

2 Elemente klassische Feldtheorie

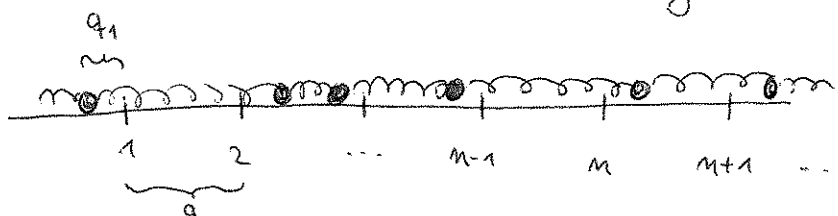
Klassische Feldtheorie begegnet uns z.B. bei der Physik von Flüssigkeiten oder elastischen Medien und insbesondere in der Elektrodynamik.

Der Limes von der Physik diskreter Punktteilchen zur Kontinuumsfeldtheorie lässt sich besonders gut an folgendem einfachen Beispiel diskutieren:

2.1 Die lineare Kette

(... als Beispiel einer Gitterfeldtheorie)

Gegeben seien N Teilchen der Masse m , die entlang einer Achse aufgereiht sind und um ihre jeweiligen Ruhelagen, welche äquidistant mit Abstand a verteilt sind, in einem harmonischen Potential schwingen können. Zudem sind die Teilchen über Federn mit ihren beiden Nachbarn verknüpft; die Federkonstante sei κ . Nur longitudinale Bewegungen sind möglich; die Auslenkung des n ten Teilchens aus seiner Ruhelage sei q_n



Lagrange-Funktion des linearen Ketts:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m \dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} k \sum_{n=1}^N (q_{n+1} - q_n)^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_{n=1}^N q_n^2. \quad (2.1)$$

Um eine diskrete Translationsinvarianz zu erhalten, verlangen wir periodische Randbedingungen:

$$q_n \equiv q_{N+n}. \quad (2.2)$$

Folgende Definitionen sind nützlich:

▷ Gitterableitung (f_n sei Funktion auf Gitterplätzen)

$$\nabla f_n = \frac{1}{a} (f_{n+1} - f_n) \quad (2.3)$$

adjungierte Gitterableitung

$$\nabla^+ f_n = \frac{1}{a} (f_{n-1} - f_n) \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \sum_n (\nabla f_n) g_n = \sum_n f_n \nabla^+ g_n \quad (2.5)$$

▷ Gitter-Laplace-Operator

$$\Delta f_n := -\nabla^+ \nabla f_n = \frac{1}{a^2} (f_{n-1} - 2f_n + f_{n+1}) \quad (2.6)$$

$\Rightarrow$ Lagrangian:

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_n \left[\frac{1}{2} m \dot{q}_n^2 - \frac{1}{2} a^2 k (\nabla q_n)^2 - \frac{1}{2} m \Omega^2 q_n^2 \right] \\
 &= \frac{m}{2} \sum_n \left[\dot{q}_n^2 + a^2 \frac{k}{m} q_n \Delta q_n - \Omega^2 q_n^2 \right] \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} = m \left(\ddot{q}_n - a^2 \frac{k}{m} \Delta q_n + \Omega^2 q_n \right) \quad (2.8)$$

Falls $\Omega=0$: Wellengleichung mit Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$v := a \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Wir erwarten Ebene-Wellen-Lösungen

$$\text{Ansatz: } q_n = \underbrace{q_A}_{\text{const.}} \cdot e^{i(kn - \omega t)}, \quad k \in \mathbb{R} \text{ dim'los,} \quad (2.9)$$

wobei die Wellengleichung ω und k verknüpft wird:

$$\omega = \omega(k) \quad \text{Dispersionsrelation.}$$

Wir benötigen:

$$\dot{q}_n = -i\omega q_n, \quad \ddot{q}_n = -\omega^2 q_n, \quad q_{n\pm 1} = e^{\pm ik} q_n \quad (2.10)$$

$$\Rightarrow \Delta q_n = \frac{1}{a^2} \left(-2 + e^{ik} + e^{-ik} \right) q_n = -\frac{2}{a^2} (1 - \cos k) q_n$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta q_m = -\frac{4}{a^2} \sin^2 \frac{k}{2} q_m =: -p^2 q_m}} \quad (2.11)$$

mit dem Gitterimpuls $p = p(k) = \frac{2}{a} \sin \frac{k}{2}$ • (2.12)

