

4 Grundlagen der Streutheorie

Während QM vielfach mit der Bestimmung von Spektren und Bindungszuständen befasst ist, d.h. mit zeitunabhängigen Problemen, stehen in der QFT im Zusammenhang mit Teilchenphysik die Beschreibung von Streuprozessen im Vordergrund:

$$a_1 + a_2 \rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots,$$

d.h. ein anfänglicher Zustand $|i\rangle$ mit Teilchen a_1 und a_2 geht durch einen Streuprozess über in einen Zustand $|f\rangle$ mit Teilchen $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$.

Im Allgemeinen gilt also $|i\rangle \neq |f\rangle$, wobei $|i\rangle$ der Zustand des Systems zu einer Anfangszeit t_i , z.B. $t_i \rightarrow -\infty$, und $|f\rangle$ zur Endzeit t_f , z.B. $t_f \rightarrow \infty$, ist. Zustände verändern sich also dynamisch, d.h. zeitabhängig.

4.1 Wechselwirkungsbild und S-Matrix

Bislang haben wir unterschieden zwischen Schrödinger-Bild, in dem die Zustände $|\Psi\rangle_S \equiv |\Psi, t\rangle$ zeitabhängig, die Operatoren aber zeitunabhängig sind,

$$|\Psi\rangle_S \equiv |\Psi, t\rangle = U(t, t_0) |\Psi, t_0\rangle \quad (4.1a)$$

$$\text{mit } U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \quad \text{falls } \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (4.1b)$$

$$\text{Feldoperator } \Phi_S(\vec{x}) \equiv \Phi(\vec{x}) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a(\vec{p}) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + a^\dagger(\vec{p}) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right), \quad (4.1c)$$

und dem Heisenberg-Bild, in dem die Zustände zeitunabhängig, die Operatoren aber zeitabhängig sind,

$$|\Psi\rangle_H \equiv |\Psi, t_0\rangle = U^\dagger(t, t_0) |\Psi, t\rangle = U^\dagger(t, t_0) |\Psi\rangle_S, \quad (4.2a)$$

$$\Phi_H = \Phi(\vec{x}, t) = U^\dagger(t, t_0) \Phi(\vec{x}) U(t, t_0). \quad (4.2b)$$

$$\text{bzw. für allg. Operator } \mathcal{O}: \quad \mathcal{O}_H(t) = U(t, t_0)^\dagger \mathcal{O}_S(t_0) U(t_0, t). \quad (4.2c)$$

Die Physik ist natürlich "invariant" unter Wechsel des Bildes. z.B. Erwartungswerte sind identisch

$$\begin{aligned} {}_S \langle \Psi | \mathcal{O}_S | \Psi_S \rangle &= \langle \Psi_{,t_0} | U^\dagger(t_0,t) \mathcal{O}_S U(t,t_0) | \Psi_{,t_0} \rangle \\ &= {}_H \langle \Psi | \mathcal{O}_H(t) | \Psi \rangle_H . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Schrödinger- und Heisenberg-Bild sind unitär äquivalent.

Falls H nicht explizit zeitabhängig ist, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, gilt $H = H_S = H_H$. Zu beachten ist allerdings, dass Eigenzustände von Operatoren im Heisenberg-Bild zeitabhängig sind:

$$\text{Schrödinger-Bild: } A_S |a\rangle = a |a\rangle$$

$$\Rightarrow U^\dagger A_S U U^\dagger |a\rangle = A_H(t) U^\dagger |a\rangle = a U^\dagger |a\rangle \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow |a\rangle_H = U^\dagger |a\rangle \quad \text{zeitabh.}$$

z.B. lauten die Leiteroperatoren der freien Klein-Gordon-Theorie im Heisenberg-Bild (vgl. (3.65)):

$$a_H(\vec{p}, t) := U^\dagger a(\vec{p}) U = a(\vec{p}) e^{-iE_{\vec{p}} t}, \quad (t_0 \equiv 0), \quad (4.5)$$

so dass die n -Teilchen-Zustände als Eigenzustände des Hamilton-Operators im Heisenberg-Bild zeitabh. sind,

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, t\rangle = U^\# |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = e^{-it \sum_{k=1}^n E_{\vec{p}_k}} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle. \quad (4.6)$$

Der Vakuum-Zustand ist dann zeitunabh. $|0, t\rangle = |0\rangle$ const. (falls die Nullpunktenergien subtrahiert sind).

