2.3 Divergenzen in Störungstheorie: Allgemeine Analyse

Kann man für beliebige Theorien die "counter terme" δm^2, $\delta Z_\varphi = Z_\varphi - 1$, etc so wählen, daß die Niederenergie-physik endlich ist? Wann behält eine Theorie Vorhersagekraft?

Für diese Analyse definieren wir zunächst die kanonische Dimension eines Feldes.

Fällt der freie Propagator eines Feldes für große Impulse ab wie

$$\Delta(p) \equiv \left(\Gamma^{(2)0}_{(p)}\right)^{-1} \underset{p\to\infty}{\sim} \frac{1}{|p|^{\sigma}} \,, \quad \left(\begin{array}{l}\text{Annahme: Limes } p\to\infty \text{ sei}\\ O(d)\text{ symmetrisch}\end{array}\right) \tag{2.28}$$

dann definieren wir die kanonische Dimension eines Feldes durch

$$[\varphi] := \frac{d-\sigma}{2} \tag{2.29}$$

Beispiel: skalares Feld: $\Delta(p) = \dfrac{1}{p^2+m^2} \overset{p^2\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{p^2}$, $[\varphi] = \dfrac{d-2}{2}$

fermionisches Feld $\Delta(p) = \dfrac{1}{p_\mu\gamma_\mu + m} \overset{p\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{p}$, $[\psi] = \dfrac{d-1}{2}$ (2.30)

(NB. in diesen Beispielen läßt sich die kan. Dim. auch an der Wirkung ablesen, die dim'los sein soll: $0 = [\int d^dx\, \partial_\mu\varphi\, \partial_\mu\varphi] = [\int d^dx] + 2[\partial_\mu] + 2[\varphi] = -d + 2 + 2[\varphi]$)
d.h. wir zählen Massendimensionen, $[p] = [m] = 1$, $[x] = -1$

Das Ablesen der kanonischen Dimension an der Wirkung ist nicht mehr möglich für höhere Spin Felder.

Beispiel: massives Vektor Feld V_μ

$$S(V) = \int d^dx \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)^2 + \frac{1}{2} m^2 V_\mu V_\mu \right]$$

$$\Rightarrow \text{Propagator:} \quad \Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}}{p^2 + m^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{\mu\nu}(p \to \infty) \sim \frac{1}{|p|^0} \quad \Rightarrow [V_\mu] = \frac{d}{2}$$

(von der Wirkung hätten wir auf $[V_\mu] \overset{?}{=} \frac{d-2}{2}$ geschlossen)

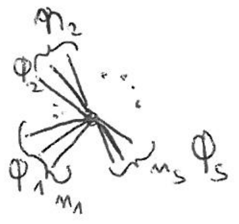
Ausnahmen bilden Eichfelder A_μ. z.B. in Feynman Eichung gilt:

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{p^2 + m^2},$$

so daß hier $[A_\mu] = \frac{d-2}{2}$

Bei polynomial wechselwirkenden Theorien läßt sich die WW schreiben als Summe von Vertizes ;

$$V(\phi) \sim \int d^d x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \phi_1(x)^{n_1}\, \phi_2(x)^{n_2} \ldots \phi_s(x)^{n_s} , \tag{2.31}$$



($\phi_1, \phi_2 ..$ seien Felder verschiedenen Typs)

(Bsp ϕ^3-Theorie: $k=0$, $n_1=3$, $n_{i>1}=0$)

Die Dimension eines Vertex' ergibt sich daher als

$$\delta[V] = -d + k + \sum_{i=1}^{s} n_i \cdot [\phi_i] \tag{2.32}$$

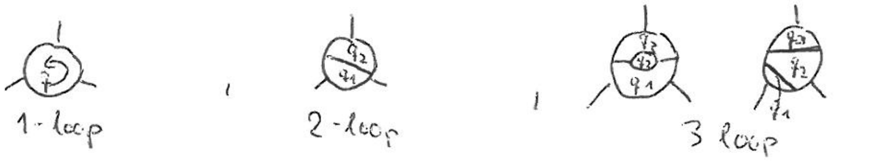
Vertex im Impulsraum:

$$V(\phi) \sim \int d^d p_1 \ldots \int d^d p_{n_1+n_2+\ldots n_s}\; \delta^d(p_1 + \ldots + p_{n_1+n_2+\ldots+n_s})\; p^k\, \phi_1(p_1) \ldots \phi_s(p_{n_1+\ldots+n_s}) \tag{2.33}$$

$\Rightarrow$ Jeder Vertex enthält eine Impuls-erhaltende δ-Funktion.

