

7. Das quantisierte Dirac-Feld

7.1 Dirac Feldoperatoren

Im Folgenden sei die Quantisierung des Dirac-Feldes in aller Kürze zusammengefasst.

Viele verläuft analog zur Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes. Auf die wesentlichen Unterschiede wird im Detail hingewiesen.

Da das Dirac-Feld ein komplexes Feld mit $U(1)_V$ Symmetrie ist, besitzt es Ähnlichkeit mit dem komplexen Skalar. Wir erwarten also, dass es 2 Sorten von Leiteoperatoren gibt $a_p, a_p^\dagger$ und $b_p, b_p^\dagger$, welche jeweils Teilchen unterschiedlicher Ladung (± 1) erzeugen und vernichten.

Im Feldoperator tauchen diese als Positiv- und Negativ-Frequenzmoden auf. Für letztere gibt es laut vorhergehendem Abschnitt jeweils 2 Spinzustände, beschrieben durch $u^s(p)$ und $v^s(p)$.

Dies motiviert unseren Ansatz für den
Feldoperator

$$\Psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ipx} + b_{\vec{p}}^{st} v^s(p) e^{ipx} \right) \quad (7.1)$$

und entsprechend

$$\bar{\Psi}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_s \left(b_{\vec{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^{st} \bar{u}^s(p) e^{ipx} \right). \quad (7.2)$$

Als Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ erwarten wir, dass keine
zwei gleichen Quanten im gleichen Zustand
realisiert werden können (Pauli-Blocking).

Ist

$$a_{\vec{p}}^t |0\rangle \equiv |\vec{p}\rangle \quad (7.3)$$

also ein 1-Teilchen-Zustand, so soll

$$a_{\vec{p}}^{st} a_{\vec{p}}^{st} |0\rangle \quad (7.4)$$

keinen existierenden Zustand beschreiben, d.h. wir
müssen verlangen, dass

$$a_{\vec{p}}^{st} a_{\vec{p}}^{st} |0\rangle = 0. \quad (7.5)$$

Durch die übliche bosonische Leiteroperator algebra

ist dies nicht zu realisieren!

Allerdings ist (7.5) erfüllt in einer anti-vertauschenden Algebra:

$$\{a_{\vec{p}}^r, a_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\vec{p}}^r, b_{\vec{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}) \delta^{rs}$$

(alle anderen Antikommutatoren sollen verschwinden, (7.6)
z.B. $\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0$ etc.).

Diese Algebra realisiert das Pauli'sche Verbot.

Mit (7.6) folgt sofort für die
Feldoperatoren bei gleichen Zeiten ("equal time"):

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta^\dagger(\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) \delta_{\alpha\beta} \quad (7.7a)$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{x}), \psi_\beta(\vec{y})\} = 0 = \{\bar{\psi}_\alpha(\vec{x}), \bar{\psi}_\beta(\vec{y})\}, \quad (7.7b)$$

wobei α, β die Spin-Komponenten von ψ bezeichnet,
 $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ (kein $SL(2, \mathbb{C})$ Index!).

In der Tat entspricht $\psi^\dagger$ dem kanonischen Impuls
von ψ , denn

$$\begin{aligned}
 \pi(\vec{x}) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}(\vec{x})} \stackrel{\dot{\psi} = \partial^0 \psi}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^0 \psi} = \frac{\partial (i \bar{\psi} \gamma_0 \partial^0 \psi)}{\partial \partial^0 \psi} \\
 &= -i \bar{\psi} \gamma_0 \stackrel{\substack{\uparrow \\ \bar{\psi} \text{ und } \frac{\partial}{\partial \psi} \text{ anti-vertauschen}}}{=} i \psi^\dagger \gamma_0^2 = -i \psi^\dagger(\vec{x}) \quad (7.8)
 \end{aligned}$$

(das "i" hier erklärt das "fehlende" i in (7.7a)).

D.h. wir können (7.7) als quantisierte Version von klassischen Poisson-Klammern für anti-kommutierende (Grassmann-wertige) Felder $\psi, \bar{\psi}$ betrachten. (7.7) definiert also die kanonische Quantisierung eines (Grassmann-wertigen) klassischen Feldtheorie des Dirac-Feldes.

Aufbauend auf dem Vakuum $|0\rangle$ definiert durch

$$a_{\vec{p}}^s |0\rangle = b_{\vec{p}}^s |0\rangle = 0 \quad (7.9)$$

lässt sich das Spektrum der Theorie bestimmen, d.h. der Hamilton-Operator diagonalisieren:

$$H = \int d^3x (\dot{\Psi} \cdot \pi - \mathcal{L})$$

$$= \int d^3x (i \Psi^\dagger \partial^0 \Psi - \bar{\Psi} (i \not{\partial} - m) \Psi)$$

$$= \int d^3x \bar{\Psi} (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \Psi = \int d^3x \bar{\Psi} (-i \gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m \gamma^0) \Psi$$

(7.10)

analoge

 $\Rightarrow$

Rechnung zu

Klein-Gordon-
Feld

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s \right). \quad (7.11)$$

(wobei die Nullpunktsenergie subtrahiert wurde).

