

Die Lorentz-Transform von ξ_α lässt sich damit schreiben als

$$\xi'_\alpha(x') = a_\alpha{}^\beta \xi_\beta(x) = \left[e^{-\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}} \right]_\alpha{}^\beta \xi_\beta(x), \quad (6.42)$$

sowie für $\eta^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$

$$\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = (\varepsilon a^\dagger \varepsilon^T)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}(x) = \left[e^{-\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \bar{\sigma}_{\mu\nu}} \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}(x).$$

6.4 Einfache Spinor-Feldtheorien

Im Folgenden sollen einfache Feldtheorien für Spinorfelder $\xi_\alpha(x)$, $\eta^{\dot{\alpha}}(x)$ konstruiert werden, in dem wir nach Lorentz-invarianten Lagrange-Dichten suchen.

Kinetischer Term

Mit (6.40) lässt sich die Ableitung in Spinorform schreiben

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \quad (6.43)$$

Der einfachste Lorentz-Skalar ist also gegeben durch
mit einer Ableitung

Einschub: Rechnen mit $SL(2, \mathbb{C})$ Spinoren

Als Metrik im Spinorraum dient

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \equiv \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.E1)$$

d.h. der zu ξ_α duale Spinor ist gegeben

durch $\xi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta$, analog $\eta^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$. (6.E2)

Weil ε anti-symmetrisch ist, gilt mit dieser Definition:

CAVE! : $\xi_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta$, $\eta_{\dot{\alpha}} = -\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}$
 $= \xi^\beta \varepsilon_{\beta\alpha}$, $= \eta^{\dot{\beta}} \varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$, (6.E3)

denn

$$-\varepsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta \stackrel{(6.E2)}{=} -\underbrace{\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\gamma}}_{= -\delta_\alpha^\gamma} \xi_\gamma = \xi_\alpha \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ das "+" Vorzeichen gilt immer für Kontraktionen
 von "links oben" nach "rechts unten", bzw. "NW - SE".
Nordwest - Südost

D.h. mit der NW-SO Konvention lautet die kompakte Schreibweise z.B.

$$\xi \xi \equiv \xi^\alpha \xi_\alpha = -\xi_\alpha \xi^\alpha, \quad (6.E4)$$

Nützlich ist auch eine Matrix-Schreibweise, bei der der links-stehende Spinor (nicht der Dual Spinor!) als transponierter "Vektor" betrachtet wird:

$$\begin{aligned} \xi \xi &\equiv \xi^\alpha \xi_\alpha \stackrel{(6.E1)}{=} \varepsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta \xi_\alpha \\ &= \xi_\beta \varepsilon^{\alpha\beta} \xi_\alpha = -\xi_\beta \varepsilon^{\beta\alpha} \xi_\alpha \\ &= -\xi^T \varepsilon \xi_\alpha \equiv \xi^T \varepsilon^T \xi \end{aligned} \quad (6.E5)$$

mit $\varepsilon^T = -\varepsilon$.

Lorentz-Transformationen lassen sich dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \xi'_\alpha &= a_\alpha{}^\beta \xi_\beta \Rightarrow \xi' = a \xi \\ \xi'^T &= \xi^T a^T \end{aligned} \quad (6.E6)$$

$$\eta^{*\alpha} (\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \eta^{\dot{\beta}} \equiv \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta \quad ((\eta^{\dot{\alpha}})^* = (\eta^\alpha)^*) \quad (6.44)$$

Damit wir einen reellen Skalar erhalten, versuchen wir es mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{?}{=} \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta + \text{h.c.} = \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta + (\partial_\mu \eta^\dagger) \bar{\sigma}^\mu \eta \\ &= \partial_\mu (\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \eta) \quad \hat{=} \text{totale Ableitung} \end{aligned} \quad (6.45)$$

$$\Rightarrow S = \int d^D x \mathcal{L} = 0 \quad \text{unbrauchbar}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{L}_L^{\text{kin}}} = \frac{i}{2} \left(\eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \eta - (\partial_\mu \eta^\dagger) \bar{\sigma}^\mu \eta \right) =: \frac{i}{2} \eta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{\partial}_\mu \eta \quad (6.46)$$

Dies ist der einfachst mögliche kinetische Term.