Divergenzen in den n-Punkt eigentlichen Vertizes $\Gamma^{(n)}$ treten in den Integrationen über die Fluktuationsimpulse auf. Störungstheorie sortiert die Beiträge zu $\Gamma^{(n)}$ nach Zahl der unabh. Impulsintegrationen = # Loops

Bsp.:



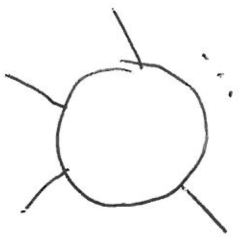
, etc

Def.: oberflächlicher Divergenzgrad $\delta(\gamma)$ eines Diagramms γ

Skalierung von allen Impulsintegrationen mit $\lambda \gg 1$

$\Rightarrow$ Skalierung des Diagramms mit $\lambda^{\delta(\gamma)}$

Beispiel: 1-loop Diagramm



$$\delta(\gamma)^{1\,\text{loop}} = \underbrace{d}_{\int d^d q} - \sum_i \underbrace{I_i}_{\text{Zahl von "inneren" Linien}} \overbrace{\sigma_i}^{\text{lang-p Verhalten der Prop's}} + \sum_\alpha \underbrace{v_\alpha}_{\text{\# Vertices vom Typ } \alpha} \overbrace{k_\alpha}^{\text{\# Impulse im Verte[x]}}$$

Verallgemeinerung auf L loops:

$$\delta(\gamma) = d\,L - \sum_i I_i \sigma_i + \sum_\alpha v_\alpha k_\alpha \tag{2.34}$$

Falls $\delta(\gamma) > 0$ divergiert das Diagramm in cutoff-Regularisierung mindestens wie $\Lambda^{\delta(\gamma)}$.

Falls $\delta(\gamma) = 0$ divergiert es mindestens wie $\ln \Lambda$.

Falls $\delta(\gamma) < 0$ ist es "oberflächlich" konvergent (es können noch Div's in Subdiagrammen stecken).

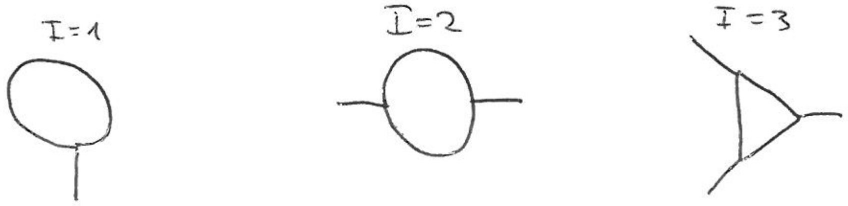
Beispiel: ϕ^3-Theorie: $\sigma = 2$, $k = 0$

$$\Rightarrow \quad \delta(\gamma) = dL - 2I$$

Sei $d = 6$ und $L = 1$ (1 loop Niveau):

$$\delta(\gamma) = 6 - 2I$$

$$\Rightarrow \quad I = 1, 2, 3 \qquad \Rightarrow \quad \delta(\gamma) = 4, 2, 0$$



$$\Rightarrow \quad \sim \Lambda^4 \qquad \sim \Lambda^2 \qquad \sim \ln \Lambda \qquad \checkmark$$

Topologische Relationen auf Diagrammen

1) Sei n_i^α die # von Feldern ϕ_i an einem Vertex vom Typ α. Sei E_i die # der äußeren Linien und I_i der inneren Linien vom Feld ϕ_i. Jede innere Linie verbindet 2 Vertizes und jede äußere knüpft an 1 Vertex an:

$$E_i + 2 I_i = \sum_\alpha n_i^\alpha v_\alpha \tag{2.35}$$

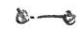
(ϕ^3-Theorie: $n = 3$: $E + 2I = 3v$

 : $4 + 2 = 6$)

2)
$$
\begin{aligned}
L &= I - V + 1 \\
&\equiv \sum_i I_i - \sum_\alpha v_\alpha + 1
\end{aligned}
\qquad (2.36)
$$

(Beweis: Betrachte zunächst "Baum"-Graphen ohne Loops:

$$0 = I - V + 1 \,\Big|_{\text{Baum}} \qquad (*)$$

(*) ist erfüllt für einfachstes Element mit $I=1,\ V=2$: 

alle höheren Baum-Graphen (ohne explizite äußere Linie) erzeugt man durch sukzessives Anheften eines weiteren Vertex' mit einer Verbindungslinie; dabei bleibt (*) immer erfüllt.

Einen Loop erzeuge ich durch anschließendes Verknüpfen zweier Vertizes mit einer inneren Linie (L und I erhöhen sich jeweils um 1); daraus folgt (2.36))

Nun folgt für $\delta(\gamma)$:

$$
\begin{aligned}
\delta(\gamma) &\overset{(2.34)}{=} dL - \sum_i I_i \sigma_i + \sum_\alpha v_\alpha k_\alpha \\
&\overset{(2.36)}{=} d\Big(\sum_i I_i - \sum_\alpha v_\alpha + 1\Big) - \sum_i I_i \sigma_i + \sum_\alpha v_\alpha k_\alpha \\
&= d + \sum_i I_i (d - \sigma_i) + \sum_\alpha v_\alpha (k_\alpha - d) \\
&\overset{(2.35)}{=} d + \sum_{i\alpha} \underbrace{\frac{(d-\sigma_i)}{2}}_{[\phi_i]} n_i^\alpha v_\alpha - \sum_i \underbrace{\frac{(d-\sigma_i)}{2}}_{[\phi_i]} E_i + \sum_\alpha v_\alpha (k_\alpha - d) \\
&= d - \sum_i [\phi_i] E_i + \sum_\alpha v_\alpha \underbrace{\Big(k_\alpha - d + \sum_i n_i^\alpha [\phi_i]\Big)}_{\delta(V_\alpha)}
\end{aligned}
$$

