4.3 Exakter Renormierungsfluß und Flußgleichung

Idee : – Integration über Quantenfluktuationen sukzessive durchführen,

– Impulsschalen "ausschmieren"  (vermeidet künstliche nicht-Analytizitäten)

$\Rightarrow$ interpolierende Wirkung Γ_k (effective average action)

mit $\Gamma_{k\to\Lambda} \simeq S_{\text{bare}}$, $\Gamma_{k\to 0} = \Gamma_{1PI}$

Annahme: QFT ist wohldefiniert durch UV regularisiertes Schwinger-Funktional:

$$Z[J] = \int_\Lambda \mathcal{D}\chi \; e^{-S[\chi] + \int J\chi} \equiv e^{W[J]} \tag{4.24}$$

Def: IR regularisiertes Schwinger-Funktional:

$$Z_k[J] := e^{-\Delta S_k[\frac{\delta}{\delta J}]} Z[J] = \int_\Lambda \mathcal{D}\chi \; e^{-(S[\chi] + \Delta S_k[\chi]) + \int J\chi}$$

$$\equiv e^{W_k[J]} \tag{4.25}$$

mit
$$\Delta S_k[\chi] = \frac{1}{2}\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}\, \chi(-q)\, R_k(q)\, \chi(q) \tag{4.26}$$

R_k: Regulator Funktion mit

(1) $\lim\limits_{q^2/k^2 \to 0} R_k(q) > 0$, z.B. $\sim k^2$ (4.27a)

(IR Regularisierung , z.B. massenartig $m^2 \sim k^2$)

(2) $\lim\limits_{k^2/q^2 \to 0} R_k(q) = 0$ (4.27b)

$\Rightarrow$ Regulator verschwindet für $k \to 0$

$\Rightarrow Z_{k\to 0}[J] = Z[J] \;\rightsquigarrow\; \Gamma_{k\to 0} = \Gamma_{1PI}$ (volle QFT für $k \to 0$)

(3) $\lim\limits_{k\to\Lambda} R_k(q) \to \infty$ (4.27c)

$$\Rightarrow Z_{k\to\Lambda}[J] = \int_\Lambda \mathcal{D}\chi \; e^{-S[\chi] - \Delta S_{k\to\Lambda}[\chi] + \int J\chi}$$

$$\sim e^{-S[\phi_0] + \int J\phi_0}$$ (≈ Sattelpunkts approx)

(Funktional-Integral ist dominiert durch Lösungen ϕ_0 der klassischen Theorie, die S minimieren)

$$\Rightarrow e^{-\Delta S_{k\to\Lambda}[\chi]} \sim \delta[\chi - \phi_0]$$

$$\Rightarrow \Gamma_{k\to\Lambda} \simeq S$$

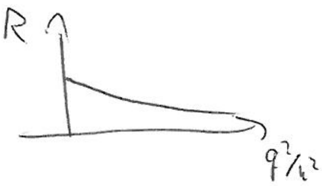
Beispiele: allgem: $R_k(q) = Z_k \, q^2 \, r(q^2/k^2)$ (4.28)

Z_k: Wellenfkt. renormierung ($Z_k = Z_\phi$: RG Skalierungsinvarianz)

r: regulator shape function

- Exponentieller Regulator:

$$r(q^2/k^2) \sim \frac{1}{e^{q^2/k^2} - 1}$$ (4.29)

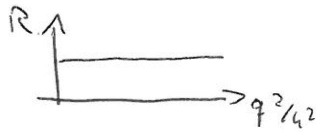


- linearer Regulator (Litim)

$$r(q^2/k^2) \sim \left(\frac{k^2}{q^2} - 1\right) \Theta(k^2 - q^2)$$ (4.30)

- Massenregulator

$r(q^2/k^2) \sim \frac{k^2}{q^2} \Rightarrow R_k(q) \sim k^2$



$\Rightarrow$ Callan-Symanzik-Fluß (führt in $d=4$ zu UV-Problemen)

Konstruktion von Γ_k :

klassisches Feld: $$\phi_{(x)} = \langle \chi_{(x)} \rangle = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J(x)} \qquad (4.31)$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \phi_k[J] \quad \Rightarrow \quad J = J_k[\phi]$$

modifizierte Legendre-Trafo:

$$\Gamma_k[\phi] = -W_k[J] + \int d^d x\, J(x)\phi(x) - \Delta S_k[\phi] \qquad (4.32)$$

$$\Rightarrow \quad J(x) = \frac{\delta \Gamma_k[\phi]}{\delta \phi(x)} + (R_k \phi)_{(x)} \qquad (4.33)$$

