

5.3 Die LSZ-Reduktionsformel

137

Lehmann, Symanzik, Zimmermann '55

Wie gerade diskutiert hat die Fourier-Transformation der 2-Punkt-Funktion einen einfachen Pol bei der Masse des 1-Teilchen-Zustands:

$$\int d^D x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi_H(x) \phi_H(0) | \Omega \rangle \underset{p^2 \rightarrow m^2}{\sim} \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (5.44)$$

(Hier bedeutet " $\sim$ " dass die Pole beider Seiten die gleichen sind.)

Dieses Resultat wollen wir nun auf höhere Korrelationsfunktionen verallgemeinern. Dazu betrachten wir die

Fourier-Transforme von $G^{(n+2)}(x, \dots)$ bezüglich eines Arguments:

$$\int d^D x e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \{ \phi_H(x) \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \dots \} | \Omega \rangle. \quad (5.45)$$

Um die Pole (z.B. in der Variablen p^0) zu identifizieren, teilen wir wegen der Zeitordnung das x^0 -Integral in

3 Teile:

$$\int dx^0 = \underbrace{\int_{T_+}^{\infty} dx^0}_I + \underbrace{\int_{T_-}^{T_+} dx^0}_{II} + \underbrace{\int_{-\infty}^{T_-} dx^0}_{III}. \quad (5.46)$$

wobei $T_+ \gg z_i^0$, $T_- \ll z_i^0$.

Da das Integral $\mathbb{II}$ über ein endliches Intervall geht und der Integrand analytisch von p^0 abhängt, kann aus $\mathbb{II}$ keine Singularitätsstruktur kommen. Die Singularitäten müssen also durch die Unbeschränktheit der Intervalle $\mathbb{I}$ und $\mathbb{IV}$ entstehen.

Betrachten wir $\mathbb{I}$: x^0 ist die späteste Zeit, d.h. $\Phi(x)$ steht links
Einschieben der $\mathbb{II}$ (vgl. (5.35)) liefert

$$\int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int d^d x e^{ipx^0} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \sum_{\lambda} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{q}}(\lambda)} \langle \Omega | \Phi_{\lambda}(x) | \lambda_{\vec{q}} \rangle \cdot \langle \lambda_{\vec{q}} | T[\Phi_{\lambda}(z)] | \Omega \rangle \quad (5.47)$$

Mit $\langle \Omega | \Phi_{\lambda}(x) | \lambda_{\vec{q}} \rangle \stackrel{(5.37)}{=} \langle \Omega | \Phi_{\lambda}(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} \big|_{\vec{q}^* = (E_{\vec{q}}(\lambda), \vec{q})}$

und einem Konvergenz erzeugenden Faktor $e^{-\epsilon x^0}$ folgen

$$\begin{aligned} (5.47) &= \sum_{\lambda} \int_{T_+}^{\infty} dx^0 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{q}}(\lambda)} e^{ipx^0} e^{-i\vec{q}^* x^0} e^{-\epsilon x^0} \langle \Omega | \Phi_{\lambda}(0) | \lambda_0 \rangle (2\pi)^d \delta^{(d)}(\vec{p} - \vec{q}) \\ &\quad \cdot \langle \lambda_{\vec{q}} | T[\Phi_{\lambda}(z)] | \Omega \rangle \\ &\stackrel{q^0 = E_{\vec{q}}(\lambda)}{=} \sum_{\lambda} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_{\vec{p}}(\lambda) + i\epsilon} e^{i(p^0 - \vec{q}^*)T_+} \langle \Omega | \Phi_{\lambda}(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_{\vec{p}} | T[\Phi_{\lambda}(z)] | \Omega \rangle \quad (5.48) \end{aligned}$$

Es entsteht also eine Singularität bei $p^0 \rightarrow E_{\vec{p}}(\lambda)$.

