

8.4 Funktionalintegrale für wechselwirkende Theorien

Im letzten Abschnitt haben wir das Funktionalintegral einer freien Theorie des Klein-Gordon-Feldes explizit berechnen können. Für wechselwirkende Theorien ist dies im Allgemeinen bislang noch nicht gelungen. Dennoch ist auch für wechselwirkende Theorien obige Rechnung z. T. nützlich, weshalb sie hier nochmals in Kurzform dargestellt werden soll:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_0 - i\int J\phi} \equiv \int \mathcal{D}\phi \, e^{\frac{i}{2}(\phi, K\phi) - i(J, \phi)} \quad (8.66)$$

mit $K = -\partial^2 - m^2$ (Klein-Gordon-Operator)

$$K \Delta_F = \mathbb{1} \quad (K \Delta_F(x-y) = \delta^{(D)}(x-y))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\phi \, e^{\frac{i}{2}(\phi, K\phi) - i(J, \phi)} \\ &= \int \mathcal{D}\phi \, e^{\frac{i}{2}\left((\phi - J \frac{1}{K}), K (\phi - J \frac{1}{K})\right) - \frac{i}{2}(J, \frac{1}{K} J)} \\ &= e^{-\frac{i}{2}(J, \Delta_F J)} \underbrace{\int \mathcal{D}\tilde{\phi} \, e^{\frac{i}{2}(\tilde{\phi}, K\tilde{\phi})}}_{Z_0[0]} \\ &= Z_0[0] \, e^{-\frac{i}{2}(J, \Delta_F J)} \quad (8.67) \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass K ein symmetrischer Operator ist

$$\begin{aligned} (f, Kg) &= \int d^D x f(x) K g(x) = \int d^D x f(x) (-\partial^2 - m^2) g(x) \\ &\stackrel{\substack{\text{partielle} \\ = \\ \text{Integration}}}{=} \int d^D x g(x) (-\partial^2 - m^2) f(x) = (g, Kf) . \end{aligned} \quad (8.68)$$

Funktionalintegral für ϕ^4 -Theorie

Wir betrachten die Wirkung

$$S = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} \phi^2 m^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \quad (8.69)$$

und das zugehörige Funktionalintegral

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS - i\int J\phi} , \quad (8.70)$$

Teilen wir die Wirkung auf in

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_I , \quad S_0 = \frac{1}{2} (\phi, K\phi) \\ S_I &= -\int d^D x \frac{\lambda}{4!} \phi^4 , \end{aligned} \quad (8.71)$$

so können wir das Funktionalintegral formal

nach S_I entwickeln:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{Z[J]}} &= \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_0 - i\int J\phi} e^{iS_I[\phi]} \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int d^D x \, \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right)^n e^{iS_0 - i\int J\phi} \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\int d^D x \, \frac{\lambda}{4!} i^4 \frac{\delta^4}{\delta J^4(x)} \right)^n e^{iS_0 - i\int J\phi} \\
 &= \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_I[i\frac{\delta}{\delta J}]} e^{iS_0[\phi] - i\int J\phi} \\
 &= e^{iS_I[i\frac{\delta}{\delta J}]} \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_0[\phi] - i\int J\phi} \\
 &= e^{iS_I[i\frac{\delta}{\delta J}]} Z_0[J] \\
 &= Z_0[0] \, \underline{\underline{e^{iS_I[i\frac{\delta}{\delta J}]} e^{-\frac{i}{2} \int J \Delta_F J}}} \quad (8.72)
 \end{aligned}$$

Auf diese Weise haben wir die Funktionalintegraldarstellung des Erzeugenden Funktionalis in eine Funktionaldifferentialdarstellung umgeschrieben.

Diese Darstellung ist allerdings in erster Linie nützlich für die Störungstheorie, bei der wir nach λ (d.h. hier nach S_I) entwickeln.

Die Funktionale Differentiation führt wieder auf das gleiche Muster, wie wir es vom Wick'schen Theorem her kennen: anstelle von T-geordneten Produkten von Heisenberg-Operatoren, die mit Wick-Kontraktionen berechnet werden, treten die Funktionaldifferentiationen.

