

52 Lehmann - Källen - Spektral Darstellung

In der freien Theorie hat die 2-Punkt-Funktion eine einfache Interpretation: $\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$

ist die Amplitude eines von x nach y propagierenden Teilchens. Es stellt sich die

Frage, ob diese Interpretation auch in der wechselwirkenden Theorie für die volle 2-Punkt

Funktion $G^{(2)}(x,y) = \langle \Omega | T \phi_H(x) \phi_H(y) | \Omega \rangle$ gilt.

Dazu wollen wir im Folgenden die analytische Struktur von $G^{(2)}(x,y)$ untersuchen, ohne ^{uns} auf Störungstheorie oder eine bestimmte Wechselwirkung zu beschränken.

Zunächst benötigen wir eine Vollständigkeitsrelation analog zu

$$\mathbb{1}_{1\text{-Teilchen}} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|, \quad (5.32)$$

(freie Theorie)

jedoch für die wechselwirkende Theorie.

Als Basiszustände wählen wir Eigenzustände des

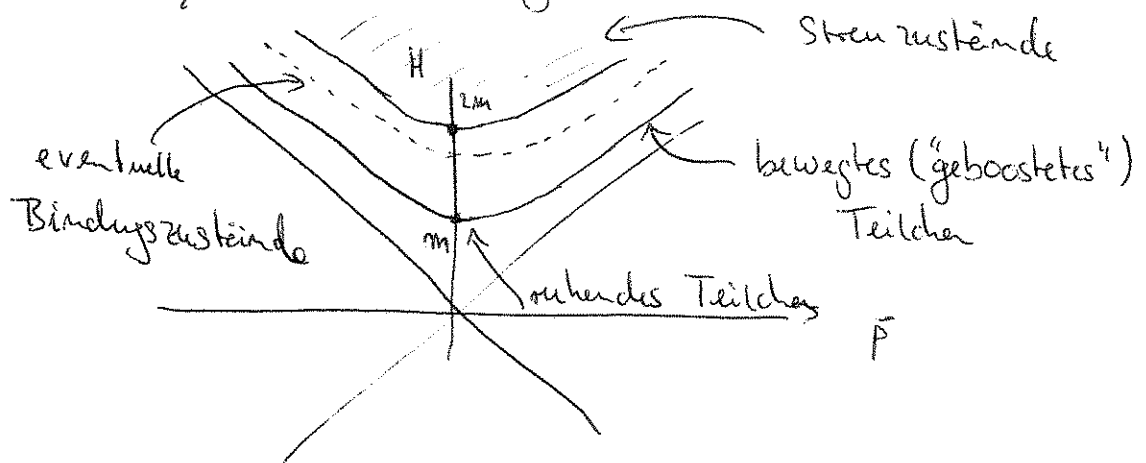
vollen Hamilton-Operators H . Da $[H, \vec{P}] = 0$, können wir gleichzeitig fordern, dass diese Zustände auch Eigenzustände des Impulsoperators $\vec{P}$ sind.

Sei $|\lambda_0\rangle$ nun Eigenzustand von H mit Impuls 0, d.h.

$$\vec{P} |\lambda_0\rangle = 0. \quad (5.33)$$

Dann ist der "geboostete" Zustand $|\lambda_0\rangle$ ebenfalls Eigenzustand von H mit einem dem Boost entsprechenden nicht-verschwindenden Impuls. Umgekehrt kann jeder Eigenzustand $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$ von H und $\vec{P}$ mit $\vec{P} |\lambda_{\vec{p}}\rangle = \vec{p} |\lambda_{\vec{p}}\rangle$ aufgefasst werden als Boost eines Zustandes $|\lambda_0\rangle$ mit Impuls 0.

Für die Eigenwerte des 4er-Impulsoperators $P^\mu = (H, \vec{P})$ gilt, dass sie "on-shell" auf dem Massenhyperboloid liegen müssen



Sei $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$ also der Lorentz-geboostete Zustand $|\lambda_0\rangle$
 mit Impuls $\vec{p}$ mit relativistischer Normierung
 und
 (analog zu $|\vec{p}\rangle$) und sei $E_{\vec{p}}(\lambda)$
 gegeben durch

$$E_{\vec{p}}(\lambda) := \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_{\lambda}^2}, \quad (5.34)$$

wobei m_{λ} die "Masse" des Zustandes $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$
 sei, d.h. die Ruhemasse des Zustandes $|\lambda_0\rangle$,
 -energie

dann lässt sich die Vollständigkeitsrelation schreiben
 als

$$\mathbb{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_{\lambda} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} |\lambda_{\vec{p}}\rangle\langle\lambda_{\vec{p}}|, \quad (5.35)$$

wobei die Summe über alle Impuls-0 Zustände $|\lambda_0\rangle$
 geht.

