2.55 Homogene RG Gleichungen

Wegen des Terms ~ $m_R^2 (2-\eta) \Gamma_R^{(n,l+1)}$ auf der RHS von Eq (2.53) bezeichnet man die CS Gleichung als inhomogen.

Die Inhomogenität der CS Gleichung verschwindet im masselosen Limes. Um diesen durchzuführen, müssen jedoch die Renormierungsbedingungen vorsichtig gewählt werden. Der Impuls $p \to 0$ Limes ist dazu wegen der masselosen Fluktuationen schlecht geeignet (und zudem unphysikalisch). Physikalisch betrachtet werden die Parameter immer an einer bestimmten Impulsskala μ gemessen und festgelegt. Daher wählen wir:

$$\Gamma_R^{(2)}(p^2 \to 0) = 0 \qquad (a)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2)}(p^2 = \mu^2) = 1 \qquad (b) \qquad (2.60)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(p_i = \mu\,\theta_i) = \lambda_R \qquad (c)$$

(θ_i: Satz von nicht-exzeptionellen Vektoren) (Untersummen $\neq 0$)

Die nackten Korrelationsfunktionen hängen nun ab von λ, Λ und den p_i, nicht aber von der nackten Masse (diese muß nicht $= 0$ sein, ist aber durch (2.60a) fixiert); der Zusammenhang zu den renormierten Korrelationsfunktionen ist.

$$\Gamma^{(n)}(p_i;\Lambda,\lambda) = Z_\varphi^{-n/2}\left(\lambda_R,\frac{\Lambda}{\mu}\right)\Gamma_R^{(n)}(p_i;\mu,\lambda_R) \tag{2.61}$$

Eine RG Gleichung ergibt sich nun aus der Tatsache, daß die LHS unabhängig vom Renormierungspunkt μ ist:

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\Gamma^{(n)}(p_i;\Lambda,\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \tilde\beta(\lambda_R)\frac{\partial}{\partial\lambda_R} - \frac{n}{2}\hat\eta(\lambda_R)\right]\Gamma_R^{(n)}(p_i;\mu,\lambda_R) = 0 \tag{2.62}$$

mit $\tilde\beta(\lambda_R) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda_R\Big|_{\lambda,\Lambda}$, $\hat\eta(\lambda_R) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\varphi\Big|_{\lambda,\Lambda}$.

Im Prinzip hängen $\tilde\beta$ und $\hat\eta$ noch von μ/Λ ab; da aber $\tilde\beta$ und $\hat\eta$ im Limes $\Lambda\to\infty$ endlich sein müssen, verschwindet diese Abhängigkeit im Limes $\Lambda\to\infty$

Homogene RG Gleichung für massive Theorien

In ähnlicher Weise läßt sich eine homogene RG Gleichung für massive Theorien ableiten:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \tilde\beta\frac{\partial}{\partial\lambda_R} - \frac{n}{2}\hat\eta - \hat\eta_2\, m_R^2\frac{\partial}{\partial m_R^2}\right]\Gamma_R^{(n)}(p_i;\mu,m_R,\lambda_R) = 0 \tag{2.63}$$

mit

$$\eta_2 = -\mu \frac{1}{m_R^2} \frac{\partial}{\partial\mu} m_R^2 = -2 \frac{\mu^2}{m_R^2} \frac{\partial m_R^2}{\partial \mu^2} \quad \left(= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_{\varphi^2} \right) \Big|_{\lambda,\Lambda,m} \tag{2.64}$$

Der Vorteil von (2.63) gegenüber der CS Gleichung ist die homogene Struktur der Gleichung. Zudem kann man leicht den Masselosen Limes betrachten.

Nachteil ist aber, daß die $\Gamma_R^{(n)}$ nun von zwei Massenskalen abhängen, μ und m_R, und daß nun auch die Renormierungsfunktionen β, η, η_2 vom Verhältnis μ/m_R abhängen.

Vereinfachungen ergeben sich

1) in der "deep Euclidean region", $p^2, \mu^2 \gg m_R^2$, in der der Term $\sim \tilde{\eta}_2 m_R^2$ vernachlässigt werden kann. Ebenso wird hier $\Gamma_R^{(n)}$ effektiv von m_R unabhängig.

