

3 Quantisierung der freien Klein-Gordon Theorie

Wir studieren im Folgenden Feldquantisierung am einfachsten Beispiel: dem freien Klein-Gordon-Feld

3.1 Spektrum der quantisierten freien Klein-Gordon-Theorie

Die Hamilton-Dichte der freien Klein-Gordon-Theorie haben wir in (2.36) abgeleitet:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2, \quad (3.1)$$

wobei "frei" bedeutet, dass $U(\Phi) = \frac{1}{2} m^2 \Phi^2$, d.h. das Potential ist maximal quadratisch in Φ und die Bewegungsgl. damit linear in Φ .

Betrachten wir aus "Übungszwecken" zunächst die $D = 0+1$ dimensionale Theorie, d.h. mit 0 Raumdimensionen,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \equiv H_{\text{HO}}, \quad (3.2)$$

was der Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators (HO)

(mit $\pi|_{\text{eff}} \equiv p|_{\text{eff}}$ und $\Phi|_{\text{eff}} \equiv x|_{\text{eff}}$ und $m^2|_{\text{eff}} \equiv \omega^2|_{\text{eff}}$) entspricht.

Die Quantisierung des HO lässt sich noch zusammenfassen:

die klassischen Variablen ϕ und π , welche die Poisson-Klammern erfüllen

$$\{\phi, \pi\} = 1, \quad \{\phi, \phi\} = 0 = \{\pi, \pi\} \quad (3.3)$$

(allgemeiner $\{\phi_i, \pi_j\} = \delta_{ij}$), werden zu hermiteschen Operatoren erhoben, welche die Kommutationsbeziehung

$$[\phi, \pi] = i, \quad [\phi, \phi] = 0 = [\pi, \pi] \quad (3.4)$$

erfüllen. Das Spektrum des quantenmechanischen HO lässt sich elegant mit Hilfe von Leiteroperatoren bestimmen, in denen ϕ und π lauten:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2m}} (a + a^\dagger), \quad \pi = -i\sqrt{\frac{m}{2}} (a - a^\dagger) \quad (3.5)$$

Auflösen von (3.5) nach a und $a^\dagger$ ergibt für den Kommutator unter Verwendung von (3.4):

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = 0 = [a^\dagger, a^\dagger]. \quad (3.6)$$

Der Hamilton-Operator lautet in Leiter-Operatoren

$$H_{H0} = m \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) . \quad (3.7)$$

Der Grundzustand $|0\rangle$ erfüllt

$$a|0\rangle = 0 \quad (3.8)$$

und ist daher Eigenzustand des Hamilton-Operators mit Eigenwert $H_0|0\rangle = \frac{1}{2}m|0\rangle$.

Mit den Beziehungen

$$[H_{H0}, a^\dagger] = m a^\dagger, \quad [H_{H0}, a] = -m a \quad (3.9)$$

lässt sich leicht zeigen, dass die weiteren Eigenzustände durch

$$|n\rangle := (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (3.10)$$

gegeben sind und die Eigenwerte $(n + \frac{1}{2})m$ besitzen. Damit ist das Spektrum des

QM H0 und damit auch der $D+1$ dimensionalen Klein-Gordon-Theorie bestimmt.

Kommen wir zurück zur D dimensionalen Feldtheorie mit der Hamilton-Dichte (3.1)

Die resultierende Hamilton-Funktion können wir ebenso im Impulsraum betrachten

$$H = \int d^d x \mathcal{H}(\vec{x}) = \int d^d x \frac{1}{2} \left(\pi(\vec{x})^2 + (\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}))^2 + m^2 \Phi(\vec{x})^2 \right) \quad (3.11)$$

Mit

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \Phi(\vec{p}) \\ \pi(\vec{x}) &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \pi(\vec{p}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

folgt

$$\begin{aligned} H &= \int d^d x \underbrace{\frac{d^d p d^d q}{(2\pi)^{2d}} e^{i\vec{x}(\vec{p}+\vec{q})}}_{= \int \frac{d^d p d^d q}{(2\pi)^d} \delta^{(d)}(\vec{q}+\vec{p})} \frac{1}{2} \left(\pi(\vec{q}) \pi(\vec{p}) + \Phi(\vec{q}) \vec{p}^2 \Phi(\vec{p}) + m^2 \Phi(\vec{q}) \Phi(\vec{p}) \right) \\ &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \left(\pi(-\vec{p}) \pi(\vec{p}) + \Phi(-\vec{p}) \vec{p}^2 \Phi(\vec{p}) + m^2 \Phi(-\vec{p}) \Phi(\vec{p}) \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die resultierende Hamilton-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{p}) &= \frac{1}{2} \left(\pi(-\vec{p}) \pi(\vec{p}) + \Phi(-\vec{p}) \vec{p}^2 \Phi(\vec{p}) + m^2 \Phi(-\vec{p}) \Phi(\vec{p}) \right) \\ &=: \frac{1}{2} \left(\pi(-\vec{p}) \pi(\vec{p}) + \omega_p^2 \Phi(-\vec{p}) \Phi(\vec{p}) \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