Ähnlich erhalten wir für ξ

$$\underline{\mathcal{L}_R^{\text{kin}}} = \frac{i}{2} \xi^{*\dot{\alpha}} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} \hat{\partial}_\mu \xi_\alpha = \frac{i}{2} \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{\partial}_\mu \xi \quad (6.47)$$

Beide Lagrange-Dichten haben jeweils eine kontinuierliche Symmetrie von Phasentransformationen

$$\begin{aligned} \xi'(x) &= e^{i\theta} \xi(x) & \xi'^*(x) &= e^{-i\theta} \xi^*(x) \\ \eta'(x) &= e^{i\theta'} \eta(x) & \eta'^*(x) &= e^{-i\theta'} \eta^*(x) \end{aligned} \quad (6.48)$$

die man als chirale Trafos bezeichnet. Diese bilden jeweils die Gruppe $U(1)_R$ bzw. $U(1)_L$.

Massenterm :

Der einfachste Lorentz-Skalar ohne Ableitung ist

$$\eta^{\dot{\alpha}} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = \eta^T \varepsilon \eta, \quad \xi_{\alpha} \varepsilon^{\alpha\beta} \xi_{\beta} = \xi^T \varepsilon \xi, \quad (6.49)$$

Allerdings gilt z.B.

$$\eta^{\dot{\alpha}} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} = \eta^1 \eta^2 - \eta^2 \eta^1. \quad (6.50)$$

Für kommutierende Zahlen wäre dieser Ausdruck $= 0$.

Blicken wir jedoch schon auf die Quantentheorie, so erwarten wir gemäß des allgemeinen Zusammenhangs zwischen Spin und Statistik (Spin-Statistik-Theorem), dass Spinoren der Fermi-Statistik genügen und damit anti-vertauschen.

Diese Eigenschaft kann man bereits in der klassischen Feldtheorie fordern, indem man $\eta^{\dot{\alpha}}$ und ξ_{α} als Grassmann-Zahlen interpretiert.

Für Grassmann-Zahlen gilt $\eta^2 \eta^1 = -\eta^1 \eta^2$ und damit ist (6.50) $\neq 0$. Ein Massenterm ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_L^m &= -\frac{1}{2} \left(m_L \eta^T \epsilon \eta - m_L^* \eta^\dagger \epsilon \eta^* \right) \\ \mathcal{L}_R^m &= -\frac{1}{2} \left(m_R \xi^\dagger \epsilon \xi^* - m_R^* \xi^T \epsilon \xi \right), \end{aligned} \quad (6.51)$$

wobei wir m_L, m_R als komplex angenommen haben (und verwendet haben, dass für Grassmann-Zahlen gilt $(\theta x)^* = x^* \theta^*$). ($\epsilon^\dagger = \epsilon^T = -\epsilon$)

Diese Massenterm heißt Majorana-Masse.

Er bricht die chiralen Symmetrien $U(1)_L$ und $U(1)_R$ vollständig, d.h. existiert ein Majorana-Massenterm, sind die Noetherladungen nicht erhalten.

Es existiert noch ein weiterer Massenterm:

$$\mathcal{L}_D^m = - (m \xi^\dagger \eta + m^* \eta^\dagger \xi) . \quad (6.52)$$

Dies ist ein Dirac - Massenterm. Er bricht die chiralen Symmetrien nicht vollständig.

Setzt man $\theta = \theta'$ für die Transformationen $U(1)_L$ und $U(1)_R$,

$$\begin{pmatrix} \eta' \\ \xi' \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} \eta^{*'} \\ \xi^{*'} \end{pmatrix} = e^{-i\theta} \begin{pmatrix} \eta^* \\ \xi^* \end{pmatrix} , \quad (6.53)$$

so ist (6.52) erhalten. Diese Symmetrie bezeichnet man als $U(1)_V$ (Vektor). Die zugehörige Ladung der Felder ist positiv für η, ξ und negativ für η^* und ξ^* .

6.5 Der Dirac - Spinor

Im masselosen Fall ebenso für den Majorana-Fall sind ξ und η unabhängig. Der Dirac-Messentern koppelt jedoch beide Spinoren. Es ist nützlich einen kombinierten 4er Spinor einzuführen,

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \eta^\alpha(x) \\ \xi_\alpha(x) \end{pmatrix}. \quad (6.54)$$

Eine kompakte Notation ergibt sich, wenn wir ebenfalls die Pauli-Matrizen zusammenfassen:

$$\gamma^\mu := \begin{pmatrix} 0 & (\vec{\sigma}^\mu)^{\alpha\beta} \\ (\vec{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

$$\Rightarrow \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

(Das sind die γ -Matrizen in chiral Darstellung;
auch andere Darstellungen sind oft gebräuchlich)

Unabh. von der Darstellung gilt folgende fundamentale

Eigenschaft der Dirac-Matrizen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \equiv \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (6.56)$$

(NB: Mathematisch bilden die γ^μ -Matrizen somit eine Clifford-Algebra)