Diese Darstellung lässt sich mit Computer-Algebrasystemen leicht zur Erzeugung beliebiger Ordnung verwenden.
von Diagrammen

Alle Diagramme mit m -Vertizes, die zur Korrelationsfunktion $G^{(m)}$ beitragen, erzeugen sich aus

$$\underline{\underline{G^{(m)}(x_1 \dots x_m) = i^m \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_m)} \frac{i}{m!} S_I \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] e^{\frac{-i}{2} \int J A_F J} \Big|_{J=0}}} \quad (8.73)$$

Alle kombinatorischen Faktoren sind in diesem Ausdruck bereits korrekt enthalten bzw. folgen unmittelbar aus der Differentiation

8.5 Funktionalintegral für fermionische Theorien

Mit Hilfe der Regeln der Grassmann-Integration,

$$\int d\theta_i \theta_j = \delta_{ij} \quad (\text{siehe Übung}) \quad \text{und durch}$$

Konstruktion von sog. "kohärenten Zuständen" lässt sich das Erzeugende Funktional für fermionische Theorien ähnlich wie für bosonische direkt konstruieren.

Im Folgenden wollen wir uns damit begnügen, dass fermionische Funktionalintegral analog zum bosonischen zu "raten" und uns dann von der Äquivalenz zu den fermionischen Feynman-Regeln zu überzeugen.

Betrachten wir zunächst die freie Theorie von Diracfermionen,

$$S_0 = \int d^4x \quad \bar{\psi} (i\not{\partial} - m) \psi, \quad (8.74)$$

Wir brauchen Quellen sowohl für ψ als auch

für $\bar{\psi}$:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \int d\psi d\bar{\psi} \quad e^{iS_0[\psi, \bar{\psi}] - i\int \bar{\eta} \psi + i\int \bar{\psi} \eta} \quad (8.75)$$

8³⁵

(NB: das relative Minuszeichen zwischen den Quelltermen ist reine Konvention, damit wir die Funktionalableitungen nach $\eta, \bar{\eta}$ als nach rechts wirkende Ableitungen ohne Minuszeichen formulieren können).

Die freie Theorie ist lösbar:

$$\begin{aligned} Z_0[\eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i(\bar{\psi}, K_D \psi) - i(\bar{\eta}, \psi) + i(\bar{\psi}, \eta)} \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{i((\bar{\psi} - \bar{\eta} \frac{1}{K_D}), K_D (\psi + \frac{1}{K_D} \eta))} e^{i\bar{\eta} \frac{1}{K_D} \eta} \end{aligned} \quad (8.76)$$

mit $K_D = i\partial - m$, $K_D \cdot S_F = i \mathbb{1}$,

d.h.

$$\begin{aligned} \underline{Z_0[\eta, \bar{\eta}]} &= Z_0[0, 0] e^{i\bar{\eta} \frac{1}{K_D} \eta} \\ &= \underline{Z_0[0, 0]} e^{\bar{\eta} S_F \eta} \end{aligned} \quad (8.77)$$

Die 2-Punkt Funktion der freien Theorie ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} G_0^{(2)}(x, y) &= \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \\ &= i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} i \frac{\delta}{\delta \eta(y)} T[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta, \bar{\eta}=0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{G_0^{(2)}(x, y)} = \frac{1}{Z[0, 0]} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \psi(x) \bar{\psi}(y) e^{iS_0[\psi, \bar{\psi}]} \quad 8^{36}$$

$$\stackrel{(8.77)}{=} \underline{S_F(x, y)}, \quad (8.78)$$

was dem Feynman-Propagator, und somit
den obigen Feynman-Regeln entspricht.

Auch in der freien fermionischen Theorie
faktorisieren alle Korrelationsfunktionen in
2-Punkt Funktionen.

Als Beispiel einer fermionischen Theorie mit
Wechselwirkung betrachten wir die Yukawa-Theorie
mit

$$S = \int d^4x \left\{ \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - g\bar{\psi}\psi\phi \right\}. \quad (8.79)$$

Das Erzeugende Funktional ist

$$Z[S, \eta, \bar{\eta}] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi, \psi, \bar{\psi}] - i\int \bar{\eta}\psi - i\int \bar{\psi}\eta + i\int \bar{\eta}\eta} \quad (8.80)$$

Der Wechselwirkungsterm lässt sich wie im bosonischen Fall als Ableitungsoperator schreiben,

$$S_I = - \int d^4x \, g \bar{\psi} \psi \phi$$

$$\rightarrow - i^3 \int d^4x \, g \frac{\delta}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \frac{\delta}{\delta J}, \quad (8.81)$$

d.h. das Erzeugende Funktional in funktional-differentieller Form lautet:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = Z[0, 0, 0] e^{- \int d^4x \, g \frac{\delta}{\delta \eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \frac{\delta}{\delta J}} e^{- \frac{i}{2} (J, \Delta J)} \cdot e^{\bar{\eta} S_F \eta} \quad (8.82)$$

Entwicklung nach g und Funktionaldifferentiation liefern Ordnung für Ordnung die Feynman-Regeln für Korrelationsfunktionen.