2) in massenunabhängigen Renormierungsschemen, bei denen man versucht, die counter-terme unabh. von m_R zu wählen, so daß auch β und η unabh. von μ/m_R sind. Bsp. ϕ^3-Theorie

$$Z_\varphi \overset{(2.26)}{=} 1 - g_R^2 \left(\frac{1}{3 \cdot 2^7 \pi^3} \ln \frac{\Lambda}{m_R} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{frei wählbar, z.B.} \sim \ln \frac{m_R}{\mu}}}{\mathcal{O}(1)} \right) \ldots$$

$$= 1 - g_R^2 \left(\frac{1}{3 \cdot 2^7 \pi^3} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \underbrace{\mathcal{O}(1)}_{\text{unabh. von } m_R!} \right) \ldots$$

Bedeutung der Renormierungsfunktionen β und η

(Annahme: "deep Euclidean region" + massenunabh. Renormierungsschema)

Die Gell-Mann-Low (1954) Funktion β enthält Information über das Verhalten der Kopplung:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \lambda = \beta(\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \ln \frac{\mu}{\mu_0} = \int_{\lambda(\mu_0)}^{\lambda(\mu)} \frac{d\bar{\lambda}}{\beta(\bar{\lambda})} , \qquad (2.65)$$

wobei μ_0 ein beliebiger Referenzpunkt ist; d.h. Eq. (2.65) sagt, welchen Wert λ bei Skala μ hat, wenn bei Skala μ_0 der Wert $\lambda(\mu_0)$ gemessen wurde.

Angenommen

$$\beta \sim b \lambda^n \qquad , \quad n > 1 \qquad (2.66)$$

dann folgt mit (2.65):

$$\lambda^{n-1}(\mu) = \frac{\lambda^{n-1}_{(\mu_0)}}{1 - (n-1)\, b \, \lambda^{n-1}_{(\mu_0)} \ln \frac{\mu}{\mu_0}} \qquad (2.67)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda(\mu) \begin{Bmatrix} \text{wächst} \\ \text{fällt} \end{Bmatrix} \text{ für wachsendes } \mu \text{ wenn } \begin{Bmatrix} b > 0 \\ b < 0 \end{Bmatrix}$$

Beispiele:

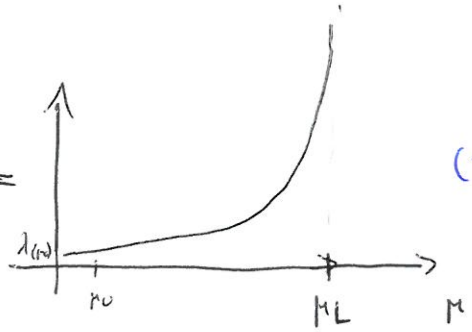
- ϕ^4-Theorie in $d=4$

$$\underline{\underline{\beta(\lambda_R)}} = \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R \overset{(2.42)}{=} \mu \frac{d}{d\mu} \left(\frac{Z_\phi^2}{Z_\lambda} \lambda \right) =$$

$$= \lambda_R \left(2 \mu \frac{d}{d\mu} \underbrace{\ln Z_\phi}_{\mathcal{O}(\lambda_R^2)} - \mu \frac{d}{d\mu} \underbrace{\ln Z_\lambda}_{\frac{3}{16\pi^2} \lambda_R \ln \frac{\Lambda}{\mu}} \right)$$

$$\simeq \underline{\underline{\frac{3}{16\pi^2} \lambda_R^2}} \quad , \quad b = \frac{3}{16\pi^2} > 0 \quad , \quad n = 2 \qquad (2.68)$$

$$\lambda_R(\mu) = \frac{\lambda_R(\mu_0)}{1 - \frac{3}{16\pi^2} \lambda_R(\mu_0) \ln \frac{\mu}{\mu_0}} = \qquad (2.69)$$



$$\mu_L = \mu_0 \, e^{\frac{16\pi^2}{3\lambda_R(\mu_0)}} \qquad \text{(Landau-Pol Singularität)}$$

$\Rightarrow$ ϕ^4 Theorie in $d=4$ ist s<u>chwach</u>gekoppelt auf kleinen (Impuls) Skalen. Auf großen (Impuls) Skalen wird die Kopplung stark. Störungstheorie ist nicht mehr verläßlich.

