2.5 Renormierungstheorie & Renormierungsgruppengleichungen (RGE)

am Beispiel ϕ^4-Theorie in $d=4$

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right) \qquad (2.38)$$

$$\Rightarrow \quad \delta\left(\int_x \lambda \phi^4\right) = 0 \qquad \text{Vertex dimension}$$

$\Rightarrow$ oberflächlicher Divergenzgrad für n-Punkt eigentl. Vertex $\Gamma^{(n)}$:

$$\delta(\gamma_{\Gamma^{(n)}}) = 4 - \underbrace{[\phi]}_{=1} \underbrace{E}_{=n} = 4 - n \qquad (2.39)$$

$\Rightarrow$ alle $\Gamma^{(n)}$ mit mehr als $n>4$ äußeren Beinchen sind oberflächlich konvergent.

Wir benötigen desweiteren noch Vertex-Funktionen mit Einsetzungen des $\phi^2_{(y)}$ Operators.

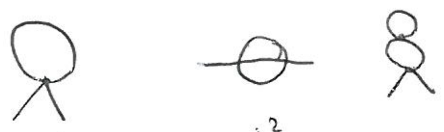
$$\Gamma^{(n,l)}(x_1 \ldots x_n; y_1 \ldots y_l) = \frac{(-1)^l}{2^l} \left\langle \phi^2_{(y_1)} \ldots \phi^2_{(y_l)} \phi_{(x_1)} \ldots \phi_{(x_n)} \right\rangle_{1PI}$$

mit oberfl. Div'grad

$$\delta(\gamma_{\Gamma^{(n,l)}}) = 4 - n - 2l \qquad (2.40)$$

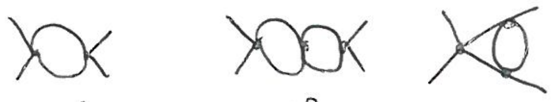
Beispiele divergenter Diagramme:

$\Gamma^{(2)}: l=0, n=2, \delta(\gamma)=2$



$\sim\lambda$ $\quad \sim\lambda^2$ ...

$\Gamma^{(4)}: l=0, n=4, \delta(\gamma)=0$



$\sim\lambda^2$ $\quad \sim\lambda^3$ ...

$\Gamma^{(2,1)}: l=1, n=2, \delta(\gamma)=0$

$\sim\lambda^2$ $\quad \sim\lambda^3$ $\quad \sim\lambda^3$ ...

Weitere oberfl. divergente Vertex-Fkt sind $(\Gamma^{(0,1)}$ und $\Gamma^{(0,2)})$; diese sind im Folgenden weniger wichtig, da sie wegen $n=0$ nie als Subdiagramme auftauchen können.

2.5.1 1-loop Analyse (vgl. ϕ^3-Theorie)

Wirkung in renormierten Größen:

$$S_\Lambda[\phi] \equiv S_R[\phi_R] + \delta S_R[\phi_R] = \int d^dx \left[\frac{1}{2}\phi_R(-\partial^2+m_R^2)\phi_R + \frac{1}{4!}\lambda_R \phi_R^4 \right. \tag{2.41}$$

$$\left. + \frac{1}{2}\phi_R\left(-\delta Z_\phi \partial^2 + \delta m^2\right)\phi_R + \frac{1}{4!}\lambda_R \delta Z_\lambda \phi_R^4 \right] \leftarrow \text{counter terme } S_{c.t.}$$

$$\phi = Z_\phi^{1/2}\phi_R, \quad \lambda = \lambda_R \frac{Z_\lambda}{Z_\phi^2}, \quad m^2 = (m_R^2 + \delta m^2)\frac{1}{Z_\phi}$$

$$\delta Z_\phi = Z_\phi - 1, \quad \delta Z_\lambda = Z_\lambda - 1 \tag{2.42}$$

