

4.3 Das Wick'sche Theorem

Technisch entspricht nun die Berechnung von S-Matrixelementen dem Berechnen von Erwartungswerten, bzw., Übergangsmatrixelementen von zeitgeordneten Produkten von Feldoperatoren. In direkter Form ist das, wenn auch möglich, nicht sehr praktisch. Hier kommt das Wick'sche Theorem zur Hilfe. Dazu zunächst zwei Definitionen:

Def.: Normalordnung

Zerlegen wir den Feldoperator in positive und negative Frequenzanteile,

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \quad (4.36)$$

wobei $\phi^+ \sim a e^{-iE_p t}$ und $\phi^- \sim a^\dagger e^{iE_p t}$.

Normalordnung von Operatorprodukten bedeutet nun, dass alle Absteigeoperatoren a rechts von allen Aufsteigeoperatoren stehen sollen, also

$$N[1] = 1$$

$$N[\phi] = \phi = \phi^+ + \phi^-$$

$$N[\phi(x_1)\phi(x_2)] \equiv N[\phi_1\phi_2] = \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_2^-\phi_1^+ + \phi_1^-\phi_2^-$$

$$\vdots$$

$$(4.37)$$

Dies bedeutet automatisch, dass der Vakuumerwartungswert von Normalgeordneten Produkten verschwindet (falls das Produkt $\neq \mathbb{1}$):

$$\underline{\langle 0 | N[\dots] | 0 \rangle} = 0 \quad , \text{ falls } \dots \neq c \cdot \mathbb{1} \quad (4.38)$$

Definition: Kontraktionen

Die Kontraktion von zwei Feldoperatoren ist definiert durch die Differenz von zeitgeordnetem und normalgeordnetem Produkt:

$$\overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} := T[\phi(x_1) \phi(x_2)] - N[\phi(x_1) \phi(x_2)] \quad (4.39)$$

Die Kontraktion lässt sich im ob. Text direkt ausrechnen.

Sei $x_1^0 > x_2^0$:

$$\begin{aligned} T[\phi(x_1) \phi(x_2)] &\stackrel{x_1^0 > x_2^0}{=} \phi_{(x_1)}^+ \phi_{(x_2)}^+ + \phi_{(x_1)}^+ \phi_{(x_2)}^- + \phi_{(x_1)}^- \phi_{(x_2)}^+ + \phi_{(x_1)}^- \phi_{(x_2)}^- \\ &= \phi_{(x_1)}^+ \phi_{(x_2)}^+ + \phi_{(x_2)}^- \phi_{(x_1)}^+ + \phi_{(x_1)}^- \phi_{(x_2)}^+ + \phi_{(x_1)}^- \phi_{(x_2)}^- \\ &\quad + [\phi_{(x_1)}^+, \phi_{(x_2)}^-] \\ &= N[\phi(x_1) \phi(x_2)] + [\phi_{(x_1)}^+, \phi_{(x_2)}^-] \end{aligned} \quad (4.40)$$

ähnlich $T[\phi(x_1) \phi(x_2)] \stackrel{x_1^0 < x_2^0}{=} N[\phi(x_1) \phi(x_2)] + [\phi_{(x_2)}^+, \phi_{(x_1)}^-]$

Für diese Kommutatoren gilt: $(x_1 \equiv x, x_2 = 0)$

$$\begin{aligned} [\Phi_{(x)}^+, \Phi_{(0)}^-] &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \frac{1}{\sqrt{2E_q}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} = i \Delta^+(x), \end{aligned} \quad (4.41)$$

ähnlich $[\Phi_{(0)}^+, \Phi_{(x)}^-] = i \Delta^-(x)$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} \overbrace{\Phi_{(x_1)} \Phi_{(x_2)}} &= T[\Phi_{(x_1)} \Phi_{(x_2)}] - N[\Phi_{(x_1)} \Phi_{(x_2)}] \\ &= \Theta(x_1^0 - x_2^0) i \Delta^+(x_1 - x_2) + \Theta(x_2^0 - x_1^0) i \Delta^-(x_1 - x_2) \\ &= \underline{\underline{i \Delta_F(x_1 - x_2)}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Die Kontraktion zweier Felder entspricht also genau dem Feynman-Propagator!