Mit (2.10) und (2.11) erhalten wir aus der Wellengleichung (2.8):

$$\underline{\underline{\omega^2 = v^2 p(k)^2 + \Omega^2}} \quad (2.13)$$

Was sind die erlaubten k Werte? Die periodischen Randbedingungen verlangen

$$q_{N+m} = e^{\pm iNk} q_m \stackrel{\substack{\text{Period.} \\ \text{Randbed.}}}{=} q_m \Rightarrow 1 = e^{\pm iNk}$$

$$\Rightarrow k_j := \frac{2\pi j}{N} = \frac{2\pi a j}{l}, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad \text{oder} \quad j = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad \text{falls } N \text{ gerade.} \quad (2.14)$$

und l ist die Länge der Kette, $l = a \cdot N$.

Wir finden also N Moden mit Frequenz

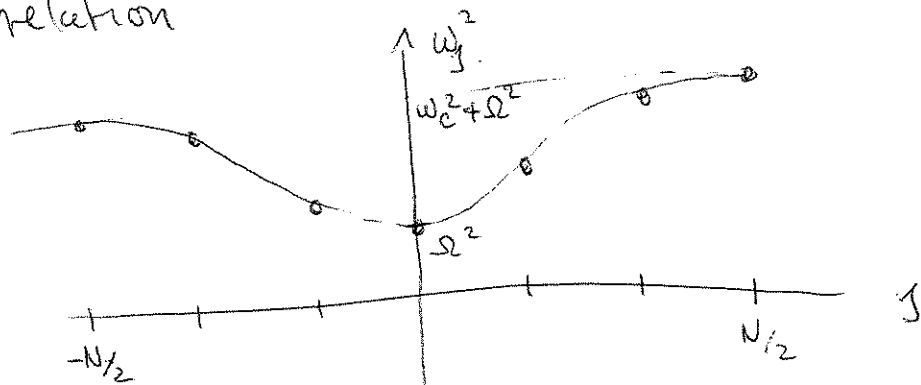
$$\begin{aligned} \omega_j^2 &= v^2 p_j^2 + \Omega^2 = 4 \frac{\kappa}{m} \sin^2 \frac{k_j}{2} + \Omega^2 \\ &=: \omega_c^2 \sin^2 \frac{\pi j}{N} + \Omega^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit der maximalen Frequenz der schnellsten Mode:

$$\omega_c := 2 \sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \frac{2v}{a} \sim \frac{1}{a} \quad (\text{UV cutoff}), \quad (2.16)$$

Der Gitterabstand $a > 0$ verursacht das keine höheren Frequenzen auftreten können.

Dispersionsrelation



Kontinuumslimites:

Wir bilden den Kontinuumslimites in folgender Form:

$a \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, wobei

$$\begin{aligned} l &= N \cdot a = \text{const} && \text{Kettenlänge} \\ \rho &= \frac{m}{a} = \text{const.} && \text{Massendichte} \\ Y &= \kappa \cdot a = \text{const.} && \text{Young-Modul} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dazu definieren wir das Feld Φ ,

$$\Phi(x_n, t) \equiv \Phi_n(t) = \sqrt{\rho} \varphi_n(t). \quad (2.18)$$

Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{1}{2} \sum_n a \left[\dot{\Phi}_n^2 - \frac{Y}{\rho} (\nabla \Phi_n)^2 - \Omega^2 \Phi_n^2 \right]. \quad (2.19)$$

Die Summe entspricht genau einer Riemann-Summe, welche im Limes ein Integral definiert. Ebenso gilt im Limes

$$\phi'(x, t) \equiv \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(x_n, t) - \phi(x_{n-1}, t)}{x_n - x_{n-1}}, \quad (2.20)$$

So daß wir mit $v^2 := \frac{Y}{g} = \text{const}$ finden:

$$L = \int_0^l dx \frac{1}{2} [\dot{\phi}_{(x,t)}^2 - v^2 \phi'_{(x,t)}^2 - \Omega^2 \phi^2_{(x,t)}] =: \int_0^l dx \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi') \quad (2.21)$$

