

8.2 Korrelationsfunktionen

Ziel war es nicht eine Darstellung der Übergangsamplitude zu finden, sondern eine Darstellung des Erzeugenden Funktional für Korrelationsfunktionen.

Als ersten Zwischenschritt betrachten wir ein Matrixelement eines zeitgeordneten Produkts von Feldoperatoren (im Heisenberg-Bild); (neue Notation: $\Phi'_x \rightarrow \Phi_{i,x}$, $\Phi_x \rightarrow \Phi_{f,x}$).

Dabei nehmen wir zunächst an, dass

$$t_f > t_2 > t_1 > t_i :$$

$$\langle \Phi_{f,x} | T \hat{\Phi}_{t_1,\vec{x}_1} \hat{\Phi}_{t_2,\vec{x}_2} | \Phi_{i,\vec{x}}, t_i \rangle$$

$$= \langle \Phi_f | \hat{\Phi}_2 \hat{\Phi}_1 | \Phi_i \rangle$$

$$= \int \mathcal{D}\Phi_1 \mathcal{D}\Phi_2 \langle \Phi_f | \hat{\Phi}_2 | \Phi_2 \rangle \langle \Phi_2 | \hat{\Phi}_1 | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_1 | \Phi_i \rangle$$

$$= \int \mathcal{D}\Phi_1 \mathcal{D}\Phi_2 \Phi_1 \Phi_2 \langle \Phi_f | \Phi_2 \rangle \langle \Phi_2 | \Phi_1 \rangle \langle \Phi_1 | \Phi_i \rangle$$

(8.34)

Der Integrand enthält 3 Übergangsamplituden: von $\Phi_i \rightarrow \Phi_1$, von $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$, und von $\Phi_2 \rightarrow \Phi_f$. Jede kann durch ein Funktionalintegral dargestellt werden:

$$\langle \Phi_f | \hat{\Phi}_2 \hat{\Phi}_1 | \Phi_i \rangle = \int_{\Phi_2} \mathcal{D}\Phi_1 \mathcal{D}\Phi_2 \mathcal{D}\Phi_1 \mathcal{D}\Phi_2 \int_{\Phi_2} \mathcal{D}\Phi e^{iS_{t_f, t_2}} \int_{\Phi_1} \mathcal{D}\Phi' e^{iS_{t_2, t_1}} \cdot \int_{\Phi_i} \mathcal{D}\Phi'' e^{iS_{t_1, t_i}} \quad (8.35)$$

(CAVE: $\int \mathcal{D}\Phi_1$ und $\int \mathcal{D}\Phi_2$ sind Integrale über alle Φ_x zu einer festen Zeit t_1 bzw. t_2 ; $\int_{\Phi_2} \mathcal{D}\Phi$ ist ein Integral über alle Φ_x zu allen Zeiten zwischen Φ_2 und Φ_f)

Nun wird aber in (8.35) über die Feldkonfigurationen Φ_1 und Φ_2 ebenfalls integriert; d.h. alle Integrationen können in einer "großen" Integration über alle Felder zwischen t_i und t_f kombiniert werden:

$$\langle \Phi_F | \hat{\Phi}_2 \hat{\Phi}_1 | \Phi_i \rangle = \int_{\Phi_i}^{\Phi_F} \mathcal{D}\Phi \, \Phi_1 \Phi_2 e^{i S_{t_F, t_i}[\Phi]} \quad (8.36)$$

Wir haben (8.36) unter der Voraussetzung abgeleitet, dass $t_2 > t_1$. Interessanterweise folgt für $t_1 > t_2$ das identische Resultat, d.h.:

$$\langle \Phi_F, t_F | T \hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_2 | \Phi_i, t_i \rangle = \int_{\Phi_i}^{\Phi_F} \mathcal{D}\Phi \, \Phi_1 \Phi_2 e^{i S_{t_F, t_i}[\Phi]} \quad (8.37)$$

Funktionalintegraldarstellungen der Übergangsamplituden berücksichtigen also die Zeitordnungsverschrift automatisch!