8.6 (Versuch eines) Funktionalintegral für das Photonfeld

8.38

Die klassische Theorie des Maxwell'schen Elektrodynamischen Feldes ist gegeben durch die Maxwell Wirkung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (8.83) \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) = -\frac{1}{2} (A^\mu (-\partial^2 g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu) \end{aligned}$$

Klassische Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu}}_{=0} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\ &= \underline{-\partial_\nu F^{\nu\mu}} \quad (\text{Maxwell-Gleichung}). \end{aligned} \quad (8.84)$$

Der Versuch, das Photonfeld wie ein skalares Klein-Gordon-Feld zu quantisieren, führt auf ein elementares Problem:

Der Maxwell-Operator hat einen Eigenwert $= 0$:

$$K_{\mu\nu} A^\nu = (-\partial^2 g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu = 0$$

$$\text{für } A^\nu = \partial^\nu \varphi, \text{ denn} \quad (8.85)$$

$$(-\partial^2 g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu) \partial^\nu \varphi = (-\partial^2 \partial_\mu + \partial_\mu \partial^2) \varphi = 0.$$

Entsprechend können wir keinen Propagator

$$G_A \sim \frac{1}{K_A} \text{ definieren und damit}$$

kein Funktionalintegral über A^ν ausführen

(ähnlich einem Gauß-Integral $\int dx e^{-kx^2}$ im Falle $k=0$).

Dieser Null eigenwert hat allerdings seinen Grund:

A^ν enthält redundante Information, d.h. nicht alle Komponenten sind voneinander unabhängige Freiheitsgrade. Die Maxwell-Theorie ist invariant unter Eichtransformationen:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x), \quad (8.86)$$

wobei $\lambda(x)$ eine lokale Eichfunktion ist (die gewisse Regularitätseigenschaften haben sollte):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu \partial_\mu \lambda}_{=0} \\ = F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (8.87)$$

Ein naives Funktionalintegral $\int \mathcal{D}A$ enthielte damit "zu viele" Konfigurationen, da über A_μ und seine sämtlichen Eichkopien integriert würde.

Diese Eichkopien verändern aber die Wirkung nicht, sind also "flache Richtungen" in der Potentiallandschaft der Wirkung über dem Konfigurationsraum,



und damit verbunden mit einem Nulleigenwert des Maxwell-Operators.

Um das Photonfeld zu quantisieren, müssen wir diese Redundanz im Funktionalintegral loswerden.

Dies ist möglich durch die Forderung einer Zwangsbedingung, die ein Teil von A_μ fixiert, ohne die physikalischen Freiheitsgrade einzuschränken. Ein Beispiel ist die folgende kovariante Eichfixierungsbedingung

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{Lorentz-Eichung}) \quad (8.88)$$

Wir können diese Zwangsbedingung durch einen Lagrange-Multiplikator in der Wirkung einführen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{gf}} \\ &\quad \quad \quad \uparrow \text{gauge fixing} \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 \end{aligned} \quad (8.89)$$

(NB: Wir wählen das Quadrat von $(\partial_\mu A^\mu)$, damit die Wirkung extremal wird auf den Eichfixierten Konfigurationen)

Hierbei ist α ein Lagrange-Parameter.

Das Funktionalintegral lautet damit

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}A \, e^{iS_{\text{Mandel}} + iS_{\text{gf}} - i \int J_\mu A^\mu} \\ &= \int \mathcal{D}A \, e^{i \int (-\frac{1}{4}) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - i \left(\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 - i \int J_\mu A^\mu} \right)} \end{aligned} \quad (8.80)$$

Im Limes $\alpha \rightarrow 0$ (und der $i\varepsilon$ -Vorschrift) ist der Eichfixierungsterm proportional zu einem δ -Funktional

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-i \frac{1}{2\alpha} \int (\partial_\mu A^\mu)^2} \sim \delta[\partial_\mu A^\mu], \quad (8.91)$$

d.h. man kann die Eichfixierung so betrachten, dass $\delta[\partial_\mu A^\mu]$ aus dem Integrationsraum alle möglichen Konfigurationen herausschneidet, die $\partial_\mu A^\mu = 0$ erfüllen. (NB: In der Tat muss man eigentlich diese Konfigurationen mit einem δ -Funktional der Form $\delta[A|_{\partial_\mu A^\mu=0}]$ herausschneiden. Der Variablenwechsel von $\delta[A] \rightarrow \delta[\partial_\mu A^\mu]$

ist dann mit dem Auftreten eines Jacobians verbunden. In der Maxwell-Theorie ist dieser Jacobian aber nur ein konstanter Faktor und damit weniger wichtig. In nicht-abelschen Eichtheorien ist dieser aber besonders relevant $\Rightarrow$ Faddeev-Popov-Quantisierung).