Hier haben wir die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ definiert, mit der wir die Wirkung schreiben können als

$$S = \int dt \int_0^l dx \mathcal{L}. \quad (2.22)$$

Die Bewegungsgleichung erhalten wir aus dem Prinzip der minimalen Wirkung gemäß Variationsrechnung:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int dt dx \delta \mathcal{L} = \int dt dx (\dot{\phi} \delta \dot{\phi} - v^2 \phi' \delta \phi' - \Omega^2 \phi \delta \phi) \\ &= - \int dt dx (\ddot{\phi} - v^2 \phi'' + \Omega^2 \phi) \delta \phi + \int_0^l dx \dot{\phi} \delta \phi \Big|_{t=-\infty}^{t=\infty} - v^2 \int dt \phi' \delta \phi \Big|_{x=0}^{x=l} \\ &\quad = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Fordern wir das Verschwinden von $\delta \phi$ bei $t \rightarrow \pm \infty$ und periodische Randbedingungen für $\delta \phi$ (und ϕ'), tragen die Oberflächenterme nichts bei und wir erhalten

die Bewegungsgleichung (partielle !!) DGL.)

$$0 = \ddot{\phi} - v^2 \phi'' + \Omega^2 \phi \quad (2.24)$$

als Kontinuumsanalogon von (2.8).

Diese hat Ebene-Wellen-Lösungen

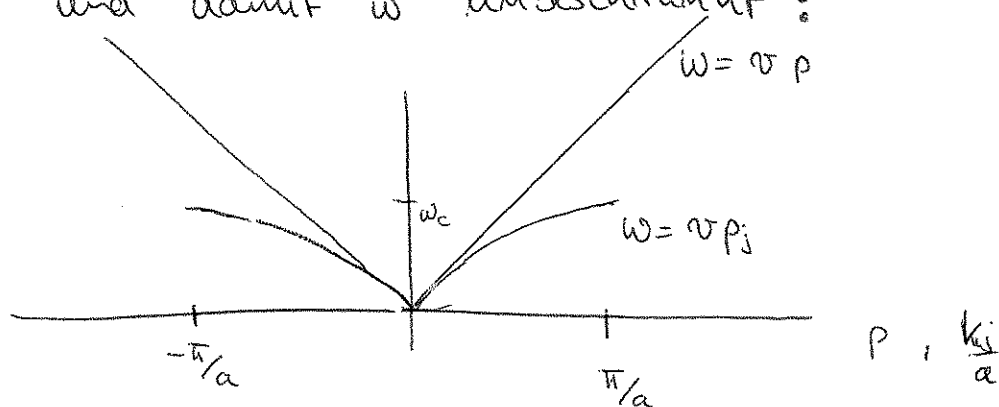
$$\phi(x,t) = \phi_A \cdot e^{i(px - \omega t)} \quad (\text{Ansatz}); \quad (2.25)$$

Einsetzen in (2.24) liefert die Dispersionsbeziehung

$$\omega^2 = \omega^2(p) = v^2 p^2 + \Omega^2. \quad (2.26)$$

Im Gegensatz zum Gitter gilt hier $p^2 \in \mathbb{R}_0^+$; insbesondere ist p^2 und damit ω^2 unbeschränkt:

z.B. $\Omega=0$:



Bei kleinen Frequenzen sind die Dispersionsbeziehungen ähnlich, bei größeren "sieht" das Gitterimpuls die diskrete Gitterstruktur.

Bemerkungen

- ▷ Die lineare Kette lässt sich direkt auf höhere Dimensionen und beliebige Kettenlänge verallgemeinern. z.B. erhält man in d Raumdimensionen (mit isotropen Federkonstanten) die Wirkung

$$S = \int dt d^d x \frac{1}{2} \left(\dot{\phi}^2(\vec{x}, t) - v^2 (\partial_i \phi(\vec{x}, t))^2 - \Omega^2 \phi^2(\vec{x}, t) \right) \quad (2.27)$$

Nach Variation erhält man die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \\ &= \ddot{\phi} - v^2 \Delta \phi + \Omega^2 \phi \end{aligned} \quad (2.28)$$

- ▷ Im Fall $v=1$ wird die Wirkung relativistisch invariant:

$$S = \int d^D x \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \Omega^2 \phi^2 \right), \quad D=1+d \quad (2.29)$$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{\square}_{:= \partial_\mu \partial^\mu} \phi + \Omega^2 \phi \quad (\text{D'Alembert-Operator})$$

Klein-Gordon-Gleichung

▷ Im Falle $v=1$ ist die Dispersionsrelation (2.26) identisch mit der relativ. Energie-Impuls-Beziehung

$$E_{\vec{p}}^2 \equiv \omega_{(\vec{p})}^2 = p^2 + \Omega^2$$

$$\Rightarrow \Omega^2 = E_{\vec{p}}^2 - p^2, \quad (2.30)$$

d.h. Ω hat die Bedeutung einer Masse für die Anregungen des Feldes ϕ .

