

Quantenfeldtheorie

Vorlesungsmotizen

Holger Gies

Theoretisch-Physikalisches Institut

Friedrich-Schiller Universität Jena

Sommersemester 2008/09/10/12

1. Einführung

1.1 Was ist Quantenfeldtheorie?

Definitionsversuch 1:

QFT ist die Verallgemeinerung von Quantenmechanik mit einer unendlichen Zahl von Freiheitsgraden, also einer unbeschränkten Zahl von Teilchen.

Definitionsversuch 2:

QFT ist die quantisierte Verallgemeinerung von klassischen Feldtheorien.

Definitionsversuch 3:

(Relativistische) QFT ist die konsistente Vereinheitlichung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie.

QFT besitzt sehr unterschiedliche Anwendungsbereiche:

- Statistische (oder Euklidische) Feldtheorie:
beschreibt statistische Systeme mit vielen Freiheitsgraden (im oder Nahe des Gleichgewichts); Anwendung auf kritische Phänomene, Phasenübergänge, Universalität, etc. (z.B. Ising-Modell)
- nichtrelativistische QFT:
ist die Grundlage für Festkörper und Kernphysik, z.T. auch Atomphysik, und eng verwandt bzw. identisch mit Vielteilchentheorie. Anwendungsbeispiele sind BCS-Theorie für Supraleitung, Bogoliubov-Hatree-Fock-Theorie für Quantengase oder Fermi-Gas- oder -Flüssigkeitsmodelle für Kernmaterie.
- relativistische QFT:
Grundlage zur Beschreibung aller bekannten Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen (bislang mit Ausnahme der Gravitation)

insbesondere der

- elektromagnetischen WW zwischen geladener Materie (Quarks, Leptonen wie z.B. Elektron)
 $\Rightarrow$ Quantenelektrodynamik (QED)
- Schwachen WW, die sich z.B. im β -Zerfall manifestiert. Die Vereinheitlichung von elektromagn. und schwachen WW führt zu einer detaillierten QFT: dem Glashow-Salam-Weinberg-Modell
- starken WW zwischen den Quarks (Kernbausteinen)
 $\Rightarrow$ Quantenchromodynamik (QCD)

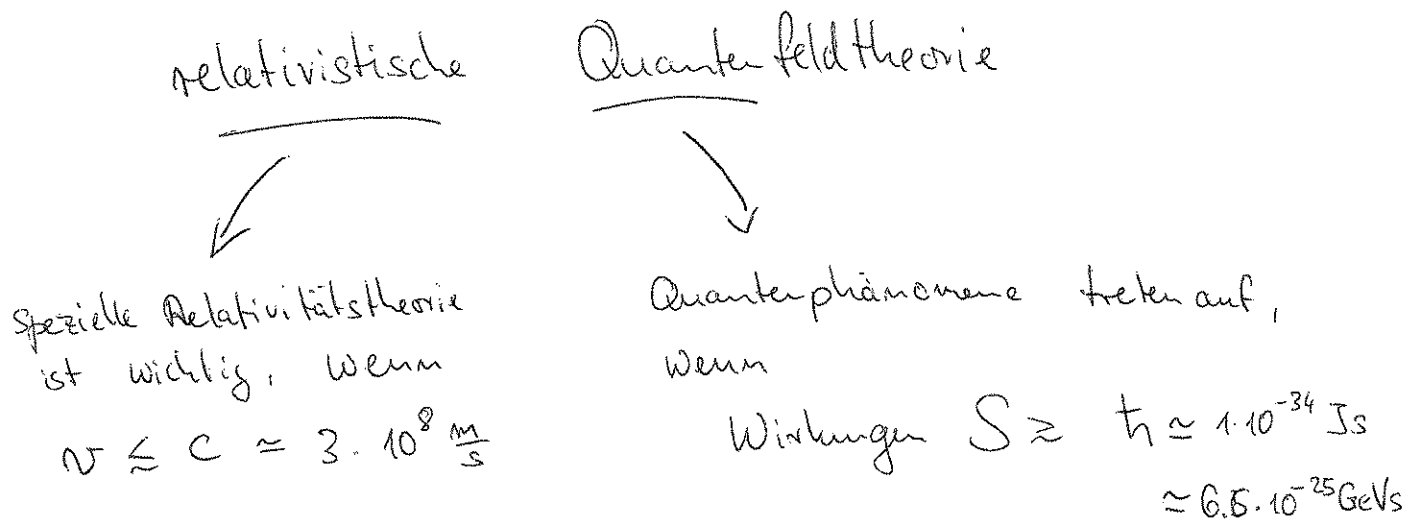
Diese WW zusammen genommen bilden mit den zugehörigen ladungstragenden Materiefeldern das Standardmodell der Teilchenphysik, deren operative Grundlage die QFT bildet.