Dies gilt auch für Matrixelemente mit höheren Produkten

$$\langle \Phi_F | T \hat{\Phi}_1 \dots \hat{\Phi}_n | \Phi_i \rangle = \int_{\Phi_i}^{\Phi_F} \mathcal{D}\Phi \, \Phi_1 \dots \Phi_n e^{i S_{t_F, t_i}[\Phi]} \quad (8.38)$$

Um einen Ausdruck für Korrelationsfunktionen zu erhalten brauchen wir (8.38) mit $\langle \Phi_f |$ und $|\Phi_i \rangle$ ersetzt durch den Grundzustand $\langle \Omega |$ bzw. $|\Omega \rangle$.

Nun ist (8.38) vergleichbar mit einer "Summe über Historien", welche mit Φ_i bei t_i starten, dann durch die Zeitschnitte $t_1 \dots t_n$ gehen und bei t_f mit Φ_f enden. Um nun einen Vakuum-erwartungswert zu erhalten, können wir die Übergangsamplituden $\langle \Omega | \Phi_f \rangle$ und $\langle \Phi_i | \Omega \rangle$ anfügen und über Φ_f und Φ_i integrieren:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &\equiv \langle \Omega | T \hat{\Phi}_H^1 \dots \hat{\Phi}_H^n | \Omega \rangle \\ &= \int d\Phi_f d\Phi_i \langle \Omega | \Phi_f, t_f \rangle_{\mathcal{H}} \langle \Phi_f, t_f | T \hat{\Phi}_H^1 \dots \hat{\Phi}_H^n | \Phi_i, t_i \rangle_{\mathcal{H}} \langle \Phi_i, t_i | \Omega \rangle \\ &= \int \prod_{\mathbf{x}} \prod_{t=t_i}^{t_f} d\Phi_{\mathbf{x},t} \Phi_1 \dots \Phi_n e^{iS_{t_f t_i}} \langle \Omega | \Phi_{\mathbf{x},t_f} \rangle_{\mathcal{H}} \langle \Phi_{\mathbf{x},t_i} | \Omega \rangle, \end{aligned}$$

wobei in der ersten Zeile die Operatoren noch einmal (8.39) extra mit Subskript "H" gekennzeichnet sind, um

zu verdeutlichen, dass diese im Heisenbergbild auszuwerten sind; (ähnlich für die Zustände in der 2. und 3. Zeile).

Um Fortzufahren, wechseln wir nun ins Wechselwirkungsbild mit Hilfe des Operators (vgl. (5.4))

$$\Omega_t = e^{iH_0 t} e^{-iH_0 t}, \quad (8.40a)$$

$$|\Phi, t\rangle_H = \Omega_t |\Phi, t\rangle_I \quad \uparrow \text{"interaction"} \quad (8.40b)$$

Ebenso finden wir in (5.7) den Zusammenhang zwischen dem Grundzustand $|\Omega\rangle$ und dem 0-Teilchen-Vakuum im Wechselwirkungsbild:

$$|\Omega\rangle \stackrel{(5.7)}{=} \Omega_t |0, t\rangle_I = \Omega_t U_I^\dagger(+\infty, t) |0\rangle, \quad (8.40c)$$

wobei $|0\rangle$ nun das asymptotische "out"-Vakuum bezeichnet (U_I ist der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild $U_I(t_2, t_1) = T e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt H_I(t)}$).

Daraus folgt für die Übergangsamplituden in (8.39):

$$\begin{aligned}
\langle \Omega | \Phi_f t_f \rangle_H \langle \Phi_i t_i | \Omega \rangle \\
= \langle 0 | U_I(+\infty, t_f) | \Phi_f t_f \rangle_I \langle \Phi_i t_i | U_I^+(+\infty, t_f) | 0 \rangle,
\end{aligned}
\tag{8.41}$$

bzw. im asymptotischen Limes

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{t_f \rightarrow +\infty \\ t_i \rightarrow -\infty}} \langle \Omega | \Phi_f t_f \rangle_H \langle \Phi_i t_i | \Omega \rangle \\
= \langle 0 | \Phi_{f, \infty} \rangle_I \langle \Phi_{i, -\infty} | U_I^+(+\infty, -\infty) | 0 \rangle \\
= \langle 0 | \Phi_{f, \infty} \rangle_I \sum_m \langle \Phi_{i, -\infty} | m \rangle \langle m | \hat{S}^+ | 0 \rangle,
\end{aligned}
\tag{8.42}$$

