

der Bibly von Kontraktionen,

$$\begin{aligned} N \left[\overbrace{\psi_1 \psi_2 \bar{\psi}_3 \bar{\psi}_4} \right] &= - \overbrace{\psi_1 \bar{\psi}_3} N[\psi_2 \bar{\psi}_4] \\ &= - S_F(x_1 - x_3) N[\psi_2 \bar{\psi}_4], \quad (7.30) \end{aligned}$$

lässt sich das Wick - Theorem wieder auffassen als

$$T \left[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots \right] = \underbrace{N[\psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_3 \dots]}_{\text{formal}} + \text{alle möglichen Kontraktionen}, \quad (7.31)$$

was ^{formal} identisch zum bosonischen Fall ist;
 alle Minuszeichen werden von den Konventionen
 wie z.B. (7.30) berücksichtigt.

Die weiteren Details auf dem Weg zu
 fermionischen Feynman - Regeln diskutieren
 wir am Beispiel der Yukawa - Theorie,
 d.h. einer Wechselwirkenden Theorie für Bosonen

und Fermionen

$$H = H_{\text{Dirac}} + H_{\text{Klein-Gordon}} + \int d^3x g \bar{\psi} \psi \phi. \quad (7.32)$$

Man kann die Yukawa-Theorie als einfaches Modell für die QED betrachten bei der ϕ durch A_μ ersetzt werden muss.

Betrachten wir als Beispiel 2-mach-2-Streuung für Fermionen f

$$f(p) + f(k) \rightarrow f(p') + f(k').$$

Zu führender Ordnung Störungstheorie enthält die S-Matrix

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | T \left(\frac{1}{2!} (-ig)^2 \int d^4x \bar{\psi}(x) \psi(x) \phi(x) \int d^4y \bar{\psi}(y) \psi(y) \phi(y) \right) | \vec{p}, \vec{k} \rangle \quad (7.33)$$

Das T-Produkt wird nun in N-Produkte + Kontraktionen umgeschrieben, wobei schließlich die

unkontrahierten Feldoperatoren auf die Anfangs- und Endzustände wirken; letzteres kann wieder als Kontraktion verstanden werden,

$$\begin{aligned} \overline{\psi(x) | \vec{p}, s \rangle} &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} \sum_{s'} \bar{a}_{\vec{p}'}^{s'} u^{s'}(p') e^{-ip'x} \sqrt{2E_{\vec{p}}} a_{\vec{p}}^{st} |0\rangle \\ &= e^{-ipx} \underline{u^s(p) |0\rangle} \end{aligned} \quad (7.34)$$

Endliche Beiträge erhalten wir wenn ψ auf Fermionzustände rechts und $\bar{\psi}$ auf Antifermionzustände nach rechts wirkt (nach links ist es umgekehrt). Ein typischer Beitrag zum Matrixelement ist daher:

$$\overline{\langle \vec{p}', \vec{h}' | \frac{1}{2i} (-ig)^2 \int d^4 x d^4 y \bar{\psi}(x) \psi(x) \bar{\psi}(y) \psi(y) \phi(y) | \vec{p}, \vec{h} \rangle} \quad (7.35)$$

Insgesamt erhalten wir von Kontraktionen dieses

Typs

$$\begin{aligned} (-ig)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_\phi^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(h' - h + q) \\ = \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(h') u(h) \end{aligned} \quad (7.36)$$

(der Faktor $\frac{1}{2!}$ verschwindet wegen Vertexpermutation)

Als Streuamplitude erhalten wir

$$iM = \frac{-ig^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k), \quad (7.37)$$

wobei die Impulserhaltung $p - p' = q = k' - k$ gilt.

