3.3 Blockspin-Transformationen

Divergenz der Korrelationslänge am kritischen Punkt

=> Verlust der Referenzskala / Skaleninvarianz

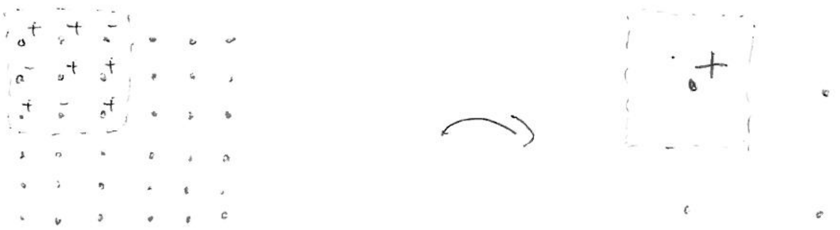
=> "Selbstähnlichkeit" auf allen Skalen

=> „Spin-Konfigurationen sehen gleich aus, egal mit welcher Auflösung ich sie betrachte"

Idee: Betrachte System unter Änderung der "Auflösung"

=> "coarse-graining" Prozedur (Kadanoff)

z.B mit Mehrheitsregel:



$d=2$: „aus 9 mach 1".

Am kritischen Punkt haben die Konfigurationen auf dem grobkörnigen Gitter $\underbrace{\ }_{\text{statistisch}}$ die gleichen Eigenschaften wie auf dem feinen.

Blockspin-Trafo

Zustandssumme $\quad Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\mathcal{H}(\sigma)}$

reduz. Hamiltonian $\mathcal{H} = \frac{1}{kT} H$

Def. Projektionsoperator vom Spins σ_i auf feinem Gitter auf Spins σ_i' auf grobkörnigem Gitter

$$T(\sigma', \sigma) \qquad \text{mit}$$

$$\sum_{\sigma'} T(\sigma', \sigma) = 1 \qquad \text{(Vollständigkeit)} \tag{3.30}$$

$$\left(\sum_{\sigma'} T(\sigma'', \sigma') \, T(\sigma', \sigma) = T^{(2)}(\sigma'', \sigma) \right)$$

z.B. Mehrheitsregel in $d=2$

1. Block
$$T_1(\sigma_1' ; \sigma_1 \ldots, \sigma_9) = \begin{cases} 1 & \text{für } \sigma_1' \sum_{i=1}^{9} \sigma_i > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.31}$$

ebenso alle anderen Blocks

$$T = \prod_{\text{blocks } i} T_i$$

$\Rightarrow$ geblockter Hamiltonian

$$e^{-\mathcal{H}'(\sigma')} = \mathrm{Tr}_{\sigma} \, T(\sigma', \sigma) \, e^{-\mathcal{H}(\sigma)} \tag{3.32}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \mathrm{Tr}_{\sigma} \, e^{-\mathcal{H}(\sigma)} = \mathrm{Tr}_{\sigma'} \, e^{-\mathcal{H}'(\sigma')} \tag{3.33}$$

Zustandssumme für geblocktes System bleibt gleich.

$\Rightarrow$ „langreichweitige" Physik und thermodynamische Größen sind invariant unter Trafo $\mathcal{H} \to \mathcal{H}'$

Hamiltonian $\hat{=}$ Vektor von Kopplungen $\{K\} = (K_1 K_2 \ldots)$ im "theory space"

Block-Spin-Trafo $\hat{=}$ Abbildung von $\{K\} \to \{K'\}$ im "theory space"

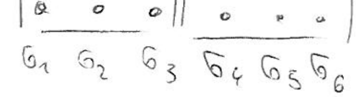
$$\{K'\} = R\{K\} \tag{3.34}$$

Renormierungs~~gruppen~~transformation

(Beachte: Im Allgemeinen werden unter R beliebig viele Kopplungen K' $(\neq 0)$ erzeugt, selbst wenn $\mathcal{H}$ ursprünglich nur endlich viele $K \neq 0$ hatte (z.B. nur Nächste-Nachbar-WW).)

Beispiel: 1d Ising Modell ; $\mathcal{H} = -K \sum_j \sigma_j \sigma_{j+1}$

Wähle $T_1(\sigma_1'; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \delta_{\sigma_1' \sigma_2}$



(Dezimierung, ok in $d=1$)

z.B. Summation über σ_3, σ_4 in Z:

$$\text{Faktor} = e^{K\sigma_2\sigma_3} \, e^{K\sigma_3\sigma_4} \, e^{K\sigma_4\sigma_5}$$

$$\overset{T}{=} e^{K\sigma_1'\sigma_3} \, e^{K\sigma_3\sigma_4} \, e^{K\sigma_4\sigma_2'} \tag{3.35}$$

es gilt: $\underline{e^{K\sigma_3\sigma_4}} = \cosh K\sigma_3\sigma_4 + \sinh K\sigma_3\sigma_4$

$$= \cosh K\sigma_3\sigma_4 \left(1 + \tanh K\sigma_3\sigma_4\right)$$

$$\overset{\sigma_3\sigma_4=\pm 1}{=} \underline{\cosh K\left(1 + x\,\sigma_3\sigma_4\right)}, \quad x \equiv \tanh K \tag{3.36}$$

$$\Rightarrow \text{Faktor} = (\cosh K)^3 (1 + x\sigma_1'\sigma_3)(1 + x\sigma_3\sigma_4)(1 + x\sigma_4\sigma_2') \tag{3.37}$$