↑
Summe über n -Teilchen-Zustände

wobei wir die Definition der $\hat{S}$ -Matrix

$$\hat{S} = U_I(+\infty, -\infty) \text{ verwendet haben.}$$

Im (5.13) haben wir gezeigt, dass

$$\langle m | \hat{S} | 0 \rangle = 0 \quad \text{für } m \neq 0,$$

Wegen der Stabilität des Vakuums, d.h.

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{t_f \rightarrow \infty \\ t_i \rightarrow -\infty}} \langle \Omega | \Phi_f t_f \rangle_H \langle \Phi_i t_i | \Omega \rangle \\
= \langle 0 | \hat{S}^+ | 0 \rangle \langle 0 | \Phi_{f, +\infty} \rangle_I \langle \Phi_{i, -\infty} | 0 \rangle.
\end{aligned}
\tag{8.43}$$

Wird $\langle 0 | S^\dagger | 0 \rangle$ wegen Vakuumstabilität nur eine reelle Phase sein kann (vgl. p. 100), gilt
 $\langle 0 | \hat{S}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle^{-1}$, so dass

$$G^{(m)}(x_1 \dots x_m) = \frac{1}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle} \int \mathcal{D}\Phi \, \Phi_1 \dots \Phi_m e^{iS} \langle 0 | \Phi_F \rangle \langle \Phi_i | 0 \rangle \Big|_{\substack{t_F \rightarrow \infty \\ t_i \rightarrow -\infty}} \quad (8.44)$$

Betrachten wir den Fall $m=0$:

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= \langle \Omega | \Omega \rangle = 1 \\ &= \frac{1}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle} \int \mathcal{D}\Phi \, e^{iS} \langle 0 | \Phi_F \rangle \langle \Phi_i | 0 \rangle \Big|_{\substack{t_F \rightarrow \infty \\ t_i \rightarrow -\infty}} \quad (8.45) \\ \Rightarrow \frac{1}{\langle 0 | \hat{S} | 0 \rangle} &= \frac{1}{\int \mathcal{D}\Phi \, e^{iS} \langle 0 | \Phi_F \rangle \langle \Phi_i | 0 \rangle \Big|_{\substack{t_F \rightarrow \infty \\ t_i \rightarrow -\infty}}} \end{aligned}$$

Im asymptotischen Limes $|t_F|, |t_i| \gg |t_1| \dots |t_n|$

ist die funktionale Abhängigkeit von $G^{(m)}$ von den Argumenten $x_1 \dots x_n$ unabhängig von den asymptotischen Wellenfunktionen $\langle 0 | \Phi_F \rangle$ und $\langle \Phi_i | 0 \rangle$, so dass wir diese im Maß $\mathcal{D}\Phi$ absorbieren.

Damit lässt sich (8.44) schreiben als

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \frac{\int \mathcal{D}\phi \, \phi_1 \dots \phi_n e^{iS}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}} \quad (8.46)$$

Dies ist die gesuchte Funktionalintegraldarstellung der n -Punkt Korrelationsfunktionen.