Für den Fall $x^0 > y^0$ gilt durch Einschieben
 des $\mathbb{1}$:

$$\langle\Omega|T\Phi_H(x)\Phi_H(y)|\Omega\rangle_{x^0>y^0} = \sum_{\lambda} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} \langle\Omega|\Phi_H(x)|\lambda_{\vec{p}}\rangle\langle\lambda_{\vec{p}}|\Phi_H(y)|\Omega\rangle, \quad (5.36)$$

wobei wir angenommen haben, dass das Vakuum keinen Felderwartungswert hat $\langle \Omega | \Phi | \Omega \rangle = 0$.

Für das Matrix-Element gilt:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \Phi_H(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle &= \langle \Omega | e^{iP_H x} \Phi_H(0) e^{-iP_H x} | \lambda_{\vec{p}} \rangle \\ &= \langle \Omega | \Phi_H(0) | \lambda_{\vec{p}} \rangle e^{-i\vec{p}x} \quad (\vec{p} = (E_{\vec{p}}, \vec{p})) \\ &= \langle \Omega | \Phi_H(0) | \lambda_0 \rangle e^{-i\vec{p}x}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

wobei wir im letzten Schritt die Lorentz-Invarianz von $\langle \Omega |$ und $\Phi_H(0)$ verwendet haben.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \Omega | T \Phi_H(x) \Phi_H(y) | \Omega \rangle &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(p)} e^{-i\vec{p}(x-y)} |\langle \Omega | \Phi_H(0) | \lambda_0 \rangle|^2 \\ &= \sum_{\lambda} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} |\langle \Omega | \Phi_H(0) | \lambda_0 \rangle|^2. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Im letzten Schritt haben wir eine p^0 -Integration "spendiert" analog zur Ableitung des Feynman-Propagators. Der resultierende "Feynman-Propagator" trägt jedoch nun Masse m_{λ} (anstatt m).

Im Fall $x^0 < y^0$ wären wir ebenfalls bei (5.38) angekommen.

Zusammengefasst führt dies zur
Lehmann - Källen - Spektraldarstellung

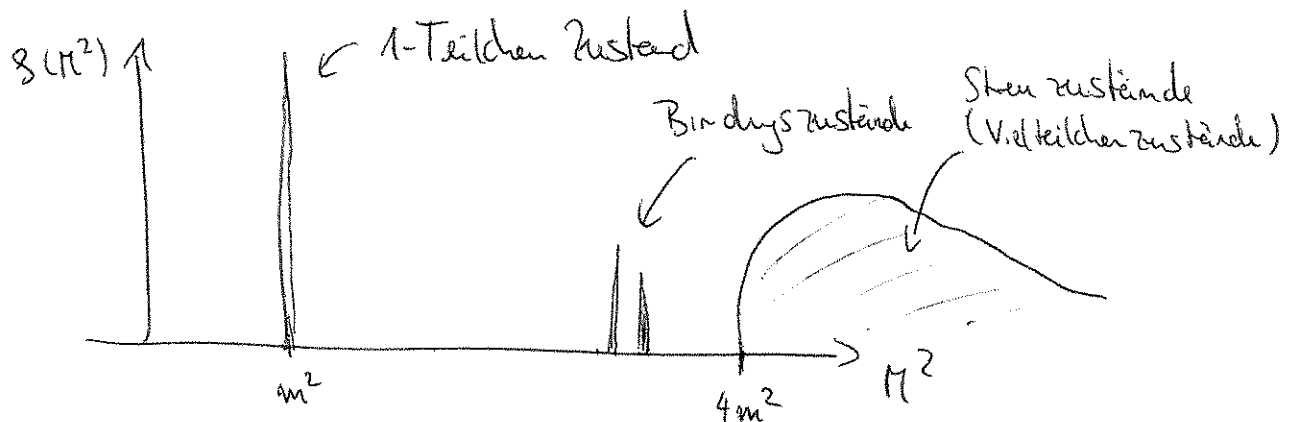
$$\underline{G^{(2)}(x,y)} = \langle \Omega | T \Phi_H(x) \Phi_H(y) | \Omega \rangle = \sum_{\lambda} i \Delta_F(x-y; \lambda) |\langle \Omega | \Phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2$$

