

5 Korrelationsfunktionen

Bislang haben wir uns spektrale Eigenschaften und S-Matrixelemente in QFT angeschaut. Wichtiges Werkzeug waren der Propagator bzw. der Kommutator. In der Tat gibt es Bausteine in der QFT die in fundamentale Weise alle Information über ein System enthalten, sozusagen den Inhalt einer QFT kodieren. Diese Bausteine sind die "Korrelationsfunktionen" (verallg. Green's Funktionen).

Um diese zu definieren, betrachten wir wieder einen Hamilton-Operator $H = H_0 + V$, so dass

$$\begin{aligned} H_0 |0\rangle &= 0 \\ H |\Omega\rangle &= E_0 |\Omega\rangle \end{aligned} \tag{5.1}$$

die Grundzustände $|0\rangle$ und $|\Omega\rangle$ der freien bzw. der Wechselwirkenden Theorie definieren.

5.1 Korrelationsfunktionen

117

Definition: n -Punkt Korrelationsfunktion

Diese ist gegeben durch den Erwartungswert bezüglich des wechselwirkenden Vakuums vom T -Produkt von n Feldoperatoren im Heisenberg-

Bild:

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n) := \langle \Omega | T \Phi_H(x_1) \dots \Phi_H(x_n) | \Omega \rangle. \quad (5.2)$$

Alle Objekte in dieser Formel sind kompliziert, sowohl $\langle \Omega |$ als auch $\Phi_H(x_i) \dots$

Im Folgenden wollen wir eine störungstheoretische Konstruktionsvorschrift entwickeln.

Für die Feldoperatoren Φ_H , Φ_S und Φ im Heisenberg-, Schrödinger- und Wechselwirkungsbild

gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_H(t) &= e^{iHt} \Phi_S e^{-iHt} = e^{iHt} e^{-iHt_0} \Phi e^{iHt_0} e^{-iHt} \\ &=: \Omega(t) \Phi(t) \Omega^\dagger(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\text{mit } \Omega(t) := e^{iHt} e^{-iHt_0}. \quad (5.4)$$

Es gilt:

$$\Omega^\dagger(t) \Omega(t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} =: \tilde{U}(t, t_0) \quad (5.4)$$

Der Operator erfüllt:

$$\tilde{U}(t=t_0, t_0) = 1,$$

$$\begin{aligned} \underline{i\partial_t \tilde{U}(t, t_0)} &= e^{iH_0 t} \underbrace{(-H_0 + H)}_{=V} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} \\ &= \underbrace{e^{iH_0 t} V}_{=H_I(t)} e^{-iH_0 t} e^{iH_0 t} e^{-iH(t-t_0)} e^{-iH_0 t_0} \\ &= \underline{H_I(t) \cdot \tilde{U}(t, t_0)} \quad (5.5) \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der DGL. muss gelten:

$$\underline{\tilde{U}(t, t_0) \equiv U_I(t, t_0)} \quad (5.6)$$

Der Operator $\Omega(t)$ vermittelt zwischen Wechselwirkungsbild und Heisenberg-Bild (vgl. (5.3)). Dies gilt auch für die Zustände. Z.B. das Vakuum im WW-Bild erhält man aus dem Vakuum $|\Omega\rangle$:

$$|\Omega\rangle = \Omega(t) |0, t\rangle \quad (5.7)$$

↑ Vakuum im WW-Bild.

Mit der Notation $\Phi_n := \Phi(t_n)$, $\Omega_n = \Omega(t_n)$, also

z.B. $\Phi_{H,k} = \Omega_k \Phi_k \Omega_k^\dagger$, lässt sich die n -Punkt -Funktion umschreiben:

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \langle 0, t | \Omega_t^\dagger T [\Omega_1 \Phi_1 \Omega_1^\dagger \Omega_2 \Phi_2 \Omega_2^\dagger \dots \Omega_n \Phi_n \Omega_n^\dagger] \Omega_t | 0, t' \rangle$$

