4. Renormierungsgruppenfluß

4.1 Wilson's Zugang zur Renormierungstheorie

stat. Physik / Ortsraum RG $\longleftrightarrow$ Feldtheorie / Impulsraum RG

atomarer Gitterabstand a $\longleftrightarrow$ UV cutoff $\Lambda \sim \frac{1}{a}$

Block-Spin-Trafo $a' = b\,a$ $(b>1)$ $\longleftrightarrow$ Integration über Fluktuationen in einer Impulsschale $\Lambda'^2 = \left(\frac{\Lambda}{b}\right)^2 < p^2 \leq \Lambda^2$

Beispiel φ^4-Theorie:

$$S = \int d^dx \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \right] \qquad (4.1)$$

$$Z = \int_\Lambda \mathcal{D}\varphi \; e^{-S[\varphi]}$$

Impulsmoden:

$$\phi(p) = \underbrace{\bar{\phi}(p)}_{\text{übrige "soft" Mode}}\, \Theta\!\left(\left(\frac{\Lambda}{b}\right)^2 - p^2\right) + \underbrace{\tilde{\phi}(p)}_{\text{Mode in der Impulsschale}} \left[\Theta(\Lambda^2 - p^2) - \Theta\!\left(\left(\frac{\Lambda}{b}\right)^2 - p^2\right)\right] \qquad (4.2)$$

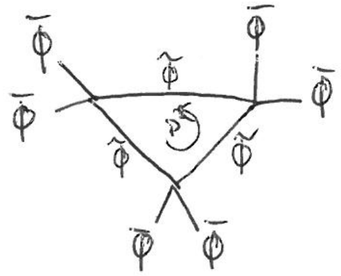
$$\Rightarrow \quad Z = \int_{\Lambda/b} \mathcal{D}\bar{\varphi} \int_{\frac{\Lambda}{b}<|p|<\Lambda} \mathcal{D}\tilde{\varphi} \; e^{-S[\bar{\varphi},\tilde{\varphi}]} \equiv \int_{\Lambda/b} \mathcal{D}\bar{\phi}\; e^{-S_W[\bar{\phi}]} \qquad (4.3)$$

S_W: Wilson'sche effektive Wirkung

- bestimmt die Dynamik der soften Moden $\bar{\phi}$
- enthält die (Quanten-) Effekte der UV-Moden
- allgemein wird S_W von folgender Form sein:

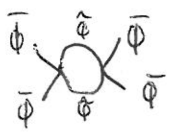
$$S_W = \int d^dx \left[\frac{1}{2}(1+\Delta Z_\Phi)(\partial_\mu \bar{\Phi})^2 + \frac{1}{2}(m^2+\Delta m^2)\bar{\Phi}^2 + \frac{1}{4!}(\lambda+\Delta\lambda)\bar{\Phi}^4 + \frac{1}{6!}\Delta\lambda_6 \bar{\Phi}^6 + \Delta C (\partial_\mu\bar{\Phi})^4 + \dots \right] \tag{4.4}$$

d.h. neben Änderungen der ursprünglichen Parameter werden auch ∞-viele höhere Operatoren generiert, z.B.



$\sim \bar{\phi}^6$

Beispiel: $\sim \bar{\phi}^4$



für $p_i, m \ll \Lambda/b$

vgl. (2.45): $$\frac{1}{4!}\Delta\lambda \simeq -\frac{1}{16}\lambda^2 \int_{\frac{\Lambda}{b}<|q|\leq\Lambda} \frac{d^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q^2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\lambda = -\frac{3\lambda^2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \frac{(1-b^{4-d})}{d-4}\Lambda^{d-4} \tag{4.5}$$

$$\overset{d=4}{\Rightarrow} \quad \Delta\lambda = -\frac{3\lambda^2}{16\pi^2}\ln b \tag{4.6}$$

(NB: in der früheren Behandlung war $\int_0^\Lambda \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\dots \sim \ln\Lambda$

$\Rightarrow$ Log-Divergenz

Wilson: Divergenz ist nicht "pathologisch", sondern zeigt, daß das Diagramm Beiträge von allen Skalen erhält)