Summe über σ_3, σ_4 : nur gerade Potenzen bleiben übrig:

$$\Rightarrow \text{Faktor} = 2^2 (\cosh K)^3 (1 + x^3 \sigma_1'\sigma_2')$$

$$= 2^2 \left(\frac{\cosh^3 K}{\cosh K'}\right) \cosh K' \left(1 + x' \sigma_1'\sigma_2'\right)$$

$$= 2^2 \left(\frac{\cosh^3 K}{\cosh K}\right) e^{K'\sigma_1'\sigma_2'} \tag{3.38}$$

mit $\boxed{x' = x^3}$, $\tanh K' = \tanh^3 K$ (3.39)

$\Rightarrow$ Zustandssumme:

$$Z = \mathrm{Tr}_{\sigma'}\, e^{-\mathcal{H}'(\sigma')}$$

$$\text{mit } \mathcal{H}'(\sigma') = N\,g(K) - K' \sum_j \sigma_j' \sigma_{j+1}' \tag{3.40}$$

und $g(K) = -\frac{1}{3} \ln 2^2 \frac{\cosh^3 K}{\cosh K'}$ unabh. von σ' (3.41)

(Beitrag der Fluktuationen kurzer Wellenlänge zur freien Energie; trägt nicht zu Erwartungswerten bei)

Inhalt der RG Trafo:

(3.39): $x' = x^3$ (RG Gleichung) (3.42)

($K \sim \frac{1}{T}$, $x = \tanh K$ $\Rightarrow$ high T: $x \to 0^+$; low T: $x \to 1^-$)

2 Fixpunkte: $x_{1*} = 0$, $x_{2*} = 1$

$x_{2*} = 1$ — IR repulsiv (instabil), $K_{2*} = \infty$, $T = 0$

$x_{1*} = 0$ — IR attraktiv (stabil), $K_{1*} = 0$, $T = \infty$

(IR: "infrarot", die Physik auf großen Längenskalen betreffend (im Gegensatz zu UV))

$\Rightarrow$ falls mikroskopisch $0 < x \leq 1$ $\Rightarrow$ $x \to 0$ makroskopisch (im IR)
Hochtemperaturphase, paramagnetisch

falls $x = 1$ mikroskopisch $\Rightarrow$ $x = 1$ makroskopisch (im IR), ferromagnetisch

$\underline{T_c = 0}$ (kein richtiger Phasenübergang in $d = 1$)

(NB: Allgemein beobachtet man ein "Verschwinden von Ordnung" unter Verkleinerung der Dimensionalität eines Systems.
Die Dimension d_e, für die ein Phasenübergang in einem System mit bestimmter Symmetrie (Universalitätsklasse) verschwindet, heißt untere kritische Dimension.
Ising Modell mit diskreter (kontinuierlicher) Symmetrie:
$d_e = 1$ ($d_e = 2$))

Korrelationslänge:

Def. dim'lose Korrelationslänge: $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{a}$ bzw $\tilde{\xi}' = \frac{\xi'}{a'}$

immer gemessen im aktuellen Gitterabstand (einzige Skala) nahe bei T_c: $\xi \gg a$ $\Rightarrow$ bleibt invariant unter einer Blockspin-Trafo: $\xi' = \xi$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{\xi}'(x')}} = \frac{\xi'(x')}{a'} = \frac{\xi'(x')}{3a} = \frac{1}{3}\,\frac{\xi(x)}{a} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\tilde{\xi}(x)}} \text{ mit } x' = x^3$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{\xi}(x)}} = \frac{\text{const.}}{\ln x} = \underline{\underline{\frac{\text{const}}{\ln \tanh K}}} \qquad (\text{vgl. } 3.27) \qquad (3.43)$$

$$\sim e^{\text{const}/T} \quad \to \infty \quad \text{für } T \to T_c = 0$$

<u>Beispiel</u>: <u>Ising</u> <u>Modell in höheren Dimensionen</u>, allgem. Betrachtungen

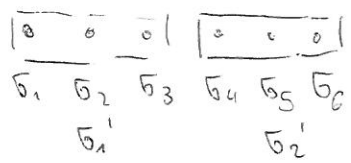
(NB: Blockspin-Trafo's als analytische Methode sind technisch zunehmend unhandlich (besser: Impulsraumtechniken vgl. später), aber geeignet für allgemeine qualitative Betrachtungen)