hat wieder die Form eines harmonischen Oszillators

mit Frequenz

$$\omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (3.15)$$

(NB: die Impulsargumente mit unterschiedlichen Vorzeichen sind eine Folge von $\mathcal{H}(\vec{x}), \mathcal{H}(\vec{p}) \in \mathbb{R}$,
 denn wegen $\Phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ folgt $\Phi(-\vec{p}) = \Phi^*(\vec{p})$,
 $\pi(-\vec{p}) = \pi^*(\vec{p})$ und damit z.B. $\pi(-\vec{p}) \pi(\vec{p}) = \pi^* \pi \in \mathbb{R}$.)
 (NB2: In der unten folgenden quantisierten Version
 gilt ähnliches wegen Hermitizität, d.h. z.B. $\Phi(-\vec{p}) = \Phi^\dagger(\vec{p})$.)

D.h. wir können das Klein-Gordon-Feld als
 ein Ensemble von ∞ -vielen harmonischen Oszillatoren
 betrachten, die durch den d-dimensionalen Impuls
 "nummeriert" werden.

Wir definieren nun die Feldquantisierung durch die
 quantenmechanische Quantisierung der HO's mit Label $\vec{p}$.

Dazu schreiben wir:

$$\Phi(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger) \quad (3.16)$$

$$\pi(\vec{p}) = -i \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} (a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger),$$

(NB: die Impulslabel sind so gewählt, dass

$$\Phi(-\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger) = \Phi^\dagger(\vec{p}), \text{ wie es}$$

Hermitizität verlangt.)

und postulieren in Analogie zum HO der QM:

40

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^+] = (2\pi)^d \delta^{(d)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (3.17)$$

↑ Impulsraum-Konventionen bedingt

$$\text{und } [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = 0 = [a_{\vec{p}}^+, a_{\vec{p}'}^+]$$

Daraus folgt mit

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \underbrace{a_{\vec{p}}^+ e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}}_{\substack{\vec{p} \rightarrow -\vec{p} \\ \rightarrow a_{-\vec{p}}^+ e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}}} \right) \quad (3.18)$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a_{\vec{p}}^+ e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$$

sofern

$$\underline{\underline{[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})]}} = \int \frac{d^d p d^d p'}{(2\pi)^{2d}} \frac{-i}{2} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}'}}{\omega_{\vec{p}}}} \left([a_{\vec{p}}^+, a_{\vec{p}'}] \cdot e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x} + i\vec{p}'\cdot\vec{y}} - [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^+] e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - i\vec{p}'\cdot\vec{y}} \right)$$

$$\stackrel{(3.17)}{=} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left(\frac{i}{2} \right) \left(e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} + e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \right)$$

$$= \underline{\underline{i \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{y})}} \quad (3.19)$$

Dies ist das quantenfeldtheoretische Analogon zu $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$.

$$\text{Ähnlich folgt } [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = 0 = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] \quad (3.20)$$

Bemerkungen:

- Wir hätten auch (3.19) & (3.20) postulieren können. (3.17) wäre dann eine Folgerung gewesen.
- Analog zur QM haben wir im Schrödinger-Bild quantisiert, d.h. $\phi(\vec{x})$ und $\pi(\vec{x})$ sind explizit zeitunabhängige Operatoren. Im Heisenberg-Bild (siehe unten) gelten (3.19) & (3.20) bei gleichen Zeitargumenten $[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{y})$, etc.
"equal-time commutation relations".

Zur Bestimmung des Spektrums der freien Klein-Gordon-Theorie drücken wir den Hamilton-Operator durch die Leite-Operatoren aus.