Für einen Vergleich von S mit S_W reskalieren wir

$$p' = b\,p \quad , \quad x' = \frac{x}{b} \tag{4.7}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{|p|<\frac{\Lambda}{b}} \mathcal{D}\varphi \rightarrow \int\limits_{|p'|<\Lambda} \mathcal{D}\varphi \quad , \quad \int d^dx \rightarrow \int d^dx'\, b^d$$

$$\Rightarrow S_W = \int d^dx'\, b^d \Big[\frac{1}{2}(1+\Delta Z_\varphi)\, b^{-2} (\partial'_\mu \bar{\varphi})^2 + \frac{1}{2}(m^2+\Delta m^2)\bar{\varphi}^2 + \frac{1}{4!}(\lambda+\Delta\lambda)\bar{\varphi}^4$$
$$+ \frac{1}{6!}\Delta\lambda_6 \bar{\varphi}^6 + \Delta C\, b^{-4} (\partial'_\mu \bar{\varphi})^4 + \dots \Big]$$

$$\varphi' = \left[b^{d-2}(1+\Delta Z_\varphi)\right]^{1/2} \bar{\varphi}$$
$$= \int d^dx' \Big[\frac{1}{2}(\partial'_\mu \varphi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \varphi'^2 + \frac{1}{4!}\lambda' \varphi'^4 + \frac{1}{6!}\lambda'_6 \varphi'^6 + C'(\partial'_\mu\varphi')^4 + \dots \Big] \tag{4.8}$$

mit
$$m'^2 = (m^2+\Delta m^2)(1+\Delta Z_\varphi)^{-1}\, b^2$$
$$\lambda' = (\lambda+\Delta\lambda)(1+\Delta Z_\varphi)^{-2}\, b^{4-d} \quad , \text{ etc.} \tag{4.9}$$
$$C' = (C+\Delta C)(1+\Delta Z_\varphi)^{-2}\, b^{-d} \quad ,$$

$\Rightarrow$ Impulsschalenintegration $\hat{=}$ Trafo auf dem Raum der Wirkungen

$\Rightarrow$ RG Trafo

RG Trafos in der Nähe des Gaußschen Fixpunktes:

$$S_G^* = \int d^dx \, \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 \quad , \quad m^2\big|_{G*} = \lambda\big|_{G*} = c\big|_{G*} = \lambda_6\big|_{G*} = 0 = \dots \qquad (4.10)$$

Im Fixpunkt-Regime können $\Delta m^2, \delta\lambda$, etc. vernachlässigt werden:

$$m'^2 = m^2 b^2 \, , \quad \lambda' = \lambda \, b^{4-d} \, , \quad c' = c \, b^{-d} \, , \quad \lambda_6' = \lambda_6 \, b^{6-2d} \, , \dots$$

allgemein: $$u' = u \, b^{\Theta} \qquad (4.11)$$

Wegen $b > 1$ heißen die u mit

- $\Theta > 0$ <u>relevant</u>, weil diese Parameter das System unter RG-Trafos vom Fixpunkt wegbringen (IR instabil)

- $\Theta < 0$ <u>irrelevant</u>, weil diese Parameter unter RG-Trafos gegen 0 gehen (IR stabil)

- $\Theta = 0$ <u>marginal</u>; höhere Ordnungen entscheiden, ob diese Parameter das System vom Fixpunkt wegbringen können.

Allgemein hat ein der Koeffizient C_{k,n_i} eines Operators mit k Ableitungen und n_i Potenzen des Feldes φ_i (mit kanonischer Dimension $[\varphi_i]$) das Trafo-Verhalten

$$C'_{k,n_i} = b^{-(k + \sum_i n_i [\varphi_i] - d)} \, C_{k,n_i} \qquad (4.12)$$

im der Nähe des Gaußschen Fixpunktes, d.h.

$$C'_{k,m_i} = b^{-\delta[V]} \, C_{k,m_i} \qquad (4.13)$$

mit $\delta[V]$ der kanonischen Dimension ~~des~~ Vertex (Operators) (vgl. 2.32).

$\Rightarrow$ die Klassifikation (relevant, irrelevant, marginal) entspricht der Klassifikation (superrenormierbar, nicht-renormierbar, renormierbar)!

Konsequenzen (speziell für $d=4$):

bisherige Interpretation: alle in der Natur beobachteten fundamentalen Teilchen-physikalischen Theorien sind (perturbativ) renormierbar – und das scheinbar zufällig.

Wilson'sche Interpretation: angenommen, eine noch fundamentalere Theorie (String-Theorie, etc...) habe bei Λ (z.B. $= M_{Planck}$) die Symmetrien des Standard Modells ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$) und ist hier beschreibbar durch eine QFT.
Generisch wird diese QFT eine Wirkung mit allen möglichen ∞-vielen Kopplungen haben. Wenn die Kopplungskoeffizienten nicht zu groß sind, $\mathcal{O}(1)$, d.h. in der Nähe des Gaußschen Fixpunkts liegen, dann wird die IR Physik nur von den relevanten und marginalen

Operatoren dominiert, muß also einer <u>renormierbaren</u> QFT entsprechen (Universalität).