Betrachten wir nun einen "Übergang" eines Anfangszustandes $|i\rangle$, welches Eigenzustand des freien Klein-Gordon-Hamilton-Operators sei, in einen Endzustand $|f\rangle$ mit der gleichen Eigenschaft,

$${}_H \langle f, t | i, t_0 \rangle_H = \langle f | U(t, t_0) | i \rangle_S = \langle f | e^{-iH(t-t_0)} | i \rangle_S = e^{iE_i(t-t_0)} \delta_{if}. \quad (4.7)$$

Dies bedeutet, dass es in der freien Klein-Gordon-Theorie aus einem Anfangszustand $|i\rangle$ keinen Übergang in einen anderen Zustand geben kann. Die freie Klein-Gordon-Theorie beschreibt also keine Wechselwirkungen.

Ein paradigmatisches Beispiel für eine Erweiterung der freien Klein-Gordon-Theorie mit Wechselwirkung ist

" ϕ^4 -Theorie" mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (4.8)$$

Der ϕ^4 -Term verändert bereits die klassische Bewegungsgleichung substantiell,

$$0 = (\partial^2 + m^2)\phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3, \quad (4.9)$$

da dieser Term Nichtlinearitäten einführt und das Superpositionsprinzip aufhebt.

Eine allgemeingültige Behandlung der quantisierten ϕ^4 -Theorie ist schwierig. Für schwache Kopplung λ lässt sich eine systematische Störungstheorie konstruieren, was im Folgenden unser Ziel ist.

Im übrigen ist ϕ^4 -Theorie ein Beispiel für eine lokale, Lorentz-invariante, reelle und perturbativ renormierbare Theorie (letzte Eigenschaft bedeutet, dass die Störungstheorie ohne weitere Parameter zu jeder Ordnung in λ konstruiert werden kann).

Für die Beschreibung von zeitabhängigen Streuprozessen eignet sich besonders das

Wechselwirkungs-Bild:

Sei H von der Form

$$H = H_0 + V_S \quad (4.10)$$

mit ungestörtem Hamilton-Operator H_0 und (allgemein zeitabhängiger) Wechselwirkung V_S (im Schrödinger-Bild).

Die Schrödinger-Gleichung lautet dann

$$i\partial_t |\Psi(t)\rangle_S = (H_0 + V_S) |\Psi(t)\rangle_S. \quad (4.11)$$

Zum Wechselwirkungsbild I gelangen wir durch eine unitäre Transformation generiert durch den freien Hamilton-Operator $U_0(t) = e^{-iH_0 t}$,

$$|\Phi(t)\rangle := |\Psi(t)\rangle_I := U_0^\dagger(t) |\Psi(t)\rangle_S. \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow i\partial_t |\Psi(t)\rangle_S = i\partial_t (U_0 |\Phi(t)\rangle) = (H_0 + V_S) U_0 |\Phi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow U_0^{-1} i\partial_t (U_0 |\Phi(t)\rangle) = \underbrace{H_0 |\Phi(t)\rangle + U_0^{-1} V_S U_0 |\Phi(t)\rangle}$$

$$\underbrace{i\partial_t |\Phi(t)\rangle + H_0 |\Phi(t)\rangle}$$

Mit der Definition $H_I(t) = U_0^{-1}(t) V_S U_0(t)$, folgt also (4.13)

$$\underbrace{i\partial_t |\Phi(t)\rangle = H_I(t) |\Phi(t)\rangle}, \quad (4.14)$$

d.h. Zustände evolvieren im Wechselwirkungsbild gemäß dem Wechselwirkung, während Operatoren frei evolvieren.

Da $H_I(t)$ nun zeitabhängig ist, ist die Lösung von (4.14) nicht mehr durch ein einfaches Exponential gegeben. Die DGL. kann jedoch in eine Integralform mit Anfangsbedingung $|\Phi_0\rangle \equiv |\Phi(t_0)\rangle$ gebracht werden,

$$|\Phi(t)\rangle = |\Phi_0\rangle + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) |\Phi(t_1)\rangle. \quad (4.15)$$

Iteration dieser Integralgleichung ergibt

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) |\Phi_0\rangle. \quad (4.16)$$

Durch die Integrationsgrenzen ist eine Zeitordnung festgelegt:

$t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t$. Der Integrationsbereich ist somit eine Untermenge des n -dimensionalen Hyperkubus mit Kantenlänge $(t-t_0)$ und Volumen $(t-t_0)^n$. Der