Diese ^{Amplitude} wird durch folgendes Diagramm repräsentiert:



Die entsprechenden Feynman-Regeln sind

Propagator

$$\overbrace{\phi(x) \phi(y)} = \text{---} \xrightarrow{q} \text{---} = \frac{i}{q^2 - m_\phi^2 + i\varepsilon}$$

$$\overbrace{\psi(x) \bar{\psi}(y)} = \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (7.39a)$$

Vertex

$$\text{---} \text{---} \text{---} = -ig$$

Äußere Beine:

$$\overline{\phi} | \vec{q} \rangle = \text{diagram} = 1$$

$$\langle \vec{q} | \phi = \text{diagram} = 1$$

$$\underbrace{\overline{\psi} | \vec{p}, s \rangle}_{\text{fermion}} = \text{diagram} = u^s(p)$$

$$\underbrace{\langle \vec{p}, s | \psi}_{\text{fermion}} = \text{diagram} = \bar{u}^s(p)$$

$$\underbrace{\overline{\psi} | \vec{k}, s \rangle}_{\text{antifermion}} = \text{diagram} = \bar{v}^s(k)$$

$$\underbrace{\langle \vec{k}, s | \psi}_{\text{antifermion}} = \text{diagram} = v^s(k)$$

(7.40)

Weiterhin gilt:

- Impulserhaltung an jedem Vertex
- Integration über alle Schleifenimpulse
- Minuszeichen

Es gibt einige Besonderheiten:

- (1) in der Yukawa-Theorie kürzt sich das $\frac{1}{n!}$ von der Taylor-Entwicklung immer gegen den Faktor $n!$ der Zahl der Vertex-Permutationen. Da der Vertex $(\bar{\psi} \psi \phi)$ keine zwei gleichen Felder enthält (im Sinne der Wick-Kontraktion),

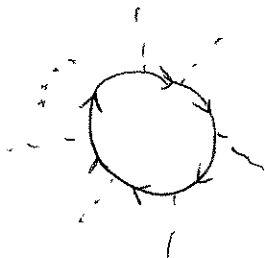
gibt es keine nicht-trivialen kombinatorischen Faktoren

(2) Die Richtung des Impulsflusses ist bei Fermionen immer relevant, da

$$S_F(-p) \neq S_F(p) \quad (7.41)$$

Pfeile auf der Fermionlinie bezeichnen den Teilchenzahlfluss. Bei äußeren Antifermionen kann aber der Impulsfluss umgekehrt zum Teilchenzahlfluss sein, weshalb zusätzliche Pfeile für den Impulsfluss nützlich sein können

(3) Minuszeichen tauchen auf, wenn fermionische Feldoperatoren für Kontraktionen miteinander vertauscht werden müssen. Eine allgemeine Regel gibt es für geschlossene Fermionloops:



z.B. für 4 äußere Beinen:

$$\sim \overline{\psi} \psi \overline{\psi} \psi \overline{\psi} \psi \overline{\psi} \psi$$

$$= (-1) \overline{\psi} \overline{\psi} \psi \psi \overline{\psi} \overline{\psi} \psi \psi = (-1) \text{tr}(S_F^4)$$

(7.42)

Geschlossene Fermionloops führen immer zu einem Minuszeichen.

7.4 Beispiel: das Yukawa Potential

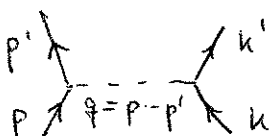
Als konkretes Beispiel betrachten wir die obige 2-mach-2 Streuung für unterscheidbare Teilchen.

In diesem Fall ist das volle Matrixelement gegeben durch

$$(7.37) \quad i\mathcal{M} = \frac{-ig^2}{q^2 - m_\phi^2} \bar{u}(p') u(p) \bar{u}(k') u(k), \quad (7.43)$$

weitere Terme wie z.B. durch das Diagramm

() gibt es wegen Unterscheidbarkeit

nicht. $i\mathcal{M} =$ 

Im nicht-relativistischen Limes können wir diese Amplitude mit einer quantenmechanischen Streuamplitude im Bornschen Näherung vergleichen.

Dann entwickeln wir alle Größen nach kleinen Impulsen:

$$p^\mu \simeq (m, \vec{p}) + \mathcal{O}(\vec{p}^2)$$

$$p'^\mu \simeq (m, \vec{p}') + \mathcal{O}(\vec{p}'^2) \quad (7.44)$$

$$k^\mu \simeq (m, \vec{k}) + \dots$$

$$k'^\mu \simeq (m, \vec{k}') + \dots$$

$$\Rightarrow q^2 = (p - p')^2 = -|\vec{p} - \vec{p}'|^2 + \mathcal{O}(\vec{p}^4)$$

