

In der Teilchenphysikphänomenologie sind (differentielle)
Wirkungsquerschnitte eine zentrale Meßgröße.

Heuristisch kann man sich den Wirkungsquerschnitt als eine Fläche vorstellen, die das Streuzentrum einem einlaufenden Teilchen(-strahl) als Wechselwirkungsreich bietet.

Zunächst einige Definitionen:

Def. Übergangswahrscheinlichkeit:

Die Übergangswahrscheinlichkeit eines Übergangs von $|i\rangle$ nach $|f\rangle$ ist gegeben durch

$$P_{fi} := |T_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_f - \sum p_i) V_0 \cdot |M(i \rightarrow f)|^2 \quad (4.77)$$

Hier haben wir die gleiche Argumentation wie bei Fermi's Goldener Regel verwendet, um dem Quadrat zweier δ -Funktionen, die jeweils im T_{fi} enthalten sind, physikalischen

Sinn zu verleihen. Merkmalsregel ist

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^D \left[\delta^{(D)}(\bar{\Sigma}_{Pf} - \bar{\Sigma}_{Pi}) \right]^2 &\sim (2\pi)^D \delta^{(D)}(\bar{\Sigma}_{Pf} - \bar{\Sigma}_{Pi}) \cdot \int d^D x e^{-ix(\bar{\Sigma}_{Pf} - \bar{\Sigma}_{Pi})} \\
 &\sim (2\pi)^D \underbrace{\int d^D x}_{V_D} \delta^{(D)}(\bar{\Sigma}_{Pf} - \bar{\Sigma}_{Pi}) \\
 &\sim (2\pi)^D \delta^{(D)}(\bar{\Sigma}_{Pf} - \bar{\Sigma}_{Pi}) V_D,
 \end{aligned}
 \tag{4.78}$$

Wobei V_D das D -dimensionale Raumzeit-Volumen ist. Division mit V_D liefert

Def: die Übergangsrate:

$$R_{fi} \equiv \frac{|T_{fi}|^2}{V_D} = (2\pi)^D \delta^{(D)}(\bar{\Sigma}_{Pf} - \bar{\Sigma}_{Pi}) |M_{fi}|^2
 \tag{4.79}$$

Im Allgemeinen werden die Zustände $|f\rangle$ Teil eines Kontinuums von Zuständen sein (d.h. kontinuierlich abhängig von Impulsen, Winkeln etc.). Ein typischer Detektor löst jedoch immer nur mit endlicher Auflösung "Volumen -

elemente^{z.B.} im Phasenraum auf, z.B. im
Lorentz-invarianten Impulsraummaß

$$dN_f := \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_f} \quad \left(\text{für jedes auslaufende Teilchen} \right) \quad (4.80)$$

Die Übergangsrate für Prozesse in dieses Impuls-
raum Volumen ist dann gegeben durch die

Def. Differentielle Übergangsrate

$$dR := R_{fi} dN_f = (2\pi)^d \delta^{(d)}(\vec{p}_f - \vec{p}_i) |M_{fi}|^2 dN_f \quad (4.81)$$

Da der Wirkungsquerschnitt eine Größe sein soll, die
von der "Strahleigenschaft" eines Experiments
unabhängig sein soll, muss der Fluss, mit dem
die Teilchen im Zustand $|i\rangle$ einlaufen, noch
herausdividiert werden. Dieser Flussfaktor für
eine 2-mach-N-Teilchen Streuung $\{ \text{2} \rightarrow \text{N} \}$
ist gegeben durch den

Def. Flussfaktor

$$F := s_1 s_2 v_{12} \quad (4.82)$$

wobei g_1 und g_2 die Stromdichten der einlaufenden Teilchen ist und v_{12} die relative Geschwindigkeit. Zur Berechnung des Flussfaktors betrachten wir die ein-Teilchen Wellenfunktion

$$\Phi_{\vec{p}}(x) = \langle 0 | \Phi(x) | \vec{p} \rangle = e^{-i\vec{p}x}, \quad (4.83)$$

die (à la Quantenmechanik) mit einem Wahrscheinlichkeitsstrom verknüpft ist,

$$j^\mu = 2 \operatorname{Im} (\Phi_{\vec{p}} \partial^\mu \Phi_{\vec{p}}^*) = 2 \vec{p}^\mu, \quad (4.84)$$

$$\text{d.h.} \quad j^0 \equiv g = 2 E_{\vec{p}} = 2 \gamma m, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (4.85)$$

$$\vec{j} = 2 \vec{p} = 2 \gamma m \vec{v}.$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist dabei