Das Wick'sche Theorem verallgemeinert diesen Zusammenhang zwischen Zeitordnung, Normalordnung und Propagatoren auf höhere Operatorprodukte. Zu diesen verallgemeinerten Identitäten gibt es ein erzeugendes Funktional:

Wicksches Theorem: Sei $J(x) \in \mathbb{R}$ und $\Phi(x)$ ein skalares Feldoperator in Wechselwirkungsbasis, dann gilt:

$$T e^{-i \int J \Phi} = N [e^{-i \int J \Phi}] e^{-\frac{1}{2} \iint J \Delta_F J} \quad (4.43)$$

$$\text{mit } \int J \Phi \equiv \int d^D x J(x) \Phi(x), \quad \iint J \Delta_F J = \int d^D x d^D y J(x) \Delta_F(x-y) J(y). \quad (4.44)$$

Beweis:

im Folgenden verwenden wir die Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) Formel für den Fall

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \quad \text{falls } [A,B] \text{ eine c-Zahl.} \quad (4.45)$$

Wir definieren eine (pseudo-) Hamilton-Operator

$$H(t) = \int d^D x J(x) \Phi(x) \quad \text{und realisieren die}$$

Zeitordnung durch Diskretisierung in t mit Schrittweite $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Bis auf Diskretisierungsfehler

gilt

$$\begin{aligned}
T e^{-i \int J \phi} &\equiv T e^{-i \int dt H(t)} = e^{-i \Delta t H(t_n)} e^{-i \Delta t H(t_{n-1})} \dots e^{-i \Delta t H(t_1)} \\
&= e^{-i \Delta t \sum_i H(t_i) - \frac{1}{2} \Delta t^2 \sum_{i < j} \underbrace{[H(t_i), H(t_j)]}_{c\text{-Zahl}}} \\
&= e^{-i \int J \phi} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) J(y) \underbrace{\theta(x^0 - y^0) [\phi(x), \phi(y)]}_{\substack{= \theta(x^0 - y^0) i \Delta(x-y) \\ =: i \Delta_R(x-y)}}} \\
&= e^{-i \int J \phi} e^{-\frac{1}{2} \iint J i \Delta_R J} \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Wobei wir im letzten Schritt den retarded Propagator verwendet haben (vgl. Übungen). Hiermit haben wir einen Zusammenhang zwischen dem T -Produkt und dem normalen Operator-Produkt gefunden.

Für das Normalgeordnete Produkt gilt nun

$$\begin{aligned}
N e^{-i \int J \phi} &= e^{-i \int J \phi^-} e^{-i \int J \phi^+} \\
&\stackrel{\text{BCH}}{=} e^{-i \int J (\phi^- + \phi^+) - \frac{1}{2} \iint J [\phi^-, \phi^+] J} \\
&= e^{-i \int J \phi} e^{+\frac{1}{2} \iint J i \Delta^- J} \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$T e^{-i \int J \phi} = e^{-\int J \phi} e^{-\frac{1}{2} \iint J i \Delta_R J} = N [e^{-i \int J \phi}] e^{-\frac{1}{2} \iint J (i \Delta_R + i \Delta^-) J} \quad (4.48)$$

Wegen $\underline{\Delta_F(x)} + \Delta^-(x) = \Theta(x^0) \underbrace{\Delta(x)}_{=\Delta^+ - \Delta^-} + \Delta^-(x)$

$$= \Theta(x^0) \Delta^+ + \Theta(-x^0) \Delta^-(x) = \underline{\Delta_F(x)}, \quad (4.49)$$

beweist dies die Behauptung (4.43).