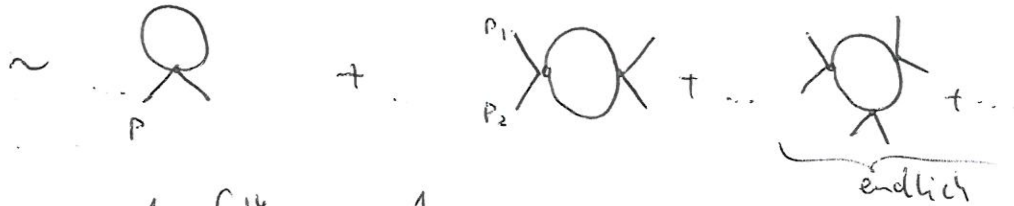
Effektive Wirkung zu 1-loop:

$$\Gamma[\varphi_R] = \underbrace{\Gamma_0[\varphi_R]}_{S_R[\varphi_R]} + \underbrace{\Gamma_1[\varphi_R] + \delta S_{\cancel{ct.}\,R}[\varphi_R]}_{\Gamma_{1R}[\varphi_R]} \tag{2.43}$$

mit

$$\Gamma_1[\varphi_R] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}_\Lambda \ln\left(1 + \frac{1}{-\partial^2 + m_R^2}\,\frac{\lambda_R}{2}\,\phi_R^2\right) \tag{2.44}$$

$\sim$



Divergenzen $\Rightarrow$ $$\Gamma_1^{(2)}(p) = \frac{1}{4}\int_\Lambda \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{q^2+m_R^2} = \frac{1}{32\pi^2}\lambda_R\left(\frac{\Lambda^2}{2} - m_R^2 \ln\frac{\Lambda}{m_R} + \mathcal{O}(1)\right)$$

unabh. von p !

$$\Gamma_1^{(4)}(p_i) = -\frac{1}{16}\lambda_R^2 \int_\Lambda \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{(q^2+m_R^2)}\,\frac{1}{((q+p_1+p_2)^2+m_R^2)} = -\frac{\lambda_R^2}{128\pi^2}\ln\frac{\Lambda}{m_R} + \mathcal{O}(1) \tag{2.45}$$

Da $\Gamma^{(2)}_{1,\mathrm{div}}$ unabh. von p, folgt, daß zu 1-loop kein Term $\sim (\partial_\mu\varphi)^2$ erzeugt wird (kein Term $\sim \lambda_R$)

$$\Rightarrow \quad Z_\varphi = 1 + \mathcal{O}(\lambda_R^2) \tag{2.46}$$

(Besonderheit der φ^4-Theorie zu 1-loop!). Desweiteren folgt:

$$\delta m^2 = -\frac{1}{16\pi^2}\lambda_R\left(\frac{\Lambda^2}{2} - m_R^2\ln\frac{\Lambda}{m_R} + \mathcal{O}(1)\right) + \mathcal{O}(\lambda_R^2)$$

$$Z_\lambda = 1 + \frac{3}{16\pi^2}\lambda_R\left(\ln\frac{\Lambda}{m_R} + \mathcal{O}(1)\right) + \mathcal{O}(\lambda_R^2) \tag{2.47}$$

Die Wahl von (2.47) eingesetzt in (2.43) kürzt die Divergenzen, so daß $\Gamma[\phi_R]$ zu 1-loop endlich ist und die Renormierungsbedingungen

$$\Gamma_R^{(2)}(p \to 0) = m_R^2$$
$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_R^{(2)}(p \to 0) = 1 \qquad (2.48)$$
$$\Gamma_R^{(4)}(p_i \to 0) = \lambda_R$$

erfüllt!

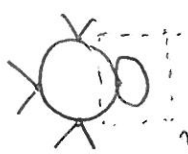
2.5.2 Divergenzen zu höheren Loop-Ordnungen

3 Beispiele

1) oberflächlich Konvergente Diagramme (ϕ^4: $n > 4$)

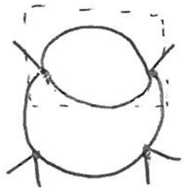
zu höheren Ordnungen erscheinen divergente Subdiagramme:

$n = 6$



$\sim \Gamma_1^{(2)} \sim \frac{\Lambda^2}{2} + \ldots \ln \frac{\Lambda}{m_R}$

$\sim \Gamma_1^{(4)} \sim \ln \frac{\Lambda}{m_R}$



Für diese 1-loop Subdivergenten Diagramme gibt es jedoch 1-loop counter terme, die auf höheren Loops ebenfalls zur Störungsentwicklung beitragen:

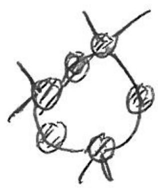
⇒ Konzept der Skeleton - Entwicklung

- alle oberfl. konvergenten Diagramme, die echt konvergent sind, d.h. ohne Subdivergenzen, heißen Skeleton Diagramme

