

8 Funktionalintegrale

Zuvor haben wir bereits ein Erzeugendes Funktional für Korrelationsfunktionen eingeführt (vgl. p. 122)

$$T[\mathcal{J}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_n G^{(n)}(x_1 \dots x_n) \mathcal{J}(x_1) \dots \mathcal{J}(x_n) \quad (8.1)$$

Wobei die Quelle $\mathcal{J}$ eine Hilfsvariable ist, nach der Funktional differenziert werden kann,

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = i^n \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}(x_n)} T[\mathcal{J}]. \quad (8.2)$$

Falls wir $T[\mathcal{J}]$ kennen, können wir alle Korrelatoren $G^{(n)}$ berechnen; die Theorie wäre dann "gelöst".

Wir haben zwei weitere Darstellungen von $T[\mathcal{J}]$ gefunden,

$$T[\mathcal{J}] = \langle \Omega | T e^{-i \int d^D x \mathcal{J}(x) \Phi_H(x)} | \Omega \rangle \quad (8.3)$$

(Φ_H : Feldoperator im Heisenberg-Bild)

$|\Omega\rangle$: Grundzustand der wechselwirkenden Theorie)

und

$$T[J] = \frac{\langle 0 | S[J] | 0 \rangle}{\langle 0 | S[0] | 0 \rangle} \quad \left(\equiv \frac{Z[J]}{Z[0]} \right) \quad (8.4)$$

$$\text{mit } S[J] = T \left(e^{-i \int d^D x \mathcal{H}_I(x) - i \int d^D x J(x) \Phi(x)} \right)$$

(S-Matrix im Gegenwart von J)

Während (8.3) für konkrete Rechnungen wenig brauchbar ist ($| \Omega \rangle$ und $\Phi_I(x)$ sind komplizierte Größen), kann (8.4) im Wesentlichen störungstheoretisch, d.h. durch Entwicklung der exp.-Funktion, ausgewertet werden.

Insbesondere für Berechnungen oder Abschätzungen von $T[J]$ jenseits von Störungstheorie ist jede weitere Darstellung von $T[J]$ hoch willkommen.

Eine besonders mühselige Darstellung ist die Funktionalintegraldarstellung, die im Folgenden

motiviert / abgeleitet wird.

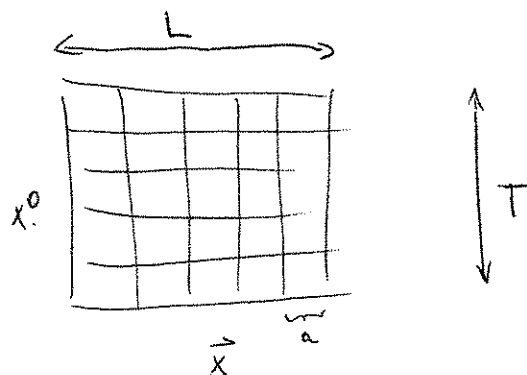
8.1 Funktionalintegrale als Limes einer Gittertheorie

Verlassen wir die Kontinuumsfeldtheorie für einen Augenblick und betrachten ein skalares "Feld" auf einem diskretisierten Raumzeitgitter Λ^D in D Dimensionen:

$$x \in \Lambda^D := a \mathbb{Z}^D \equiv \left\{ x \in M : x^\mu / a \in \mathbb{Z}, \mu = 0, 1, \dots, D-1 \right\} \quad (8.5)$$

$\uparrow$
 Minkowski-Raum

mit Gitterkonstante a und Ausdehnung in räumlichen Richtungen $L = N \cdot a$ und zeitlich $T = N \cdot a$,



Der Einfachheit halber verlangen wir periodische Randbedingungen in räumliche Richtungen.

Auf den Gitterpunkten x^M ist ein skalares Feldoperator $\hat{\phi}_H(x)$ definiert. (Um im Folgenden Operatoren von Zahlen zu unterscheiden, verwenden wir "Hüte" $\wedge$ um Operatoren zu kennzeichnen.)