Bsp. Φ^4-Sektor: Potential:

$$V(\Phi^2) = \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \Phi^4 + \frac{1}{6!} \lambda_6 \Phi^6 + \frac{1}{8!} \lambda_8 \Phi^8 + \dots$$

$$\lambda_i = \mathcal{O}(1) \tag{4.14}$$

RG: $$\lambda'_{i \geq 6} = b^{-i(\frac{d}{2}-1)+d} \lambda \overset{d=4}{=} b^{-i+4} \lambda \to 0 \quad \text{(schnell)} \tag{4.15}$$

$$\lambda' \overset{\Delta Z_\varphi = O(\lambda^2)}{=} (\lambda + \Delta\lambda)\, b^{d-4}$$

$$\overset{(4.6)}{=} \lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln b \quad , d=4 \tag{4.16}$$

fällt nur <u>langsam</u> ab

$$m'^2 = b^2 (m^2 + \Delta m^2)(1 + \Delta Z_\varphi)^{-1} \tag{4.17}$$

wächst i. A. schnell an (in Einheiten vom aktuellen cutoff)

(NB: Hierarchie-Problem im Standard-Modell mit fundamentalem Higgs-Skalar)

Aus obiger Überlegung folgt, daß generisch $m^2 = \mathcal{O}(\Lambda^2)$

bzw. $$m_R^2 = m_0^2 - \underbrace{\delta m^2}_{\mathcal{O}(\Lambda^2)}$$

SM: $$\sim 10^4\,\text{GeV}^2 = \sim 10^{32}\,\text{GeV}^2 (1 + \dots 10^{-28}) - \sim 10^{32}\,\text{GeV}^2 \tag{4.18}$$

für $\Lambda \simeq M_{GUT} \triangleq 10^{16}$ GeV

$\Rightarrow$ damit GUT- und Fermi-Skala 14 Größenordnungen auseinander liegen können (Eich-Hirarchie), muß die nackte Masse bei M_{GUT} auf 28 Stellen genau gewählt worden sein – nicht unmöglich aber unnatürlich.)

4.2 Asymptotic Safety

Perturbativ renormierbare Theorien ergeben sich also automatisch im IR, wenn das QFT System durch den Gaußschen Fixpunkt dominiert wird.

Was passiert, wenn das System durch einen nicht-Gaußschen, d.h. wechselwirkenden, FP dominiert wird?

Sind Theorien renormierbar, auch wenn die Störungsentwicklung scheitert?

Warum Renormierbarkeit?

- IR Physik sollte wohlgetrennt sein von UV Physik (cutoff Λ unabh.) (Universalität)
- # physik. Parameter $< \infty$
- QFT sollte vorhersagefähig sein

$\Rightarrow$ realisierbar in Störungstheorie

Jenseits von Störungstheorie: Szenario der "Asymptotic Safety"

(Weinberg '76
Gell-Mann-Low '54)

Annahme: es gibt einen nicht-Gaußschen FP im Raum aller möglichen Kopplungen g_i, welche von den Symmetrien erlaubt sind:

$$k\frac{\partial}{\partial k} g_i \equiv \partial_t g_i = \beta_i(g_1, g_2, \dots)$$

generalisierte β Funktionen aller Kopplungen

$$\text{mit} \quad t = \ln\frac{k}{\Lambda} \qquad (\text{"RG Zeit"}) \,, \tag{4.19}$$

(Zusammenhang mit b:

$$b = \text{"}\frac{\Lambda}{\Lambda'}\text{"} \hat{=} \frac{k+\Delta k}{k} = 1 + \frac{\Delta k}{k}$$

$$\Rightarrow \quad \ln b = \ln\left(1+\frac{\Delta k}{k}\right) \sim \frac{\Delta k}{k} \quad)$$

$$\text{non-Gaußian FP}: \quad \beta_i(g_{*1}, g_{*2}, \dots) = 0 \tag{4.20}$$

mit mindestens einem $g_{*i} \neq 0$

Linearisiertes FP Regime:

$$\partial_t g_i = B_i{}^j (g_{*j} - g_j) + \dots \,, \quad B_i{}^j = \left.\frac{\partial \beta_i}{\partial g_j}\right|_{g=g_*} \tag{4.21}$$

(Stabilitätsmatrix)

Sei V_j^I (Rechts-) Eigenvektor von $B_i^{\ j}$ mit Eigenwert $-\theta^I$:

$$B_i^{\ j} V_j^I = -\theta^I V_i^I \,, \tag{4.22}$$

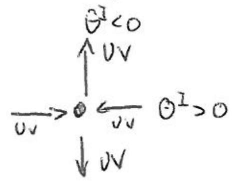
dann ist die allgemeine Lösung des Kopplungsflusses im FP-Regime gegeben durch

$$g_i = g_{*i} + \sum_I C^I V_i^I \left(\frac{k_0}{k}\right)^{\theta^I} \tag{4.23}$$

mit Anfangsbedingungen $C^I = \text{const.}$ und Referenzskala k_0.