(ähnlich: QED $\beta_e = \mu \frac{de}{d\mu} = \frac{e^3}{12\pi^2} + \ldots \quad , b > 0$)

φ^3-Theorie in $d=6$

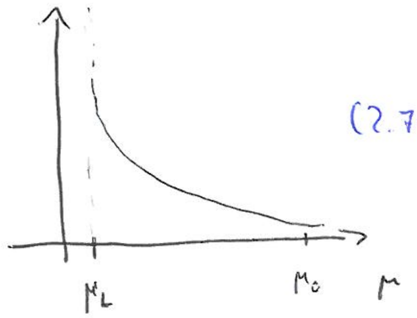
$$\beta(g_R) = \mu \frac{d}{d\mu} g_R = \mu \frac{d}{d\mu}\left(\frac{Z_\varphi^{3/2}}{Z_g}\, g\right)$$

$$= g_R \left(\frac{3}{2}\, \mu \frac{d}{d\mu} \underbrace{\ln Z_\varphi}_{\overset{(2.26)}{=} -\frac{g_R^2}{3\cdot 2^7 \pi^3} \ln\frac{\Lambda}{\mu}} - \mu\frac{d}{d\mu} \underbrace{\ln Z_g}_{\overset{(2.19)}{=} -\frac{g_R^2}{2^6\pi^3}\ln\frac{\Lambda}{\mu}} \right)$$

$$= g_R^3 \left(\frac{1}{2^8\pi^3} - \frac{1}{2^6\pi^3} \right) = -\frac{1}{64\pi^3}\, g_R^3 \left(1-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{256\pi^3}\, g_R^3 \qquad (2.70)$$

$$\Rightarrow \quad b = -\frac{3}{256\pi^3} < 0\,, \quad n = 3$$

$$g_R^2(\mu) = \frac{g_R^2(\mu_0)}{1 + \frac{3}{128\pi^3}\, g_R^2(\mu_0) \ln\frac{\mu}{\mu_0}} \quad \hat{=} \qquad (2.71)$$



$$\mu_L = \mu_0\, e^{-\frac{128\pi^3}{3 g_R^2(\mu_0)}} \qquad \text{(Landau-Pol)}$$

$\Rightarrow$ φ^3 in $d=6$ ist schwach gekoppelt auf hohen Impulsskalen und wird asymptotisch frei für $\mu \to \infty$.

Auf kleinen Impulsskalen wird die Theorie stark-gekoppelt und Störungstheorie bricht zusammen.

(ähnlich: QCD: $\beta_g = \mu \frac{dg}{d\mu} = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f\right)$ für $N_f < \frac{33}{2}$ bei $N_c = 3$) (2.72)

$\Rightarrow$ zu niedrigster Ordnung wird β (und η) vollständig durch die Koeffizienten der (logarithmischen) Divergenzen bestimmt.

Lösung der Callan-Symanzik Gleichung am Beispiel der 2-Punkt Funktion

(da alle Größen im Folgenden renormiert sind, sei das Subskript "R" weggelassen)

$$\Gamma^{(2)}(p) = \cancel{\frac{p^2}{g(p^2/\mu^2)}} \quad \frac{p^2}{g\left(\frac{p^2}{\mu^2}, \lambda\right)} \qquad (2.73)$$

$g(x)$: dimensionslose "Dressing" Funktion mit dim'losem Argument

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma^{(2)} = \left(2 - p\frac{\partial}{\partial p}\right)\Gamma^{(2)}, \quad p = \sqrt{p^2}$$

CS Gl. $\Rightarrow$

$$\left[p\frac{\partial}{\partial p} - \beta\frac{\partial}{\partial \lambda} - 2 + \eta \right] \Gamma^{(2)}(p,\lambda) = 0 \qquad (2.74)$$

NB: Analogie zu Bakterienwachstum in einer Röhre mit Flüssigkeit

$\Gamma(p,\lambda)$: "Bakteriendichteverteilung" zur "Zeit" p am "Ort" λ

$\ln p$: "Zeit"

λ : "Ort"

$-\beta(\lambda)$: "Flüssigkeitsgeschwindigkeit" in λ-Richtung

$\eta - 2$: "Wachstumsrate"