Der Generator der Lorentz-Transfo ist direkt aus (6.41, 42) ablesbar

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta & 0 \\ 0 & (\sigma^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}. \quad (6.57)$$

Der Lorentz-transformierte Spinor hat also die Form

$$\psi'(x') = \left(e^{-\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}} \right) \psi(x) \equiv A \psi(x) \quad (6.58)$$

Die Matrix A ist das direkte analogon zur Transformationsmatrix a ; es gilt gemäß (6.42) der Zusammenhang

$$(A \psi(x))_{\dot{\alpha}}^i = \begin{pmatrix} (E a^\dagger E T)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} & 0 \\ 0 & a_\alpha{}^\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{\dot{\beta}}^i(x) \\ \xi_\beta(x) \end{pmatrix}. \quad (6.59)$$

Definieren wir

$$\bar{A} \equiv \gamma_0 A^\dagger \gamma_0, \quad (6.60)$$

so lässt sich mit (6.36) zeigen, dass

$$\bar{A} \gamma^\mu A = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu, \quad (6.61)$$

d.h. γ^μ hat tatsächlich Transformationseigenschaften eines 4er-Vektors.

Das "Quer" - Symbol bezeichnet die Dirac-Konjugation. Insbesondere definieren wir

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma_0. \quad (6.62)$$

Dieser Spinor taucht natürlicherweise auf, wenn wir den Dirac-kinetischen-Term betrachten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D^{\text{kin}} &= \mathcal{L}_L^{\text{kin}} + \mathcal{L}_R^{\text{kin}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \\ &= \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi) - \frac{i}{2} ((\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) \\ &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \end{aligned}$$

Die Wirkung ist also (6.63a)

$$S_D^{\text{kin}} = \int d^4x \quad i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi. \quad (6.63b)$$

Der Dirac-Massenterm aus (6.52) lautet (bei reeller Masse $m=m^*$) in der kompakten Schreibweise

$$\mathcal{L}_D^m = -m \bar{\Psi} \Psi. \quad (6.64)$$

Nützlich zur Untersuchung chiraler Symmetrien ist

$$\gamma_5 := i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

Damit lassen sich Projektionsoperatoren auf links- und rechtsständige Spinoren definieren:

$$P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}, \quad P_L = \frac{1-\gamma_5}{2} \quad (6.66)$$

mit $P_{R,L}^2 = P_{R,L}$, $P_R P_L = 0 = P_L P_R$
und $P_R + P_L = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \Psi_R := P_R \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_L := P_L \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (6.67)$$

Wichtige Symmetrien des freien Dirac-Wirkung:

$$S_D = \int d^4x \left(i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \right) \quad (6.68)$$

Wegen $\Psi' = A \Psi$ und entsprechend $\bar{\Psi} = \bar{\Psi} A$

folgt wegen (6.61) die Lorentz-Invarianz
z.B. des kinetischen Terms

$$\begin{aligned} \underline{\bar{\Psi}' \gamma^\mu \partial'_\mu \Psi'} &= \bar{\Psi} \bar{A} \gamma^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu A \Psi \\ &= \bar{\Psi} \bar{A} \gamma^\mu A \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \Psi \\ &\stackrel{(6.61)}{=} \bar{\Psi} \Lambda^\mu{}_\beta \gamma^\beta \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu \Psi \\ &= \bar{\Psi} \underbrace{g_{\mu\beta} \Lambda^\mu{}_\beta \Lambda^\sigma{}_\nu}_{= g_{\sigma\nu}} \gamma^\sigma \partial^\nu \Psi \\ &= \underline{\bar{\Psi} \gamma^\nu \partial_\nu \Psi} \quad (6.63) \end{aligned}$$

(ähnlich wie für den Massenterm war dies natürlich schon über die explizite $SL(2, \mathbb{C})$ Konstruktion klar.)

Damit ist klar, dass $\bar{A} A = 1$ gelten muss. 174

Es folgt, dass sich z.B. $\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi$ wie ein Lorentz-Tensor transformiert.

Weil $\gamma_5 \rightarrow -\gamma_5$ unter Parität $x^i \rightarrow -x^i$,

ist $\bar{\Psi} \gamma_5 \Psi$ somit ein Pseudoskalar

und $\bar{\Psi} \gamma_5 \gamma_\mu \Psi$ ein Pseudovektor unter Lorentz-Transf.