Zunächst wählen wir eine Basis des Hilbertraums der Zustände, in dem der Feldoperator im Schrödinger-Bild diagonal ist:

$$\hat{\phi}_{\vec{x}} = e^{-i\hat{H}t} \hat{\phi}_H(x) e^{i\hat{H}t} \quad (8.6)$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}_{\vec{x}} |\phi_{\vec{x}}\rangle = \phi_{\vec{x}} |\phi_{\vec{x}}\rangle \quad (8.7)$$

(vgl. QM $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$ in der Ortsraumbasis).

Da $\phi_{\vec{x}}$ kontinuierliche Werte annehmen kann, wählen wir die Normierung

$$\langle \phi_{\vec{x}} | \phi_{\vec{x}'} \rangle = \prod_{\vec{x}} \delta(\phi_{\vec{x}} - \phi_{\vec{x}'}). \quad (8.8)$$

Die Eigenzustände von $\hat{\phi}_{\vec{x}}$ seien vollständig, so dass

$$\mathbb{1} = \int_{\vec{x}} \Pi_{\vec{x}} d\phi_{\vec{x}} |\phi_{\vec{x}}\rangle \langle \phi_{\vec{x}}| \equiv \int d\phi_{\vec{x}} |\phi\rangle \langle \phi|, \quad (8.9)$$

wobei wir im letzten Schritt eine Kurzschreibweise eingeführt haben.

Beliebige Wellenfunktionen können bezüglich dieser Basis als Funktionale von $\phi_{\vec{x}}$ geschrieben werden

$$\Psi[\phi_{\vec{x}}] = \langle \phi_{\vec{x}} | \Psi \rangle. \quad (8.10)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls $\hat{\pi}_{\vec{x}}$ zu $\hat{\phi}_{\vec{x}}$ kann in der $\phi_{\vec{x}}$ -Basis nun als Ableitung dargestellt werden,

$$\hat{\pi}_{\vec{x}} = -i \overset{\text{Kontinuumschreibweise}}{\frac{\delta}{\delta \phi_{\vec{x}}}} \equiv -\frac{i}{a^{d-1}} \overset{\text{Gitter-Realisierung}}{\frac{\partial}{\partial \phi_{\vec{x}}}}, \quad (8.11)$$

(vgl. QM: $\hat{p} \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial q}$).

Der Impulsoperator ist diagonal in der Impulsbasis

$$\hat{\pi}_{\vec{x}} |\pi_{\vec{x}}\rangle = \pi_{\vec{x}} |\pi_{\vec{x}}\rangle, \quad \mathbb{1} = \int d\pi_{\vec{x}} |\pi\rangle \langle \pi| \quad (8.12)$$

Die $\phi_{\vec{x}} \leftrightarrow \pi_{\vec{x}}$ Übergangsamplitude sind entsprechend (verallgemeinerte) Ebene Wellen.

$$\langle \phi_{\vec{x}} | \pi_{\vec{x}} \rangle = e^{i a^{D-1} \sum_{\vec{x}} \phi_{\vec{x}} \pi_{\vec{x}}} \equiv e^{i (\phi_{\vec{x}}, \pi_{\vec{x}})} \quad (8.13)$$

(NB: Im Limes $a \rightarrow 0$ ($L, T \text{ const}$) geht die Summe in ein Integral über $(\phi_{\vec{x}}, \pi_{\vec{x}}) \rightarrow \int d^D x \phi_{\vec{x}} \pi_{\vec{x}}$).

Betrachten wir nun die Zeitentwicklung einer Wellenfunktion des Systems:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i \hat{H} (t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle. \quad (8.14)$$

Projektion auf die $\phi_{\vec{x}}$ -Basis liefert

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\vec{x}} | \Psi(t) \rangle &= \langle \phi_{\vec{x}} | e^{-i \hat{H} (t-t_0)} | \Psi(t_0) \rangle \\ &= \int d\phi'_{\vec{x}} \langle \phi_{\vec{x}} | e^{-i \hat{H} (t-t_0)} | \phi'_{\vec{x}} \rangle \langle \phi'_{\vec{x}} | \Psi(t_0) \rangle, \end{aligned} \quad (8.15)$$