1) Bestimmung der "laufenden Kopplung" $\bar\lambda(p,\lambda)$ aus

$$\int_{\lambda}^{\bar\lambda} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')} = \int_{p'=\mu}^{p'=p} d \ln \frac{p'}{\mu} \iff \frac{d}{d \ln p/\mu} \bar\lambda(p,\lambda) = \beta(\bar\lambda), \quad \bar\lambda(\mu,\lambda) \equiv \lambda \qquad (2.75)$$

vgl. Eqs. (2.65-67)

2) Randbedingung bei $p^2 = \mu^2$: $\Gamma^{(2)}(\mu^2, \lambda) = \frac{\mu^2}{g(1,\lambda)} =: \frac{\mu^2}{\bar{g}(\lambda)}$

(z.B. $\bar{g}(\lambda)$ aus Störungstheorie)

1)+2) => Lösung:

$$\Gamma^{(2)}(p,\lambda) = \frac{p^2}{\bar{g}(\bar{\lambda}(p,\lambda))} \exp\left(-\int_{p'=\mu}^{p'=p} d\left(\ln \frac{p'}{\mu}\right) \eta(\bar{\lambda}(p',\lambda))\right) \tag{2.76}$$

Exponential-Faktor: akkumulierte Feldstärkenreskalierung (Wellenfkt.'srenormierung) von μ nach p ausgewertet beim jeweiligen Kopplungswert $\bar{\lambda}(p,\lambda)$.

Fixpunkt-Verhalten von $\Gamma^{(2)}$:

Sei $\bar{\lambda}$ in der Nähe eines Fixpunktes λ_*,

$\beta(\lambda_*) = 0$, z.B. am Gaußschen Fixpunkt $\lambda_* = 0$

$$\Rightarrow \Gamma^{(2)}(p) \simeq \frac{p^2}{\bar{g}(\lambda_*)} \exp\left(-\int_{p'=\mu}^{p'=p} d\left(\ln \frac{p'}{\mu}\right) \eta(\lambda_*)\right)$$

$$= \frac{1}{\bar{g}(\lambda_*)} (p^2)^{1-\eta/2} \tag{2.77}$$

$$\Rightarrow \left(\Gamma^{(2)}(p)\right)^{-1} \sim \left(\frac{1}{p^2}\right)^{1-\frac{\eta}{2}}$$

η mißt am Fixpunkt die Abweichung von ϕ von seiner kanonischen Dimension => anomale Dimension

Für perturbativ schwachgekoppelte Systeme nahe am "Gaußschen Fixpunkt" $\lambda_* = 0$ kann η in einer Entwicklung in der Kopplung nur zu logarithmischen Modifikationen des Power-Countings führen (vgl. Weinberg's Theorem).

Für starkgekoppelte Systeme mit $\eta = \mathcal{O}(1)$ kann das Power-Counting gänzlich modifiziert werden, d.h. Störungstheorie & störungstheoretische Divergenzanalysen sind nicht mehr gültig (insbesondere die Renormierbarkeitsfrage muß nicht-störungstheoretisch diskutiert werden).

Kovarianz der Renormierungsfunktion β

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts wurden in einem massenunabh. Renormierungsschema nach cutoff-Regularisierung gewonnen. Im allgemeinen ist allerdings die β Funktion schemenabhängig (= nicht universell).

Seien g und $\tilde{g}$ die renormierten Kopplungen ein- und derselben Theorie in verschiedenen massenunabh. Renormierungs-schemen mit

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \beta(g) \quad , \quad \mu \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \mu} = \tilde{\beta}(\tilde{g}) \qquad (2.78)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial g} = \mu\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \mu} \Big/ \mu\frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{\tilde{\beta}(\tilde{g})}{\beta(g)}$$

(μ ist einzige Skala massenunabh. RS !!)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta(g)\,\frac{\partial \tilde{g}}{\partial g} = \tilde{\beta}(\tilde{g})} \qquad (2.79)$$

⇒ β Fkt. transformiert sich kovariant unter Schemenänderung.

⇒ Fixpunkte sind universell : $\beta(g_*) = 0 \Rightarrow \tilde{\beta}(\tilde{g}_*(g_*)) = 0$

(eine reguläre Abb. mit $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial g} > 0$ vorausgesetzt.)

(präziser: die Existenz eines Fixpunktes ist universell, der Fixpunktwert i. A. nicht $g_* \neq \tilde{g}_*$ i. A.)