Integrationsbereich hat ein Volumen von

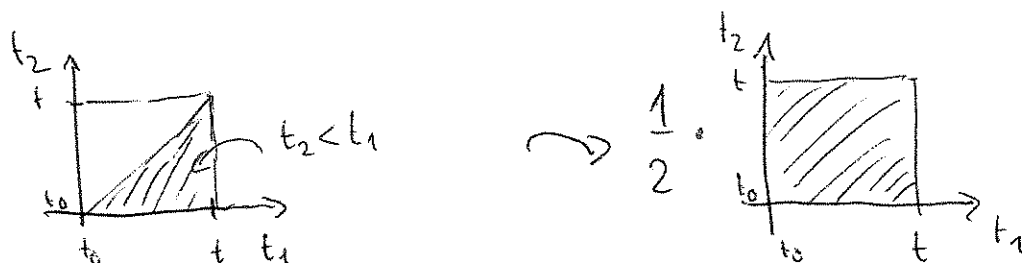
$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n = \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_{n-1} (t_{n-1} - t_0) = \dots = \frac{1}{n!} (t-t_0)^n, \quad (4.17)$$

d.h. es gibt $n!$ ähnliche Bereiche in diesem Hyperkubus wie der Integrationsbereich. Der Integrand in einem solchen ähnlichen Bereich würde sich aber durch eine andere Zeitordnung in $H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)$ unterscheiden.

Die Gleichheit der Zeitordnung und damit die Gleichheit des Integranden für alle $n!$ Bereiche können wir erzwingen durch explizite Zeitordnungsvorschrift:

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n) \\ = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \dots \int_{t_0}^t dt_n T[H_I(t_1) H_I(t_2) \dots H_I(t_n)] \quad (4.18)$$

Beispiel $n=2$.



Damit lässt sich $|\Phi(t)\rangle$ in kompakter Form schreiben

$$|\Phi(t)\rangle = T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n H_I(t_1) \dots H_I(t_n) |\Phi_0\rangle \\ = T \exp \left[-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right] |\Phi_0\rangle \quad (4.19) \\ =: U_I(t, t_0) |\Phi_0\rangle.$$

Hier haben wir den Zeitentwicklungsoperator $U_I(t, t_0)$ im Wechselwirkungsbild als Reihe von zeitgeordneten Produkten definiert. Diese löst die Schrödingergleichung mit Anfangsbedingung $U_I(t_0, t_0) = \mathbb{1}$.

Zur Behandlung von Streuprozessen machen wir die Annahme, dass für $t \rightarrow \pm\infty$ keinerlei Wechselwirkung vorliegt und diese asymptotischen Zustände freisind.

(NB: diese Annahme wird nicht der Tatsache gerecht, dass selbst bei verschwindender Wechselwirkung mit anderen Teilchen, das asymptotische Teilchen noch eine Selbstwechselwirkung unterliegen kann. Letztere sollte aber mit der Physik des eigentlichen Streuprozesses nichts zu tun haben.)

Die asymptotischen Zustände im Wechselwirkungsbild sind daher

$$\begin{aligned} |i\rangle &= |i, -\infty\rangle = |\Phi(t=-\infty)\rangle, \\ |i'\rangle &= |i, +\infty\rangle = |\Phi(t=+\infty)\rangle, \end{aligned} \quad (4.20)$$

wobei $|i\rangle$ die freie Schrödinger-Gleichung erfüllen soll, und $|i'\rangle$ der nach $t \rightarrow +\infty$ zeitentwickelte Zustand gemäß Wechselwirkungs-Hamilton-Operator ist; ^{gleiches}

$$H_0 |i\rangle = E_i |i\rangle, \quad (4.21)$$

$$|i'\rangle = U_I(\infty, -\infty) |i\rangle =: S |i\rangle. \quad (4.22)$$

Hier haben wir eine wichtige Größe eingeführt, die S-Matrix (S-operator)

$$S = T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x)} \quad (4.23)$$

mit der Wechselwirkungs-Hamilton-Dichte $\mathcal{H}_I$.

Nun sei $|f\rangle$ ein asymptotischer Endzustand, der wiederum die freie Schrödinger-Gleichung erfüllt:

$$H_0 |f\rangle = E_f |f\rangle \quad (4.24)$$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Übergang $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ während eines Streuprozesses ist dann gegeben durch das S-Matrixelement

$$\langle f|i'\rangle = \langle f|S|i\rangle =: S_{fi} \quad (4.25)$$

In Abwesenheit jeglicher Wechselwirkung gilt also

$$S = \mathbb{1} \quad , \quad S_{fi} = \langle f|i\rangle = \delta_{fi} \quad , \quad (4.26)$$

Wie bereits für die freie Klein-Gordon-Theorie besprochen.

4.2 Eigenschaften der S-Matrix

Die S-Matrix

$$S = T e^{-i \int d^4x \mathcal{H}_I(x)} \quad (4.27)$$

mit ihrer Definition als unendliche Reihe (Dyson-Reihe) ist direkter Ausgangspunkt der Störungstheorie.