Wir wählen nun $t \gg t_k$ und $t' \ll t_k$ für alle $k=1, \dots, n$, so dass $\Omega_t^\dagger$ und $\Omega_{t'}$ ins T-Produkt gezogen werden können. Unter dem T-Produkt können Operatoren beliebig vertauscht werden:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1 \dots x_n) &= \langle 0, t | T [\Phi_1 \dots \Phi_n \Omega_t^\dagger \Omega_{t'} \Omega_1^\dagger \Omega_2^\dagger \dots \Omega_n \Omega_n^\dagger \Omega_{t'}] | 0, t' \rangle \\ &= \langle 0, t | T [\Phi_1 \dots \Phi_n U_{I t, 1} U_{I 1, 2} U_{I 2, 3} \dots U_{I n-1, n} U_{I n, t'}] | 0, t' \rangle \\ &= \langle 0, t | T [\Phi_1 \dots \Phi_n U_I(t, t')] | 0, t' \rangle. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Im Prinzip muss unterschieden werden zwischen "in" ($t \rightarrow -\infty$) und "out" Vakua ($t \rightarrow +\infty$); die Diskussion kann jedoch für eines von beiden geführt werden, da sie unitär äquivalent zueinander sind. Betrachten wir also die Vakua in (5.8) als "out"-Vakua, d.h. ihre Verknüpfung mit dem freien Vakuum ist

gegeben durch

$$\langle 0, t | = \langle 0 | U_I(+\infty, t) \quad , \quad |0, t'\rangle = U_I^\dagger(+\infty, t') |0\rangle \quad (5.9)$$

$$\Rightarrow G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = \langle 0 | U_I(+\infty, t) T(\phi_1 \dots \phi_n U_I(t, t')) U_I^\dagger(+\infty, t') |0\rangle \quad (5.10)$$

Offensichtlich sind t und t' beliebig eingeführte Zeiten, die n -Punkt-Funktionen können davon nicht abhängen. Wir können diese auch zu $t \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty$ schieben, so dass

$$\langle 0, \infty | = \langle 0 | U_I(\infty, \infty) = \langle 0 |$$

$$|0, -\infty\rangle = U_I^\dagger(\infty, -\infty) |0\rangle = S^\dagger |0\rangle \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G^{(n)}(x_1 \dots x_n) &= \langle 0 | T(\phi_1 \dots \phi_n S) S^\dagger |0\rangle \\ &= \langle 0 | T(\phi_1 \dots \phi_n S) \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \underbrace{\langle n | S^\dagger |0\rangle}_{=: S_n^*} \quad (5.12) \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} 1 = \langle 0 | 0 \rangle &= \langle 0 | S S^\dagger |0\rangle = \sum_n \langle 0 | S |n\rangle \langle n | S^\dagger |0\rangle \\ &= |\langle 0 | S |0\rangle|^2 + \sum_{n \neq 0} |\langle n | S^\dagger |0\rangle|^2 \end{aligned}$$

folgt bei Eindeutigkeit und Stabilität des Vakuums

$$|\langle 0|S|0\rangle| = 1 \quad (\text{vgl. p. 100})$$

$$\Rightarrow \sum_{n \neq 0} |\langle n|S^\dagger|0\rangle|^2 = \sum_{n \neq 0} \underbrace{S_n^* S_n}_{\geq 0} = 0 \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow S_n^* = 0 \quad \text{für } n \neq 0,$$

und damit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G^{(n)}(x_1 \dots x_n)}} &= \langle 0|T(\phi_1 \dots \phi_n S)|0\rangle \cdot \underbrace{\langle 0|S^\dagger|0\rangle}_{\text{reine Phase}} \\ &= \frac{\langle 0|T(\phi_1 \dots \phi_n S)|0\rangle}{\underline{\underline{\langle 0|S|0\rangle}}} \quad (5.14) \end{aligned}$$

Die Entwicklung von S in die Dyson-Reihe

liefert eine perturbative Konstruktionsvorschrift

für n -Punkt Korrelatoren $G^{(n)}$. (NB:

offensichtlich sind die $G^{(n)}$ normiert, z.B.: $G^{(0)} = \frac{\langle 0|\mathbb{1}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} = 1$)

Für die $G^{(n)}(x_1 \dots x_n)$ lässt sich ein Erzeugendes Funktional konstruieren:

$$T[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^D x_1 \dots d^D x_n G^{(n)}(x_1 \dots x_n) J(x_1) \dots J(x_n),$$

wobei die Quelle J eine Hilfsvariable ist. (5.15)

Die $G^{(n)}$ ergeben sich aus $T[J]$ durch n -fache Ableitung nach $i \frac{\delta}{\delta J}$ (bei $J=0$).