  Beispiele: alle 1-loop Diagramme mit $n>4$ in ϕ^4 Theorie

- Skeleton - Entwicklung: Ersetze alle Propagatoren und Vertizes im Skeleton Diagramm durch volle Propagatoren $(\Gamma_R^{(2)})^{-1}$ und Vertizes $\Gamma_R^{(4)}$ und entwickle in λ_R

  Obige $n=6$ Beispiele werden z.B. generiert durch



(dressed Skeleton)

- Weinbergs Theorem: in dressed Skeletons wird das Power-counting nur logarithmisch modifiziert

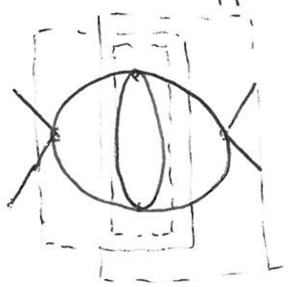
  ⇒ Wenn $\delta(\gamma) < 0$ (oberfl. Divergenzgrad),
  dann ist das Diagramm absolut konvergent
  (auf L+1 loop Niveau, nachdem $\Gamma^{(2)}$ und $\Gamma^{(4)}$ auf L. loop Niveau renormiert worden sind)

  ⇒ Problem der Renormierung reduziert auf $\Gamma^{(2)}$ und $\Gamma^{(4)}$ (und $\Gamma^{(2,1)}$ siehe später)!

2) Problem: oberfl. divergente Diagramme mit Subdivergenzen

Skeleton - Argument nicht anwendbar

3) Problem: überlappende Divergenzen:



2) u. 3) bilden die Schwierigkeit bei perturbativen Renormierbarkeits-beweisen.

(NB.: der Dyson/Ward Renormierbarkeitsbeweis der QED versucht auf Diagramm-Klassen zurückzugreifen, die keine überlappende Divergenzen haben (scheitert aber (vermutlich) in 14ter Ordnung in der Kopplung).

BPHZ Renormierung führt die Subtraktionen so aus, daß überlappende Divergenzen "automatisch" berücksichtigt werden.)

2.5.3 Callan - Symanzik Gleichung

Beobachtung:

$$\frac{\partial}{\partial m^2}\Big|_{\lambda,\Lambda} \int \mathcal{D}\chi \;(\dots)\, e^{-\int\dots \frac{1}{2}m^2\varphi^2\dots} = -\int \mathcal{D}\chi \int \frac{1}{2}\varphi^2 (\dots)\, e^{-S\dots}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial m^2}\Big|_{\lambda,\Lambda} \Gamma^{(n,\ell)}(q_1\dots q_\ell; p_1\dots p_n) = \Gamma^{(n,\ell+1)}(0, q_1\dots q_\ell; p_1\dots p_n) \qquad (2.49)$$

z.B.: $\frac{\partial}{\partial m^2}\Gamma^{(4)}(p_1\dots p_n) = \Gamma^{(4,1)}(0; p_1\dots p_n)$

hat keine Skeleton - Entwicklung

hat Skeleton-Entwicklung

$\Rightarrow$ Differentiation nach der Masse verknüpft oberfl. divergente Diagramme mit der Skeleton - Entwicklung.

Annahme: die vollständig regularisierte und renormierte Theorie existiert, dann läßt sich die volle eff. Quantenwirkung in nackten als auch im renormierten Größen ausdrücken:

$$\Gamma[\phi] = \Gamma_R[\phi_R]$$

Für die eigentlichen Vertizes folgt dann ($\phi = Z_\varphi^{1/2}\varphi_R$)

$$\Gamma^{(n)} = Z_\varphi^{-\frac{n}{2}}\,\Gamma_R^{(n)} \qquad (2.50a)$$

bzw. mit Φ^2-Einsetzungen:

$$\Gamma^{(n,l)} = Z_\varphi^{l-\frac{n}{2}} \; Z_{\varphi^2}^{-l} \; \Gamma_R^{(n,l)} \tag{2.50b}$$

(Z_{φ^2} : neue Renormierungskonstante zu oberfl. div. Vertex $\Gamma^{(2,1)}$ mit Renormierungsbedingung $\Gamma_R^{(2,1)}(q=0, p_1=p_2=0) = 1$)

Nun soll (2.49) ausgedrückt werden durch renormierte Größen $\left(\lambda, m, \Gamma^{(n,l)}, \frac{\partial}{\partial m}\Big|_{\lambda,\Lambda}\right) \longrightarrow \left(\lambda_R, m_R, \Gamma_R^{(n,l)}, \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda_R,\Lambda}\right)$.