Einsetzen von (3.16) in (3.13) liefert sofort

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{H}} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega_p}{2} (a_{-\vec{p}} - a_{\vec{p}}^\dagger)(a_{\vec{p}} - a_{-\vec{p}}^\dagger) + \frac{\omega_p}{2} (a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger)(a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger) \right) \\
 &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{4} \omega_p \left(a_{-\vec{p}} a_{-\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}} \right) \\
 &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \omega_p \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \underbrace{a_{-\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger}_{=[a_{-\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger]} + a_{-\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}} \right) \\
 &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \omega_p \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger] \right) \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Der Kommutator-Term ist $\sim \delta^{(d)}(0)$ und damit eine divergente Zahl. Diese Divergenz war absehbar, da das Klein-Gordon-Feld so vielen quantenmechanischen HO entspricht, welche jeweils $\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}$ zur Energie beitragen.

Da absolute Energien in teilchenphysikalischen Experimenten nicht messbar sind sondern nur Energiedifferenzen, können wir durch eine Redefinition der Nullpunktsenergie diesen Term entfernen.

(Extension : Kosmologische Konstante

absolute Energien werden dennoch meßbar
in der Gravitation, da Energien Quellen des
Gravitationsfeldes sind.

Schreiben wir daher die Nullpunktsenergie heuristisch
um mit Hilfe von

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^+] = (2\pi)^d \delta^{(d)}(\vec{p} - \vec{p}') = \int d^d x e^{i\vec{x}(\vec{p} - \vec{p}')} \quad (3.22)$$

$$\Rightarrow H_0 = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}}^2 [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^+] \\ = \int d^d x \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}}^2 \quad (3.23)$$

Wir finden also eine gleichmäßig verteilte Energiedichte

$$\mathcal{E} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \omega_{\vec{p}}^2 \quad (3.24)$$

Diese divergiert für große Impulse. Über diese Impuls-
bereiche liegen uns allerdings keine experimentellen Informationen
vor. Nehmen wir an, dass die QFT-Beschreibung
der Natur oberhalb einer Skala $p \geq \Lambda$ zusammenbricht
und durch eine neue Theorie ersetzt wird, in der
 $\mathcal{E}$ endlich bleibt, so können wir abschätzen, dass

$$\begin{aligned} d=3 \\ D=3+1 \end{aligned} \quad \mathcal{E} \approx \int_0^\Lambda p^2 dp \sqrt{p^2 + m^2} \sim \int_0^\Lambda dp p^3 \sim \underline{\underline{\Lambda^4}} \quad (3.25)$$

Eine mögliche Skala "neuer Physik" ist die Planck-Skala $\Lambda \sim 10^{19} \text{ GeV}$, so dass wir als Abschätzung erhalten, dass die Fluktuationen der Quantenfelder als Beitrag zur Energiedichte den Wert

$$\varepsilon \sim 10^{76} (\text{GeV})^4 \quad (3.26)$$

liefern.

Neben diesem Beitrag kann es im Universum auch noch einen konstanten Beitrag ε_0 geben, der den Anfangswert der kosmischen Energiedichte (vor Ausmittelung der Fluktuationen) festlegt. Die Gesamtenergiedichte ist dann

$$\Lambda = \varepsilon_0 + \varepsilon \quad (3.27)$$

In der Tat beobachtet man im Universum eine solche Energiedichte, nämlich die kosmologische Konstante, mit dem Wert

$$\Lambda \simeq \underbrace{(2 \text{ meV})^4}_{= 10^{-42} \text{ GeV}} \simeq 10^{-47} (\text{GeV})^4 \quad (3.28)$$

Damit (3.27) & (3.26) miteinander verträglich sind, muss ε_0 den Beitrag von ε mit einer

Genauigkeit von $1:10^{123}$ weghürzen.

Diese ungeheuer große Genauigkeit für die Wahl des Anfangsparameters ϵ_0 ("fine-tuning" Problem) bezeichnet man als "Problem der kosmologischen Konstanten" im Rahmen der QFT.)

Subtrahieren wir also (für alle teilchenphysikalischen Aspekte) die Nullpunktsenergie, erhalten wir

$$H = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \quad (3.29)$$

Ähnlich wie für den HO lässt sich sofort zeigen,

$$\begin{aligned} \underline{[H, a_{\vec{p}}^\dagger]} &= \int \frac{d^d p'}{(2\pi)^d} \omega_{\vec{p}'} \underbrace{[a_{\vec{p}'}^\dagger a_{\vec{p}'} , a_{\vec{p}}^\dagger]} \\ &= \underbrace{a_{\vec{p}'}^\dagger [a_{\vec{p}'} , a_{\vec{p}}^\dagger]} + \underbrace{[a_{\vec{p}'}^\dagger , a_{\vec{p}}^\dagger] a_{\vec{p}'}}_{=0} \\ &= (2\pi)^d \delta(\vec{p}' - \vec{p}) a_{\vec{p}'}^\dagger \\ &= \underline{\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger} , \end{aligned} \quad (3.30)$$

und gleichermaßen $\underline{[H, a_{\vec{p}}]} = -\omega_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$.