Im Limes $\alpha \rightarrow 0$ nennt man Landau-Eichung. In der Tat lässt sich in der Störungstheorie beweisen, dass physikalische Amplituden α unabhängig sind (siehe Ward-Takahashi Identitäten), so dass α "bequem" gewählt werden kann, z.B. $\alpha = 1$ (Feynman-Eichung).

Wichtig ist, dass man für $|\alpha| < \infty$ den Maxwell-Operator invertieren kann, d.h. den Photon-Propagator berechnen kann:

"gibt's nicht!"

Greensche Funktione-gleichung

$$\underbrace{\left(-\partial^2 g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\alpha} \partial_\mu \partial_\nu \right)}_{=: K_{\mu,\nu}^\alpha} D_{\kappa}^{\nu(x-y)} = i \delta^{(4)}(x-y) g_{\mu\kappa} \quad (8.92)$$

Fourier-Transformation:

$$\left(p^2 g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p_\mu p_\nu \right) D_{\kappa}^{\nu}(p) = i g_{\mu\kappa} \quad (8.93)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_{\kappa}^{\nu}(p) = \frac{i}{p^2} \left(\delta_{\kappa}^{\nu} + (\alpha-1) \frac{p^\nu p_\kappa}{p^2} \right)}}, \quad (8.94)$$

denn

$$\begin{aligned} & \left(p^2 g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p_\mu p_\nu \right) \frac{i}{p^2} \left(\delta_{\kappa}^{\nu} + (\alpha-1) \frac{p^\nu p_\kappa}{p^2} \right) \\ &= i \left(g_{\mu\kappa} + \cancel{\frac{1}{p^2}} (\alpha-1) p_\mu p_\kappa - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p_\mu p_\kappa - (\alpha-1) \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) p_\mu p_\kappa \right) \\ &= i \left(g_{\mu\kappa} + \left(\cancel{\alpha-1} - \cancel{1} + \frac{1}{\alpha} - \cancel{\alpha} + \cancel{1} + \cancel{1} - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{p_\mu p_\kappa}{p^2} \right) \\ &= i g_{\mu\kappa} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Damit folgt für die freie quantisierte Maxwell-Theorie sofort das Erzeugende Funktional

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{Z[J]}} &= \int \mathcal{D}A \, e^{iS_{\text{Maxwell}} + iS_{\text{gf}} - i \int J_\mu A^\mu} \\
 &= \int \mathcal{D}A \, e^{i \frac{1}{2} (A, K_H^\mu A) - i \int J A} \\
 &= Z[0] \, e^{-\frac{i}{2} (J, \frac{1}{K_H^\mu} J)} \\
 &= Z[0] \, e^{-\frac{i}{2} (J, \frac{1}{i} D J)} \\
 &= Z[0] \, e^{-\frac{1}{2} (J, D J)} \quad (8.95)
 \end{aligned}$$

Explizit lautet der Exponent

$$-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J_\mu^{(x)} D^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y)$$

$$\stackrel{\text{FT}}{=} -\frac{1}{2} \int d^4p J_\mu(-p) D^{\mu\nu}(p) J_\nu(p). \quad (8.96)$$

Für perturbative Rechnungen ist der Propagator nun ein wichtiger Baustein:

In Feynman - Eichung ist er besonders einfach:

$$D_{\mu\nu}^{\alpha=1} = \frac{i g_{\mu\nu}}{p^2} \quad (8.97)$$

In Landau - Eichung erhalten wir:

$$D_{\mu\nu}^{\alpha=0} = \frac{i}{p^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (8.98)$$

Diese Form ist transversal, da $D_{\mu\nu}^{\alpha=0}$ alle 4er - Vektoren $\sim p^\nu$ herausprojiziert:

$$\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) p^\nu = (p_\mu - p_\mu) = 0$$