(1-x) \frac{q^2}{m^2} \right) \\ &\simeq - \frac{2\alpha}{\pi} \frac{q^2}{m^2} \underbrace{\int_0^1 dx \, [x(1-x)]^2}_{= 1/30} \\ &\simeq - \frac{\alpha}{15\pi} \underline{\underline{\frac{(-|\vec{q}|^2)}{m^2}}} \quad (9.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{V}(\vec{q})}} &\simeq \frac{-e^2}{|\vec{q}|^2 \left(1 - \frac{1}{15}(\vec{q}^2)\right)} \\
&\simeq -\frac{e^2}{|\vec{q}|^2} - \frac{e^2 \alpha}{15\pi m^2} \\
&= -\frac{4\pi \alpha}{|\vec{q}|^2} - \frac{4\alpha^2}{15 m^2} \quad (9.33)
\end{aligned}$$

Rückföhrertrafo liefert: (vgl. (7.50))

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{V(\vec{x})}} &= \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \tilde{V}(\vec{q}) \\
x=|\vec{x}| \quad &= -\frac{\alpha}{x} - \frac{4\alpha^2}{15 m^2} \mathcal{D}^{(3)}(\vec{x}) \quad (9.34)
\end{aligned}$$

D.h. die QED sagt Korrekturen zum Coulomb-Potential voraus, die zu wesentlich stärkeren Kräften bei sehr kurzen Abständen führen (Uehling-Potential). Dieser Effekt kann in der Tat im Wasserstoff-Atom beobachtet werden, denn der Beitrag zum Potential

führt zu Energieverschiebungen, falls die Wellenfunktion am Ursprung nicht-verschwindend ist:

$$\underline{\underline{\Delta E = \int d^3x |\psi(\vec{x})|^2 \cdot \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\vec{x}) \right) = -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2}} \quad (9.35)$$

Dies ist der Fall für die S-Wellenzustände.

Z.B. beträgt im 2S-Zustand $|\psi_{2s}(0)|^2 = \frac{\alpha^3 m^3}{8\pi}$

$$\Rightarrow \Delta E = -\frac{\alpha^5 m}{30\pi} = -1.123 \cdot 10^{-7} \text{ eV} \quad (9.36)$$

Dies liefert einen kleinen (aber gut messbaren) Beitrag zum Lamb-Shift.

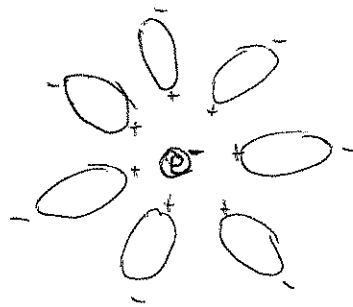
NB: Die S-Funktion ist nur eine erste Näherung im Limes $|q^2| \ll m^2$. Eine genauere Rechnung (vgl. Peskin & Schröder p. 254, 255) zeigt den Gültigkeitsbereich der Näherung besser:

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mx}}{(mx)^{3/2}} + \dots \right) \quad (9.37)$$

Der zweite Term ist eine entsprechende

Darstellung der δ -Funktion für $x \gg \frac{1}{m} = \text{Compton}$
Wellenlänge des Elektrons.

Diese Korrektur kann interpretiert werden als eine
Abschirmung der nackten Ladung durch virtuelle
 e^+e^- -Fluktuationen:

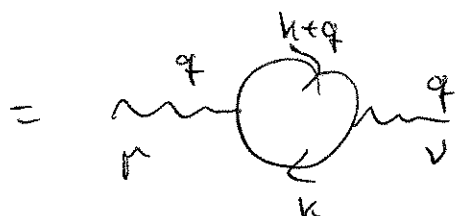


Ähnlich wie in einem Medium, in dem Polarisations-
ladungen andere Ladungen abschirmen können, werden
nackte Ladungen von virtuellen Polarisierungen im Vakuum
abgeschildert. Bei höheren Impulsüberträgen löst
ein Streuteilchen nun die innere Struktur der
Ladungswolke auf und sieht mehr und mehr von
der nackten Ladung. Dies erklärt (oder
beschreibt) den Anstieg der effektiven Kopplung
mit $|\ln q^2|$ in (9.29).