Für $T[J]$ lässt sich eine geschlossene Formel finden. Offensichtlich gilt

$$T[J] = \langle \Omega | T e^{-i \int J \Phi_H} | \Omega \rangle, \quad (5.16)$$

was nach n -facher $-i \frac{\delta}{\delta J}$ Ableitung die Definition (5.2) reproduziert,

$$G^{(n)}(x_1 \dots x_n) = i^n \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} T[J]. \quad (5.17)$$

Ebenso lässt sich eine Darstellung finden, die (5.14) reproduziert. Dafür "verschieben" wir

den WW-Hamiltonian um einen Quellterm:

$$S[J] := T \left(e^{-i \int d^D x \mathcal{H}_I(x) - i \int d^D x J(x) \Phi(x)} \right) \quad (5.18)$$

Der Vakuumwartagswert sei

$$Z[J] := \langle 0 | S[J] | 0 \rangle, \quad (5.19)$$

so dass

$$i^n \frac{\delta}{\delta J_1} \dots \frac{\delta}{\delta J_n} Z[J] = \langle 0 | T(\Phi_1 \dots \Phi_n S[J]) | 0 \rangle. \quad (5.20)$$

Der Zusammenhang mit $G^{(n)}$ ergibt sich also über das erzeugende Funktional

$$T[J] = \frac{Z[J]}{Z[0]} \equiv \frac{\langle 0 | S[J] | 0 \rangle}{\langle 0 | S[0] | 0 \rangle} \quad (5.21)$$

Diese kompakten Formeln ergeben einen direkten Zusammenhang zwischen S-Matrixelementen und Korrelationsfunktionen; genauer: eine (perturbative) Berechnung der $G^{(n)}$ lässt sich auf eine

(perturbative) Berechnung von S-Matrix-Elementen
zurückführen. An dieser Stelle bleibt ein
wichtiger Schritt noch offen, nämlich die umgekehrte
Berechnung von S-Matrix-Elementen aus
Korrelationsfunktionen (dies liefert die LSZ
Reduktionsformel, siehe später).

Beispiel: Berechnung der 2-Punkt-Funktion
zur Ordnung $\mathcal{O}(\lambda^2)$ in ϕ^4 -Theorie

$$G_{(x,y)}^{(2)} = \frac{\langle 0 | T [\phi_x \phi_y e^{-i \frac{\lambda}{4!} \int d^D x_1 \phi_1^4}] | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \equiv \frac{g_{(x,y)}^{(2)}}{\langle 0 | S | 0 \rangle} \quad (5.22)$$

Mit Hilfe des Wick'schen Theorems berechnen wir zunächst
 $g_{(x,y)}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} g_{(x,y)}^{(2)} &= \langle 0 | T [\phi_x \phi_y] | 0 \rangle - i \frac{\lambda}{4!} \int d^D x_1 \langle 0 | T [\phi_x \phi_y \phi_1^4] | 0 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^D x_1 d^D x_2 \langle 0 | T [\phi_x \phi_y \phi_1^4 \phi_2^4] | 0 \rangle + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ &= \underbrace{\phi_x \phi_y}_{i\Delta(x-y)} - \frac{i\lambda}{4!} \int d^D x_1 \left\{ 3 \overbrace{\phi_x \phi_y}^{\text{---}} (\overbrace{\phi_1 \phi_1}^{\text{---}})^2 + 12 \overbrace{\phi_x \phi_y \phi_1 \phi_1}^{\text{---}} \overbrace{\phi_1 \phi_1}^{\text{---}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^D x_1 d^D x_2 \left\{ 2 \overbrace{\phi_x \phi_y}^{\text{---}} \left[(\overbrace{\phi_1 \phi_1}^{\text{---}})^2 (\overbrace{\phi_2 \phi_2}^{\text{---}})^2 + 9 (\overbrace{\phi_1 \phi_1}^{\text{---}}) \overbrace{\phi_1 \phi_1 \phi_2 \phi_2}^{\text{---}} (\overbrace{\phi_2 \phi_2}^{\text{---}}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4! (\overbrace{\phi_1 \phi_2}^{\text{---}})^4 \right] \right. \\ &\quad \left. + 72 \overbrace{\phi_x \phi_y \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_1}^{\text{---}} (\overbrace{\phi_2 \phi_2}^{\text{---}})^2 \right. \\ &\quad \left. + 288 \overbrace{\phi_x \phi_y \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_2 \phi_2}^{\text{---}} \overbrace{\phi_2 \phi_2}^{\text{---}} \right. \\ &\quad \left. + 288 \overbrace{\phi_x \phi_y \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_2 \phi_2 \phi_2 \phi_2}^{\text{---}} \right. \\ &\quad \left. + 192 \overbrace{\phi_x \phi_y \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_1 \phi_2 \phi_2 \phi_2 \phi_2}^{\text{---}} \right\} \quad (5.23) \end{aligned}$$