Ob es sich dabei um einen Pol oder einen

Verzweigungsschnitt handelt, entscheidet die Verteilung der m_λ . Ist $m = m_\lambda$ eine isolierte "Ruhemasse" (isolierter Eigenwert von H bei $\vec{p} = 0$), führt dies zu einem 1-Teilchen-Zustand mit Pol bei $p^0 = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$:

$$\int d^D x \, e^{i p x} \langle \Omega | T [\Phi_H(x) \Phi_H(z) \dots] | \Omega \rangle$$

$$\underset{p^0 \rightarrow E_{\vec{p}}}{\sim} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{z} \langle \vec{p} | T [\Phi(z) \dots] | \Omega \rangle, \quad (5.49)$$

wobei $z = |\langle \Omega | \Phi_H(0) | \lambda_0 \rangle|^2$ (vgl. (5.42)) und $|\lambda_{\vec{p}}\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$ für einen 1-Teilchen-Zustand.

Aus dem Integrationsintervall III , indem x^0 die früheste Zeit ist, erhalten wir nach völlig analogen Schritten einen Polbeitrag der Form

$$\int d^D x \, e^{i p x} \langle \Omega | T [\Phi_H(x) \Phi_H(z) \dots] | \Omega \rangle$$

$$\underset{p^0 \rightarrow -E_{\vec{p}}}{\sim} \langle \Omega | T [\Phi_H(z) \dots] | -\vec{p} \rangle \sqrt{z} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (5.50)$$

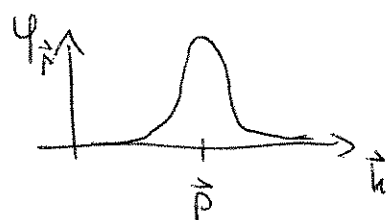
Nun würden wir gerne die Fourier-Transfo bezüglich aller anderen Koordinaten durchführen.

Damit die äußeren Teilchenzustände jedoch nicht interferieren sondern in den Intervallen I und III den Charakter asymptotischer Zustände haben, betrachten wir isolierte Zustände im Raum, bzw. Wellenpakete im Impulsraum. Dazu wiederholen wir die bisherige Rechnung mit der Ersetzung

$$\int d\vec{x} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \rightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int d^d x e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \Psi_{\vec{p}}(\vec{k}), \quad (5.51)$$

wobei $\Psi_{\vec{p}}(\vec{k})$ eine schmale Impulsraumverteilung hat, die um $\vec{p} = \vec{k}$ zentriert ist.

Im Limes $\Psi_{\vec{p}}(\vec{k}) \rightarrow (2\pi)^d \delta^{(d)}(\vec{k} - \vec{p})$ erhalten wir das bisherige zurück.



Die Aufweitung von $\Psi(\vec{k})$ im Impulsraum führt zur gewünschten Lokalisierung im Ortsraum, jedoch zum Preis einer komplizierten Singularitätsstruktur:

$$I: \sum_{\lambda} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \Psi_{\vec{p}}(\vec{k}) \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\lambda)} \frac{i}{p^0 - E_{\vec{k}}(\lambda) + i\varepsilon} \langle \Omega | \Phi(0) | \lambda_0 \rangle \langle \lambda_0 | T[\Phi(z_1) \dots] | \Omega \rangle$$

$$\underset{p^0 \rightarrow E_{\vec{p}}}{\sim} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \Psi_{\vec{p}}(\vec{k}) \frac{i}{\tilde{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{2} \langle \vec{k} | T[\Phi(z_1) \dots] | \Omega \rangle \quad (5.52)$$