Zunächst:

$$m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda,\Lambda} \Gamma^{(n,l)} = \left(m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda\Lambda} m^2\right) \frac{\partial}{\partial m}\Big|_{\lambda,\Lambda} \Gamma^{(n,l)} = \left(m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda\Lambda} m^2\right) \Gamma^{(n,l+1)} \tag{2.51}$$

Def.:

$$m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda,\Lambda} \lambda_R = \beta$$

$$m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda,\Lambda} \ln Z_\varphi = \eta \qquad = \left(m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda_R}\right) \ln Z_\varphi$$

$$m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda,\Lambda} \ln \frac{Z_{\varphi^2}}{Z_\varphi} = \eta_2 \qquad = \left(m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda_R}\right) \ln \frac{Z_{\varphi^2}}{Z_\varphi}$$

$$\frac{Z_\varphi}{Z_{\varphi^2}} \left(m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda\Lambda} m^2\right) = m_R^2 \, \sigma \tag{2.52}$$

Dabei sind $\beta, \eta, \eta_2, \sigma$ Funktionen von λ_R und $\frac{m_R}{\Lambda}$ und dimensionslos. Falls der Limes $\Lambda \to \infty$ existiert, sind es nur noch Funktionen von λ_R.

Einsetzen von (2.50b) in (2.51) liefert:

$$Z_{\varphi^2}^{l} Z_\varphi^{\frac{n}{2}-l} \; m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda,\Lambda} \left(Z_{\varphi^2}^{-l} Z_\varphi^{l-\frac{n}{2}} \Gamma_R^{(n,l)} \right) = \frac{Z_\varphi}{Z_{\varphi^2}} \left(m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda,\Lambda} m^2 \right) \Gamma_R^{(n,l+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda_R} - \frac{n}{2}\eta - l\,\eta_2 \right) \Gamma_R^{(n,l)} = m_R^2\, \sigma\, \Gamma_R^{(n,l+1)} \qquad (2.53)$$

Callan-Symanzik Gleichung

Die CS Gleichung beschreibt die Änderung der n-Punkt Vertizes als Response auf die Änderung der renormierten Masse. Sie vergleicht also Theorien mit verschiedener physikalischer Masse miteinander.

Bei vorgegebenen Renormierungsfunktionen $\beta, \eta, \eta_2, \sigma$ (und vorgegebenen Randbedingungen z.B. bei $m_R \to \infty$ (keine Dynamik)) können alle n-Punkt Vertizes berechnet werden.

Berücksichtigung der Renormierungsbedingung

(i) $n=2,\ l=0$: $\quad \Gamma_R^{(2)}(p^2\to 0) = m_R^2$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(q=0,(p_1,p_2)=0) = 1$$

(zusätzliche Renormierungsbed. für ϕ^2 Einsetzung)

CS:
$$\left(m_R \frac{\partial}{\partial m_R} - \eta\right) m_R^2 = m_R^2\, \sigma$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma = 2-\eta}} \qquad (2.54)$$

Weil $Z_\varphi = 1 + \mathcal{O}(\lambda_R^2)$ (vgl. 2.46), folgt: $\underline{\underline{\eta}} = m_R \frac{\partial}{\partial m_R}\Big|_{\lambda,\Lambda} \ln Z_\varphi = \underline{\underline{\mathcal{O}(\lambda_R^2)}}$. (2.55)

(ii): $n=4,\ l=0$ $\quad \Gamma_R^{(4)}(p_i\to 0) = \lambda_R$

CS:
$$\left(\beta \frac{\partial}{\partial \lambda_R} - 2\eta\right)\lambda_R$$

$$= \underline{\underline{\beta - 2\lambda_R\,\eta}} = \underline{\underline{m_R^2\,(2-\eta)\,\Gamma_R^{(4,1)}}}(p_i\to 0) \qquad (2.56)$$