(2.32)
$$\Rightarrow \quad \delta(\gamma) = d - \sum_i [\phi_i] E_i + \sum_\alpha v_\alpha \, \delta(V_\alpha) \tag{2.37}$$

Diese Formel für den oberflächlichen Divergenzgrad erlaubt die

2.4 Klassifikation perturbativ renormierbarer Theorien

Dafür sei angenommen, daß die Analyse des oberflächlichen Divergenzgrads ausreicht, um Information über alle möglichen Divergenzen in Amplituden zu erhalten.
Das dies so ist besagt das BPHZ Theorem:
(Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann)
Alle Divergenzen einer perturbativ renormierbaren Theorie können durch counterterme entfernt werden, die oberflächlich divergenten Amplituden entsprechen.
(Der Beweis ist sehr technisch; eine einfachere Idee für Renormierbarkeitsbeweise wird später skizziert)

Sei $[\phi_i] > 0$. Dann ist eine Theorie:

<u>Nicht-renormierbar</u>, wenn mindestens ein Vertex positive Dimension hat: $\delta(V_\alpha) > 0$.
Durch Diagramme mit höheren und höheren v_α (höhere Loops) kann $\delta(\gamma)$ beliebig hoch werden

und das für jedes $\Gamma^{(n)}$ (jede Zahl von äußeren Beinchen E_i)

Das Kürzen von allen Divergenzen erfordert dann ∞ viele counter terme, d.h. ∞ viele Wechselwirkungen $\Rightarrow$ ∞ viele physikalische Parameter $\Rightarrow$ Verlust aller Vorhersagekraft

<u>Super-renormierbar</u>, wenn alle $\delta(V_\alpha) < 0$.

$\Rightarrow$ nur eine endliche Anzahl von Diagrammen ist oberflächlich divergent.

Beispiel: ϕ^4-Theorie in $d=3$:

$$\delta(\gamma) = 3 - \frac{1}{2}E - v$$

E=2 :

$v=1$ $\qquad$ $v=2$ $\qquad$ $v=2$

($E=4$ hat mindestens $v=2$ $\Rightarrow$ $\delta(\gamma)|_{E\geq 2} < 0$)

<u>Renormierbar</u>, wenn mindestens ein $\delta(V_\alpha)=0$ (und kein $\delta(V_\alpha)>0$).

$\Rightarrow$ ∞ viele Diagramme haben $\delta(\gamma) \geq 0$, aber bei vorgegebenen E_i ist $\delta(\gamma)$ unabhängig von v_α

$\Rightarrow$ ~~nur~~ eine endliche Zahl von $\Gamma^{(n)}$ ist divergent

$\Rightarrow$ nur endlich viele counter terme notwendig

$\Rightarrow$ endlich viele physikalische Parameter

$\Rightarrow$ Theorie hat Vorhersagekraft.

Beispiele: $\quad \delta(V) \overset{(2.32)}{=} -d + k + \sum_{i=1}^{s} n_i [\varphi_i]$

1) skalare Felder ohne Ableitungs-WW $(k=0)$

$$[\varphi] = \frac{d-2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \delta(V) = -d + n\,\frac{d-2}{2} = d\left(\frac{n}{2}-1\right) - n$$

$\Rightarrow$ ϕ^3 im $d=6$

ϕ^4 im $d=4$

ϕ^6 im $d=3$ sind renormierbar

2) Spin $1/2$, $\quad [\psi] = \frac{d-1}{2}$

$\Rightarrow$ $[\bar\psi\psi]^2$ im $d=2$ (Gross-Neveu Modell)

$\bar\psi\psi\phi$ im $d=4$ (Yukawa)

$\bar\psi\psi\phi^2$ im $d=3$

3) Spin 1 (keine Eichtheorien): $[V_\mu] = \frac{d}{2}$

renormierbar nur im $d=2$ $\quad (S_{kin} \sim \int \partial V \partial V)$

z.B. mit $\bar\psi \gamma_\mu V_\mu \psi$ - WW

4) Spin $\geq \frac{3}{2}$: es gibt keine perturbativ renormierbaren Theorien

5) Eichtheorien, Spin 1 $\quad [A_\mu] = \frac{d-2}{2}$

$$F^a_{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} \quad \text{in} \quad d=4$$

mit WW $\quad \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu \psi$

$$\partial_\mu \phi A_\mu \phi \,, \quad \phi^2 A^2$$

aber, z.B., WW mit explizit anomal magnetischem Moment $\bar{\psi}\, \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi$ ist <u>nicht</u> renormierbar, $\delta(v)=1$

$\Rightarrow$ Keine physikalisch akzeptable (in Teilchenphysik) und perturbativ renormierbare Theorie ist in $d>4$ bekannt!