(4.43) ist nun das Erzeugende Funktional für zeitgeordnete Produkte beliebiger Ordnung:

$$T[\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)] = i^n \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} T e^{-i\int J\phi} \Big|_{J=0} \quad (4.50)$$

Anwenden der J -Differenziationen auf der rechten Seite von (4.46) liefert z.B.: ($\phi(x_i) \equiv \phi_i$)

$$T[\phi_1\phi_2] = N[\phi_1\phi_2] + \overbrace{\phi_1\phi_2}^{=i\Delta_{F12}}$$

$$T[\phi_1\phi_2\phi_3] = N[\phi_1\phi_2\phi_3] + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3}$$

$$T[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] = N[\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4] + \overbrace{\phi_1\phi_2} N[\phi_3\phi_4] + \overbrace{\phi_1\phi_3} N[\phi_2\phi_4]$$

+ 4 weitere Terme

$$+ \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} + \overbrace{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4} \quad (4.51)$$

Beliebig höhere T-Produkte können auf diese Weise berechnet werden. Im Falle von Erwartungswerten des T-Produkts bezüglich des freien Vakuums bleiben lediglich volle Kontraktionen übrig, z.B.

$$\langle 0 | T[\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4] | 0 \rangle$$

$$= - \left(\Delta_{F12} \Delta_{F34} + \Delta_{F13} \Delta_{F24} + \Delta_{F14} \Delta_{F23} \right), \quad (4.52)$$

Falls $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$ (kein Vakuum Erwartungswert der Felder).

4.4. Feynman - Graphen der Störungstheorie

Das Wick'sche Theorem liefert Regeln zur Berechnung T-geordneter Produkte. Diese können wir auf die störungstheoretische Entwicklung der S-Matrix anwenden. Im Folgenden sei dies am Beispiel der ϕ^4 Theorie diskutiert, $(H_I = U_0^{-1} V_S U_0)$

$$V_S = \int d^4x \mathcal{V}(\phi), \quad \mathcal{V}(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_I &= \frac{\lambda}{4!} U_0^{-1} \phi^4 U_0 \\ &= \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \end{aligned} \quad (4.53)$$

mit dem Feldoperator $\phi = U_0^{-1} \phi_S U_0$ im Wechselwirkungsbild.

Die S-Matrix und ihre störungstheoretische Entwicklung (Dyson-Reihe) lauten dann

$$\begin{aligned} S &= T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_I} = T e^{-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4(x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-i \frac{\lambda}{4!}\right)^n T \left(\int d^4x \phi^4 \right)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

wobei also $S^{(n)}$ von Ordnung λ^n ist und die Dyson-Reihe einer Entwicklung um $\lambda=0$ entspricht.

Berechnen wir nun die führenden Ordnungen: ($\Phi_i \equiv \Phi(x_i)$)

$$n=0: S^{(0)} = \mathbb{1} \quad (\text{nicht wechselwirkend}) \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} n=1: S^{(1)} &= -i \frac{\lambda}{4!} \int d^D x_1 T[\Phi_1^4] \\ &= -i \frac{\lambda}{4!} \int d^D x_1 \left(N[\Phi_1^4] + 6 \overline{\Phi_1} \Phi_1 N[\Phi_1^2] + 3 \overline{\Phi_1} \Phi_1 \overline{\Phi_1} \Phi_1 \right) \\ &= -i \frac{\lambda}{4!} \int d^D x_1 N[\Phi_1^4] - i \frac{\lambda}{4} i \Delta_F(0) \int d^D x_1 N[\Phi_1^2] - i \frac{\lambda}{8} (i \Delta_F(0))^2 V_D \end{aligned} \quad (4.56)$$

wobei V_D das D -dimensionale Raumzeit-Volumen $V_D = \int d^D x$ bezeichnet. Dieses Ergebnis kann man auch grafisch darstellen:

$$S^{(1)} = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} \quad (4.57)$$

Jede äußere Linie ("Bein") mit Index 1 bezeichnet ein Feld $\Phi_1 = \Phi(x_1)$. Innere Linien 11 sind (selbst-)Kontraktionen

$i \Delta_F(0) = i \Delta_{F,11} = i \Delta_F(x_1 - x_1)$. Die Punkte $\bullet$ bezeichnen

Vertizes und tragen einen Faktor $\sim \lambda$.