Die chiralen Transformationen von ξ und η $U(1)_L \times U(1)_R$ lassen sich für $\theta = \theta'$ bzw. $\theta = -\theta'$ schreiben als

$$U(1)_V: \quad \psi' = e^{i\theta} \psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\theta} \quad (6.70)$$

$$U(1)_A: \quad \psi' = e^{i\gamma_5 \theta} \psi, \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\gamma_5 \theta}.$$

Wegen $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ (ÜA) folgt z.B.

$$\begin{aligned} U(1)_A: \quad \bar{\psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \psi' &= \bar{\psi} e^{i\gamma_5 \theta} \gamma^\mu \partial_\mu e^{i\gamma_5 \theta} \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu e^{-i\gamma_5 \theta} \partial_\mu e^{i\gamma_5 \theta} \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \end{aligned}$$

also die Invarianz des kinetischen Terms unter

axialen Transform $U(1)_A$. Der Massenterm

bricht die axiale Symmetrie, Massenterm und kinetische Term sind allerdings invariant unter der Vektor-Symmetrie $U(1)_V$.

6.6. Die Dirac-Gleichung

Die Variation der Wirkung S_D (6.68)

z.B. nach $\bar{\Psi}$ liefert die klassische Bewegungsgleichung:

$$0 = \frac{\delta}{\delta \bar{\Psi}} S_D = \underline{(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) = 0} \quad (6.71)$$

Dirac-Gleichung

Anwenden von $(-i \gamma^\nu \partial_\nu - m)$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\underbrace{\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu}_{2g^{\mu\nu}} + m^2 \right) \Psi = (\partial^2 + m^2) \Psi(x) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}}_{2g^{\mu\nu}} + \underbrace{\frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]}_{\text{antisym.}} \end{aligned} \quad (6.72)$$

$\Rightarrow$ Lösungen der Dirac-Gleichung erfüllen auch die Klein-Gordon-Gleichung.

Damit wählen wir als Lösungsansatz

$$\Psi(x) = u(p) e^{-ipx} \quad \text{mit } p^2 = m^2$$

$$\Rightarrow (\gamma^\mu p_\mu - m) u(p) = 0 \quad (6.73)$$

Für den Spinor $u(p)$ gilt in der chiralen Basis
(6.55)

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] u(p) \quad (6.74)$$

Mit (6.35) folgt:

$$\begin{aligned} (p \cdot \vec{\sigma}) (p \cdot \vec{\sigma}) &= p_\mu p_\nu \underbrace{\frac{1}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)}_{=g^{\mu\nu}} \\ &= p^2 = m^2. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Die Lösung von (6.74) lautet somit

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi \\ \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi \end{pmatrix} \quad (6.76)$$

wobei ξ ein beliebiger $SL(2, \mathbb{C})$ spinor ist.

$$\text{check: } \left[\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi \\ \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi - m \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi - m \sqrt{p \cdot \vec{\sigma}} \xi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \underbrace{\sqrt{(p \cdot \bar{\sigma})(p \cdot \sigma)}}_{=m} \xi - m \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi \\ \sqrt{\bar{\sigma} \cdot p} \underbrace{\sqrt{(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma})}}_{=m} \xi - m \sqrt{p \cdot \sigma} \xi \end{pmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

Mögliche Basis-Spinoren sind $\xi^s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 so dass (6.76) insgesamt 2 Lösungen
 entsprechen (Spin-up für $\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, Spin-down
 für $\xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entlang der durch $\bar{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 definierten Richtung).

Dies Lösungen sind normiert:

$$\bar{u}^r(p) u^s(p) = 2m \delta^{rs} \quad (6.77)$$

$$\text{bzw. } u^{tr}(p) u^s(p) = 2E_p \delta^{rs},$$

Wie sich sofort nachrechnen lässt.

Neben diesen Lösungen gibt es ebenso
 Lösungen mit negativer Frequenz:

$$\psi(x) = v(p) e^{+ipx}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0 \quad (6.78)$$

$$\text{mit } v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \end{pmatrix} \quad \text{mit Spin-Basis } \eta^s, s=1,2. \quad (6.79)$$

mit Normierung: $\bar{v}^r(p) v^s(p) = -2m \delta^{rs}$, $v^{r\dagger}(p) v^s(p) = +2E_p \delta^{rs}$. (*)

178

Falls man an spin-summierten Ergebnissen interessiert ist, sind folgende Spin-Summen sehr nützlich ($\bar{u}A$):

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \gamma \cdot p + m \quad (6.80)$$

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \gamma \cdot p - m$$

Die Kombination $\gamma_\mu p^\mu = \gamma \cdot p$ erscheint so oft, dass man als Abkürzung oft den "Feynman-Slash" verwendet: $\gamma_\mu p^\mu = \not{p}$.

(*) u^r und v^s sind orthogonal zueinander:

$$\bar{u}^r(p) v^s(p) = \bar{v}^r(p) u^s(p) = 0 \quad (6.79b)$$