Da $\Gamma_R^{(4,1)} = \mathcal{O}(\lambda_R^2) =$  $+\ \cdots$ folgt:

$$\underline{\underline{\beta = \mathcal{O}(\lambda_R^2)}}$$

2.5.4 Skizze eines perturbativen Renormierungsbeweises

Aus den Überlegungen zur Skeleton-Entwicklung wissen wir, daß alle Korrelationsfunktionen zu gegebener Ordnung endlich sind, wenn die oberflächlich divergenten Vertex-Funktionen renormiert worden sind zu entsprechender Ordnung.
Besitzen also im Φ^4-Theorie $\Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(4)}$ und $\Gamma_R^{(2,1)}$ einen $\Lambda \to \infty$ limes auf L loop-Niveau, dann sind alle Vertizes, die eine Skeleton-Entwicklung besitzen, endlich auf $L+1$ loop-Niveau.
Ein Renormierbarkeitsbeweis ergibt sich nun, wenn man induktiv schließen kann, daß nun auch $\Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(4)}$ und $\Gamma_R^{(2,1)}$ auf $L+1$ loop-Niveau einen endlichen $\Lambda \to \infty$ Limes besitzen. Der Induktionsanfang ist dann durch unsere Renormierung des $L=1$ loop-Niveaus gegeben.
Ein solcher Beweis folgt mit der CS Gleichung in der Form:

$$m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Gamma_R^{(n,l)} = \left(-\beta \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \frac{n}{2} \eta + l \eta_2 \right) \Gamma_R^{(n,l)} + m_R^2 \, (2-\eta) \, \Gamma_R^{(n,l+1)} , \tag{2.57}$$

welche L-loop renormierte Größen (RHS) mit $(L+1)$ loop Ordnung (LHS) verknüpft.
Beispielsweise für den 4er Vertex $\Gamma_R^{(4)}$ läßt sich

folgendermaßen argumentieren:

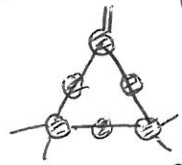
$$m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Gamma_R^{(4)} = \left(-\beta \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + 2\eta\right)\Gamma_R^{(4)} + m_R^2 (2-\eta)\, \Gamma_R^{(4,1)} \qquad (2.58)$$

$\left(\Gamma_R^{(2)}, \Gamma_R^{(4)}, \Gamma_R^{(2,1)}\right)$ L-loop endlich

$\Rightarrow$ endlich zur Ordnung $\left(\lambda_R^{L}, \lambda_R^{L+1}, \lambda_R^{L}\right)$

$\Rightarrow$ $\Gamma_R^{(4,1)}$ endlich zur Ordnung (L+1)-loop (Skeleton-Exp.)

$\Rightarrow$ " " " λ_R^{L+2}



(1-loop: $\sim \lambda_R^2$)
2-loop: $\sim \lambda_R^3$

$\overset{(2.56)}{\Rightarrow}$ $(\beta - 2\lambda_R \eta)$ endlich zur Ordnung λ_R^{L+2};

(weil η endlich $\sim \lambda_R^{L}$, folgt:
β (mindestens) endlich $\sim \lambda_R^{L+1}$)

$\Rightarrow$ $\Gamma_R^{(4)} = \lambda_R + \mathcal{O}(\lambda_R^2)$, $\quad \overbrace{\left(-\beta \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + 2\eta\right)(\lambda_R + \ldots)}^{= -(\beta - 2\lambda_R\eta)}$ endlich $\sim \lambda_R^{L+2}$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\left(\underbrace{-\beta \frac{\partial}{\partial \lambda_R}}_{O(\lambda_R^2)} + 2\eta\right)}_{O(\lambda_R)} \underbrace{\Gamma_R^{(4)}}_{O(\lambda_R^{L+1})}$ endlich $\sim \lambda_R^{L+2}$

(2.59)

$\Longrightarrow$ $m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Gamma_R^{(4)}$ endlich $\sim \lambda_R^{L+2}$ $\Rightarrow$ endlich $\sim$ (L+1) loop

Integration:

$$\Gamma_R^{(4)} = \int_{m_R}^{\Lambda} \frac{d\bar{m}}{\bar{m}} \, \bar{m} \frac{\partial}{\partial \bar{m}} \Gamma_R^{(4)} = \int_{m_R}^{\Lambda} \frac{d\bar{m}}{\bar{m}} \, \text{RHS } (2.58)$$

Durch die Integration können (insbesondere am oberen bound) keine Divergenzen entstehen, da über Beiträge von Theorien "verschiedener" zunehmender Masse summiert wird, wobei die Beiträge für größere Masse immer stärker unterdrückt sind ("je größer die Masse, desto weniger Fluktuation").

Im gleicher Weise läßt sich zeigen, daß

$\Gamma_R^{(2)}$, $\Gamma_R^{(2,1)}$ endlich auf $(L+1)$ Loop-Niveau ▨.