$$= : \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \underline{S(M^2)} i \Delta_F(x-y; M^2) \quad (5.39)$$

mit der Spektraldichte

$$S(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_\lambda^2) |\langle \Omega | \Phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2, \quad (5.40)$$

Für eine Wechselwirkende Theorie hat $S(M^2)$
 typischerweise die Form



Vom 1-Teilchen Zustand erwarten wir einen Beitrag
 der Form

$$S(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot Z + (\text{Streu / Bindungs Zustände})$$

(5.41)

mit der Feldstärkenormierung

$$\underline{Z} = |\langle \Omega | \Phi_H(0) | \lambda_0 \rangle|^2 \quad (5.42)$$

Hierbei ist m in der Tat die exakte physikalische Masse (die möglicherweise vom Massenparameter in der ursprünglichen Wirkung abweicht.)

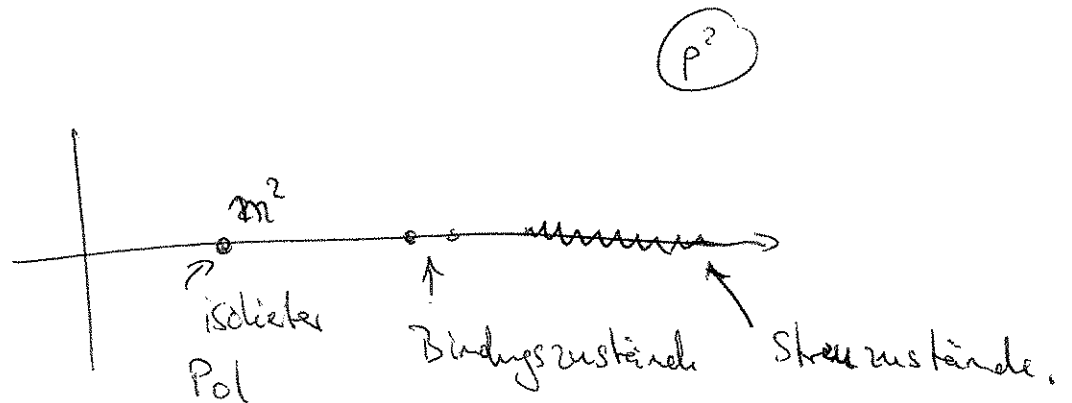
Die Feldstärkenormierung Z hat die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen durch den Feldoperator $\Phi(0)$ aus dem Vakuum zu erzeugen.

Im Fourier-Raum erhalten wir

$$\begin{aligned} G^{(2)}(p) &= \int d^D x \, e^{ipx} \langle \Omega | T \Phi_H(x) \Phi_H(0) | \Omega \rangle \\ &= \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \, \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{iZ}{p^2 - M^2 + i\epsilon} + \int_{\sim 4m^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \, \rho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (5.43) \end{aligned}$$

$\uparrow$
 Bindungszustände
 eingeschlossen

In der komplexen p^2 -Ebene entspricht der 1-Teilchen-Zustand mit Masse m einen Pol bei $p^2 = m^2$. Bindungszustände entsprechen weiteren Polen, wohingegen Kontinuumsstreu Zustände Verzweigungsschnitte in $G^{(n)}(p)$ ergeben ("branch cut").



Im freien Fall gilt offensichtlich $z = 1$
(keine Bindungs- und Streuzustände).

Damit ist $G^{(2)}$ vermöge der Lehman-Källén-Spektaldarstellung eine direkte Verallgemeinerung des Propagators der freien Theorie (man sagt auch zu $G^{(2)}$: "voller"

Propagator). 1-Teilchen-Zwischenzustände entsprechen Polen in $G^{(2)}(p)$, Vielteilchen-Zwischenzustände haben schwächere Singularitäten (branch cut singularities).