Flußgleichung: $(t = \ln k/\Lambda \;, \partial_t \equiv k\partial_k$

$$\underline{\partial_t W_k\Big|_J} = e^{-W_k}\partial_t e^{W_k} = -e^{-W_k}\int_\Lambda \mathcal{D}\chi\, \partial_t \Delta S_k[\chi]\, e^{-S-\Delta S_k+\int J\chi}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}\partial_t R_k(q) \underbrace{\langle \chi(-q)\chi(q) \rangle}$$

$$= \langle \chi(-q)\chi(q)\rangle_{con} + \langle \chi(-q)\rangle\langle\chi(q)\rangle$$

$$= \frac{\delta W}{\delta J(-q)\delta J(q)} + \frac{\delta W}{\delta J(-q)}\frac{\delta W}{\delta J(q)}$$

$$= G(q) + \phi(-q)\,\phi(q)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{2}\int\frac{d^d q}{(2\pi)^d}\partial_t R_k(q)G(q) + \partial_t \Delta S_k[\phi]}} \qquad (4.34)$$

$$(4.33): \quad \frac{\delta J}{\delta \phi} = \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta\varphi\,\delta\varphi} + R_k \equiv \Gamma_k^{(2)} + R_k$$

$$\Vert \qquad\qquad\qquad\qquad // \qquad\qquad (4.35)$$

$$\left(\frac{\delta \phi}{\delta J}\right)^{-1} = \left(\frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J}\right)^{-1} \equiv G^{-1}$$

Fluß von Γ_k:

$$\underline{\underline{\partial_t \Gamma_k}} = -\partial_t W_k[J] + \int (\partial_t J)\,\phi - \partial_t \Delta S_k[\phi]$$

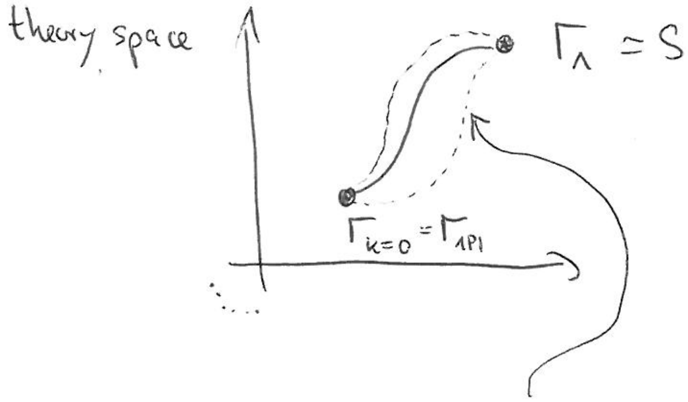
$$= -\partial_t W_k[J]\Big|_J - \cancel{\int \underbrace{\frac{\delta W}{\delta J}}_{\phi} \partial_t J} + \cancel{\int (\partial_t J)\,\phi} + \partial_t \Delta S_k[\phi]$$

$$\overset{(4.34)}{=} \frac{1}{2}\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}\, \partial_t R_k(q)\, G(q) \quad - \cancel{\partial_t \Delta S_k[\phi]} + \cancel{\partial_t \Delta S_k[\phi]}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left[\partial_t R_k \left(\Gamma_k^{(2)} + R_k\right)^{-1}\right]}} \qquad (4.36)$$

(Wetterich '93
vgl: Wegner & Houghton '73;
Polchinski '84)

- Funktionale DGl für Γ_k
- (4.36) + Randbedingung (z.B. $\Gamma_\Lambda \simeq S$) (+ Symmetrie-constraints) "definiert" QFT
- Lösung von (4.36) $\hat{=}$ RG Trajektorie



- Variation von R_k $\Rightarrow$ Schemenabhängigkeit der RG Trajektorie

- Flußgleichung hat 1-loop Struktur, ist aber exakt:

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \partial_t R_k \bigcirc$$

exakter Propagator bei k:

$$G = \left(\Gamma_k^{(2)} + R_k\right)^{-1}$$

- Störungstheorie: z.B. 1-loop:

ersetze $\Gamma_k^{(2)} \to S^{(2)}$

$$\Rightarrow \partial_t \Gamma_k^{1\text{-loop}} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left[\partial_t R_k \left(S^{(2)} + R_k \right)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \partial_t \, \mathrm{Tr} \ln \left(S^{(2)} + R_k \right)$$

$$\Rightarrow \underset{\Gamma_{1PI}^{1\text{-loop}}}{\underset{\shortparallel}{\Gamma_{k=0}^{1\text{-loop}}}} = \underset{S_\Lambda}{\underset{\shortparallel}{\Gamma_{k=\Lambda}}} + \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \ln S^{(2)} + \text{const} \qquad (4.37)$$

- Approximierter Fluß: Methode der Trunkierungen

4.4 "Perturbativ nicht-renormierbare, nicht-perturbativ renormierbare Systeme"

4.4.1. Gross-Neveu Modell in $d=3$

Wirkung:

$$S[\bar{\psi},\psi] = \int d^3x \left\{ \bar{\psi}_a \, i\not{\partial} \, \psi_a + \frac{G}{2} \left(\bar{\psi}_a \psi_a \right)^2 \right\} , \quad a = 1 \ldots N \tag{4.38}$$

Störungstheorie: $[G] = -1$, $\delta(V) = 1$ (>0 nicht-renormierbar)

Symmetrie:

$U(N)$:
- globale $U(1)$: $U = e^{i\alpha}$ $\rightsquigarrow$ Fermionzahlerhaltung
- diskrete $\mathbb{Z}_2$: $\psi(x) \to -\psi(-x)$, $\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(-x)$
  Paritätsartig $\rightsquigarrow$ verbietet Massenterm $\sim \bar{\psi}\psi$
- globale $SO(N)$: $\psi_a \to O_{ab}\psi_b$, $O^T = O^{-1}$

Divergenzen:

e.g. $\Gamma^{(4)} \sim$ 

$\sim \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2} \sim \Lambda$

Flußgleichung:

Trunkierung:

$$\Gamma_k = \int d^3x \left\{ \bar{\psi}_a i\partial\!\!\!/ \psi_a + \frac{G_k}{2} (\bar{\psi}_a \psi_a)^2 \right\} \tag{4.39}$$

Nambu - Gorkov Formalismus: (^{T}: Dirac-Raum Transposition)

$$\Phi(q) = \begin{pmatrix} \psi(q) \\ \bar{\psi}^T(-q) \end{pmatrix}, \quad \Phi^T(-q) = \left(\psi^T(-q), \bar{\psi}(q) \right) \tag{4.40}$$

inverser Propagator:

$$\left(\Gamma_k^{(2)}(q)\right)_{ab} = \frac{\vec{\delta}}{\delta \Phi_a^T(-q)} \Gamma_k \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi_b(q)}$$

$$= \begin{array}{c} \\ \psi^T \\ \bar{\psi} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \psi & \bar{\psi}^T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -q\!\!\!/^T \\ -q\!\!\!/ & 0 \end{pmatrix} \end{array} \delta_{ab} + G \begin{pmatrix} -\bar{\psi}_a^T \bar{\psi}_b & -(\bar{\psi}\psi) + \bar{\psi}_a^T \psi_b^T \\ (\bar{\psi}\psi) + \psi_a \bar{\psi}_b & -\psi_a \psi_b^T \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

einsetzen in RHS der Flußgleichung und entwickeln bis Ordnung $(\bar{\psi}_a \psi_a)^2$

$$\Rightarrow \quad \partial_t G_k = -k\, C\, G_k^2 \qquad \text{mit } C = \text{const} > 0 \text{ für } N > 2$$

(z.B.: $C = \dfrac{N-2}{4\pi^2}$ für linearen Regulator)

(4.42)

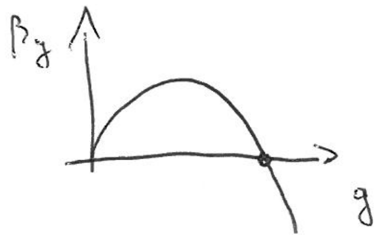
Dimensionslose Kopplung:

$$g = k \cdot G_k \qquad \Rightarrow \qquad \partial_t g = g + k\,\partial_t G_k$$

$\Rightarrow$ β Funktion:

$$\partial_t g = \beta_g = g - C\, g^2 \tag{4.43}$$

$N > 2$:



Nicht-Gaußscher FP: $\quad g_* = \frac{1}{C} \quad \left(= \frac{4\pi^2}{N-2} \text{ für lin. Reg.} \right)$

g_* ist UV-stabil, $\quad \theta = 1$ (Regulator unabh.!)

$$\left(= -\frac{\partial \beta(g_*)}{\partial g} \right) \tag{4.44}$$

$\Rightarrow$ Gross-Neveu Modell für $N > 2$ ist "asymptotically safe",
d.h. nicht-perturbativ renormierbar
(beweisbar in $1/N$ - Entwicklungen zu <u>allen</u> Ordnungen in $\frac{1}{N}$)
(Gawedzki, Kupiainen '85)

IR-Physik: (Quantenphasenübergang bei $g = g_*$)

- $g < g_*$: $\quad g_{k \to 0} \to 0 \quad$ freie Theorie
- $g > g_*$: $\quad g_{k \to k_{sing.}} \to \infty \quad$ (Trunkierung unzureichend)

partielle Bosonisierung, $\phi \sim \bar{\psi}\psi$, zeigt: spontane Symmetriebrechung
Fermion-Massenerzeugung

Analyse im Fixpunkt-Regime

$$\partial_t g = B\,(g_* - g) + \mathcal{O}((g_* - g)^2)$$

Gaußscher FP : $g_* = 0$, $B = -1 \;\equiv\; \frac{\partial\beta(g_*)}{\partial g} = \Theta$

nicht-G. FP : $g_* = \frac{1}{c}$, $B = +1 \;= \Theta$

Lösung des Kopplungsflusses im FP Regime

$$g = g_* + C_0 \left(\frac{k_0}{k}\right)^{\Theta}$$

mit Anfangsbedingung $g - g_* = C_0$ bei $k = k_0$

IR Fluß:

GFP : $g = C_0 \left(\frac{k}{k_0}\right) \to 0$ für $k \to 0$

GFP ist IR attraktiv , Theorie wird trivial für $k \to 0$

$g(\bar{\psi}\psi)^2$ ist irrelevant

nGFP $g = \frac{1}{c} + C_0 \frac{k_0}{k}$ verläßt FP Regime

nGFP ist IR repulsiv , $g(\bar{\psi}\psi)^2$ ist relevant

UV Fluß:

GFP : $g = C_0 \left(\frac{k}{k_0}\right)$ verläßt FP Regime

UV repulsiv (Störungstheorie bricht zusammen)

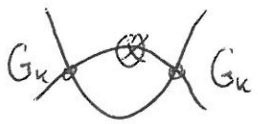
nGFP : $g = \frac{1}{c} + C_0 \frac{k_0}{k} \to \frac{1}{c} = g_*$ für $k \to \infty$

UV attraktiv , Theorie wird skaleninvariant

Dimensionsbehaftete Kopplung am GFP

$$G \to g_*/k$$

Divergenzen ?:

e.g. $\partial_t \Gamma^{(4)} \sim$  $\sim G_k^2 \int_k \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2}$

$\ \shortparallel$

$\partial_t G_k$

$$\sim G_k^2 \cdot k \sim g_* \cdot \frac{1}{k} \longrightarrow 0$$

für $k \to \infty$

Divergenz wird durch RG-Laufen der Kopplung kompensiert. Theorie ist UV endlich (!)

bzw. asymptotisch sicher und damit nichtperturbativ renormierbar.

Resummation in der Flußgleichung: z. B. $\Gamma^{(4)}$

k: 

$k - \Delta k$: 

$k - 2\Delta k$: 

⋮

4.4.2 Verallgemeinerungen

d-dimensionales Modell a la Gross-Neveu
in Trunkierung mit lokaler Wechselwirkung:

$$\Rightarrow \partial_t g = (d-2)\, g - C_d\, g^2 \tag{4.45}$$

$$\Rightarrow \text{nicht-Gaußscher FP:} \quad g_* = \frac{(d-2)}{C_d}$$

$$\text{RG Eigenwert:} \quad \theta = (d-2) \tag{4.46}$$

ABER: Impulsabhängigkeiten von G_k werden wichtiger mit zunehmendem d.

Large-N Argumente zeigen: FP verschwindet für $d>4$.

ψ^4 in $d=4$: FP kann marginal stabil oder instabil sein; hängt von Details der WW ab.

$\Rightarrow$ Spekulation: renormierbares Standard Modell ohne fundamentalen Higgs-Skalar ($\Phi \sim \bar{\psi}\psi$, top-quark condensation)