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{\beta}(\tilde{g})}{\partial \tilde{g}}\bigg|_{FP} = \frac{\partial \beta(g)}{\partial \tilde{g}}\bigg|_{FP} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial g} = \frac{\partial \beta(g)}{\partial g}\bigg|_{FP} \frac{\partial g}{\partial \tilde{g}}\frac{\partial \tilde{g}}{\partial g} = \frac{\partial \beta(g)}{\partial g}\bigg|_{FP} =: -\theta \qquad (2.80)$$

Steigung am Fixpunkt (= kritischer Exponent) ist universell z.B ϕ^4 Theorie:

$$\beta(\lambda) = \beta_2 \lambda^2 + \beta_3 \lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^4)$$

Es gibt einen perturbativen Zusammenhang zwischen den Kopplungen:

$$\tilde{\lambda} = \lambda + l_2 \lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^3) \qquad \text{mit } l_2 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \lambda} = 1 + 2 l_2 \lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{\beta}(\tilde{\lambda})}} = \beta(\lambda) \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \lambda} = \left(\beta_2 \lambda^2 + \beta_3 \lambda^3\right)\left(1 + 2 l_2 \lambda\right)$$

$\lambda = \tilde{\lambda} - l_2 \tilde{\lambda}^2 + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^3)$

$$= \left(\beta_2 \left(\tilde{\lambda} - l_2 \tilde{\lambda}^2 \ldots\right)^2 + \beta_3 \tilde{\lambda}^3\right)\left(1 + 2 l_2 \tilde{\lambda} + \ldots\right) + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^4)$$

$$= \beta_2 \tilde{\lambda}^2 \cancel{- 2 l_2 \beta_2 \tilde{\lambda}^3} + \beta_3 \tilde{\lambda}^3 \cancel{+ 2 l_2 \beta_2 \tilde{\lambda}^3} + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^4)$$

$$= \underline{\underline{\beta_2 \tilde{\lambda}^2 + \beta_3 \tilde{\lambda}^3 + \mathcal{O}(\tilde{\lambda}^4)}} \qquad (2.81)$$

In massenunabh. Renormierungsschemen sind die ersten beiden β Fkt's koeffizienten <u>universell</u>.

Bei massenabh. RS ist i.a. nur noch der erste Koeffizient universell!

Landau-Pol Singularität und Renormierbarkeit

ϕ^3 in $d=6$: Landau-Pol liegt im IR, weist auf Starkkopplungs-sektor hin. Das UV ist jedoch problemlos:

Sei $\mu_0 \hat{=} \Lambda$ (UV cutoff) mit $g_R^2(\mu_0=\Lambda) = g_\Lambda$ (bare coupling)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{g_R^2(\mu)} - \frac{1}{g_\Lambda^2} = -\frac{3}{128\pi^3} \ln \frac{\Lambda}{\mu} \qquad (2.82)$$

Bei festem physikalischem $g_R^2(\mu)$ an Meßskala μ kann der Limes $\Lambda \to \infty$ durchgeführt werden, indem g_Λ^2 logarithmisch $\to 0$ geht.

$\Rightarrow$ cutoff Λ muß keine physikalische Bedeutung haben

Theorie kann auf allen Skalen gültig sein

$\Rightarrow$ "fundamentale QFT"

ϕ^4 in $d=4$: Landau-Pol liegt im UV

$$\frac{1}{\lambda_R(\mu)} - \frac{1}{\lambda_\Lambda} = \frac{3}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda}{\mu} \qquad (2.83)$$

(1) Bei festem $\lambda_R(\mu)$ kann Limes $\Lambda \to \infty$ nicht durchgeführt werden wegen Landau-Pol in λ_Λ bei μ_L. Falls der Landau-Pol auch jenseits von Störungstheorie existiert, folgt, daß es für die Theorie eine maximale UV Ausdehnung gibt: jenseits von μ_L existiert die Theorie nicht; kann also keine fundamentale Theorie sein. Der cutoff hat in diesem Sinne physikalische Bedeutung, daß er

auf die Skala hinweist, bei der "neue Physik" einsetzen muß.

(2) Fordert man, daß $\Lambda \to \infty$ in (2.83), so kann die Gleichung nur erfüllt werden, wenn $\lambda_R(\mu) \to 0$.

$\Rightarrow$ ϕ^4-Theorie als fundamentale Theorie ist notwendigerweise nicht-wechselwirkend, d.h. "<u>trivial</u>"