Hier stoßen wir auf die Übergangsamplitude

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\vec{x}} | e^{-i \hat{H} (t-t_0)} | \phi'_{\vec{x}} \rangle &= \langle \phi_{\vec{x}} | e^{-i \hat{H} t} e^{i \hat{H} t_0} | \phi'_{\vec{x}} \rangle \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \hat{H} \text{ zeitunabh.} \\ &\equiv \langle \phi_{\vec{x}, t} | \phi'_{\vec{x}, t_0} \rangle \end{aligned} \quad (8.16)$$

für den Übergang einer Feldkonfiguration $\phi'_{\vec{x}}$ zur Zeit t_0 zu einer Konfiguration $\phi_{\vec{x}}$ zur Zeit t .

Diese Amplitude kann auch als Matrixelement des Zeitentwicklungsoperators bezüglich der $\Phi_{\vec{x}}$ -Basis aufgefasst werden.

Im letzten Schritt in (8.16) haben wir die Eigenzustände $|\Phi_{\vec{x},t}\rangle$ des Feldoperators im Heisenberg-Bild

$$\hat{\Phi}_{Hx} \equiv \hat{\Phi}_{H\vec{x},t} \text{ eingeführt,}$$

$\uparrow$
 $\vec{x}$ -Vektor

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_{Hx} |\Phi_{\vec{x},t}\rangle &= \left(e^{i\hat{H}t} \hat{\Phi}_{\vec{x}} e^{-i\hat{H}t} \right) e^{i\hat{H}t} |\Phi_{\vec{x}}\rangle \\ &= \Phi_{\vec{x}} |\Phi_{\vec{x},t}\rangle, \end{aligned} \quad (8.17)$$

was zeigt, dass die Eigenwerte $\Phi_{\vec{x}}$ zeitunabhängig sind. Auch die Eigenzustände $|\Phi_{\vec{x},t}\rangle$ sind vollständig

$$\mathbb{1} = \int d\Phi_{\vec{x}} |\Phi_{\vec{x},t}\rangle \langle \Phi_{\vec{x},t}|. \quad (8.18)$$

Um die Übergangsamplitude auszuwerten (mit $t_0=0$ und $t \rightarrow T$), schreiben wir vollständige Zwischenzustände zu jedem Zeitschritt entlang des

Zeitgitteres ein $t_0=0, t_1=a, \dots, t_i=i \cdot a, \dots, t_N=T$;

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_{\vec{x}, T} | \Phi'_{\vec{x}, 0} \rangle &= \langle \Phi_{\vec{x}} | e^{-i\hat{H}T} | \Phi'_{\vec{x}} \rangle \\
 &= \langle \Phi_{\vec{x}} | e^{-i\hat{H}a} e^{-i\hat{H}a} \dots e^{-i\hat{H}a} | \Phi'_{\vec{x}} \rangle \\
 &= \int \mathcal{D}\Phi_{1,\vec{x}} \dots \mathcal{D}\Phi_{N-1,\vec{x}} \langle \Phi_{\vec{x}} | e^{-i\hat{H}a} | \Phi_{N-1,\vec{x}} \rangle \langle \Phi_{N-1,\vec{x}} | e^{-i\hat{H}a} | \Phi_{N-2,\vec{x}} \rangle \dots \\
 &\quad \cdot \langle \Phi_{1,\vec{x}} | e^{-i\hat{H}a} | \Phi'_{\vec{x}} \rangle
 \end{aligned}$$

(8.19)

Die Subskripte $1, \dots, N-1$ nummerieren die Integrationsvariablen auf den Zeitschnitten.

Die Übergangsamplitude ist also eine Konvolution der einzelnen Amplituden zwischen den Zeitschnitten,

$$A_k := \langle \Phi_{k+1,\vec{x}} | e^{-i\hat{H}a} | \Phi_{k,\vec{x}} \rangle, \quad t_{k+1} - t_k = a, \quad k=0, 1, \dots, N-1$$

(8.20)

mit $\Phi_{0,\vec{x}} \equiv \Phi'_{\vec{x}}$ und $\Phi_{N,\vec{x}} = \Phi_{\vec{x}}$.