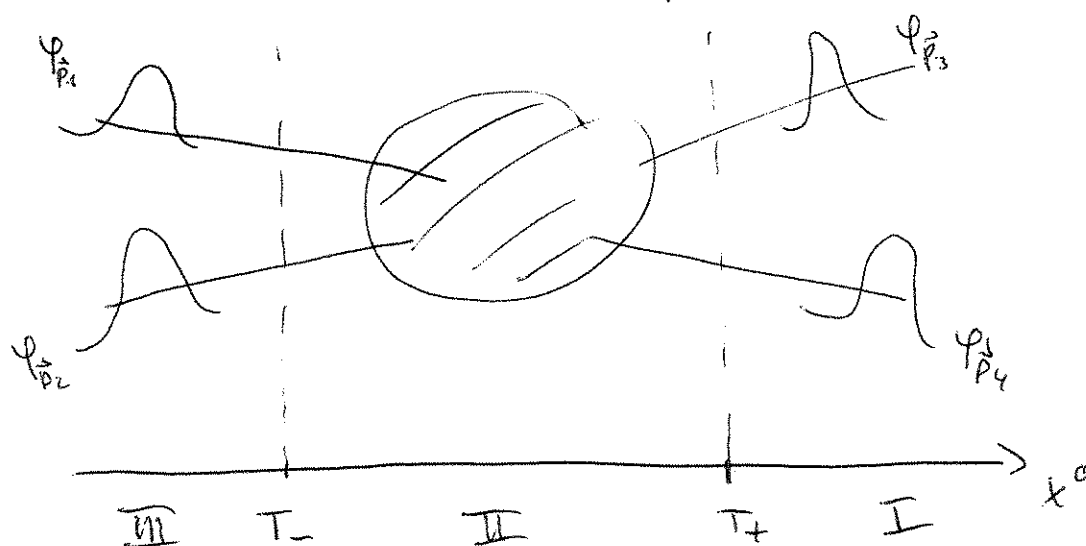
mit $\tilde{p}^\mu = (p^0, \vec{k})$.

Die 1-Teilchen Singularität wird damit zu einem Verzweigungsschnitt, dessen Länge der Breite des Wellenpakets im Impulsraum entspricht. Im Limes eines δ -artigen Wellenpakets erhalten wir den 1-Teilchen-Pol zurück. Ähnlich verfahren wir für die 1-Teilchen-Zustände in der fernen Vergangenheit im Intervall III.

Nun wenden wir diese Fourier-Transform mit Wellenpaketen auf alle Koordinaten x_i der $(n+2)$ -Punkt-Funktion an:

$$\left(\prod_i \int \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \int d^4 x_i e^{i \tilde{p}_i x_i} \varphi_{\tilde{p}_i}(\vec{k}_i) \right) \langle S_2 | T[\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots] | S_2 \rangle. \quad (5.53)$$

Die Wellenpakete sollen sich nahe $x=0$ und zwischen T_- und T_+ überlagern und wechselwirken, jedoch für $x^0 < T_-$ und $x^0 > T_+$ wohlsepariert sein.



Wieder kann aus dem Bereich II keine Singularität entstehen. Wir können uns also auf den Fall beschränken, in denen die x_i^0 alle in den Bereichen I oder III sind.

Betrachten wir z.B. den Fall, in dem $x_1^0, x_2^0 > T_+$ und alle anderen $x_{i \neq 1,2}^0 < T_-$.

Die Trafo bezüglich x_1 und x_2 liefert

$$I: \left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^d h_i}{(2\pi)^d} \int d^D x_i e^{i \vec{p}_i \cdot x_i} \varphi_{\vec{p}_i}(\vec{h}_i) \right) \langle \Omega | T[\Phi_H(x_1) \Phi_H(x_2) \Phi_H(x_3) \dots] | \Omega \rangle$$

$$\stackrel{x_1^0, x_2^0 > x_{i \neq 1,2}^0}{=} \sum_{\lambda} \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{k}}(\omega)} \left(\prod_{i=1,2} \varphi_{\vec{p}_i} \right) \langle \Omega | T[\Phi_H(x_1) \Phi_H(x_2)] | \lambda_{\vec{k}} \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | T[\Phi_H(x_3) \dots] | \Omega \rangle$$

(5.54)

Da in I (und III) die Wellenpakete stark separiert sind, tragen zur λ -Summe in (5.54) im wesentlichen nur die Zustände $|\lambda_{\vec{k}}\rangle$ bei, die Anregungen an lokalisierten

zwei verschiedenen Raumpunkten entsprechen. D.h.