Berechnung von $\Pi(p)$:

§ 21

$$i\Pi^{\mu\nu}(q) = -\frac{1}{2}(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\underbrace{\gamma^\mu \frac{i}{k-m}}_{i \frac{k+m}{k^2-m^2}} \underbrace{\gamma^\nu \frac{i}{k+q-m}}_{i \frac{k+q+m}{(k+q)^2-m^2}} \right] \quad (9.38)$$



Wir benötigen:

$$\text{tr} \gamma_\mu = \text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu = \text{tr} \# \text{ungerade} = 0$$

$$\text{tr} \mathbb{1}_{\text{Dirac}} = 4$$

$$\text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2} \text{tr} \{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} = g_{\mu\nu} \cdot \text{tr} \mathbb{1} = 4g_{\mu\nu}$$

$$\text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\kappa \gamma_\lambda = \underbrace{2g_{\mu\lambda} \text{tr} \gamma_\nu \gamma_\kappa}_{= 2g_{\mu\lambda} \gamma_\nu \gamma_\kappa} - \underbrace{\text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\kappa}_{= 2g_{\nu\lambda} \gamma_\mu \gamma_\kappa}$$

$$= 8g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} - 8g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} + \underbrace{\text{tr} \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\kappa}_{= 2g_{\mu\lambda} \gamma_\nu \gamma_\kappa}$$

$$= 8(g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} - g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} + g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda}) - \underbrace{\text{tr} \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\kappa}_{= \text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\kappa \gamma_\lambda}$$

$$\Rightarrow \text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\kappa \gamma_\lambda = 4(g_{\mu\lambda} g_{\nu\kappa} - g_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} + g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda}) \quad (9.39)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{i\Pi^{\mu\nu}(q)}} = -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\left[k^\mu (k+q)^\nu + k^\nu (k+q)^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot (k+q) - m^2) \right]}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} \quad (9.40)$$

Nun schreiben wir den Nenner als Integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2)((k+q)^2 - m^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - m^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2} \end{aligned} \quad (9.41)$$

wobei wir $l^\mu := k^\mu + xq^\mu$ eingeführt haben.

Mit dieser Definition lautet der Zähler

$$\begin{aligned} [k^\mu (k+q)^\nu + \dots] &\stackrel{(9.40)}{=} 2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu} l^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) \\ &\quad + l^\mu \gamma_\mu, \end{aligned} \quad (9.42)$$

wobei γ_μ eine Funktion von q_μ, x und m ist.

Der Vorteil von (9.41) ist nun,

Das Integral ist divergent für große k :

$$i\Pi \sim \int \frac{d^4 k}{k^4} \cdot k^2 \quad (9.45)$$

Schneiden wir dies bei Impulsen $k = \Lambda$ ("UV cutoff") ab, geht $i\Pi$ wie Λ^2 .

Wir haben allerdings in den Anwendungen gesehen, dass nur die Kombination

$$\frac{1}{\Pi(q)} = \Pi(q) - \Pi(0) \quad (9.46)$$

in physikalischen Größen vorkommt. D. h. zu berechnen ist eigentlich

$$\begin{aligned} i\frac{1}{\Pi(q)} &= \frac{8e^2}{3g^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \left(\frac{-k^2 - k \cdot q + 2m^2}{(k+q)^2 - m^2} - \frac{-k^2 + 2m^2}{k^2 - m^2} \right) \\ &= \frac{(k^2 - m^2)(-k^2 - k \cdot q + 2m^2) - ((k+q)^2 - m^2)(-k^2 + 2m^2)}{[(k+q)^2 - m^2](k^2 - m^2)} \\ &= \frac{(-k^4 - \cancel{k^3 k \cdot q} + \cancel{2k^2 m^2} + \cancel{2k^2 k \cdot q} + \cancel{k^2 q^2} - \cancel{2k^2 m^2} + \cancel{2k^2 k \cdot q} - \cancel{2k^2 m^2} - \cancel{2q^2 m^2} - \cancel{k^2 m^2} + \cancel{2m^4})}{[(k+q)^2 - m^2](k^2 - m^2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{k^2 k \cdot q - 3 k \cdot q m^2 - 2 q^2 m^2 + q^2 k^2}{[(k+q)^2 - m^2] (k^2 - m^2)}$$

