

Eine grundlegende Eigenschaft von (Quanten-)Feldern in relativistischen Theorien ist ihre Lorentz-Invarianz. In der Tat führt diese Invarianz zu einer Klassifizierung möglicher Quantenfelder.

6.1 Lorentz-Transformationen

Im ganzen Kurs haben wir Lorentz-Invarianz immer wieder verwendet. Es ist nun an der Zeit einen gründlichen Blick darauf zu werfen.

Eine Lineare Trafo des Vierervektors

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (6.1)$$

die die Norm

$$x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu, \quad g = (+, -, -, -) \quad (6.2)$$

invariant lässt, heißt Lorentz-Trafo. Λ erfüllt daher

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (6.3)$$

Allgemeiner transformiert ein beliebiger (kontravarianter) Tensor gemäß

$$T^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2} \dots T^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \dots} \quad (6.4)$$

(Die Regeln für kovariante (= Index unten) Objekte ergeben sich entsprechen analog durch herauf- und herunterziehen der Indizes mit der Metrik)

Es gibt nur zwei konstante invariante Tensoren:

die Metrik (per constructionem) vgl. (6.3)

der total anti-symmetrische Tensor

$$\varepsilon^{12345} \quad ; \quad \varepsilon^{0123} := +1 \quad , \quad \text{denn} \quad (6.5)$$

$$\varepsilon'^{\mu\nu\sigma\delta} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\sigma_\gamma \Lambda^\delta_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \varepsilon^{\mu\nu\sigma\delta} \det \Lambda \quad (6.6)$$

Wegen (6.3) gilt

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \Rightarrow \underline{\det \Lambda = \pm 1} \quad (6.7)$$

Der ε -Tensor ist also invariant, wenn $\det \Lambda = 1$.

Ferner folgt aus (6.3):

$$\begin{aligned} s=0=5: \quad 1 &= (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 \\ \Rightarrow \quad |\Lambda^0_0|^2 &= 1 + (\Lambda^i_0)^2 \\ \Rightarrow \quad \underline{\Lambda^0_0 \geq 1} \quad \text{oder} \quad \underline{\Lambda^0_0 \leq -1} \quad (6.8) \end{aligned}$$

Die Gesamtheit aller Lorentz-Transformationen bezeichnet

man als $O(3,1)$ (analog zu Drehungen im 4-dimensionalen Euklidischen Raum $O(4)$, man mit Berücksichtigung der Minkowski-Metrik).

Wegen (6.7) und (6.8) zerfällt die $O(3,1)$ in vier Zusammenhangskomponenten, wovon man die Menge aller Trafos mit

$$\det \Lambda = +1 \text{ und } \Lambda^0_0 \geq 1$$

(6.9)

als orthochrone eigentliche Lorentz-Trafo bezeichnet

(diese ist mit der Einheitsmatrix kontinuierlich verbunden; die anderen Komponenten sind mit der Paritätstrafo und/oder der Zeitumkehrtrafo verbunden)

Infinitesimale Lorentz-Trafos:

Wir betrachten eine infinitesimal von der Einheit entfernte Trafo

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \varepsilon^\mu_\nu, \quad \varepsilon^\mu_\nu \ll 1. \quad (6.10)$$

Entwicklung von (6.3) zu erster Ordnung ergibt

$$g_{\sigma\tau} + g_{\mu\sigma} \varepsilon^\mu_\tau + g_{\sigma\nu} \varepsilon^\nu_\tau + O(\varepsilon^2) = g_{\sigma\tau}$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} = 0 \quad (6.11)$$

Damit ist $\varepsilon_{\mu\nu}$ ein antisymmetrischer Tensor mit sechs unabhängigen Parametern. 3 Parameter beschreiben Lorentz-Boost (z.B. parametrisiert durch Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$) und 3 Parameter beschreiben orthogonale räumliche Drehungen (z.B. 3 Euler-Winkel).

Die infinitesimale Lorentz-Transformation (6.1) ist

$$x^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu =: \left(1 - \frac{i}{2} \varepsilon^{\sigma\tau} M_{\sigma\tau} \right)^\mu{}_\nu x^\nu \quad (6.12)$$

mit

$$(M_{\sigma\tau})^\mu{}_\nu = i \left(\delta^\mu_\sigma g_{\tau\nu} - \delta^\mu_\tau g_{\sigma\nu} \right), \quad (6.13)$$

d.h. für jedes Paar $\sigma\tau$ kann man $M_{\sigma\tau}$ als 4×4 Matrix (mit Indizes μ und ν in (6.13)) auffassen.