(Im Folgenden setzen wir $\Omega = m$)
↑
 nicht zu verwechseln mit der Masse m der Kettenlieder.

2.2 Das klassische Klein-Gordon-Feld

Wir haben durch den Kontinuumslimes der linearen Kette nicht nur die Klein-Gordon-Gleichung erhalten, sondern den Lagrange-Formalismus für die Klein-Gordon-Theorie gleich mitentwickelt.

Zusammenfassend kann man sagen:

Wirkung:
 der
 Klein-Gordon-Theorie
 (Funktional von ϕ)

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - U(\phi) \right] \quad (2.31)$$

Bewegungsgleichung

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \underbrace{\partial_\mu^2 \phi}_{\equiv \square} + U'(\phi) \quad (2.32)$$

Hier haben wir die Theorie auf ein Potential im Feldraum, $U=U(\phi)$, verallgemeinert (bisher: $U = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$).
vormals Ω^2

Analog zur Mechanik lässt sich die klassische Feldtheorie auch hamiltonsch formulieren. Wie zuvor gesehen, kann diese nicht explizit kovariant geschrieben werden; Zeit und Raum müssen also ungleich behandelt werden

$$\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^{D-1} \times \mathbb{R}, \quad x = (\vec{x}, t) \quad (2.33)$$

(Folierung)

Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - U(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla} \phi)^2 - U(\phi) \quad (2.34)$$

Wir definieren die kanonische Impulsdichte:

$$\pi(\vec{x}) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x})} = \dot{\phi}(\vec{x}), \quad (2.35)$$

und erhalten die Hamilton-Dichte durch Legendre-Transformation:

$$\underline{\underline{\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + U(\phi)}} \quad (2.36)$$

Diese drei Terme lassen sich interpretieren als die benötigte Energie zur Zeitentwicklung ($\sim \pi^2$), zur räumlichen Variation des Feldes ($\sim (\nabla \phi)^2$) und als Potentielle Energie ($\sim U(\phi)$).

Wie in den Übungen im Detail diskutiert, wird die Dynamik (d.h. die Zeitentwicklung) des Feldes und der Impulsdichte durch die kanonischen Bewegungsgleichungen beschrieben, welche in vollständiger Analogie zur klassischen Mechanik stehen.

Kurz zusammengefasst: mit Hilfe der Funktionalableitung (siehe Übungen) definieren wir die Poisson-Klammer für zwei beliebige Phasenraumfunktionale $A[\phi, \pi]$, $B[\phi, \pi]$ durch $(d=D-1 = \# \text{Raumdimensionen})$

$$\{A, B\} := \int d^d z \left(\frac{\delta A}{\delta \phi(\vec{z})} \frac{\delta B}{\delta \pi(\vec{z})} - \frac{\delta A}{\delta \pi(\vec{z})} \frac{\delta B}{\delta \phi(\vec{z})} \right) ; \quad (2.37)$$

Die fundamentalen Poisson-Klammern

$$\{\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})\} = \delta^{(d)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.38)$$

$$\{\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})\} = 0 = \{\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})\}$$

lassen sich mit (2.37) direkt verifizieren (vgl. klassische Mechanik $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$, $\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$).

Die kanonischen Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$\dot{\phi}(\vec{x}) = \{\phi(\vec{x}), H\}, \quad \dot{\pi}(\vec{x}) = \{\pi(\vec{x}), H\} \quad (2.39)$$

mit dem Hamilton-Funktional $H = \int d^d y \mathcal{H}(\vec{y})$.

Einsetzen von (2.36) in (2.39) liefert schließlich die Klein-Gordon-Gleichung

$$0 = \ddot{\phi} - \vec{\nabla}^2 \phi + U'(\phi) \equiv \square \phi + U'(\phi), \quad (2.40)$$

d.h. wir erhalten die Lorentz-invariante Bewegungsgleichung aus dem nicht-explicit Lorentz-invarianten Hamilton-Formalismus.