Da die algebraischen Eigenschaften der Klein-Gordon-Leitoperatoren genau denen des QM HO entsprechen, lässt sich sofort das Spektrum bestimmen:

Der Grundzustand (das Vakuum) ist gegeben durch

$$|0\rangle \quad \text{mit} \quad a_{\vec{p}} |0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{p}. \quad (3.31)$$

Dieser hat $E=0$ Energie, denn $E|0\rangle = H|0\rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \omega_{\vec{p}} \underbrace{a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} |0\rangle}_{=0} = 0$

Alle anderen Zustände ergeben sich durch Anwendung von $a_p^\dagger$ auf $|0\rangle$; insbesondere folgt mit (3.30), dass ein Zustand

$$a_p^\dagger a_q^\dagger \dots |0\rangle \quad (3.32)$$

ein Eigenzustand von H ist mit Energie $E = \omega_p + \omega_q + \dots$

Das vollständige Spektrum ist durch diese Eigenvektoren und die zugehörigen Energien beschrieben.

Betrachten wir nun den in (2.59) definierten Impulsoperator:

$$\underline{\vec{P}}: P^i = \int d^d x \, \pi \, \underbrace{\partial^i \phi}_{= -\vec{\nabla}} = - \int d^d x \, \pi \, \vec{\nabla}_i \phi$$

$$\vec{P} = - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \, \pi(-\vec{p}) \, (\vec{\nabla} \phi)(\vec{p})$$

$$= -(-i) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{-\vec{p}} - a_{\vec{p}}^\dagger \right) \frac{i\vec{p}}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} (a_{\vec{p}} + a_{-\vec{p}}^\dagger)$$

$$= - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \vec{p} \left(\underbrace{a_{-\vec{p}} a_{\vec{p}}}_{\text{ungerade} \equiv a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}}} - \underbrace{a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger}_{= a_{-\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger} + \underbrace{a_{-\vec{p}} a_{-\vec{p}}^\dagger}_{= a_{-\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger} - a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right)$$

gerade in $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$

$$= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \, \underline{\vec{p}} \, a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \quad \begin{matrix} + [a_{-\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger] \\ = (2\pi)^d \delta(0) \rightarrow \int d^d k \end{matrix} \quad (3.33)$$

Der Operator $a_{\vec{p}}^{\dagger}$ erzeugt also einen Zustand mit Energie $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{p^2 + m^2}$ und Impuls $\vec{p}$ (gleichemassen erzeugt $a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{q}}^{\dagger} \dots$ den Impuls $\vec{p} + \vec{q} + \dots$).

Da diese Zustände die relativistische Energie-Impuls-Beziehung eines relat. Teilchens erfüllen, kann man sie berechtigterweise als Teilchen bezeichnen, die im Impulsraum (nicht im Ortsraum!) lokalisiert sind und die Energie $E_{\vec{p}} = \omega_{\vec{p}}$ tragen.

Wir definieren die Impulseigenzustände

$$|\vec{p}\rangle := \underbrace{\sqrt{2 E_{\vec{p}}}}_{\text{Willkürliche Normierung}} a_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle \quad (3.34)$$

Mit dieser Normierung gilt

$$\begin{aligned} \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle &= 2 \sqrt{E_{\vec{p}} E_{\vec{q}}} \langle 0 | \underbrace{a_{\vec{q}} a_{\vec{p}}^{\dagger}}_{= a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{q}} + [a_{\vec{q}}, a_{\vec{p}}^{\dagger}]} | 0 \rangle \\ &= 2 E_{\vec{p}} (2\pi)^d \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Entsprechend tritt die Normierung in der Vollständigkeitsrelation auf

$$\mathbb{1}_{\text{reiden}} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} |\vec{p}\rangle \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \langle \vec{p}| \quad (3.36)$$

check:

$$\begin{aligned} |\vec{q}\rangle &= \mathbb{1}_{\text{reiden}} |\vec{q}\rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} |\vec{p}\rangle \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \underbrace{\langle \vec{p} | \vec{q} \rangle}_{\frac{1}{2E_{\vec{p}}(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\vec{p}-\vec{q})} \\ &= |\vec{q}\rangle \quad \checkmark \end{aligned}$$