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E_{\vec{p}}} = \frac{\vec{j}}{j^0} = \frac{\vec{j}}{g}, \quad (4.86)$$

so dass wir den Flussfaktor schreiben können als

$$F = 2 E_{\vec{p}_1} 2 E_{\vec{p}_2} \left| \frac{\vec{p}_1}{E_{\vec{p}_1}} - \frac{\vec{p}_2}{E_{\vec{p}_2}} \right| = 4 |E_2 \vec{p}_1 - E_1 \vec{p}_2|, \quad (4.87)$$

Mit all diesen Definitionen erhalten wir den

Def. differentieller Wirkungsquerschnitt

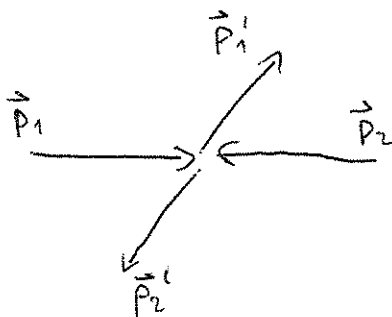
$$d\sigma := \frac{dR}{F} \quad (4.88)$$

$$\Rightarrow d\sigma = \frac{1}{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2} N_{12}} \left(\prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}_f}} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\vec{p}_F - \vec{p}_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \quad (4.89)$$

oder schematisch $d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} \cdot dN_f$

Falls die N Teilchen im Endzustand identisch sind, muss dies durch einen Faktor $\frac{1}{N!}$ berücksichtigt werden.

Als Beispiel betrachten wir wieder den 2-mach-2 Streuprozess (vgl. S. 104 ff). Im Laborsystem, das gleich dem Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen sei, gilt



$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p} \quad (4.90)$$

$$E_1 = E_2 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \equiv \frac{E}{2}$$

Wir benötigen den Flussfaktor (4.87),

$$F = 4 (E_2 |\vec{p}| + E_1 |p|) = 4 E |\vec{p}|, \quad (4.91)$$

das sich also durch die Energie im Schwerpunktsystem ausdrücken lässt.

Der experimentelle Aufbau sei derart, dass man das Raumwinkelement $d\Omega$, in das das Teilchen 1' gestreut wird, detektiert wird. Sein Impuls sowie das Teilchen 2' habe beliebige Eigenschaften.

$$\text{Mit } d^3 p'_1 = |\vec{p}'_1|^2 dp'_1 d\Omega \text{ gilt} \quad (4.92)$$

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{4E|\vec{p}|} d\Omega \int \frac{dp'_1}{(2\pi)^3} \frac{|\vec{p}'_1|^2}{2E'_1} \int \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E'_2} (2\pi)^4 \delta(E'_1 + E'_2 - E) \cdot \delta^{(3)}(\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2)$$

Die $\delta^{(3)}$ Funktion erzwingt $\vec{p}' \equiv \vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$ und

folglich $E'_1 = E'_2 = \sqrt{\vec{p}'^2 + m^2} \equiv \frac{E'}{2}$. Es ergibt sich

$$d\sigma = \frac{\lambda^2}{4E|\vec{p}|} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} \int dp' \frac{p'^2}{E'^2} \delta(E' - E). \quad (4.93)$$

Der Variablenwechsel $p' = \sqrt{\frac{E'^2}{4} - m^2} \Rightarrow p' dp' = \frac{1}{4} E' dE'$

liefert

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \frac{\lambda^2}{4E|\vec{p}|} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dE'}{4E'} \sqrt{\frac{E'^2}{4} - m^2} \delta(E' - E) \\
 &= \frac{\lambda^2}{4E|\vec{p}|} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} \frac{1}{4E} \underbrace{\sqrt{\frac{E^2}{4} - m^2}}_{=|\vec{p}|} \\
 &= \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E^2} d\Omega \quad (4.94)
 \end{aligned}$$

Wir erhalten also den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{cm}} = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 E^2} \quad (4.95)$$