Gegenstand dieser Vorlesung sind vor allem relativistische QFTs.

Der Zusammenhang zwischen relativ. QFT und statistischer Feldtheorie ist ähnlich wie der zwischen

$$\begin{array}{ccc} \text{Schrödinger Gleichung} & \xleftrightarrow{t \rightarrow i\tau} & \text{Diffusionsgleichung} \\ (\text{QM}) & & (\text{thermische Systeme}) \end{array}$$

1.2 Einheiten



Das Messen von Geschwindigkeiten in Einheiten von c und von Wirkungen in Einheiten von $\hbar$ ist gleichbedeutend mit der Wahl

natürlicher Einheiten: $c = 1 = \hbar$

Über die Masse - Energie - Beziehung

$$E = m c^2 \quad (1.1)$$

können Teilchenmassen also in GeV angegeben werden:

$$\text{z.B. Protonmasse } m_p \equiv m_p c^2 \simeq 1 \text{ GeV} \quad (1.2)$$

Die aus der Quantenmechanik bekannte charakteristische Wellenlänge für (interferierende) Materiewellen ist die Compton - Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{m c} \equiv \frac{1}{m} \quad (1.3)$$

die in natürlichen Einheiten also in inversen GeV gemessen wird.

Für die Einheiten unterschiedlicher physikalischer Größen gilt also z.B.:

$$\begin{aligned} [\text{Masse}] &= [\text{Energie}] = [\text{Impuls}] \sim \text{GeV} \\ [\text{Länge}] &= [\text{Zeit}] = [(\text{Masse})^{-1}] \sim (\text{GeV})^{-1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Für die Konversion von Einheiten ist die Formel

$$1 = \hbar c \approx 197 \text{ MeV fm} \approx 0.2 \text{ GeV fm} \quad (1.5)$$

mit $1 \text{ fm} = 1 \text{ Fermi} = 10^{-15} \text{ m}$ nützlich.

Beispiel:

Der leichteste Bindungszustand der starken Wechselwirkung ist das Pion, (das leichteste Hadron)

$$m_\pi \approx \frac{m_p}{7} \approx 140 \text{ MeV}, \quad (1.6)$$

mit einer Compton-Wellenlänge von

$$\lambda_\pi = \frac{1}{m_\pi} \approx 1.4 \text{ fm}. \quad (1.7)$$

Die typische hadronische Längenskala ist also $R_H \approx 1 \text{ fm}$ und damit 5 Größenordnungen kleiner als die atomare Längenskala $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$. In der Tat beträgt z.B. der Ladungsradius des Protons $r_p \approx 0.81 \text{ fm}$.

Ein typischer hadronischer Wirkungsquerschnitt ist von der Größenordnung

$$\sigma_H \approx R_H^2 \pi \approx 3 \text{ fm}^2 = 30 \text{ mb}. \quad (1.8)$$

Ebenso lässt sich eine typische Skala für die Lebensdauer von Teilchen, die unter Einfluss der starken WW zerfallen, abschätzen:

$$\tau = R_H = 1 \text{ fm} / c \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-23} \text{ s} . \quad (1.9)$$

1.3 Das Versagen relativistischer Quantenmechanik

Man könnte vermuten, dass eine Vereinigung von Quantenmechanik und spezieller Relativitätstheorie bereits in einer relativistischen Quantenmechanik gelingen könnte, d.h. in einer relativistischen Verallgemeinerung der Schrödinger-Gleichung für eine (N-Teilchen) Wellenfunktion,

$$N=1: \quad i \partial_t \psi(\vec{x}, t) = H \psi(\vec{x}, t), \quad (1.10)$$

$$\text{z.B. für ein freies Teilchen} \quad H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{1}{2m} \Delta, \quad (1.11)$$

Ein solcher Vereinigungsversuch führt jedoch zu Inkonsistenzen, wie sie im Folgenden verdeutlicht werden sollen.