bzw. in Feynman-Diagrammen

$$\begin{aligned}
 g_{(x,y)}^{(2)} = & \text{---} \left\{ 1 + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right\} \\
 & + \text{---} \left\{ 1 + \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right\} \\
 & + \left[\text{---} + \text{---} + \text{---} \right] \{ 1 + \mathcal{O}(\lambda) \}.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Die Vermutung liegt nahe, dass sich in den $\{ \}$ -Klammern jeweils die gleiche Reihe aller Vakuumdiagramme ergibt,

$$\begin{aligned}
 g_{(x,y)}^{(2)} \stackrel{?}{=} & \left[\text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] \\
 & \cdot \left\{ 1 + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Falls die Vermutung stimmt, faktorisieren alle Vakuumdiagramme, welche genau dem VEV der S-Matrix entsprechen,

$$\{ \text{---} \} \equiv \langle 0 | S | 0 \rangle, \quad (\text{vgl. Übung}) \tag{5.26}$$

so dass sich diese wegen $G^{(n)} = \frac{g^{(n)}}{\langle 0 | S | 0 \rangle} = \frac{[\dots] \cdot \{ \text{---} \}}{\langle 0 | S | 0 \rangle} = [\dots]$ genau aus dem Korrelator herauskürzen.

Folglich gilt, dass $G^{(2)}$

nur aus zusammenhängenden Diagrammen bestehen kann, denn der bei x einfließende Impuls muss kontinuierlich durch das Diagramm und bei y wieder heraus fließen.

Die Faktorisierung lässt sich wie folgt zeigen:

Sei

$$\frac{\Gamma_k}{k!} := \langle 0 | T \Phi_1 \dots \Phi_m S^{(k)} | 0 \rangle \quad (5.27)$$

der Beitrag k -ter Ordnung zur Dyson-Reihe des Korrelators $G^{(k)}$. Γ_k ist eine Summe von Diagrammen mit k Vertices. Jedes Diagramm in dieser Summe ist ein Produkt von Subgraphen

$\Gamma(p, k-p \equiv q)$ mit genau q aus k Vertices, die zu Vakuumdiagrammen gehören, z.B.

$$\Gamma_3 \supset \Gamma(1,2) = \text{diagramm} \quad (5.28)$$

Jeder Subgraph faktorisiert also in einen

- Subgraphen $C(p)$ mit p Vertices und keinen Vakuumdiagrammen, sowie einen
- Subgraphen $V(q)$ mit nur Vakuumdiagrammen, die q Vertices enthalten.

Bei einer Gesamtzahl von k Vertices gibt es $\binom{k}{q}$ Möglichkeiten, diese Vertices auf die Subdiagramme $C(p)$ und $V(q)$ zu verteilen:

$$\Gamma(p, k-p) \equiv \Gamma(p, q) = \binom{k}{q} C(p) V(q) \equiv \binom{p+q}{q} C(p) V(q). \quad (5.29)$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} g &= \sum_k \frac{1}{k!} \Gamma_k = \sum_k \frac{1}{k!} \sum_{p \leq k} \Gamma(p, k-p) = \sum_{p, q} \frac{1}{(p+q)!} \Gamma(p, q) \\ &= \sum_{p, q} \frac{1}{(p+q)!} \binom{p+q}{q} C(p) V(q) = \sum_p \frac{C(p)}{p!} \sum_q \frac{V(q)}{q!}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

wobei $\sum_q \frac{V(q)}{q!} = \langle 0 | S | 0 \rangle$ wie vermutet die Summe aller S -Matrix ~~diagramme~~ Vakuumdiagramme ist. 

NB: obiges Beispiel ist im Ortsraum gerechnet:
z.B. $G^{(2)}(x, y) = i \Delta_F(x-y) + \mathcal{O}(\lambda)$. Im Impulsraum hätten wir gefunden, dass

$$G^{(2)}(p) = i \Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \mathcal{O}(\lambda). \quad (5.31)$$

Der auftretende 4er Impuls p muss nicht auf der Massenschale sitzen ($p \neq \bar{p}$ i. A.), d.h. die Korrelationsfunktionen enthalten Informationen über die Korrelationen sowohl realer Teilchen, als auch virtuelle Quantenfluktuationen.

NB2: obige Überlegungen, dass die $G^{(2)}$ nur zusammenhängende Diagramme enthalten, gilt nicht mehr für den Fall nichtverschwindender VEVs der Feldoperatoren, z.B. $\langle \phi | 0 \rangle \neq 0$, d.h. im Falle eines nicht-trivialen Vakuums.