Ähnlich ergibt sich der Impulsoperator zu

$$\underline{\underline{\vec{P}}} = \int d^3x \Psi^\dagger (-i \vec{\nabla}) \Psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \vec{p} \left(a_{\vec{p}}^{s\dagger} a_{\vec{p}}^s + b_{\vec{p}}^{s\dagger} b_{\vec{p}}^s \right), \quad (7.12)$$

so dass ~~die~~ ~~die~~ ~~die~~ $a_{\vec{p}}^{s\dagger}$ und $b_{\vec{p}}^{s\dagger}$ jeweils Teilchen mit Energie $+E_{\vec{p}}$ und Impuls $\vec{p}$ erzeugen.

Ähnlich wie für das komplexe Skalarfeld gibt es eine erhaltene Noether-Ladung durch die Phasen-Symmetrie ($U(1)_V$ -Symmetrie).

Der elektrische Strom ist $(\bar{\psi} A) \quad j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, und die Ladung ergibt sich daher zu

$$Q = \int d^3x \quad \psi^\dagger(x) \psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_s \left(a_{\vec{p}}^{st} a_{\vec{p}}^s - b_{\vec{p}}^{st} b_{\vec{p}}^s \right) \quad (7.18)$$

(NB: wobei wieder eine unendliche Konstante = Ladungsmultiplikator ignoriert wurde).

$a_{\vec{p}}^{st}$ erzeugt also Teilchen mit Ladung $(+1)$ (Fermionen)
und $b_{\vec{p}}^{st}$ erzeugt Teilchen mit Ladung (-1) (Antifermionen).

Der wichtige Unterschied zum komplexen Skalar liegt darin, dass $\psi(x)$ einen Spinfreiheitsgrad trägt. Der zugehörige Drehimpulsoperator ist ebenfalls ein Noether-Strom bezüglich der Invarianz unter Drehungen.

Betrachten wir also eine Lorentz-Transformation, die einer Drehung entspricht. Dazu wählen wir $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \Theta$ (vgl. (6.27)), was einer Drehung um die z -Achse entspricht.

Die Lorentz-Transf. ist

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = A \psi(x)$$

$$\text{bzw. } \psi'(x) = A \psi(\Lambda^{-1}x) \quad \text{mit } x' = \Lambda x$$

Infinitesimal gilt:

$$\delta \psi(x) = A \psi(\Lambda^{-1}x) - \psi(x)$$

$$\text{mit } A = 1 - \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} = 1 - \frac{i}{2} \theta \bar{\Sigma}^3$$

$$\text{mit } \bar{\Sigma}^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

$$\text{und } \Lambda^{-1}x = (t, x + \theta y, y - \theta x, z) \quad (7.15)$$

$$\Rightarrow \delta \psi(x) = -\theta \left(x \partial_y - y \partial_x + \frac{i}{2} \bar{\Sigma}^3 \right) \psi(x). \quad (7.16)$$

Der zugehörige Noether-Strom ist ~~der zugehörige Noether-Strom ist~~

$$j^0 = -i \bar{\psi} \gamma^0 (x \partial_y - y \partial_x + \frac{i}{2} \bar{\Sigma}^3) \psi \quad (7.17)$$

~~der zugehörige Noether-Strom ist~~

Ähnlich können wir auch für Drehungen um x - und y -Achse vorgehen.

Als Noether-Ladung $\hat{=}$ Drehimpulsgenerator erhalten wir

$$\vec{J} = \int d^3x \left(\bar{\psi} (\vec{r} \times (-i\vec{\nabla}) + \frac{1}{2} \vec{\Sigma}) \psi \right) \quad (7.18)$$

Eine allgemeine Zerlegung von (7.18) in Leiteroperatoren ist nicht leicht. Es genügt jedoch eine Betrachtung im Ruhesystem eines 1-Teilchen Zustands, in dem der $\vec{r} \times (i\vec{\nabla})$ Bahndrehimpulsanteil verschwindet.

Die Eigenwerte werden dann bestimmt durch $\frac{1}{2} \vec{\Sigma}$. Eine Zerlegung in Leiteroperatoren liefert (ÜA):

$$J_z a_0^{s+} |0\rangle = \pm \frac{1}{2} a_0^{s+} |0\rangle$$

$$J_z b_0^{s+} |0\rangle = \mp \frac{1}{2} b_0^{s+} |0\rangle, \quad (7.19)$$

wobei das obere Vorzeichen für Spinoren $\xi^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und das untere für $\xi^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt.