Das Integral geht für große k ~~man~~ wie
scheinbar

$$\hat{\Pi} \sim \int \frac{d^4 k}{k^6} k^3 \sim 1;$$

eine genauere Untersuchung in einer Entwicklung
in q/k zeigt jedoch

$$\frac{k^2 k \cdot q + \cancel{2 k \cdot q m^2} + q^2 k^2}{[(k+q)^2 - m^2]} = \frac{k^2 k \cdot q + q^2 k^2}{(k^2 - m^2) \left(1 + \frac{2 q \cdot k + q^2}{k^2 - m^2}\right)} \approx \frac{k^2 k \cdot q + q^2 k^2}{k^2 - m^2} \left(1 - \frac{2 q \cdot k + q^2}{k^2 - m^2}\right)$$

$$\stackrel{k^2 \gg m^2}{\approx} \cancel{\frac{k \cdot q}{k^2}} (k \cdot q + q^2) \left(1 - \frac{2 q \cdot k}{k^2} - \frac{q^2}{k^2}\right)$$

Wir benötigen

$$\begin{aligned} \cancel{\gamma^\mu} \gamma_\mu &= k^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu \\ &= \underbrace{\{\gamma_\nu, \gamma_\mu\}}_{=2g_{\nu\mu}} \gamma_\mu \\ &= 2k_\mu \gamma^\mu - k^\nu \underbrace{\gamma^\mu \gamma_\mu \gamma_\nu}_{=\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma_\mu\}} \\ &= g^\mu_\mu = 4 \end{aligned}$$

$$= -2\cancel{k}$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \quad (9.42)$$

$$\Rightarrow \underline{i\Pi(q)} = -\frac{e^2}{3q^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \operatorname{tr} \left[\frac{(-2\cancel{k} + 4m)}{k^2 - m^2} \frac{(\cancel{k} + \cancel{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} \right] \quad (9.43)$$

Nun gilt:

$$\operatorname{tr} \gamma^\mu = 0$$

$$\operatorname{tr} \mathbb{1} = 4$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \cancel{k} \cancel{q} &= k_\mu q_\nu \operatorname{tr} \gamma^\mu \gamma^\nu = k_\mu q_\nu \frac{1}{2} \operatorname{tr} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \\ &= 4 k_\mu q^\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{i\Pi(q)} = -\frac{e^2}{3q^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+q)^2 - m^2} (-8k^2 - 8k_\mu q^\mu + 16m^2)$$

$$(9.44)$$

Nun verwenden wir eine Integraldarstellung des Nenners: (Feynman-Parametrisierung)

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} = \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 + 2xk \cdot q + xq^2 - m^2)^2} \quad (9.46)$$

was sich durch direktes Nachrechnen verifizieren lässt. Mit $l^\mu = k^\mu + xq^\mu$ ergibt sich

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} = \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2} \quad (9.47)$$

und für den Zähler:

$$\begin{aligned} -8(k^2 + k \cdot q - 2m^2) &= -8(l^2 - 2x l \cdot q + x^2 q^2 + l \cdot q - x q^2 - 2m^2) \\ &= -8(l^2 - (2x-1)l \cdot q + x(x-1)q^2 - 2m^2) \end{aligned} \quad (9.48)$$

(9.44)

$$\Rightarrow i\Pi(q) = + \frac{8e^2}{3q^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(l^2 - (2x-1)l \cdot q - x(1-x)q^2 - 2m^2)}{(l^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2} \quad (9.49)$$

Der Vorteil der Darstellung ist, dass der Nenner
 nun invariant unter $l^\mu \rightarrow -l^\mu$ ist. Da das
 Maß $\int d^4 l$ ebenfalls diese Invarianz hat,

verschwinden alle Terme, die im Zähler ungerade
 Potenzen von l^μ haben:

$$i\Pi(q) = \frac{8e^2}{3q^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(l^2 - x(1-x)q^2 - 2m^2)}{(l^2 + x(1-x)q^2 - m^2)^2}$$