Dazu betrachten wir den Fall eines freien Teilchens, das sich "kausal" im Vorwärtslichtkegel bewegt mit einer Trajektorie

$$x^\mu = x^\mu(\tau) = (x^0(\tau), \vec{x}(\tau)) ,$$



(1.12)

wobei τ diese "Weltlinie" parametrisiert.

Nach dem Hamiltonschen Prinzip bewegt sich ein klassisches Teilchen auf einer Trajektorie stationärer Wirkung. Die Wirkung sei gegeben durch die Bogenlänge der Trajektorie

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} = -m \int_1^2 ds \quad (1.13)$$

mit Lagrange-Funktion L und dem invarianten Längenelement

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = dt^2 - d\vec{x}^2 \quad (1.14)$$

und Metrik $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $a_\mu b^\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$,
 ($\dot{x}^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}$) (NB: die Parametrisierung mit τ sollte so gewählt sein, dass $\dot{x}^2 \geq 0$ immer im Vorwärtslichtkegel liegt, also "zeitartig" ist.)

Der Vorfaktor m garantiert den richtigen nicht-relativistischen Limes.

Der konjugierte Impuls ist

$$p^\mu \equiv - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}} . \quad (1.15)$$

Vorzeichen wegen Minkowski-Metrik mit -1 im räuml. Komp.

Nicht alle Komponenten von p_r sind unabhängig:

Energie und 3er-Impuls sind miteinander verknüpft,

was sich zeigt, wenn (1.15) mit p^r kontrahiert wird:

$$p_\mu p^\mu \equiv p^2 = E^2 - \vec{p}^2 \stackrel{(1.15)}{=} m^2 \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{\dot{x}_r \dot{x}^r} = m^2. \quad (1.16)$$

Versuchen wir, die Hamilton-Funktion durch Legendre-Transformation von L zu definieren, beobachten wir:

$$H = p_r \dot{x}^r - L = -m \frac{\dot{x}^2}{\sqrt{\dot{x}^2}} + m \sqrt{\dot{x}^2} = 0. \quad (1.17)$$

Die Hamilton-Funktion verschwindet (was damit zusammenhängt, dass die Wirkung S invariant unter Reparametrisierung von $x(\tau)$ ist.)

Es lässt sich also kein Lorentz-invarianter Generator relativistischer Zeitevolution finden.

Als Ausweg bleibt, explizite Kovarianz aufzugeben.

Dazu wählen wir ein Bezugssystem und verwenden als Parameter τ die Galilei-Newton-Zeit

$$\tau := t \equiv x^0 \quad (1.18)$$

und erhalten als Hamilton-Funktion

$$H_t = p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} =: E_{\vec{p}} \quad (1.19)$$

z.B. aus der Zwangsbedingung (1.16).

(NB: diese Wahl ist nicht eindeutig; ist bleibt nach-
zuprüfen, ob die Physik unabhängig unter dieser
Wahl bleibt.)

Wir erhalten als relativistische Schrödinger-Gleichung:

$$i \partial_t \Psi(\vec{x}, t) = H_t \Psi(\vec{x}, t) = \sqrt{-\Delta + m^2} \Psi(\vec{x}, t) \quad (1.20)$$

Diese Gleichung hat Ebene-Wellen-Lösungen:

$$\Psi_{\vec{p}}(\vec{x}, t) = e^{-i E_{\vec{p}} t + i \vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (1.21)$$

die also ein freies relativistisches Teilchen beschreiben
sollen.

Gl. (1.20) ist im Sinne der Spektralzerlegung zu verstehen:

Sei ein Operator A diagonalisierbar

$$A |n\rangle = a_n |n\rangle.$$

Dann definieren wir

$$f(A) := \sum_n f(a_n) |n\rangle \langle n|.$$

Ein wichtiger Test für eine relativistische Quantentheorie ist die Frage nach Kausalität. Klassisch ist Kausalität gewährleistet, wenn ein Teilchen sich im Vorwärtslichtkegel bewegt,

$$x^2 = t^2 - \vec{x}^2 > 0 \quad \text{für } m > 0, \quad (1.22)$$

$$\text{d.h.} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 - v^2 > 0 \Rightarrow v^2 < 1,$$

wenn es durch den Ursprung geflogen ist.