2.3 Symmetrien und Erhaltungssätze

Das Noether -Theorem in der klassischen Mechanik zeigt, dass Symmetrien eines Systems eng verknüpft sind mit der Existenz von Erhaltungsgrößen.

Dieser Zusammenhang besteht ebenso in der klassischen Feldtheorie.

Dazu betrachten wir infinitesimale Deformationen des Feldes

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x), \quad (2.41)$$

wobei $\delta\phi(x)$ eine infinitesimale stetige Deformation beschreibt (endliche Deformationen lassen sich aus infinitesimalen erzeugen).

Gl. (2.41) beschreibt eine Symmetrietransformation, wenn die Bewegungsgleichungen darunter invariant bleiben.

Auf dem Niveau der Lagrange - Dichte bedeutet dies, dass $\mathcal{L}$ sich maximal um eine totale Ableitung unter (2.41) ändern darf,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} \quad (2.42)$$

mit $\delta \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu$.

Dann nämlich ändert sich die Wirkung um einen Oberflächenterm

$$\delta S = \int d^D x \delta \mathcal{L} = \int d^D x \partial_\mu K^\mu = \int_{\partial \Omega} d\sigma_\mu K^\mu \quad (2.43)$$

$\xrightarrow{\text{Raumzeitvolumen}} \Omega$

welcher bei (angenommener) ^{Raumzeitvolumen} hinreichender Lokalisation von K^μ verschwindet; daraus folgt die Invarianz der Bewegungsgleichungen.

Den Zusammenhang zu Erhaltungsgrößen stellt das Noether-Theorem der klassischen Feldtheorie her:

Zu jeder stetigen Symmetrietransformation

$$\phi \rightarrow \phi + \delta \phi \quad \text{mit} \quad \delta \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu \quad (2.44)$$

gibt es einen 4er-Strom (Noether-Strom)

$$J^\mu = \pi^\mu \delta \phi - K^\mu \quad \text{mit} \quad \pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \quad (2.45)$$

der erhalten ist, d.h.

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.46)$$

Falls Φ die Bewegungsgleichung erfüllt.

Beweis:

Die Variation der Lagrange-Dichte liefert

$$\begin{aligned}\partial_\mu K^\mu &= \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right] \delta \Phi + \underbrace{\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta \Phi \right)}_{\pi^\mu}.\end{aligned}$$

Einsetzen der Bewegungsgleichung $0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)}$ ergibt

$$0 = \partial_\mu (\pi^\mu \delta \Phi - K^\mu) \equiv \partial_\mu J^\mu. \quad \square$$

Wenn der Noether-Strom hinreichend schnell im räumlich unendlichen abfällt, folgt sofort ($d=D-1$)

$$\begin{aligned}0 &= \int d^d x \partial_\mu J^\mu = \partial_t \int d^d x J^0 - \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \vec{\partial} \cdot \vec{J} \\ &= \partial_t \int d^d x J^0 - \underbrace{\int_{\partial \mathbb{R}^d} d\vec{v} \cdot \vec{J}}_{\rightarrow 0} = \partial_t \int d^d x J^0 =: \dot{Q},\end{aligned} \quad (2.47)$$

mit der Noether-Ladung

$$Q = \int d^d x J^0 \quad (2.48)$$

welche erhalten ist.

Zwei Beispiele sollen den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen verdeutlichen:

Beispiel 1: Translationen

Translationen sind Teil der Raumzeit-Symmetrien, die zusammen mit Lorentz-Transformationen die Poincaré-Gruppe bilden. Translationsinvariante Systeme haben keinen ausgezeichneten Punkt im Minkowski-Raum. Eine Translation

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu \quad (2.49)$$

transformiert die Felder gemäß:

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \Phi(x - a). \quad (2.50)$$

Bei infinitesimalen Translationen erhalten wir

$$\Phi(x-a) = \Phi(x) - a_\mu \partial^\mu \Phi(x) + \mathcal{O}(a^2) \Rightarrow \underline{\delta \Phi = -a_\mu \partial^\mu \Phi(x)} \quad (2.51)$$