Jeder Graph trägt einen Symmetrie-Faktor, der sich aus den Vorfaktoren $\frac{1}{4!}$ und der Zahl aller kombinatorischen Möglichkeiten ergibt.

Die 2. Ordnung wird bereits umfangreicher

$$\begin{aligned}
 S^{(2)} &= \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d\phi_1 d\phi_2 T[\phi_1^4 \phi_2^4] \\
 &= \frac{(-i)^2}{2!} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d\phi_1 d\phi_2 \left\{ N[\phi_1^4 \phi_2^4] + 2 \cdot 6 \overline{\phi_1 \phi_1} N[\phi_1^2 \phi_2^4] + 4 \cdot 4 \overline{\phi_1 \phi_2} N[\phi_1^3 \phi_2^3] \right. \\
 &\quad + 2 \cdot 3 \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_1 \phi_1} N[\phi_2^4] + 6 \cdot 6 \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_2 \phi_2} N[\phi_1^3 \phi_2^3] \\
 &\quad + 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_1 \phi_2} N[\phi_1 \phi_2^3] \\
 &\quad + \frac{1}{2!} 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} N[\phi_1^2 \phi_2^2] \\
 &\quad + 2 \cdot 6 \cdot 3 \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_2 \phi_2} N[\phi_2^2] \\
 &\quad + 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_2 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} N[\phi_1 \phi_2] \\
 &\quad + 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} N[\phi_2^2] \\
 &\quad + \frac{(4 \cdot 3 \cdot 2)^2}{3!} \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} N[\phi_1 \phi_2] \\
 &\quad + 3 \cdot 3 \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_2 \phi_2} \overline{\phi_2 \phi_2} + 6 \cdot 6 \cdot 2 \overline{\phi_1 \phi_1} \overline{\phi_2 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} \\
 &\quad \left. + \frac{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2}{4!} \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_1 \phi_2} \right\} \quad (4.58)
 \end{aligned}$$

Die Symmetriefaktoren sind kombinatorisch ableitbar oder direkt über das Wick'sche Theorem berechenbar (durch abzählen der entstehenden Terme).

Graphisch lassen sich die 14 Terme darstellen als

$$\begin{aligned}
 S^{(2)} = & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \\
 & + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} \\
 & + \text{Diagram 9} + \text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12} \\
 & + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14}
 \end{aligned}
 \tag{4.59}$$

Die Bausteine dieser Feynman-Diagramme sind

- der Vertex $\bullet = -i2 \int d^D x$ (4.60)

An jeden Vertex knüpfen in der ϕ^4 -Theorie 4 Linien an.

- die innere Linie, die einen Propagator (Kontraktion) symbolisiert,

$$\overline{i \quad j} = \overline{i \quad j} = i \Delta_F(x_i - x_j) \quad . \quad (4.61)$$

Eine Selbstkontraktion führt zu einer geschlossenen

inneren Linie:

$$\text{bubble diagram} = i \Delta_F(0) \quad (4.62)$$

- die äußere Linie, die in diesem Fall Feldoperatoren repräsentiert, die in einem N -Produkt auftreten,

$$\begin{aligned} \text{one external line} &\equiv N[\phi_1 \dots] \\ \text{two external lines} &\equiv N[\phi_1^2 \dots] \\ \text{four external lines} &\equiv N[\phi_1^4] \end{aligned} \quad (4.63)$$

– (implizit) ein Symmetriefaktor, der die Kombinatorik berücksichtigt.
In der ϕ^4 -Theorie verlangt das Wick'sche Theorem, dass die Zahl der äußeren Beine gerade ist. Allgemein lässt sich anhand der Zahl der äußeren Beine eine Klassifizierung der Graphen vornehmen:

- $N_e = 0$: Vakuumgraphen ("vacuum bubbles")

$$\text{bubble}, \text{two bubbles}, \text{three bubbles}, \dots \quad (4.64)$$

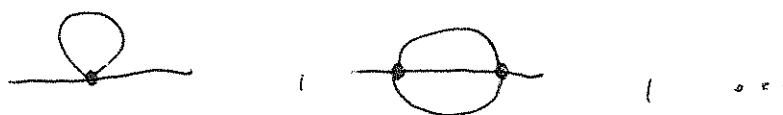
$\hat{=}$ voll kontrahierte Terme in der S -Matrix

ohne N-Produkt - Anteile. D.h. diese Graphen sind proportional zum Einheitsoperator $\sim \mathbb{1}$ und tragen als einzige zum Vakuumerwartungswert von S bei,

$$\langle 0|S|0 \rangle = \bar{Z} \text{ (vacuum bubbles)}. \quad (4.65)$$

Physikalisch entspricht dies der Wahrscheinlichkeit, dass das freie Vakuum unter Einfluss der Wechselwirkung in sich übergeht. Stabilität des Vakuums ist gleichbedeutend mit $|\langle 0|S|0 \rangle| = 1$, d.h. $\langle 0|S|0 \rangle$ ist eine Phase.

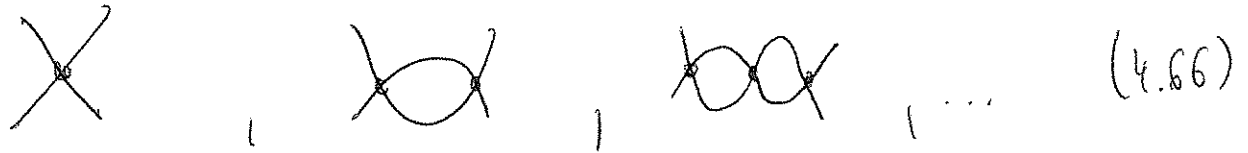
- $N_e=2$: Selbstenergie-Graphen



$$\text{---} \circ \text{---}, \quad \text{---} \bigcirc \text{---}, \quad \dots \quad (4.65)$$

beschreiben die Selbstwechselwirkung eines Graphen durch Emission und Absorption von "virtuellen" Teilchen. Der tatsächliche asymptotische Zustand auch nach Abschalten der Wechselwirkung mit Streuzentren entspricht der Aufsummation aller Selbstenergie-Graphen.

- $N_e \geq 4$: Vertex- oder Streugraphen:



Diese Graphen sind für Streuprozesse die eigentlich relevanten nicht-trivialen Diagramme.

Weitere Klassifizierung von Diagrammen ist möglich mit folgenden Begriffen:

Def.: Ein Graph ist zusammenhängend ("connected"), wenn jedes Paar von Vertices über eine oder mehrere Linien hinweg miteinander verbunden ist. (z.B. in (4.59) ist in der ersten Zeile nur der 3. Graph zusammenhängend).

Def.: Ein Graph ist 1-Teilchen-reduzierbar, wenn er in zwei zusammenhängende Graphanteile faktorisiert, sobald man eine innere Linie entfernt.

z.B. ist 1-Teilchen-reduzierbar $\leadsto$

ist 1-Teilchen-irreduzierbar.

Die 1-Teilchen-irreduziblen Diagramme lauten auch
1PI - Diagramme ("one-particle-irreducible").

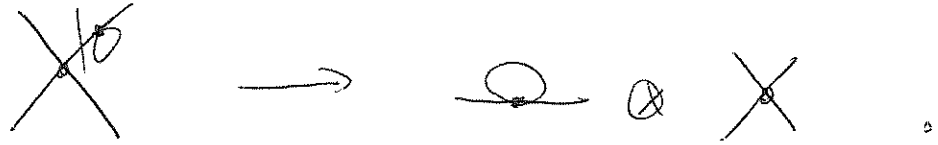
4.5 Streuamplituden & Wirkungsquerschnitte

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die Diagrammtypen charakterisiert, die in der S-Matrix auftreten können. Insbesondere haben wir gesehen, dass S-Matrixelemente unzusammenhängende Vakuumanteile (vacuum bubbles) und Selbstenergiekorrekturen enthalten können.