Die Matrix erfüllt, wie direktes Nachrechnen zeigt,

$$\boxed{[M_{\mu\nu}, M_{\sigma\tau}] = -i \left(g_{\mu\sigma} M_{\nu\tau} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\tau} - g_{\mu\tau} M_{\nu\sigma} + g_{\nu\tau} M_{\mu\sigma} \right)} \quad (6.14)$$

Gl. (6.14) definiert in der Tat die Algebra der Lorentz-Gruppe $SO(3,1)$. (6.13) ist damit eine spezielle Darstellung der Algebra durch 4×4 Matrizen.

$M_{03} = -M_{30}$ sind die 6 Erzeugenden dieser Lie-Algebra.

Unabhängig von der Darstellung erhält man endliche Transformationen durch die Exponential-Abbildung

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2} \varepsilon^{35} M_{35}} \simeq 1 - \frac{i}{2} \varepsilon^{35} M_{35} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (6.15)$$

6.2 Felder als Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Mögliche Felder und Feldvariablen der QFT können danach klassifiziert werden, wie sie sich unter Lorentz-Transformation verhalten, bzw. nach welcher Darstellung der Lorentz-Algebra sie sich transformieren.

Bislang haben wir lediglich skalare Felder betrachtet, die sich trivial transformieren

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (6.16)$$

Aus der Elektrodynamik kennen wir das Eichpotential $A_\mu(x)$, das sich als Vektor unter

Lorentz-Transformations verhält:

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x) \quad (6.17)$$

Allgemein gilt für ein Feld φ_i die Transformationsregel

$$\varphi'_i(x') = D(\Lambda)_i^j \varphi_j(x) \quad (6.18)$$

wobei $D(\Lambda)$ eine Darstellung des Lorentz-Transformations ist und eine $N \times N$ Matrix sein kann. Welche Darstellungen gibt es?

Infinitesimal gilt

$$D(\Lambda)_i^j = \delta_i^j - \frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu} (S_{\mu\nu})_i^j \quad (6.19)$$

mit $N \times N$ Matrix $S_{\mu\nu}$. Damit $D(\Lambda)$ eine Darstellung des Lorentz-Transformations ist, muss $S_{\mu\nu}$ die Lorentz-Algebra erfüllen (6.14), $S_{\mu\nu} \equiv D(M_{\mu\nu})$. Um den Raum aller möglichen $S_{\mu\nu}$ zu klassifizieren, zerlegen wir die Komponenten von $M_{\mu\nu}$ in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
 J_i &:= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk} \\
 K_i &:= M_{i0} = -M_{0i}, \quad i, j, k = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Mit (6.14) lässt sich direkt verifizieren, dass

$$\begin{aligned}
 [J_i, J_j] &= i \varepsilon_{ijk} J_k \\
 [J_i, K_j] &= i \varepsilon_{ijk} K_k \\
 [K_i, K_j] &= -i \varepsilon_{ijk} J_k
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

$\vec{J}$ erfüllt damit eine Drehimpuls algebra, ist also die Erzeugende räumlicher Drehungen. $\vec{K}$ entspricht dem Generator von Lorentz-Boosts.

Wir wechseln nun noch einmal die Basis und führen $\vec{A}$ -Spin- und $\vec{B}$ -Spin-Operatoren ein

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{J} + i\vec{K}), \quad \vec{B} = \frac{1}{2} (\vec{J} - i\vec{K}), \tag{6.22}$$

welche die Algebra erfüllen:

$$[A_i, A_j] = i \varepsilon_{ijk} A_k$$

$$[B_i, B_j] = i \varepsilon_{ijk} B_k \quad (6.23)$$

$$[A_i, B_j] = 0$$

D.h. die Lorentz-Algebra ist äquivalent zu zwei miteinander kommutierenden Drehimpulsalgebren.

Damit sind alle Darstellungen der Lorentz-Gruppe gegeben durch die Kombination aller Darstellungen dieser beiden Drehimpulsalgebren.

Letztere lassen sich klassifizieren durch die Größe des Spins ($\vec{A}$ -Spin, $\vec{B}$ -Spin), der halb- oder ganzzahlig sein muss. Sei A, B der Spin der Darstellg von $\vec{A}, \vec{B}$; dann ist die Größe des Darstellungsraums gegeben durch

$$N = (2A+1) \cdot (2B+1) \quad (6.24)$$

Da Index i von φ_i nummeriert dann alle Wertepaare

$i = (a, b)$ wobei a, b z.B. die Eigenwerte von

A_3 oder B_3 sind, $a = -A, -A+1, \dots, A-1, A$, $b = -B, -B+1, \dots, B$.