$|\lambda_{\vec{k}}\rangle$ faktorisiert entsprechend:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{\lambda} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{k}}} \langle \Omega | T [\Phi_{(k_1)} \Phi_{(k_2)}] | \lambda_{\vec{k}} \rangle \langle \lambda_{\vec{k}} | \\
(5.55) \\
= \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^d q_1}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{q}_1}} \int \frac{d^d q_2}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{q}_2}} \langle \Omega | \Phi_{(k_1)} | \lambda_{\vec{q}_1} \rangle \langle \Omega | \Phi_{(k_2)} | \lambda_{\vec{q}_2} \rangle \\
\cdot \langle \lambda_{\vec{q}_1}, \lambda_{\vec{q}_2} |,
\end{aligned}$$

wobei λ_1, λ_2 alle Impuls-0 Zustände bezeichnen. Zur Singularitätsstruktur tragen jedoch nur alle 1-Teilchen-Zustände bei. Analog zur Rechnung (5.47-50) generieren nun die Integrale über x_i^0 und $\vec{q}_i$ eine Singularität im p_i^0 , welche wegen (5.55) ebenfalls faktorisieren:

$$\Rightarrow \left(\prod_{i=1,2} \int \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} \Psi_{\vec{p}_i}(\vec{k}_i) \frac{i}{\vec{p}_i^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{z'} \right) \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 | T [\Phi_H(x_3) \dots] | \Omega \rangle$$

(5.56)

Nun können wir den δ -Limes scharfer $\Psi_{\vec{p}_i}(\vec{k}_i)$ betrachten:

$$\Rightarrow \left(\prod_{i=1,2} \frac{i}{\vec{p}_i^2 - m^2 + i\epsilon} \sqrt{z'} \right) \langle \vec{p}_1, \vec{p}_2 | T [\Phi_H(x_3) \dots] | \Omega \rangle_f,$$

(5.57)

wobei uns der Index "f" daran erinnern soll, dass

es sich bei $\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 |$ um einen auslaufenden 2-Teilchen-Zustand handelt.

Die Wellenpakete-Argumentation lässt sich analog auf alle $x_{i \geq 3}^0 < T_-$ anwenden, und wir erhalten:

$$\left(\prod_{i=1,2} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right) \left(\prod_{i=3,\dots} \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \sqrt{Z} \right) \langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | - \vec{p}_3, \dots \rangle_i, \quad (5.58)$$

mit einlaufenden asymptotischen Zuständen

$$| - \vec{p}_3, \dots \rangle_i.$$

Unter der Annahme, dass der S -Limes der Wellenpakete zuerst gebildet werden kann ohne die Singularitätsstruktur zu ändern (siehe LSZ ^{führende} Originalarbeit), erhalten wir wegen

$$\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | S | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m \rangle \equiv \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_m \rangle_i \quad (5.59)$$

die LSZ - Reduktionsformel :

$$\prod_{i=1}^m \int d^D x_i e^{i p_i \cdot x_i} \prod_{j=1}^m \int d^D x_j e^{-i k_j \cdot x_j} \langle \Omega | T [\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_m) \phi_H(y_1) \dots \phi_H(y_m)] | \Omega \rangle$$

$$\sim \left(\prod_{i=1}^m \frac{\sqrt{z^1} i}{p_i^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \left(\prod_{j=1}^m \frac{\sqrt{z^1} i}{k_j^2 - m^2 + i\varepsilon} \right) \langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m | S | \vec{k}_1 \dots \vec{k}_m \rangle$$

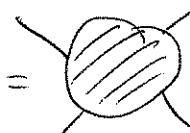
(5.60)

LSZ Reduktionsformel

Dies liefert eine Vorschrift zur Berechnung von S-Matrix-Elementen aus den Korrelationsfunktionen:

Berechne die Fourier-Transformierte der Korrelationsfunktion $G^{(n+m)}$, betrachte den Bereich im Impulsraum, in dem die Teilchen nahe ihrer Massenschale sind, und identifiziere den Koeffizienten (= S-Matrix-Element) der Polstruktur.