Dies hat den Vorteil, dass das d -dimensionale Integral ein Lorentz-invariantes Maß hat:

$$D=d+1 \quad \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (2\pi) \delta(\underbrace{p^2 - m^2}_{p_0^2 - p^2}) \Big|_{p_0 > 0} \quad (3.37)$$

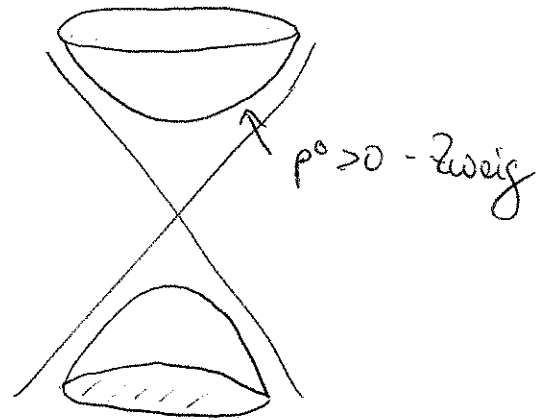
(wegen $\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0)$ mit $f(x_0) = 0$).

D.h. für jede Funktion $F(p)$ ist $\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} F(p)$

Lorentz-invariant, falls $F(p)$ Lorentz-invariant ist.

Die Darstellung (3.37) besagt, dass das Integral $\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_p}$ verstanden werden kann als

$p^0 > 0$ - Zweig des Hyperboloids $p^2 = m^2$ im Minkowski-Raum.



Mit den Impulszuständen (3.34) lässt sich die Anwendung des Feldoperators aufs Vakuum,

$$\Phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle \quad (3.38)$$

interpretieren als Superposition von 1-Teilchen-Impulszuständen $|\vec{p}\rangle$.

(vgl. QM: Ortszustand $\langle \vec{x} | = \langle \vec{x} | 1_{QM} = \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle_{NR} \langle \vec{p} |$

$$= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} |\vec{p}\rangle_{NR}$$

↑
nicht-relativ-Impuls-
zustand

Folglich kann man $\Phi(\vec{x})$ als Operator betrachten, der am Punkt $\vec{x}$ ein Teilchen erzeugt.

3.2 Fock-Raum der Klein-Gordon Theorie

Bislang haben wir uns mit Feldanregungen in erster Linie beschäftigt, die man als 1-Teilchen-Zustände bezeichnen kann

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}}} a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle. \quad (3.37)$$

Dies lässt sich auf n -Teilchen-Zustände verallgemeinern:

$$\begin{aligned} a^\dagger(\vec{p}) a^\dagger(\vec{q}) |0\rangle &\sim \text{2-Teilchen Zustand} \\ &\text{mit Impuls } \vec{p} + \vec{q} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Als Normierung wählen wir die entsprechenden relativistischen Vorfaktoren und definieren den n -Teilchen-Zustand

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \cdots \sqrt{2E_{\vec{p}_n}} a^\dagger(\vec{p}_1) \cdots a^\dagger(\vec{p}_n) |0\rangle \quad (3.38)$$

$$\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 | \vec{q}_1 \vec{q}_2 \rangle = \underbrace{(2\pi)^{2d}}_{2E_{\vec{p}_1} 2E_{\vec{p}_2}} \left[\delta^{(d)}(\vec{p}_1 - \vec{q}_1) \delta^{(d)}(\vec{p}_2 - \vec{q}_2) + \delta^{(d)}(\vec{p}_1 - \vec{q}_2) \delta^{(d)}(\vec{p}_2 - \vec{q}_1) \right] \quad (3.39)$$

Die Verallgemeinerung der Vollständigkeitsrelation (3.36) auf n -Teilchen Zustände lautet

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{n\text{-Teilchen}} &= \frac{1}{n!} \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{p}_1}} \cdots \int \frac{d^d p_n}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{p}_n}} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n| \\ &\equiv |n\rangle \langle n| \\ &\equiv \mathbb{P}_n \end{aligned} \quad (3.40)$$

In der Tat sind dies zwar " $\mathbb{1}$ 'en" im n -Teilchen Unterraum, aber " $\mathbb{0}$ 'en" in anderen Unterräumen, so dass (3.40) einen Projektor auf den n -Teilchen Unterraum darstellt.