Diese haben mit dem eigentlichen Streuprozess nichts zutun. Um diese Anteile aus der Beschreibung des eigentlichen Streuprozesses zu entfernen, können wir uns auf zusammenhängende und amputierte Vertexgraphen

beschränken. Amputiert bedeutet, dass Selbstenergieeinsparungen an äußeren Beinen entfernt

werden



Schreiben wir die S -Matrix als $S = 1 + iT$ und
spalten die Vakuum- und Selbstenergieanteile ab, so
erhalten wir die Streuamplitude:

$$i (2\pi)^3 \delta^{(4)} \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \mathcal{M}(\vec{p}_i \rightarrow \vec{p}_f)$$

$$= \underline{\underline{\langle \{\vec{p}_f\} | iT | \{\vec{p}_i\} \rangle_{\text{conn. amput.}}}} \quad (4.67)$$

(eine globale 4er-Impulserhaltende $\delta^{(4)}$ -Funktion
wurde dabei schon heraus faktorisiert.) Ein

Beweis für die Vorschrift, lediglich zusammenhängende
amputierte Diagramme auszuwählen, folgt später
mit Hilfe des LSZ Formalismus.

Beispiel: 2-mach-2 Streuung

Der führende -Ordnungsprozess $12 \rightarrow 1'2'$ in ϕ^4 -Theorie lautet

$$\langle \vec{p}_1' \vec{p}_2' | i T^{(1)} | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle_{\text{amp.}}$$

$$= \langle \vec{p}_1' \vec{p}_2' | \underbrace{\left(-i \frac{\lambda}{4!}\right) \int d^D x_1 T[\phi^4]}_{\text{Selbstenergie}} | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle_{\text{amp.}}$$

$$= \text{X} + \text{Selbstenergie} + \text{Vakuumgraph}$$

$$= -i \frac{\lambda}{4!} \langle \vec{p}_1' \vec{p}_2' | \int d^D x_1 N[\phi^4] | \vec{p}_1 \vec{p}_2 \rangle$$

(4.68)

Wegen der N-Ordnung können nur die entsprechenden Kommutatorterme Beiträge liefern:

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \phi_1(x_1) | \vec{p}_1 \rangle &\stackrel{\text{N-Ordnung}}{\sim} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}x_1} \cdot \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} a_{\vec{p}_1}^\dagger |0\rangle \\ &= \int d^D p \sqrt{\frac{E_{\vec{p}_1}}{E_p}} e^{-i\vec{p}x_1} \underbrace{[a_{\vec{p}_1}, a_{\vec{p}}^\dagger]}_{(2\pi)^D \delta^{(D)}(\vec{p}-\vec{p}_1)} |0\rangle \\ &= e^{-i\vec{p}_1 x_1} |0\rangle \end{aligned}$$

Wir definieren daher die Kontraktion für einlaufende Zustände

$$\underbrace{\phi(x) | \vec{p} \rangle}_{\text{Kontraktion}} = e^{-i\vec{p}x} \equiv \text{Diagramm} \quad (4.69)$$

und ähnlich für die auslaufenden Zustände

$$\overbrace{\langle \vec{p} | \Phi(x)} = e^{i \vec{p} x} \equiv \leftarrow \quad (4.70)$$

(Hier ist wie üblich $\vec{p}^{\mu} = (E_{\vec{p}}, \vec{p})$,
d.h. die Zustände auf den äußeren Linien
erfüllen die relativistische Energie-Impuls-
Beziehung, sitzen also auf der "Massenschale"
 $E_{\vec{p}}^2 - \vec{p}^2 = m^2$; "on-shell".)