Das erzeugende Funktional lässt sich ebenfalls als Funktionalintegral schreiben. Dazu verschieben wir die Wirkung um einen Quellterm:

$$S_J[\phi] = S[\phi] + \int d^D x \, \phi(x) J(x) \equiv S_-(\phi, J), \quad (8.47)$$

und definieren

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_J[\phi]}. \quad (8.48)$$

Damit folgt

$$\underline{T[J]} = \frac{Z[J]}{Z[0]} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS_J[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}, \quad (8.49)$$

womit sich sofort verifizieren lässt, dass

$$\begin{aligned}
 G^{(n)}(x_1 \dots x_n) &= i^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} T[J] \Big|_{J=0} \\
 &= \frac{1}{Z[0]} i^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (8.50)
 \end{aligned}$$

Mit (8.49) haben wir den erwünschten neuen Ausdruck für das Erzeugende Funktional entdeckt. Neben der Störungstheorie erlaubt (8.49) auch eine Auswertung oder Approximation von $T[J]$ mit Hilfe nichtstörungstheoretischer Methoden, wie z.B. der Monte-Carlo Simulation des hochdimensionalen Integrals auf dem Raumzeitgitter.

8.3 Funktionalintegral der freien Theorie

Als erstes Beispiel wollen wir $T[J]$ bzw $Z[J]$ für die freie Klein-Gordon-Theorie berechnen; die Wirkung ist

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2} \int d^D x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) \\ &\equiv -\frac{1}{2} (\phi, (\Box + m^2) \phi) \\ &\equiv -\frac{1}{2} (\phi, K \phi) \end{aligned} \quad (8.51)$$

und damit eine quadratische Form mit dem Klein-Gordon-Operator K .

Wir betrachten das erzeugende Funktional

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0 - i(\phi, J)} = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{2}(\phi, K \phi) - i(\phi, J)} \quad (8.52)$$

Die Lösung der klassischen Bewegungsgleichung in Anwesenheit der Quelle,

$$0 = \frac{\delta S_J[\phi]}{\delta \phi(x)} = -K \phi(x) - J(x) = -(\partial^2 + m^2) \phi(x) - J(x), \quad (8.53)$$

ist gegeben durch den Feynman-Propagator
 - als Greensche Funktion des Klein-Gordon-Operators -
 angewendet auf $J(x)$: $(K \Delta_F(x-y) = -\delta^{(D)}(x-y))$

$$\phi_0(x) = \int d^D y \Delta_F(x-y) J(y) \equiv (\Delta_F J)(x) \quad (8.54)$$

In (8.52) muss jedoch über alle Feldkonfigurationen ϕ integriert werden und nicht bloss über klassische Lösungen. Wir parametrisieren

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \psi(x) \quad (8.55)$$

so dass

$$S_J[\phi] = -\frac{1}{2} (\phi_0 + \psi, \underbrace{K(\phi_0 + \psi)}}_{= -J + K\psi}) - (\phi_0 + \psi, J)$$

$$= +\frac{1}{2} (\phi_0 + \psi, J) - \frac{1}{2} (\phi_0 + \psi, K\psi) - (\phi_0 + \psi, J)$$

$$\begin{aligned} (\phi_0, K\psi) &= \int d^D x \phi_0(x) (\partial^2 + m^2) \psi(x) \\ &\stackrel{\text{partielle}}{=} \int d^D x \left[(\partial^2 + m^2) \phi_0(x) \right] \psi(x) \\ &\stackrel{\text{Integration}}{=} - \int d^D x J(x) \psi(x) = -(J, \psi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_J[\Phi] = -\frac{1}{2} (\Phi_0 + \cancel{\Psi}, J) + \frac{1}{2} \underbrace{(J, \Psi)}_{\equiv (\cancel{\Psi}, J)} - \frac{1}{2} (\Psi, K\Psi)$$

$$= -\frac{1}{2} (\Phi_0, J) - \frac{1}{2} (\Psi, K\Psi)$$

$$\stackrel{(8.54)}{=} -\frac{1}{2} (\Delta_F J, J) - \frac{1}{2} (\Psi, K\Psi)$$

$$= -\frac{1}{2} (J, \Delta_F J) - \frac{1}{2} (\Psi, K\Psi) \quad (8.56)$$

Das erzeugende Funktional faktorisiert somit:

$$\begin{aligned} (8.52): \quad Z_0[J] &= \int \mathcal{D}\Phi \, e^{iS_J[\Phi]} \\ &= e^{-\frac{i}{2} (J, \Delta_F J)} \int \mathcal{D}(\Phi_0 + \Psi) \, e^{-\frac{i}{2} (\Psi, K\Psi)} \\ &= e^{-\frac{i}{2} (J, \Delta_F J)} \int \mathcal{D}\Psi \, e^{-\frac{i}{2} (\Psi, K\Psi)}, \quad (8.57) \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass das Maß translations-invariant im Funktionen-Raum ist $\mathcal{D}(\Phi_0 + \Psi) = \mathcal{D}\Psi$ (dies lässt sich zurückführen auf die Translations-invarianz an jedem Gitterplatz $d(\Phi_{0i} + \Psi_i) = d\Psi_i$).

Aus (8.57) folgt sofort, dass

8²⁷

$$Z_0 = \int D\varphi e^{-\frac{i}{2}(\varphi, K\varphi)} \quad (8.58)$$

so dass das Erzeugende Funktional der Korrelationsfunktionen gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T_0[J]}} &= \frac{Z_0[J]}{Z_0[0]} = e^{-\frac{i}{2}(J, \Delta_F J)} \\ &= e^{-\frac{i}{2} \int d^Dx d^Dy J(x) \Delta_F(x-y) J(y)} \end{aligned} \quad (8.59)$$

für die freie Theorie,

Dies lässt sich in Verbindung bringen mit dem Wick'schen Theorem (vgl. (4.43)):

$$T[e^{-i\int J\phi}] = N[e^{-i\int J\phi}] e^{-\frac{i}{2}\int J\Delta_F J} \quad (8.60)$$

Der Vakuumerwartungswert von (8.60) liefert:

$$\langle 0 | T[e^{-i\int J\phi}] | 0 \rangle = \underbrace{\langle 0 | N[e^{-i\int J\phi}] | 0 \rangle}_{=1} e^{-\frac{i}{2}(J, \Delta_F J)} = T_0[J]$$

wegen $\langle 0 | 0 \rangle = 1$

und $\langle 0 | N[\phi_1 \dots \phi_n] | 0 \rangle = 0$ für $n > 0$

$$\Rightarrow T_0[\mathcal{J}] = \langle 0 | T e^{-i\int \mathcal{J}} | 0 \rangle, \quad (8.61)$$

Was mit der Definition von $T[\mathcal{J}] = \langle \Omega | T e^{-i\int \mathcal{J} \Phi_H} | \Omega \rangle$ übereinstimmt, da für die freie Theorie gilt $\langle \Omega | \rightarrow \langle 0 |$.

In der freien Theorie lassen sich somit alle Korrelationsfunktionen berechnen:

$$\underline{G^{(2)}(x_1, x_2)} = i^2 \frac{\delta T_0[\mathcal{J}]}{\delta \mathcal{J}(x_1) \delta \mathcal{J}(x_2)} \Big|_{\mathcal{J}=0} = \underline{i \Delta_F(x_1 - x_2)} \quad (8.62)$$

$$G^{(2n+1)}(x_1 \dots x_{2n+1}) = 0$$

(weil eine ungeradzahlige Ableitung von $T_0[\mathcal{J}]$ immer $\sim \mathcal{J}$ ist) (8.63)

$$G^{(2n)}(x_1 \dots x_{2n}) = F[i \Delta_F] \quad (8.64)$$

$G^{(2n)}$ lässt sich sogar geschlossen angeben. Hier jedoch ist uns nur wichtig, dass $G^{(2n)}$ durch Produkte von Δ_F gegeben ist. D.h. in der

Freier Theorie faktorisieren höhere Korrelatoren
in Produkte des 2-Punkt Korrelators.

Alle Diagramme sind also unzusammenhängend.

z.B.

$$G_{(x_1 \dots x_4)}^{(4)} = - \left(\Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) \right. \\ \left. + \Delta_F(x_1 - x_3) \Delta_F(x_2 - x_4) \right. \\ \left. + \Delta_F(x_1 - x_4) \Delta_F(x_2 - x_3) \right)$$

$$= \begin{array}{|} \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \quad (8.65)$$