Damit haben wir alle irreduziblen Feldtypen gefunden.

6.3 Spinoren

Die einfachste Darstellung der Drehimpulsalgebra ist die $\text{Spin} - \frac{1}{2}$ Darstellung. Die einfachste nicht-triviale Darstellung der Lorentz-Algebra ist dann z.B.

$$(A, B) = (0, 1/2), \text{ d.h.}$$

$$D(\vec{A}) = 0, \quad D(\vec{B}) = \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad (\sigma_i: \text{Pauli-Matrizen}) \quad (6.25)$$

Die zugehörigen Felder sind somit 2-komponentig $\varphi_i \rightarrow \xi_\alpha, \alpha=1,2$.

Die Darstellungen von $\vec{J}$ und $\vec{K}$ sind

$$D(\vec{J}) = \frac{\vec{\sigma}}{2}, \quad D(\vec{K}) = i \frac{\vec{\sigma}}{2}. \quad (6.26)$$

Eine Lorentz-Transf. von ξ_α ist damit mit den Parametern $\epsilon^{\mu\nu}$ mit

$$(\epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12}) =: -\vec{\theta}, \quad (\epsilon_{10}, \epsilon_{20}, \epsilon_{30}) =: \vec{\omega} \quad (6.27)$$

gegeben durch

$$D(\Lambda) = e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{J} + i\vec{\omega} \cdot \vec{K}} \quad (6.28)$$

bzw.

$$a_\alpha{}^\beta \equiv \mathcal{D}(1)_\alpha{}^\beta = \left[e^{\frac{i}{2} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} - \frac{1}{2} \vec{W} \cdot \vec{\sigma}} \right]_\alpha{}^\beta \quad (6.29)$$

$$\Rightarrow \xi'_\alpha(x') = a_\alpha{}^\beta \xi_\beta(x) \quad (6.30)$$

Die Matrix a ist eine mit 6 reellen Parametern
geschriebene komplexe 2×2 Matrix mit Determinante

$= 1$ ($\bar{U} A$), also ein Element der

Matrixgruppe $SL(2, \mathbb{C})$.

Annotations:
 - "lineare" Transformation eines "Vektors" (pointing to the matrix)
 - "speziell", d.h. $\det = 1$ (pointing to the matrix)
 - 2×2 Matrix (pointing to the matrix)
 - komplexe Komponenten (pointing to the matrix)

ξ_α wird damit als $SL(2, \mathbb{C})$ -Spinor bezeichnet

Glen (6.28 & 29) beschreiben einen Homomorphismus
zwischen Lorentz-Gruppe $SO(3,1)$ und $SL(2, \mathbb{C})$,

der 2-Blättrig ist. Sei $\vec{W} = 0$; eine Drehung

um $\Theta_1 = 2\pi$ führt in der Lorentz-Gruppe wieder

zum Ausgang zurück, während $a \rightarrow -a$ in

der $SL(2, \mathbb{C})$. Erst eine Drehung um 4π ist

eine Identität in der $SL(2, \mathbb{C})$.

$\Rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ überdeckt die Lorentz-Gruppe
2-blättrig.

Als nächstes betrachten wir den komplex konjugierten
Spinor $(\xi_\alpha)^* \equiv \xi_{\dot{\alpha}}$ ("gepunkteter" Spinor), der sich
folglich wie

$$\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = a^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}{}^* \eta^{\dot{\beta}}(x) \quad \left(a^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}{}^* \equiv (a_{\alpha}{}^{\beta})^* \right) \quad (6.31)$$

transformiert. Mit (6.29) folgt rückwärts für
die Darstellung der $\vec{A}$ - und $\vec{B}$ -Spin-Matrizen:

$$D(\vec{A}) = -\frac{\vec{\sigma}}{2}^*, \quad D(\vec{B}) = 0, \quad (6.32)$$

womit wir die Darstellung $(A, B) = (\frac{1}{2}, 0)$
gefunden haben.