Wir berechnen nun A_k zu erster Ordnung in a :

(“ $\vec{x}$ ” wird jetzt weggelassen)

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{A_k}} &= \langle \Phi_{k+1} | 1 - i \underbrace{\hat{H} a}_{=\hat{T}+\hat{U}} | \Phi_k \rangle + \mathcal{O}(a^2) \\
 &= \langle \Phi_{k+1} | \Phi_k \rangle - i a \langle \Phi_{k+1} | \hat{T}[\hat{\pi}] + \hat{U}[\hat{\phi}] | \Phi_k \rangle + \mathcal{O}(a^2) \\
 &= \int \mathcal{D}\pi_k \langle \Phi_{k+1} | \pi_k \rangle \langle \pi_k | \Phi_k \rangle \left(1 - i a (T[\pi_k] + U[\bar{\phi}]) \right) \\
 &= \int \mathcal{D}\pi_k \underbrace{e^{i(\pi_k, \Phi_{k+1} - \Phi_k)}}_{e^{-i a H(\pi_k, \bar{\Phi}_k)}} \quad (8.21)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir die infinitesimalen Terme wieder exponentiert. Bei der Berechnung von

$$\begin{aligned}
 \langle \Phi_{k+1} | \hat{U}[\hat{\phi}] | \Phi_k \rangle &= U[\Phi_{k+1}] \langle \Phi_{k+1} | \Phi_k \rangle \equiv \langle \Phi_{k+1} | \Phi_k \rangle U[\Phi_k] \\
 &= \dots \text{ (weitere Kombinationen möglich) } \quad (8.22)
 \end{aligned}$$

haben wir die Mittelpunktsvorschrift gewählt

$$\bar{\Phi}_k := \frac{1}{2} (\Phi_{k+1} + \Phi_k). \quad (8.23)$$

(in Eichtheorien gewährleistet dies Eichinvarianz im Kontinuumslimites.)

Mit (8.21) haben wir einen wichtigen Punkt erreicht: auf der rechten Seite ist kein

Operator mehr zu finden: $H(\pi_k, \bar{\Phi}_k)$ bezeichnet

den klassischen Hamiltonian, der auf den Eigenwerten π_k und ϕ_k ausgewertet wird.

Für den Fall, dass H von kanonischer Standardform ist,

$$\hat{H} = \hat{T}[\hat{\pi}] + \hat{U}[\hat{\phi}] = \frac{1}{2}(\hat{\pi}, \hat{\pi}) + U[\hat{\phi}], \quad (8.24)$$

folgt

$$A_k = e^{-ia U(\bar{\phi}_k)} \int \mathcal{D}\bar{\pi}_k e^{i \left\{ (\pi_k, \phi_{k+1} - \phi_k) - \frac{a}{2} (\bar{\pi}_k, \bar{\pi}_k) \right\}}.$$

Das Integral ist vom Fresnel-Typ und lässt sich durch quadratische Ergänzung auf Standardform bringen:

$$\begin{aligned} A_k &= e^{-ia U(\bar{\phi}_k)} \int \mathcal{D}\bar{\pi}_k e^{-i \frac{a}{2} \left(\bar{\pi}_k - \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{a}, \bar{\pi}_k - \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{a} \right)} \\ &\quad \cdot e^{+i \frac{a}{2} \left(\frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{a}, \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{a} \right)} \\ &= e^{-ia U(\bar{\phi}_k)} e^{i \frac{a}{2} \left(\frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{a}, \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{a} \right)} \cdot \int \mathcal{D}\tilde{\pi}_k e^{-i \frac{a}{2} (\tilde{\pi}_k, \tilde{\pi}_k)} \end{aligned}$$

Das $\int_{\vec{\pi}}$ Integral ist ein Produkt von Gaußschen Integralen über alle N^{D-1} Gitterplätze pro Zeitschnitt

$$\int_{\vec{\pi}} e^{-i\frac{a}{2}(\vec{\pi}_k, \vec{\pi}_k)} = \sqrt{\frac{2\pi}{ia}}^{N^{D-1}} \quad (8.26)$$

und liefert nur eine (uninteressante) Feld-unabhängige Konstante.