Für die Spinoren gilt:

$$u^s(p) \simeq \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi^s \\ \xi^s \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

$$\text{und} \quad \bar{u}^{s'}(p') u^s(p) \simeq 2m \underbrace{\xi^{s'} \xi^s}_{\text{orthonormiert}} = 2m \delta^{s's}, \quad (7.46)$$

ähnlich $\bar{u}^{r'}(k') u^r(k) \simeq 2m \delta^{r'r}.$

Dies bedeutet, dass jede Spin der streuenden Fermionen separat erhalten ist.

$$\Rightarrow i\mathcal{M} = \frac{ig^2}{|\vec{p}' - \vec{p}|^2 + m_\phi^2} 2m \delta^{ss'} 2m \delta^{rr'} \quad (7.47)$$

Vergleichen wir dies mit der Störamplicitude eines nicht-relativistischen Teilchens an einem Potential quantenmechanischen

$$\langle \vec{p}' | iT | \vec{p} \rangle_{NR} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bornsche Näherung}}}{=} -i \tilde{V}(\vec{q}) (2\pi) \delta(E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}'}), \quad \vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \quad (7.48)$$

wobei $\tilde{V}$ die Fourier-Transformierte des Potentials ist, so folgt für die Yukawa-Wechselwirkung:

$$\tilde{V}(\vec{q}) = \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} \quad (7.49)$$

(die Faktoren $(2m)$ haben wir wegen unserer relativistischen Normierung außer Acht gelassen).

Fourier-Rücktransformation liefert:

$$\underline{\underline{V(\vec{x})}} = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{-g^2}{|\vec{q}|^2 + m_\phi^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}}$$

$$x = |\vec{x}| = -\frac{g^2}{8\pi^3} 2\pi \int_{-1}^1 du \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m_\phi^2} e^{iqx u}$$

$$= -\frac{g^2}{4\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{q^2 + m_\phi^2} \frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{iqx}$$

$$= -\frac{g^2}{4\pi^2 ix} \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{q e^{iqx}}{q^2 + m_\phi^2}$$

$$= -\frac{g^2}{4\pi^2 ix} \int_{\text{upper half circle}} dq \frac{q e^{iqx}}{q^2 + m_\phi^2}$$

$$= -\frac{g^2}{4\pi^2 ix} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{q e^{iqx}}{q^2 + m_\phi^2}, q = +im_\phi \right)$$

$$= -\frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{x} e^{-m_\phi x} \quad \underline{\underline{\text{Yukawa Potential}}} \quad (7.50)$$

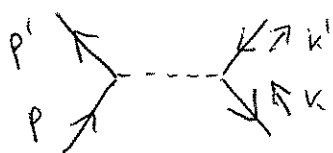
Dies ist ein attraktives Potential mit

Reichweite $\sim \frac{1}{m_\phi} \left(= \frac{\hbar}{m_\phi c} \right)$, was der

Compton-Wellenlänge des ausgetauschten Bosons entspricht.

(NB: Yukawa vermutete dieses Potential als Grundlage der Theorie der starken Wechselwirkung und verwendete deren Reichweite $\sim 1\text{fm}$ für eine Vorhersage der Masse des ausgetauschten Bosons, in diesem Fall des Pions.)

Betrachten wir nun die Streuung eines Fermions an einem Antifermion



so ändert sich zum einen die Spinorkontraktion

$$\bar{v}^s(k) u^{s'}(k') \simeq m \begin{pmatrix} \xi^{s\dagger} & -\xi^{s\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{s'} \\ -\xi^{s'} \end{pmatrix} = -2m \delta^{ss'}$$

es gibt jedoch auch noch ein weiteres Minuszeichen (7.51)
durch die von den Kontraktionen erzwungene

Operatorumordnung:

$$\langle \vec{p}', \vec{k}' | \underbrace{\psi \psi}_{\text{an einem Vertex}} \underbrace{\psi \psi}_{\text{am anderen Vertex}} | \vec{p}, \vec{k} \rangle$$

(7.52)

3 Operatorumordnungen erfordern eine (-1) .

Zusammen mit dem Minuszeichen aus (7.51) folgt

für Teilchen - Antiteilchen Streuung das identische Potential (7.50), d.h. auch in diesem Fall ist das Potential attraktiv!!