Zusammenhang zwischen 4er-Vektoren und Spinoren

Da die Dimension einer Darstellung der Lorentz-Gruppe durch die A- und B-Spindarstellungen mit $D = (2A+1)(2B+1)$ bestimmt sind, müssen 4er-Vektoren (mit insgesamt ganzzahligen Spin) mit der gemischten Darstellung

$$2 \times 2^* : (0, \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \quad (6.33)$$

zusammenhängen. Es muss also eine Entsprechung zwischen den Indizes $(\alpha, \dot{\beta})$ und μ geben. Dazu definieren wir

$$(\bar{\sigma}_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} := (1, \vec{\sigma}) \quad , \quad (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} := (1, -\vec{\sigma}) \quad (6.34)$$

$$(\text{Es gilt: } (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \varepsilon_{\beta\delta} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta} \Rightarrow (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\alpha}\beta} = [(\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}}]^*)$$

Mit diesen Definitionen lässt sich zeigen, dass

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\sigma}^\mu \sigma_\nu) = \delta^\mu_\nu \quad , \quad (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{\gamma}\delta} = 2 \delta_\alpha^\delta \delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}} \quad (6.35)$$

$$\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu + \bar{\sigma}_\nu \sigma_\mu = \bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu + \sigma_\nu \bar{\sigma}_\mu = 2 g_{\mu\nu} .$$

Daraus folgt mit (6.29) die wichtige Formel

$$\sigma_\mu \Lambda^\mu_\nu = a \sigma_\nu a^\dagger \quad (6.36)$$

Dies zeigt, wie die Lorentz-Transformationsmatrix eines 4er-Vektors mit den Transformationsmatrix a und $a^\dagger$ der Spinorbestandteile zusammenhängt.

Definieren wir die Spinordarstellung eines 4er-Vektors mit

$$\underline{x} := x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (6.37)$$

so folgt mit (6.36) die Lorentz-Transformations-Eigenschaft

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu x^\nu$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(6.36)}{=} \underline{x}' &= x^{\mu'} \sigma_{\mu'} = \sigma_\mu \Lambda^\mu_{\nu'} x^{\nu'} = a \sigma_\nu a^\dagger x^\nu \\ &= \underline{a \underline{x} a^\dagger} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Umgekehrt können wir aus zwei unabhängigen Spinoren ξ_α , η_α einen Vierer-Vektor konstruieren,

$$V_\mu = \bar{\psi}^\alpha (\sigma_\mu)_{\alpha\beta} \eta^\beta, \quad (6.33)$$

von dem sich zeigen lässt, dass ψ wie ein 4er-Vektor unter Lorentz-Transformationen transformiert, siehe Übung.

Zwischen dem 4er-Vektor und dem geminkten Spinor besteht allgemein die Zusammenhang

$$V_{\alpha\beta} = V^\mu (\sigma_\mu)_{\alpha\beta}, \quad V^\mu = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} V_{\alpha\beta} \quad (6.40)$$

Bislang haben wir die Lorentz-Transformationen a und a^* der $SL(2, \mathbb{C})$ Spinoren explizit mit Pauli-Matrizen geschrieben. Es gibt jedoch auch eine Darstellung der Generatoren, die die Lorentz-Algebra (6.14) erfüllen. Diese ist gegeben durch

$$(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} := \frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_{\alpha}{}^{\beta} \quad (6.41)$$

$$(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} := \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$$

$\sigma^{\mu\nu}$ und $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ erfüllen jeweils (6.14) mit $M^{\mu\nu} = (\sigma^{\mu\nu}, \bar{\sigma}^{\mu\nu})$.

Die Lorentz-Transform von ξ_α lässt sich damit schreiben als

$$\xi'_\alpha(x') = a_\alpha{}^\beta \xi_\beta(x) = \left[e^{-\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}} \right]_\alpha{}^\beta \xi_\beta(x), \quad (6.42)$$

sowie für $\eta^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}$

$$\eta'^{\dot{\alpha}}(x') = (\varepsilon a^\dagger \varepsilon^T)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}(x) = \left[e^{-\frac{i}{4} \varepsilon^{\mu\nu} \bar{\sigma}_{\mu\nu}} \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}(x).$$

6.4 Einfache Spinor-Feldtheorien

Im Folgenden sollen einfache Feldtheorien für Spinorfelder $\xi_\alpha(x)$, $\eta^{\dot{\alpha}}(x)$ konstruiert werden, in dem wir nach Lorentz-invarianten Lagrange-Dichten suchen.

Kinetische Term

Mit (6.40) lässt sich die Ableitung in Spinorform schreiben

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_{\alpha\dot{\beta}} = (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \partial_\mu \quad (6.43)$$

Der einfachste Lorentz-Skalar ist also gegeben durch
mit einer Ableitung