Mit den Feynman-Regeln (4.69 & 4.70) ergibt
sich aus (4.68):

$$\langle \vec{p}'_1, \vec{p}'_2 | iT^{(1)} | \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle_{\text{con. amp.}} = 4! \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right) \int d^D x_1 e^{-i(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \cdot x_1}$$

$\uparrow$
 Zahl der
möglichen
Kontraktionen

$\uparrow$
 eigentlich $\vec{p}_1$, etc.
ist aber
selbstverständlich

$$= -i\lambda (2\pi)^D \delta^{(D)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2). \quad (4.71)$$

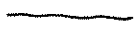
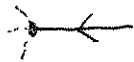
D.h. die Lorentz-invariante Streuamplitude
läuft gemäß (4.67):

$$\mathcal{M}(\vec{p}_1, \vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}'_1, \vec{p}'_2) = -\lambda. \quad (4.72)$$

In niedrigster Ordnung ergibt sich also nur eine konstante Amplitude.

Fassen wir bis hierher die Feynman-Regeln im Impulsraum zusammen:

iM zur n-ten Ordnung ergibt sich aus der Summe aller zusammenhängenden, amputierten Vertex-Diagramme zur Ordnung n. Diese werden gebildet aus:

- Vertex  = $-i\lambda$
 - innerer Linie (Propagator)  = $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \equiv i\Delta_F(p)$
 - äußerer Linie (on-shell Teilchen)  = $1 = \leftarrow \text{---} \rightarrow$

$\uparrow$
 ebene-Wellen-Faktoren in $\delta^{(D)}$ absorbiert
 - an jedem Vertex gilt die 4er-Impuls-Erhaltung
 $(2\pi)^D \delta^{(D)}(\vec{p}_{\text{out}} - \sum \vec{p}_{\text{in}})$
 - Integriere über $\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}$ für jede innere Linie mit Impuls p
- (4.73)
- Symmetriefaktoren aus der Kombinatorik.

Wenden wir diese Feynman-Regeln nun direkt an einem Beispiel an:

3-mach-3 Streuung in ϕ^4 -Theorie zur Ordnung λ^2

$$\langle 1' 2' 3' | iT^{(2)} | 1 2 3 \rangle = \text{Diagram} + \text{Weitere Diagramme}$$

$\uparrow$
 $\vec{p}_{1'}$ etc.

$$= \frac{1}{2!} \frac{(-i\lambda)^2}{(4!)^2} 4! \cdot 4! \cdot 2 \cdot i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^{(D)}(p - \sum_i p_i) \frac{\delta^{(D)}(\sum_{i'} p_{i'} - p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

$$= i(-i\lambda)^2 (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{i'} p_{i'} - \sum_i p_i\right) \frac{1}{\left(\sum_i p_i\right)^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (4.74)$$

$\Rightarrow$ Streuamplitude

$$\mathcal{M}(\{p_{i'}\} \rightarrow \{p_i\}) = \frac{(-i\lambda)^2}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad p^2 = \left(\sum_i p_i\right)^2 \quad (4.75)$$

Außer als im Beispiel (4.72) finden wir eine nicht-triviale Impulsabhängigkeit der Streuamplitude.

(das berechnete Diagramm ist nur ein Beispiel für eine Reihe von Diagrammen, die zu dieser

Ordnung zu $\langle 1' 2' 3' | iT^{(2)} | 1 2 3 \rangle$ beitragen, z.B.  etc.)

In beiden bisherigen Beispielen blieb allerdings keine nicht-triviale Inputabhängigkeit mehr übrig, d.h. alle Impulse waren festgelegt durch äußere Impulse und δ -Funktionen. Bei Graphen mit dieser Eigenschaft spricht man von Baum-Graphen ("tree graphs"), bzw. Graphen ohne geschlossene Schleifen ("loops").

Besteht ein Graph allgemein aus V Vertices und I inneren Linien, gibt es I Impulsintegrationen und V δ -Funktionen. Die Gesamtimpulserhaltung erzwingt aber bereits eine δ -Funktion, so dass nur $(V-1)$ δ -Funktionen für die Integrale zur Verfügung stehen. Die Zahl der übrigbleibenden Impulsintegrationen L ist damit

$$L = I - (V-1) = I - V + 1.$$

(4.76)

Diese ist gleich der Zahl der geschlossenen Schleifen (loops) in einem Diagramm (vgl. Übungen).