In (8.25) finden wir außerdem die Gitterableitung von Φ_k in Zeitrichtung

$$\nabla_t \Phi_k = \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{a} \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_k &= \sqrt{\frac{2\pi}{ia}}^{N^{D-1}} e^{i\frac{a}{2}(\nabla_t \Phi_k, \nabla_t \Phi_k) - ia U(\bar{\Phi})} \\ &\equiv \sqrt{\frac{2\pi}{ia}}^{N^{D-1}} e^{ia L[\Phi_k]} \end{aligned} \quad (8.28)$$

wobei wir die Gitter-Lagrange-Funktion $L[\Phi_k]$ zum Gitterzeitpunkt t_k eingeführt haben.

Mit dieser Darstellung der Amplitude A_k zwischen den Zeitschnitten können wir nun die gesamte Amplitude berechnen:

(8.29):

$$\langle \Phi_{\vec{x}, T} | \Phi'_{\vec{x}}, 0 \rangle = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{i a}} \right)^{N \cdot d} \int \mathcal{D}\Phi_1 \dots \mathcal{D}\Phi_{N-1} e^{i a \sum_{k=0}^{N-1} L[\Phi_k]} \quad (8.29)$$

Der Exponent definiert die Gitterwirkung

$$S[\Phi_{\vec{x}}; T, 0] = a \sum_{k=0}^{N-1} L[\Phi_k, \vec{x}] \quad , \quad (8.30)$$

so dass wir (8.29) auch schreiben können als

$$\langle \Phi_{\vec{x}, T} | \Phi'_{\vec{x}}, 0 \rangle = \sqrt{\frac{2\pi}{i a}}^{N \cdot d} \int \prod_{t=0}^{T-a} \prod_{\vec{x}} d\Phi_{t, \vec{x}} e^{i S[\Phi_{\vec{x}}; T, 0]} \quad (8.31)$$

D.h. die Übergangsamplitude zwischen zwei 3d Feldkonfigurationen $\Phi'_{\vec{x}}$ bei $t=0$ und $\Phi_{\vec{x}}$ bei $t=T$ ist gegeben durch ein Integral über alle 4d Feldkonfigurationen mit Randbedingungen

$$\Phi_{\vec{x}, t=0} = \Phi'_{\vec{x}} \quad , \quad \Phi_{\vec{x}, t=T} = \Phi_{\vec{x}} \quad (8.32)$$

In Kurzform können wir (8.31) auch schreiben als

$$\langle \phi_x, T | \phi'_x, 0 \rangle = \int_{\phi_{t=0} = \phi'_x}^{\phi_{t=T} = \phi_x} \mathcal{D}\phi \, e^{iS[\phi; T]}, \quad (8.33)$$

wobei wir die Konstante $\sqrt{\frac{2\pi}{i a}}^{D^2}$ mit in die Definition des Maßes $\mathcal{D}\phi$ hineingenommen haben.

Oft bezeichnet man mit (8.33) auch den Grenzfall sowohl des Kontinuumslimes $a \rightarrow 0$ als auch den "thermodynamischen" oder Unendlichen-Volumen-Limes $L \rightarrow \infty$.

Während die Gitterformulierung wohldefiniert ist, ist die Existenz des Kontinuumslimes schwierig rigoros mathematisch zu beweisen.

(NB: in Spezialfällen ist dies gelungen; z.B.

$D=1$ mit Euklidischer Signatur bzw. "imaginärer" Zeit: "Wiener-Maß").

Wichtig ist:

- die Übergangsamplitude ($\hat{=}$ Matrixelement des Zeitentwicklungsoperators) wird ausgedrückt durch ein hoch-dimensionales Integral über C-Zahlen-Funktionen.
- der Integrand ist ein Phase gegeben durch die klassische Wirkung. Dies ist der statistischen Physik sehr ähnlich, wo die Zustandssumme durch eine Summe über alle Verteilungen gewichtet mit dem Boltzmann-Faktor $e^{-E/kT}$ gegeben ist.
- da über Funktionen integriert wird, nennt man (8.33) Functionalintegral