Diagrammatische Bedeutung der LSZ-Formel

Beispiel : 2-mach-2 Streuung $G^{(4)} =$ 

Aus der LSZ-Reduktionsformel lässt sich sofort ablesen, dass nur zusammenhängende Diagramme zur richtigen Polstruktur des Korrelators beitragen können. Ein nicht zusammenhängender Anteil hätte etwa die Form

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} k_1 \quad p_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ k_2 \quad p_2 \end{array} \Big|_{\text{discon.}} \sim \begin{array}{c} k_1 \text{---} \text{---} p_1 \\ k_2 \text{---} \text{---} p_2 \end{array} + \dots \quad (5.61) \\
 & \sim \frac{\sqrt{2}i}{k_1^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{\sqrt{2}i}{k_2^2 - m^2 + i\varepsilon} \int^{(D)} (k_1 \cdot p_1) \int^{(D)} (k_2 \cdot p_2)
 \end{aligned}$$

und eben nicht die benötigte Polstruktur von 4 1-Teilchen-Propagatoren.

Dies rechtfertigt im Nachhinein unsere Vorschrift in Kapitel 4.5, Gl. (4.67), nur die zusammenhängenden Anteile für die Streuamplitude zu berücksichtigen.

Des Weiteren können wir diagrammatisch die Diagramme, die zur 2-mach-2 Streuung beitragen, zerlegen in

ein amputiertes Stendiagramm (ohne Selbstenergiebeiträge auf den äußeren Beinen) und die Selbstenergiebeiträge auf den äußeren Beinen:

$$G^{(4)} = \text{diagram with a circle and four external lines} = \text{diagram with a central circle labeled 'amp' and four external lines, each with a self-energy loop}$$

Definieren wir nun die Summe aller ein-Teilchen-irreduziblen (1PI) Beiträge zur Selbstenergie

$$-i \Sigma(p^2) = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots = \text{diagram with a circle labeled '1PI'}$$
(5.62)

dann ergibt sich der volle Propagator mit Hilfe der geometrischen Reihe zu

$$\begin{aligned} \text{diagram with a shaded circle} &= \text{diagram with a line} + \text{diagram with a line and a 1PI circle} + \text{diagram with a line and two 1PI circles} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i \Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i \Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2} (-i \Sigma(p^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)} \end{aligned}$$
(5.63)

wobei m_0 den Massenparameter bezeichnet, der im Hamilton-Operator eingeführt wurde ("nackte" Masse).

Entwickeln wir diesen resummierten Propagator um den physikalischen Pol $m^2 = m_0^2 + \Sigma(p^2 = m^2)$, dann sehen wir, dass die äußeren Beine jeweils

$$\frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)} \xrightarrow{p^0 \rightarrow E_{\vec{p}}} \frac{iZ}{p^2 - m^2} \quad (5.64)$$

zur Polstruktur beitragen. Hierbei ist $Z = \frac{1}{1 - \frac{\partial \Sigma(p^2 = m^2)}{\partial p^2}}$ vgl. Übungen.

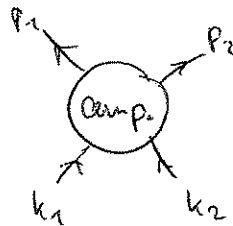
Alle vier äußeren Beine liefern also

$$\frac{iZ}{p_1^2 - m^2} \frac{iZ}{p_2^2 - m^2} \frac{iZ}{k_1^2 - m^2} \frac{iZ}{k_2^2 - m^2} \quad (5.65)$$

Was genau der Polstruktur der rechten Seite der LSZ-Reduktionsformel entspricht.

Der Koeffizient der Polstruktur entspricht dem gesuchten S-Matrixelement;

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = \sqrt{Z}^4 \quad (5.66)$$



Dies reicht jetzt im Nachhinein die zweite Vorschrift im (4.67), für die Streuamplitude nur die amputierten Diagramme zu berücksichtigen.

Für höhere Korrelatoren und S-Matrixelemente gilt gleichermaßen:

$$\langle \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m | S | \vec{k}_1 \vec{k}_2 \rangle = \sqrt{Z}^{n+2} \text{ (diagramm)} \quad (5.67)$$



(NB: Die Wellenfunktionsrenormierung Z hatten wir im (4.67) noch nicht berücksichtigt. Diese tragen zu führender Ordnung nicht bei, liefern aber zu höheren Ordnungen wichtige Korrekturfaktoren.)