Ähnlich gilt für die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &\rightarrow \mathcal{L}(x-a) = \mathcal{L}(x) - a_\mu \partial^\mu \mathcal{L}(x) + \mathcal{O}(a^2) \\ &\Rightarrow \delta \mathcal{L} = -a_\mu \partial^\mu \mathcal{L}(x) \equiv \partial_\mu K^\mu \\ &\Rightarrow \underline{K^\mu = -a_\mu \mathcal{L}} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Daraus erhalten wir den erhaltenen
Noether - Strom

$$\begin{aligned} J^\mu &= \pi^\mu \delta\phi - K^\mu = \pi^\mu (-a_\nu \partial^\nu \phi) + a^\mu \mathcal{L} \\ &= -a_\nu (\pi^\mu \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}) =: -a_\nu T^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

wobei wir den (kanonischen) Energie-Impuls-Tensor
definiert haben:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.54)$$

für den folglich gilt: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ (2.55)

Die 00-Komponente entspricht der Hamilton-Dichte,

$$T^{00} = \pi^0 \partial^0 \phi - \mathcal{L} \equiv \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \mathcal{H}. \quad (2.56)$$

Die Noether-Ladung ist erhalten

$$\dot{Q} = \partial_t \int d^3x J^0 \Rightarrow \partial_t \int d^3x T^{0\nu} \equiv \frac{d}{dt} P^\nu = 0. \quad (2.57)$$

Diese entspricht also dem 4er-Impuls des Feldes,

$$P^\mu := \int d^3x T^{0\mu} = \int d^3x (\pi \partial^\mu \phi - g^{0\mu} \mathcal{L}) \quad (2.58)$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} P^0 &= \int d^3x T^{00} = H && \text{(Energie)} \\ P^i &= \int d^3x \pi \partial^i \phi && \text{(3er-Impuls)} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Beispiel 2: komplexes Skalarfeld

Neben den Raumzeit-Symmetrien können interne Symmetrien zu Erhaltungsgrößen führen. Dazu betrachten wir zwei reelle Skalarfelder ϕ^a , $a=1,2$ mit Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a, \quad (2.60)$$

welche wir in einem komplexen Feld

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi^1 + i \phi^2) \quad (2.61)$$

zusammen fassen:

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi. \quad (2.62)$$

Variation bezüglich ϕ^* ergibt

$$0 = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = \partial^2 \phi + m^2 \phi \quad (2.63)$$

die bekannte Klein-Gordon-Gleichung, die (man betrachte Real- und Imaginärteil von (2.63) separat) ebenso für die Komponenten ϕ^1 und ϕ^2 gilt. (Variation nach ϕ ergibt nichts neues.)

Die Summation über "a" in (2.60) entspricht einem

Skalarprodukt im internen Feldraum. D.h. (2.60) ist invariant unter interner Rotation

$$\begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1 \\ \phi^2 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Für das komplexe Feld entspricht dies einer Phasenrotation

$$\phi \rightarrow e^{-i\alpha} \phi, \quad \phi^* \rightarrow e^{i\alpha} \phi^*, \quad (2.65)$$

bzw. infinitesimal

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi - i\alpha \phi \equiv \phi + \delta\phi \\ \phi^* &\rightarrow \phi^* + i\alpha \phi^* \equiv \phi^* + \delta\phi^* \end{aligned} \quad (2.66)$$

Die Lagrange-Dichte ist invariant unter (2.65), (2.66),

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \delta\mathcal{L} = 0, \quad K^\mu = 0. \quad (2.67)$$

Der Noether-Strom ist daher

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J^\mu}} &= \pi^\mu \delta\phi + \pi^{*\mu} \delta\phi^* = -i\alpha (\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \\ &= -2\alpha \operatorname{Im} (\phi^* \partial^\mu \phi), \end{aligned} \quad (2.68)$$

(was dem Wahrscheinlichkeitsstrom der gewöhnlichen Schrödinger-Gleichung ähnelt.)

Ohne den infinitesimalen Faktor λ erhalten wir

$$j^\mu := -2 \operatorname{Im} (\phi^* \partial^\mu \phi) \quad , \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.69)$$

und die zugehörige Noether-Ladung

$$Q = \int d^3x j^0 = i \int d^3x (\phi^* \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^*) \quad (2.70)$$

Wir werden später sehen, dass Q tatsächlich der elektrischen Ladung der Feldanregungen entspricht, so daß das komplexe skalare Feld einem geladenen Feld entspricht, während das reelle skalare Feld elektrisch neutral ist.