Da $\mathcal{H}_I \sim \lambda$ (oder allgemeiner proportional zu den Kopplungen des Systems) ist die Dyson-Reihe zugleich eine Entwicklung nach schwacher Kopplung.

Wichtige Eigenschaften der S-Matrix sind Lorentz-Invarianz und Unitarität.

Lorentz-Invarianz:

Der n -te Term der Dyson-Reihe lautet

$$S^{(n)} = \frac{(-i)^n}{n!} \int d^D x_1 \dots \int d^D x_n T \mathcal{H}_I(x_1) \dots \mathcal{H}_I(x_n). \quad (4.28)$$

D -dimensionale Integrale über Dichten sind Lorentz-invariant. Ebenso ist Zeitordnung im Vorwärtslichtkegel eine invariante Eigenschaft, die eng verknüpft ist mit Kausalität. Zeitordnung ~~des~~ jenseits des Lichtkegels wäre aber nicht invariant, da es zu jedem Raum-artigen Abstand zweier Ereignisse x_i^μ und x_j^μ mit $(x_i - x_j)^2 < 0$ eine Lorentz-Transformation gibt, die $(x_i - x_j)^\mu \rightarrow -(x_i - x_j)^\mu$ überführt, und damit auch $(t_i - t_j) \rightarrow -(t_i - t_j)$ (vgl. Kausalitätsabschnitt).

Kausalität rettet uns jedoch, da dadurch gilt

$$[\mathcal{H}_I(x_i), \mathcal{H}_I(x_j)] = 0 \quad \text{für } (x_i - x_j)^2 < 0, \quad (4.29)$$

so dass jenseits des Lichtkegels Zeitordnung irrelevant wird. Daher ist $S^{(n)}$ Lorentz-invariant wie auch die gesamte S -Matrix.

Unitarität:

Da die S -Matrix der asymptotische Limes eines unitären Zeitentwicklungsoperators (im Wechselwirkungsbild) ist, ist sie per constructionem unitär:

$$S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbb{1}. \quad (4.30)$$

Für zwei Anfangszustände $|i\rangle$ und $|j\rangle$ mit zugehörigen zeitentwickelten Zuständen $|i'\rangle = S|i\rangle$, $|j'\rangle = S|j\rangle$, gilt also

$$\langle i'|j'\rangle = \langle i|S^\dagger S|j\rangle = \langle i|j\rangle = \delta_{ij}. \quad (4.31)$$

Unitarität besagt also u.a., dass Wahrscheinlichkeit während eines Streuprozesses eine Erhaltungsgröße ist.

Der nicht-triviale Anteil der S -Matrix steckt in den Abweichungen von der $\mathbb{1}$ also von $|i\rangle \rightarrow |i\rangle$ Prozessen. Dafür definieren wir die Übergangsmatrix T :

$$S = 1 + iT. \quad (4.32)$$

Unitarität bedeutet

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= S^\dagger S = (1 - iT^\dagger)(1 + iT) = \mathbb{1} + i(T - T^\dagger) + T^\dagger T \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{i}(T - T^\dagger) &= T^\dagger T. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dies ist das Optische Theorem (im Operator-Fassung).

Das Matrix-Element bezüglich eines Anfangszustands $|i\rangle$ lautet

$$\frac{1}{i} (\langle i | T | i \rangle - \langle i | T^\dagger | i \rangle) \equiv \underline{\underline{2 \operatorname{Im} T_{ii}}}$$

$$= \langle i | T^\dagger T | i \rangle = \sum_f \underline{\underline{\langle i | T^\dagger | f \rangle \langle f | T | i \rangle}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{2 \operatorname{Im} T_{ii} = \sum_f |T_{fi}|^2}} \quad (4.34)$$

Falls $\operatorname{Im} T_{ii} > 0$, bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Erhaltung des Anfangszustands

$$P_e \langle i | i \rangle = P_e \langle i | S | i \rangle = P_e \langle i | 1 + iT | i \rangle < 1 \quad (4.35)$$

im Realteil (und damit in der Regel insgesamt) abnimmt.

Die rechte Seite entspricht der Gesamtwahrscheinlichkeit, nicht-triviale Endzustände anzutreffen.

(Banal gesagt: Was aus dem Anfangszustand weggestreut wird, muss irgendwohin gestreut werden.)

Interessant am optischen Theorem ist, dass, weil

$T \sim \lambda$, es unterschiedliche Ordnungen von Störungstheorie miteinander verknüpft.