In $d=1$: $\quad x' = x^3 \quad \Rightarrow \quad \tanh K' = \tanh^3 K$

$$K, K' \to \infty: \quad (1 - 2e^{-2K'} + \dots) \simeq (1 - 6e^{-2K} + \dots)$$

$$\Rightarrow \quad K' \simeq K - \text{const.} \qquad (3.44)$$

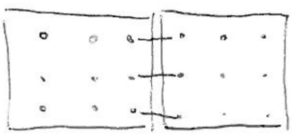
Grund: für $K \to \infty$, $T \to 0$ sind die Spins in den Blöcken alle nahezu gleich ausgerichtet



Wechselwirkung wird durch Randspins σ_3, σ_4 vermittelt:

$$\text{z.B.} \quad K' = K \, \langle \sigma_3 \rangle_{\sigma_1' = 1} \, \langle \sigma_4 \rangle_{\sigma_2' = 1} \overset{T \to 0^+}{\simeq} K \qquad (3.45)$$

Im $d=2$:



WW wird vermittelt durch $b=3$ nächste Nachbarn pro Block

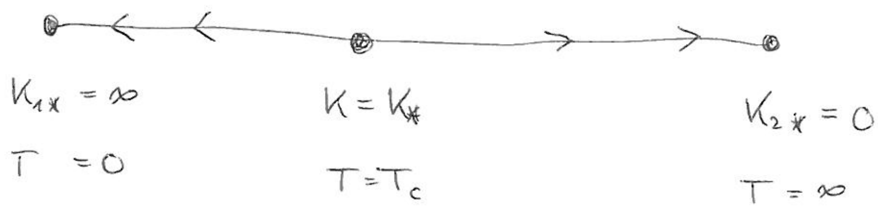
$$\Rightarrow \quad K' \sim 3K \qquad \text{für } K \to \infty$$

allgemein: in d Dimensionen mit Blockspin-Skalierung b

erwarten wir
$$\underline{K' \sim b^{d-1} K \quad \text{für } K \to \infty} \tag{3.46}$$

$$\Rightarrow \quad K' > K \quad \text{für } d > 1 \quad \text{und } K \to \infty$$

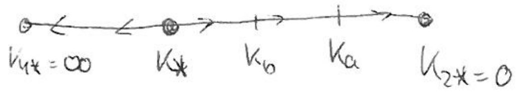
$\Rightarrow$ Fixpunkt ~~für~~ $K_{1*} = \infty$ ist IR attraktiv, d.h. stabil!



Da wir für $T \to \infty$ wieder eine paramagnetische Phase mit stabilem Fixpunkt $K_{2*} = 0$ erwarten, muß bei endlichem $K = K_*$, $T = T_c$ ein instabiler Fixpunkt existieren.

Korrelationslänge: $\tilde{\xi}'(K') = \frac{1}{b}\,\tilde{\xi}(K) \iff \tilde{\xi}(K) = b\,\tilde{\xi}'(K')$

Betrachte zwei Kopplungswerte $0 < K_a < K_b < K_*$ mit $\tilde{\xi}(K_a) = \tilde{\xi}_a = \mathcal{O}(1)$



$(K_b \to K_a)$ verknüpft durch $n_{K_bK_a}$ RG Trafos

$$\Rightarrow \tilde{\xi}(K_b) = b^{n_{K_bK_a}}\,\tilde{\xi}_a$$

Im Limes $K_b \to K_*$ wird $n_{K_b K_a}$ beliebig groß

$$\lim_{K_b \to K_*} n_{K_b K_a} \to \infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{K_b \to K_*} \tilde{\xi}(K_b) \to \infty$$ Korrelationslänge divergiert ! (3.47)

<u>instabiler Fixpunkt</u> K_* beschreibt einen <u>kritischen Punkt</u>!

<u>Kritische Exponenten</u> : (Beispiel ν)

Zusammenhang K', K: RG Trafo

$$K' = R(K) \tag{3.48}$$

Fixpunkt:

$$K_* = R(K_*) \tag{3.49}$$

Fixpunkt-Regime : $(K-K^*)$ klein

$$K' \simeq R(K_*) + (K-K_*) R'(K_*) + \dots$$

$$= K_* + b^{\theta} (K-K_*) + \dots \tag{3.50}$$

mit $\underline{\theta := \frac{\ln R'(K_*)}{\ln b}}$ (RG Eigenwert auch "kritischer Exponent" abuse of language)

Kritischer Exponent ν:

$$\tilde{\xi}(K) \overset{(3.10)}{\sim} |t|^{-\nu} \sim \left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-\nu} \sim \left|1-\frac{T}{T_c}\right|^{-\nu}$$

$$\sim \left|1-\frac{K_*}{K}\right|^{-\nu} \sim |K-K_*|^{-\nu} \qquad (3.51)$$

Mit $\tilde{\xi}(K) = b\,\tilde{\xi}'(K')$ folgt:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{const}}}{A}\,(K-K_*)^{-\nu} = b\,A\,(K'-K_*)^{-\nu} \underset{(3.50)}{=} b\,A\left[b^{\theta}\,(K-K_*)\right]^{-\nu}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{\theta}} \qquad (3.52)$$

$\Rightarrow$ kritische Exponenten ergeben sich aus Ableitungen der RG Transformation am Fixpunkt (gilt allgemein)