Wenden wir die Dirac-Theorie auf Elektronen an, so ergibt sich zusammenfassend:

a_p^{st} erzeugt Elektronen mit Energie E_p , Impuls $\vec{p}$,
Spin $\frac{1}{2}$ und Ladung $+1$ (im Einheits von $e^+ < 0$)
für $S^z = (\frac{1}{2})$

b_p^{st} erzeugt Positronen mit Energie E_p , Impuls $\vec{p}$,
Spin $\frac{1}{2}$ mit Polarisation entgegengesetzt zu S^z
und Ladung -1 .

7.2 Der Dirac Propagator:

Zur Berechnung von S-Matrix-Elementen und Korrelationsfunktionen benötigen wir den Feynman-Propagator für das Dirac-Feld, d.h. die Greensche Funktion für die Dirac-Gleichung:

$$(i\cancel{\partial}_x - m) S(x-y) = i \delta^{(4)}(x-y) \cdot \mathbb{1}_{\text{Dirac}} \quad (7.20)$$

Feynman - Trafo:

$$(\not{p} - m) S(p) = i \quad (7.21)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S(p) = \frac{i}{\not{p} - m} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}}} \quad (7.22)$$

Ähnlich wie im skalaren Fall gibt es verschiedene Greensche Funktionen, die sich durch unterschiedliche Randbedingungen unterscheiden. Der für Zwischenzuständen benötigte Propagator ist wiederum der Feynman-Propagator mit $+i\varepsilon$ -Vorschrift für die Pole:

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-i(x-y)p} \quad (7.23)$$

Dieses lässt sich wiederum mit einem zeitgeordneten Operatorprodukt in Verbindung bringen

$$S_F(x-y) = \langle 0 | T \psi_H(x) \bar{\psi}_H(y) | 0 \rangle, \quad (7.24)$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 Heisenberg-Operatoren

wobei für Fermionen gilt:

$$\begin{aligned}
 S_F(x-y) &= \langle 0 | T \psi_H(x) \bar{\psi}_H(y) | 0 \rangle \\
 &= \begin{cases} \langle 0 | \psi_H(x) \bar{\psi}_H(y) | 0 \rangle & , x^0 > y^0 \\ - \langle 0 | \bar{\psi}_H(y) \psi_H(x) | 0 \rangle & , x^0 < y^0 \end{cases} \quad (7.25)
 \end{aligned}$$

↑

(7.23-25) sind wichtige Ergebnisse im Hinblick auf perturbative Rechnungen von Amplituden und Diagrammen.

7.3 Feynman-Regeln für Fermionen

Die Feynman-Regeln ergeben sich aus der Berechnung der S-Matrix

$$S = T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_I} \quad (7.26)$$

wobei $\mathcal{H}_I$ nun fermionische Wechselwirkungen enthalten kann. In (7.25) haben wir die Zeitordnung mit entsprechendem Minuszeichen

bei Vertauschung der Feldoperatoren definiert. Dies lässt sich verallgemeinern für höhere Produkte, z.B.

$$T(\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4) = (-1)^3 \psi_3 \psi_1 \psi_4 \psi_2$$

$$\text{für } x_3^0 > x_1^0 > x_4^0 > x_2^0$$

(7.27)

Die gleiche Minuszeichenregel gilt für Normalgeordnete Produkte (per definitionem). Daraus

können wir schließlich die Kontraktion definieren

$$\overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)} := T[\psi(x) \bar{\psi}(y)] - N[\psi(x) \bar{\psi}(y)] \quad (7.28)$$

Vollständig analog zur Rechnung (4.40-42) ergibt sich

$$\underline{\underline{\overline{\psi(x) \bar{\psi}(y)}}} = \begin{cases} \{\psi^+(x), \bar{\psi}^-(y)\}, & x^0 > y^0 \\ -\{\bar{\psi}^+(y), \psi^-(x)\}, & x^0 < y^0 \end{cases} \equiv \underline{\underline{S_F(x-y)}} \quad (7.29)$$

$$\text{ähnlich: } \overline{\psi(x) \psi(y)} = \overline{\bar{\psi}(x) \bar{\psi}(y)} = 0.$$

Beachten wir die Minuszeichen ebenfalls bei

der Bildung von Kontraktionen,

$$\begin{aligned} N \left[\overbrace{\psi_1 \psi_2 \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4} \right] &= - \overbrace{\psi_1 \bar{\psi}_3} N[\psi_2 \bar{\psi}_4] \\ &= - S_F(x_1 - x_3) N[\psi_2 \bar{\psi}_4], \quad (7.30) \end{aligned}$$

lässt sich das Wick-Theorem wieder auffassen als

$$\underline{T[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots]} = \underline{N[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots + \text{alle möglichen Kontraktionen}]}, \quad (7.31)$$

was ^{formal} identisch zum bosonischen Fall ist;
 alle Minuszeichen werden von den Konventionen
 wie z.B. (7.30) berücksichtigt.

Die weiteren Details auf dem Weg zu
 fermionischen Feynman-Regeln diskutieren
 wir am Beispiel der Yukawa-Theorie,
 d.h. einer Wechselwirkenden Theorie für Bosonen