Klassifikation:

$\theta^I < 0$: UV repulsiv $\Rightarrow$ RG irrelevant



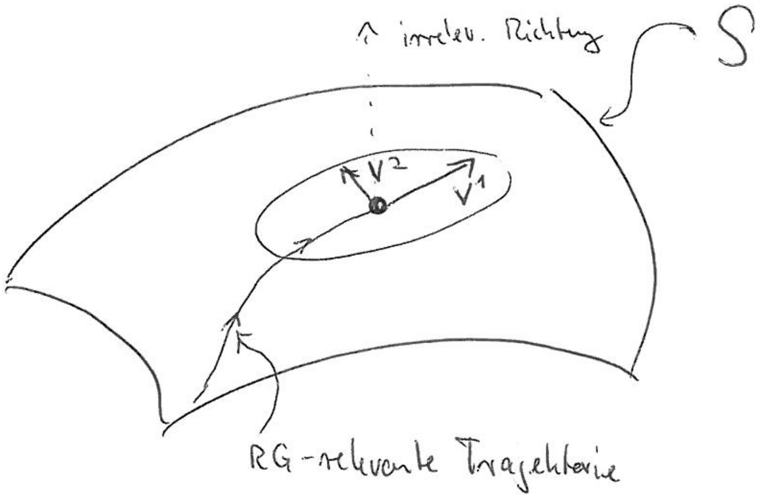
$\theta^I > 0$: UV attraktiv $\Rightarrow$ RG relevant

$\theta^I = 0$: ... es kommt drauf an... $\Rightarrow$ RG marginal

Konstruktion der "Asymptotic Safety":

- alle Punkte im Kopplungsraum, die für $k \to \infty$ ("im UV") den FP treffen, d.h. auf RG relevanten Trajektorien liegen, bilden die kritische Hyperfläche S

- alle relevanten V_i^I (mit $\theta^I > 0$) spannen den Tangentialraum zu S am FP auf.



$$\Rightarrow \quad \dim S \equiv \Delta \mathrel{\hat{=}} \#\ \text{der relevanten Richtungen mit } \theta^I > 0$$

- Renormierung: setze alle $C^I = 0$ für alle irrelevanten $\theta^I < 0$

  $\Rightarrow$ Limes $k \to \Lambda \to \infty$ existiert
  (System läuft in den FP, alles ist "endlich")

  $\Rightarrow$ cutoff Unabhängigkeit gewährleistet
  (konforme Invarianz)

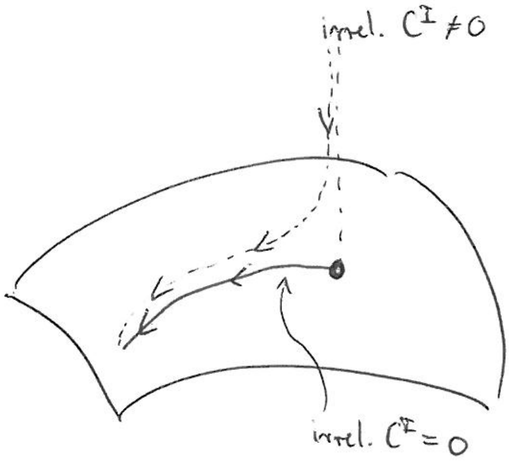
- Wieviele physik. Parameter?

$$\#\ \text{phys. Par.} = \#\ \text{nicht-trivialen Anfangsbed.} = \Delta = \dim S$$

$< \infty$ dann, wenn $\Delta < \infty$

– Vorhersagekräftig ?

selbst wenn die irrelevanten $C^I \neq 0$ bei einer UV-Skala Λ, wird die IR Physik von Ihnen nicht beeinflußt:



$\Rightarrow$ Universalität kontrolliert die Vorhersagefähigkeit!

$\Rightarrow$ QFT's mit "Asymptotic Safety" sind physikalisch genauso brauchbar wie perturb. renormierbare Theorien.

("...nicht perturbativ-ren'bare Theorien können bisweilen nicht-perturbativ ren'bar sein...")

Problem: ... wie berechnen ?