Die Vollständigkeitsrelation im Raum aller Zustände lautet daher

$$\mathbb{1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n. \quad (3.41)$$

Mathematisch ausgedrückt bedeutet die Vollständigkeit, dass die Zustände $|0\rangle, |\vec{p}_1\rangle, |\vec{p}_1 \vec{p}_2\rangle, \dots$ eine orthogonale vollständige Basis des Hilbertraums

$$H_F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n \quad (3.42)$$

bildet, der eine direkte Summe der n -Teilchen Hilberträume ist. Dieser Raum heisst auch Fock-Raum.

Die Fock-Raum-Formulierung erlaubt auch eine direkte Verknüpfung mit der Schrödinger-Wellenfunktion für Vielteilchenzustände. Ein ~~ein~~ generischer Zustandsvektor $|\Psi\rangle \in H_F$ kann dargestellt werden als

$$|\Psi\rangle = \mathbb{1} |\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{d^d \vec{p}_1}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{p}_1}} \cdots \int \frac{d^d \vec{p}_n}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{p}_n}} \bar{\Psi}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \quad (3.43)$$

mit

$$\bar{\Psi}(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) \equiv \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n | \Psi \rangle \equiv \langle n | \Psi \rangle \equiv \Psi_n$$

(n -Teilchen-Impulsraumkoordinaten)

z.B. der oben diskutierte Zustand

$$|\Psi_1(\vec{x})\rangle = \Phi(\vec{x}) |0\rangle = \int \frac{d^d \vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} |\vec{p}\rangle \quad (3.44)$$

liefert

$$\bar{\Psi}_1(\vec{x}; \vec{p}) = \langle \vec{p} | \Psi_1(\vec{x}) \rangle = e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}.$$

Die Fock-Raum-Formulierung erlaubt auch einen ersten Blick auf die wechselwirkende Theorie.

Betrachten wir dafür einen Hamilton-Operator der Form

$$H = H_0 + V, \quad (3.45)$$

wobei z.B. $H_0 = \int d^d \vec{x} \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$ und

$$V = \int d^d x \, U(\phi), \quad U(\phi) \stackrel{\text{z.B.}}{=} \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \dots$$

Dann entspräche die "Lösung" der Theorie der Lösung der Eigenwertgleichung (d.h. Bestimmung des Spektrums)

$$(H_0 + V) |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle. \quad (3.46)$$

Die Projektion auf den n -Teilchensektor ergibt:

$$0 = \langle n | E - H_0 - V | \Psi \rangle = (E - E_n) \Psi_n - \sum_{k=0}^{\infty} \langle n | V | k \rangle \langle k | \Psi \rangle, \quad (3.47)$$

wobei $E_n := E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2} + \dots + E_{\vec{p}_n}$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Psi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle n | V | k \rangle}{E - E_n} \Psi_k}} \quad (3.48)$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Wechselwirkung im Allgemeinen den n -Teilchensektor H_n mit vielen (unter Umständen allen) weiteren k -Teilchensektoren koppelt.

$$\text{Schreibt man } |n\rangle\langle k| = \frac{1}{k!} \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} \dots \int \frac{d^d p_k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2E_{p_1}} \dots \frac{1}{2E_{p_k}} |\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_k|$$

wieder aus, sieht man, dass (3.48) einem unendlichen System gekoppelter Integralgleichungen entspricht, die jeweils die zu bestimmende n -Teilchen-Wellenfunktion Ψ_n mit anderen zu bestimmenden Ψ_k koppeln. Eine vollständige Lösung für $V \neq 0$ ist daher nur in seltenen Fällen zu erwarten.

Für $V = 0$ entkoppeln diese Integralgleichungen, was erklärt, dass wir die freie Theorie haben lösen können.

Instruktiv ist der Vergleich zur QM eines Teilchens in einem Potential V ; hierfür lautet die analoge Gleichung für die nicht-relativistische Wellenfunktion

$$\Psi_1(\vec{p}) \equiv \langle \vec{p} | \Psi \rangle_{NR} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \underbrace{\langle \vec{p} | V | \vec{q} \rangle_{NR}}_{E - \vec{p}^2/2m} \underbrace{\langle \vec{q} | \Psi_1 \rangle_{NR}}_{\Psi_1(\vec{q})} \quad (3.49)$$

d.h. es ist lediglich eine Integralgleichung zu lösen.