Relativistisch betrachtet wird analog dazu die relativ. Schrödinger-Gleichung (1.20) für eine perfekt lokalisierte Punktquelle im Ursprung

$$\Psi(\vec{x}, t=0) = \delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (1.23)$$

Kausalität bedeutet dann, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen jenseits des Lichtkegels zu finden, verschwindet,

$$\Psi(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{für } \vec{x}^2 > t^2. \quad (1.24)$$

Dazu studieren wir die Greensche Funktion (Propagator) der relativ. Schrödinger-Gleichung

im Analogie zum nicht-rel. Fall:

$$\begin{aligned}
 U(\vec{x}, t) &:= \langle \vec{x} | e^{-iH_t t} | \vec{0} \rangle \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} t + i\vec{p} \cdot \vec{x}} \quad (1.25)
 \end{aligned}$$

mit $U(\vec{x}, 0) = \delta^{(3)}(\vec{x})$. In Polarkoordinaten

folgt

$$\begin{aligned}
 U(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dp p^2 e^{-i\sqrt{p^2 + m^2} t} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{ipx \cos\theta} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 ix} \int_{-\infty}^\infty dp p e^{ipx - i\sqrt{p^2 + m^2} t}, \quad x = |\vec{x}|
 \end{aligned}$$

Das Integral lässt sich mit Hilfe von Bessel-Funktionen (1.26) exakt lösen, hier genügt uns eine Näherung über die Methode der stationären Phase:

$$\begin{aligned}
 \int dp e^{if(p)} &= \int dp e^{i(f(p_0) + \frac{1}{2} f''(p_0)(p-p_0)^2 + \mathcal{O}((p-p_0)^3))} \\
 &\approx \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|f''(p_0)|}} e^{if(p_0)}, \quad \text{mit } f'(p_0) = 0, \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

d.h. p_0 ist stationärer Punkt der Phase $f(p)$.

In unserem Fall gilt:

$$f(p) = p_x - E_p t \quad \Rightarrow \quad p_0 = \pm \frac{i m x}{\sqrt{x^2 - t^2}} \quad (1.28)$$

Normierbarkeit des Propagators erfordert das + Vorzeichen,

$$\Rightarrow f(p_0) = i m \sqrt{x^2 - t^2} \quad (1.29)$$

Wir erhalten als Näherung für den Propagator:

$$U(\vec{x}, t) \sim e^{-m \sqrt{x^2 - t^2}} \neq 0 \quad \text{für } x^2 > t^2 \quad (1.30)$$

Damit ist Kausalität verletzt und es folgt eine nicht-verschwindende Wahrscheinlichkeit, das Teilchen jenseits des Lichtkegels zu finden.

Die Wahrscheinlichkeit ist jedoch exponentiell klein mit einer Reichweite der Compton-Wellenlänge $\lambda = \frac{1}{m}$.

Fazit: relativistische Quantenmechanik wird inkonsistent, wenn wir Teilchen bis zu ihrer Compton-Wellenlänge und darunter lokalisieren wollen.

Dies lässt sich mit folgendem heuristischen Argument nochmals verdeutlichen:

Vollständige Lokalisierung in der Raumzeit z.B. bei $t=0$ mit Unschärfe $\Delta x \rightarrow 0$ erzeugt eine große Impulsunschärfe: $\Delta x \gtrsim 1/\Delta p$

Unter der Annahme, dass typische Impulse von der gleichen Ordnung wie Δp sind, $p \approx \Delta p$, folgt mit $p \equiv |\vec{p}| = (E_{\vec{p}}^2 - m^2)^{1/2} < E_{\vec{p}}$:

$$\Delta x \gtrsim 1/\Delta p \approx \frac{1}{p} > \frac{1}{E_{\vec{p}}} > 0 \quad (1.31)$$

Demnach scheint Lokalisierung $\Delta x \rightarrow 0$ negative Energien $E_p < 0$ zu erfordern. Diese werden später in der Tat mit Antiteilchen in Verbindung gebracht.